100

第三次作业

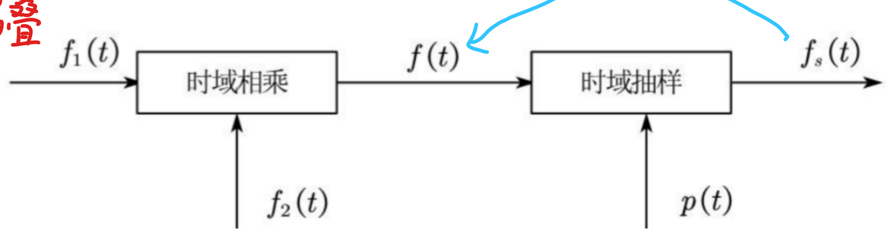
1. 系统如图 3-1 所示，已知信号 $f_1(t)=Sa(1000\pi t)$，$f_2(t)=Sa(2000\pi t)$，$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，$f(t)=f_1(t)f_2(t)$，$f_s(t)=f(t)p(t)$。（20 分）

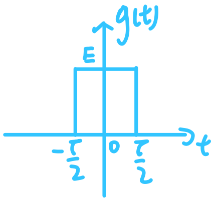
(1) 为从$f_s(t)$无失真恢复$f(t)$，求最大采样间隔T_{max}； 时域抽样 采样间隔的限制在频域

(2) 当$\underline{T=T_{max}}$时，画出$f_s(t)$的幅度谱$|F_s(\omega)|$。

恰好不混叠

恢复





提示：根据频域卷积定理求出$f(t)$的频谱，在此基础上根据采样定理，求最大采样间隔与采样信号的幅度谱。

解：记单矩形脉冲信号$g(t)$，$G(\omega)=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 由傅氏变换的对偶性质，有$\mathcal{F}[Sa(t)]=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1\\0, & |\omega|>1\end{cases}$

由尺度变换特性得 $\mathcal{F}[f_1(t)]=\begin{cases}\frac{1}{1000}, & |\omega|<1000\pi\\0, & 其它\end{cases}$ $\mathcal{F}[f_2(t)]=\begin{cases}\frac{1}{2000}, & |\omega|<2000\pi\\0, & 其它\end{cases}$

由$f(t)=f_1(t)f_2(t)$知 $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega}F_1(\Omega)d\Omega*\frac{d}{d\omega}F_2(\omega)$

$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1000}\frac{1}{2000}[r(t+1000\pi)-r(t-1000\pi)]*[\delta(t+2000\pi)-\delta(t-2000\pi)]$

$=\frac{1}{4\times10^6\pi}[r(t+3000\pi)-r(t+1000\pi)-r(t-1000\pi)+r(t-3000\pi)]$ ⇒最大值为$\frac{2000\pi}{4\times10^6\pi}$

-3 -1 1 3

可知$F(\omega)$只占据-3000π～$+3000\pi$范围，$\omega_m=3000\pi\ rad/s$，$f_m=1500Hz$

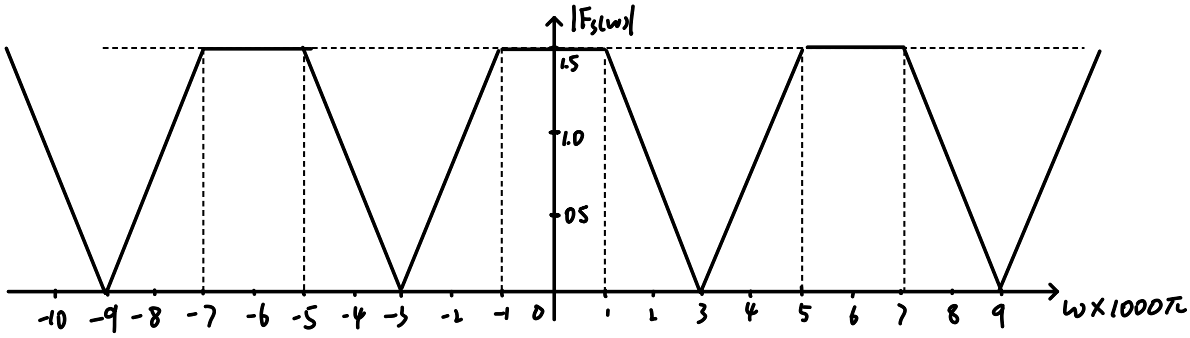
最大采样间隔 $T_{max}=\frac{1}{2f_m}=\frac{1}{3000}s$

