第四次作业

2024 年 10 月 23 日

1. 求下列微分方程描述的系统单位冲激响应$h(t)$和单位阶跃响应$c(t)$，方法不限，要求写出详细步骤和解释。（20 分，第一小题 6 分，后面两小题各 7 分）

(1) $\frac{d}{dt}y(t)+3y(t)=2\frac{d}{dt}x(t)$

(2) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+x(t)$

(3) $\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t)+3\frac{d}{dt}x(t)+3x(t)$

解. $h(t)$与$c(t)$定义为零状态条件下，$\delta(t)$与$u(t)$激励系统得到的输出

(1) $y'(t)+3y(t)=2x'(t)$

法一：复频域法：

拉氏变换. $sY(s)+3Y(s)=2sX(s)$，故 $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s}{s+3}$

① $\delta(t)$作用下，$X(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]=1$，$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{2s}{s+3}=2-6\frac{1}{s+3}$

从而 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=2\delta(t)-6e^{-3t}$, $t\geq 0$

② $u(t)$作用下，由于$u(t)=\int_0^t\delta(\tau)d\tau$以及LTI系统的线性性，$c(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau$ ①

$c(t)=\int_{0^-}^t[2\delta(\tau)-6e^{-3\tau}]d\tau=2-6\int_0^t e^{-3\tau}d\tau=2+2e^{-3t}-2=2e^{-3t}$, $t\geq 0$

注意对$\delta(t)$的积分不能直接没掉

在系统稳定前提下 $H(\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$

法二：频域法.

傅氏变换 $j\omega Y(\omega)+3Y(\omega)=2j\omega X(\omega)$ 故 $H(\omega)=2-6\frac{1}{j\omega+3}$

① $\delta(t)$作用下，$X(\omega)=\mathcal{F}[\delta(t)]=1$，$Y(\omega)=2-6\frac{1}{j\omega+3}$，由于 $\left.\begin{array}{l} u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega) \\ e^{-at}u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{j\omega+a}\end{array}\right\}$ 都需要记忆

知此时 $h(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=2\delta(t)-6e^{-3t}u(t)$

② $u(t)$作用下，$Y(\omega)=G(\omega)X(\omega)=\left[2-6\frac{1}{j\omega+3}\right]\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{2j\omega+6-6}{j\omega+3}\cdot\frac{1}{j\omega}=\frac{2}{j\omega+3}$

从而 $c(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=2e^{-3t}u(t)$

(2) $y''(t)+y'(t)+y(t)=x'(t)+x(t)$

拉氏变换：$s^2Y(s)+sY(s)+Y(s)=sX(s)+X(s)\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+1}{s^2+s+1}$

① $\delta(t)$作用下，$X(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]=1$，$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{s+\frac{1}{2}+(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

由于 $\sin\omega t\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$，$\cos\omega t\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{s}{s^2+\omega^2}$，故 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$, $t\geq 0$

② $u(t)$作用下，由(1)由①得. $c(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)dt+\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)dt$

计算上式. 令 $A=\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)dt$，$B=\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)dt$，$c(t)=A+\frac{\sqrt{3}}{3}B$

分部积分. $A=-2\int_0^t\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)de^{-\frac{1}{2}t}=2-2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{1}{2}t}-\sqrt{3}\underbrace{\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)dt}_{B}$

$=2-2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{1}{2}t}+2\sqrt{3}\left[e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)-\frac{\sqrt{3}}{2}A\right]$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

故 $c(t)=A+\frac{\sqrt{3}}{3}B=A-\frac{A-2+2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{1}{2}t}}{3}=1-\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{1}{2}t}$, $t\geq 0$

(3) $y'(t)+2y(t)=x''(t)+3x'(t)+3x(t)$

拉氏变换. $sY(s)+2Y(s)=s^2X(s)+3sX(s)+3X(s)$

$\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^2+3s+3}{s+2}=\frac{(s+2)(s+1)+1}{s+2}=s+1+\frac{1}{s+2}$