(2)

$p(t)=\delta_T(t)$为周期单位冲激序列，其复傅里叶级数 $P_n=\frac{1}{T_s}\mathcal{F}[\delta(t)]\Big|_{\omega=n\omega_s}=\frac{1}{T_s}$

故冲激采样信号 $F_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega-n\omega_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$ 代入$\frac{1}{T_s}=3000\ Hz$，$\omega_s=6000\pi\ rad/s$

⇒ $F_s(\omega)=3000F(\omega-6000\pi n)$，最大值为 $\frac{1}{4\times10^6\pi}\times3000\times2000\pi=1.5$，图如下.



2. 根据以下给出的序列，判断：序列是否是周期性的？如果是周期序列，试确定其周期，并按照课件上的 DFS 公式写出该离散周期序列的 DFS 数学表达式。（20 分）

(1) $x(n) = A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$

(2) $x(n) = e^{j\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}$

离散周期序列 $x(n) \longrightarrow$ DFS系数 $X(k\Omega_0)$

$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}, \ k=1,2,\cdots,N$

$IDFS[X(k\Omega_0)] = x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$

提示：对复指数序列，可以自行假设一个整数周期，代入周期序列需要满足的公式，去判断是否存在合适的整数。

解：(1) $x(n) = A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$，$\Omega_0 = \frac{3\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{14}{3}$ 为有理数，故 $x(n)$ 为周期序列

$N = k\frac{2\pi}{\Omega} \in Z \Rightarrow k=3, N=14$，真正的 $\frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{7}$

DFS公式中的 N 与 Ω_0 满足 $N\Omega_0 = 2\pi$

类比：$T_s\omega_s = 2\pi$

$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{14}\sum_{n=0}^{13} A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)e^{-jk\overset{\frac{\pi}{7}}{\cancel{\frac{3\pi}{7}}}n}, \ k=0,1,2,\cdots,13$

(2) $x(n) = e^{j\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}$，假设其为周期 N 的序列。$x(n+N) = x(n)$

有 $e^{j\left(\frac{n}{8}-\pi\right)+j\frac{N}{8}} = e^{j\left(\frac{n}{8}-\pi\right)} \Rightarrow e^{j\frac{N}{8}} = 1$ 由于 $e^{j\theta}$ 周期为 $2k\pi$，

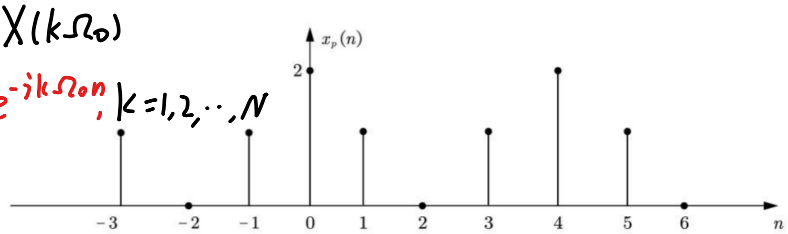
故 $N = 16k\pi$，不存在正整数 N，假设不成立 $\Rightarrow x(n)$ 为非周期序列

3. 题图 3-2 所示周期序列 $x_p(n)$，周期 $N=4$，求 $DFS[x_p(n)]$。（20 分）

周期序列 $x(n) \longrightarrow$ DFS系数 $X(k\Omega_0)$

$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}, \ k=1,2,\cdots,N$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$



题图 3-2

提示：根据 DFS 定义求解（注意按照课件上给出的 DFS 形式），$x_p(1) = 1$。

解：$DFS[x_p(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_p(n)e^{-jk\frac{\pi}{2}n}, \quad k=0,1,2,3$