① $\delta(t)$作用下, $Y(s)=G(s)\mathcal{L}[\delta(t)]=s+1+\frac{1}{s+2}$

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\delta'(t)+\delta(t)+e^{-2t}\quad t\geq0$

② $u(t)$作用下, 由(1)由①得: $c(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau=\delta(t)+1+\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\quad t\geq0$ ✓

2. 用计算机对测量的离散数据$x(n)$进行平均处理，当收到一个测量数据后，计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均，要求使用时域分析、频域分析这两种方法，求解这一运算过程的频率响应$H(\Omega)$，注意每种方法都要写出详细步骤和对应的解释。（20 分，每个方法各 10 分）

提示：前三次数据意味着$x(n-1)$、$x(n-2)$和$x(n-3)$，四个数据平均后得到输出$y(n)$。时域分析法令 $x(n)=e^{j\Omega n}$可求 $y(n)$；频域分析法通过对系统差分方程求 Z 变换的方式，代入$z=e^{j\Omega}$得到频率响应。

DTFT $X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$

$H(\Omega)=\text{DTFT}[h(n)]=\frac{Y(n)}{X(n)}=H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$

当 $x(t)=e^{j\omega t}$ 时, $H(\omega)=\frac{y(t)}{x(t)}$

当 $x(n)=e^{j\Omega n}$ 时, $H(\Omega)=\frac{y(n)}{x(n)}$

解:题意为 输入$x(n)$, 输出 $y(n)=\frac{1}{4}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)]$

(1) 时域法: 由于$H(\Omega)$为系统的性质,与输入的具体形式无关

假设输入$x(n)=e^{j\Omega n}$.

$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)e^{j\Omega(n-k)}=\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)e^{-j\Omega k}\right]e^{j\Omega n}=H(\Omega)e^{j\Omega n}=H(\Omega)x(n)$

从而 $H(\Omega)=\frac{y(n)}{x(n)}=\frac{x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)}{4x(n)}=\frac{1+e^{-j\Omega}+e^{-2j\Omega}+e^{-3j\Omega}}{4}$

(2) 频域法: 对方程求Z变换,有

$Y(z)=\frac{1}{4}[X(z)+X(z)z^{-1}+X(z)z^{-2}+X(z)z^{-3}]=\frac{X(z)}{4}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})=\frac{X(z)}{4}\cdot\frac{1-z^{-4}}{1-z}$

代入$z=e^{j\Omega}$, 有 $H(e^{j\Omega})=\frac{1+e^{-j\Omega}+e^{-2j\Omega}+e^{-3j\Omega}}{4}=0.25\frac{1-e^{-j4\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}$

或直接对方程进行DTFT变换,有(根据DTFT平移性质)

$Y(\Omega)=\frac{1}{4}X(\Omega)[1+e^{-j\Omega}+e^{-2j\Omega}+e^{-3j\Omega}]=\frac{X(\Omega)}{4}\cdot\frac{1-e^{-j4\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}$

也能得到同样的结果

☆时域平移	$x(n-n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
时间翻转	$x(-n)$	$X(-\Omega)$
☆频域平移	$e^{j\Omega_0 n}x(n)$	$X(\Omega-\Omega_0)$

可化简为 $H(\Omega)=\frac{1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}}{4}$

$=e^{-j\frac{3}{2}\Omega}\cos(\Omega)\cos(\frac{1}{2}\Omega)$

3. 若系统函数$H(\omega)=H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$，激励为周期信号$x(t)=\sin t+\sin(3t)$，要求回答以下问题。（20 分，每小题 5 分）

(1) 求出响应$y(t)$；

(2) 分别画出$x(t)$、$y(t)$的波形；

(3) 写出信号无失真传输需要满足的条件（时域条件和频域条件）；

(4) 讨论信号经该系统传输是否引起失真。

$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$

$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega+a}$

解：(1) $e^{-j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$, $e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$, 从而 $\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j}[\pi\delta(\omega-\omega_0)-\pi\delta(\omega+\omega_0)]$

$=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

由 $x(t)=\sin t+\sin(3t)$

有 $X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]=j\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)+\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$

$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=j\pi\frac{1}{j\omega+1}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)+\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$ 筛选性：$f(\omega)\delta(\omega-\omega_0)=f(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)$

$=j\pi\left[\frac{\delta(\omega+1)}{1-j}-\frac{\delta(\omega-1)}{1+j}+\frac{\delta(\omega+3)}{1-3j}-\frac{\delta(\omega-3)}{1+3j}\right]$ 利用 $e^{-j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$y(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\frac{j}{2}\left[\frac{e^{-jt}}{1-j}-\frac{e^{jt}}{1+j}+\frac{e^{-j3t}}{1-3j}-\frac{e^{j3t}}{1+3j}\right]$

$=\frac{j-1}{4}e^{-jt}-\frac{j+1}{4}e^{jt}+\frac{j-3}{20}e^{-j3t}-\frac{j+3}{20}e^{j3t}$

$=\frac{j-1}{4}(\cos t-j\sin t)-\frac{j+1}{4}(\cos t+j\sin t)+\frac{j-3}{20}(\cos 3t-j\sin 3t)-\frac{j+3}{20}(\cos 3t+j\sin 3t)$

$=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t-\frac{3}{10}\cos 3t+\frac{1}{10}\sin 3t$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right]+\frac{\sqrt{10}}{10}\left[\sin 3t\,\frac{\sqrt{10}}{10}-\cos 3t\,\frac{3\sqrt{10}}{10}\right]$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t-45^\circ)+\frac{\sqrt{10}}{10}\sin(3t-\theta)$ 其中 $\theta=\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\approx 71.565^\circ$

$\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t-45^\circ)+\frac{\sqrt{10}}{10}\sin(3t-71.565^\circ)$

$\theta=\arctan\omega$

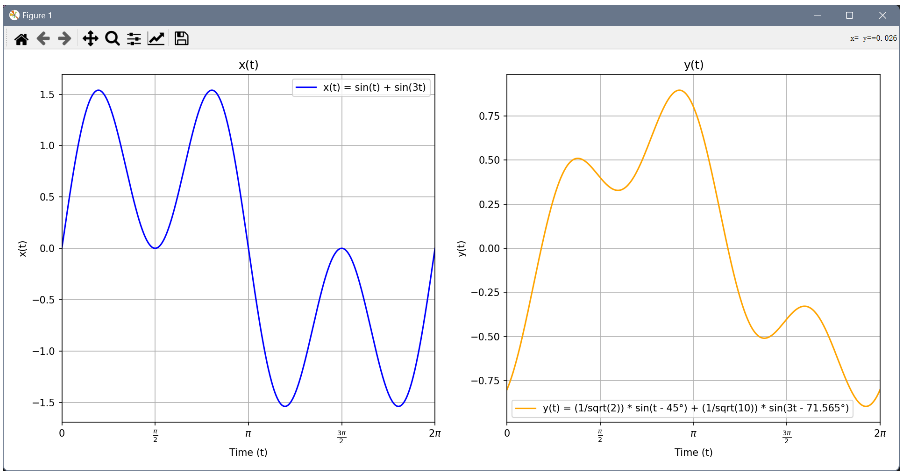
★法二. 用"系统"的视角看这一题. 由 $H(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$ 知 $|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$, $\angle H(j\omega)=-\arctan\omega$

对于 $\sin t$, $\omega=1$, $|H(\omega)|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle H(\omega)=-\arctan 1=-\frac{\pi}{4}$

对于 $\sin 3t$, $\omega=3$, $|H(\omega)|=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\angle H(\omega)=-\arctan 3$

$\Rightarrow y(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{10}}{10}\sin(3t-\arctan 3)$

(2)