$= \frac{1}{4}\left[2\times 1 + 1\times e^{-jk\frac{\pi}{2}} + 0 + 1\times e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[2 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{jk\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[2 + 2\cos\frac{k}{2}\pi\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{k}{2}\pi\right)\right] \quad k=0,1,2,3$

$= \begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{1}{2}, & k=1 \\ 0, & k=2 \\ \frac{1}{2}, & k=3 \end{cases}$

先对n累加求和

后对k分类讨论

4. 若已知有限长序列 $x(n)$ 如下式

DFT: $X(k)=W_N^{nk}x(n)$

IDFT: $x(n)=W_N^{-nk}X(k)$

$$x(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ -1 & (n=1)\\ 1 & (n=2)\\ 2 & (n=3)\end{cases}$$

$W^1=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

用 **DFT 的矩阵形式**求 $\mathrm{DFT}[x(n)]=X(k)$，再由所得结果求 $\mathrm{IDFT}[X(k)]=x(n)$，验证你的计算是正确的（**须有详细的求解过程，写出矩阵中每个元素的取值**）。（20 分）

记忆：$W_2=-1$

$W_4=-j$

解：记 $x(n)$ 为长度 $N=4$ 的序列，$W_4=e^{-j\frac{2\pi}{N}}=e^{-j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i$

公式：$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_N^{nk}$，$k=0,1,2,3$

$x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\boxed{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{3}X(k)W_N^{-nk}$，$k=0,1,2,3$

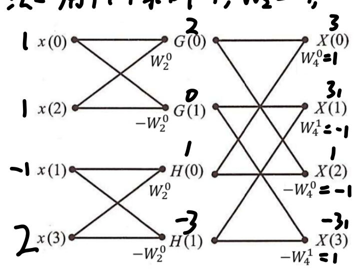
先计算 $X(k)$

$$X(k)=\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3i\\1\\-3i\end{bmatrix}$$

再计算 $x(n)$

$$x(n)=\begin{bmatrix}x(1)\\x(2)\\x(3)\\x(4)\end{bmatrix}=\boxed{\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^{-1}&W^{-2}&W^{-3}\\W^0&W^{-2}&W^{-4}&W^{-6}\\W^0&W^{-3}&W^{-6}&W^{-9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3i\\1\\-3i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

法二：用 FFT 求 DFT，$W_2=-1$，



$\Rightarrow X(k)=\{3,3i,1,-3i\}$

结果相同

5. 考虑如题图 3-3 所示的$N=4$ 有限长序列$x(n)$，**求解以下卷积和，要求写出求解过程，（若仅给出结果的序列图形而无相应的解释，则不计分）**：（20 分）

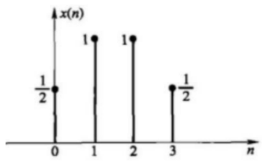
(1) $x(n)$与$x(n)$的线性卷积，画出所得序列；

(2) $x(n)$与$x(n)$的 4 点圆卷积，画出所得序列；

(3) $x(n)$与$x(n)$的 10 点圆卷积，画出所得序列；

提示：根据圆卷积的定义，N点圆卷积对应的就是定义式中累加项最大项数N的取值。求解 10 点圆卷积，需要为序列$x(n)$补 6 个零，替换变量后得到的$x(m)$补零位置在原序列样值之后（右侧），相应地，$x((n-m))_{10}R_{10}(m)$补零的位置在已知样值之前（左侧）。

(4) 欲使$x(n)$与$x(n)$的圆卷积和线性卷积相同，求长度 L 的最小值。



题图 3-3 有限长序列$x(n)$

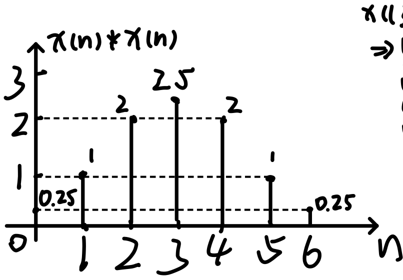
有限长序列
- 线性卷积 $x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$ N_1 N_2 N_1+N_2-1
- 圆周卷积 $x(n)\circledast h(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h((n-m))_N\right]R_N(n)$

解：已知 $x(n)=\frac{1}{2}\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\frac{1}{2}\delta(n-3)$

(1) 由卷积和的分配律知

$x(n)$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$			
$x(n)$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$			
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			
		$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$		
			$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	
				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x(n)*x(n)=\{0.25,1,2,2.5,2,1,0.25\}$



(2) $x(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2}\}$

$x((0-m))_4R_4(m)=\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ 1\}$

$x((1-m))_4R_4(m)=\{1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\}$

$x((2-m))_4R_4(m)=\{1\ 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\}$

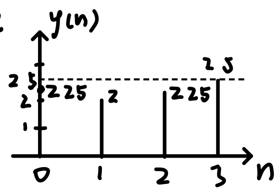
$x((3-m))_4R_4(m)=\{\frac{1}{2}\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow y(0)=0.25+0.5+1+0.5=2.25$

$y(1)=0.5+0.5+0.5+0.5=2$

$y(2)=0.5+1+0.5+0.25=2.25$

$y(3)=0.25+1+1+0.25=2.5$



(3) $x(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},0,0,0,0,0,0\}$

$x((0-m))_{10}R_{10}(m)=\{\frac{1}{2},0,0,0,0,0,0,\frac{1}{2},1,1\}$

$x((1-m))_{10}R_{10}(m)=\{1,\frac{1}{2},\cdots$

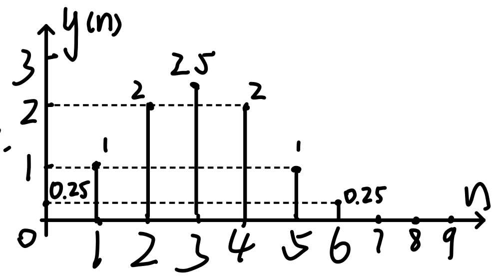
$x((2-m))_{10}R_{10}(m)=\{1,1,\frac{1}{2},\cdots$

$x((3-m))_{10}R_{10}(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},\cdots$

$x((4-m))_{10}R_{10}(m)=\{0,\frac{1}{2},1,1,\cdots$

$x((5-m))_{10}R_{10}(m)=\{0,0,\frac{1}{2},1,\cdots$

$x((6-m))_{10}R_{10}(m)=\{0,0,0,\frac{1}{2},\cdots$



$y(0)=\frac{1}{4},\ y(1)=1,\ y(2)=2,\ y(3)=2.5,\ y(4)=2,\ y(5)=1,\ y(6)=\frac{1}{4},$

$y(7)=y(8)=y(9)=0$

$\Rightarrow y=\{0.25,1,2,2.5,2,1,0.25,0,0,0\}$

观察得$x(n)$与$x(n)$的10点圆卷积和线性卷积相同

(4) 观察(3)中y的求解过程，要L点圆卷积与线性卷积相同，
只需保证$y(0)=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ 至少添3个0，$L=7$，下验证

$x(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},0,0,0\}$

$x((0-m))_7R_7(m)=\{\frac{1}{2},0,0,0,\frac{1}{2},1,1\}$

$x((1-m))_7R_7(m)=\{1,\frac{1}{2},0,0,0,\frac{1}{2},1\}$

$x((2-m))_7R_7(m)=\{1,1,\frac{1}{2},0,\cdots$

$x((3-m))_7R_7(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},\cdots$

$x((4-m))_7R_7(m)=\{0,\frac{1}{2},1,1,\cdots$

$x((5-m))_7R_7(m)=\{0,0,\frac{1}{2},1,\cdots$

$x((6-m))_7R_7(m)=\{0,0,0,\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2}\}$

显然，y的表达式与(3)中一致，

$y=\{0.25,1,2,2.5,2,1,0.25\}$

综上，$L\geq 7$

法二 由性质可知，当L满足$L\geq N+N-1$时，
$x(n)$与$x(n)$的L点圆卷积和线性卷积相同
解得$L\geq 7$