(3) 无失真传输的 ①时域条件 $y(t)=Kx(t-t_0)$

②频域条件 $H(\omega)=Ke^{-j\omega t_0}$,

$|H(\omega)|=K$, $\varphi_h(\omega)=-\omega t_0$

(4) 由图可知，信号$y(t)$与$x(t)$不满足无失真传输的条件

引起了失真

4. 已知理想低通的系统函数表示式为

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & (|\omega|<\frac{2\pi}{\tau})\\ 0 & (|\omega|>\frac{2\pi}{\tau})\end{cases}$$

而激励信号的傅里叶变换式为

$$X(\omega)=\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

求响应的时间函数表示式 $y(t)$。（20 分）

提示：利用时域卷积定理，所得结果包含取样函数的积分形式，可用正弦积分函数表示。

$Sa(x)$ 偶函数 $\int_{-\infty}^{0} Sa(x)dx=\frac{\pi}{2}$

$Si(y)=\int_0^y \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^y Sa(x)dx$

奇函数

定积分换元 ①换变量 ②换微分 ③换上下限

矩形脉冲信号

解. 已知 $g(t)=\begin{cases}E & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$, $G(t)=\mathcal{F}[g(t)]=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$, $\mathcal{F}[Sa(t)]=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

令 $\tau=2$, $E=\frac{1}{2}$, 利用对偶性质

故 $h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]=\frac{2}{\tau}Sa(\frac{2\pi}{\tau}t)$, $x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]=\begin{cases}1 & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$

需要求 $y(t)$, 已有 $Y(\omega)=\mathcal{F}[y(t)]=H(\omega)X(\omega)$ 知

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{t}h(w)dw*\frac{d}{dt}x(t)=\frac{2}{\tau}\int_{-\infty}^{t}Sa(\frac{2\pi}{\tau}\xi)d\xi*[\delta(t+\frac{\tau}{2})-\delta(t-\frac{\tau}{2})]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t}Sa(\frac{2\pi}{\tau}\xi)d(\frac{2\pi}{\tau}\xi)*[\delta(t+\frac{\tau}{2})-\delta(t-\frac{\tau}{2})]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\frac{2\pi t}{\tau}}Sa(x)dx*[\delta(t+\frac{\tau}{2})-\delta(t-\frac{\tau}{2})]$$

$$\int_{-\infty}^{0}Sa(x)dx+\int_{0}^{\frac{2\pi t}{\tau}}Sa(x)dx=\frac{\pi}{2}+Si(\frac{2\pi t}{\tau})$$

$$=[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\frac{2\pi t}{\tau})]*[\delta(t+\frac{\tau}{2})-\delta(t-\frac{\tau}{2})]=\frac{1}{\pi}[Si(\frac{2\pi t}{\tau}+\pi)-Si(\frac{2\pi t}{\tau}-\pi)]$$

5. 求解以下关于滤波器的问题，注意区分模拟和数字角频率。（20 分，每小题 10 分）

(1) 巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当$\omega_1=1000$rad/s 时，衰减不大于 3dB；当$\omega_2=5000$rad/s 时，衰减至少为 20dB。求此滤波器的实际系统传递函数$H(s)$。

解 由题可知 $w_p=1000$ rad/s 时 $\alpha_p=3dB$, $w_s=5000$ rad/s 时 $\alpha_s=20dB$. 代入公式

$$n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg(\frac{w_s}{w_c})}=\frac{\lg\sqrt{10^2-1}}{\lg 5}\approx1.428$$

取 $n=2$, 查表得巴特沃思多项式 $\bar{s}^2+\sqrt{2}\bar{s}+1$

$H(\bar{s})=\frac{1}{\bar{s}^2+\sqrt{2}\bar{s}+1}$, 反归一化·令 $s=\bar{s}w_c=10^3\bar{s}$, 代入得 $H(s)=\frac{10^6}{s^2+\sqrt{2}\times10^3 s+10^6}$

(2) 要求利用巴特沃思滤波特性，通过模拟滤波器设计数字滤波器，考虑 $T=1$s，给定指标：-3 dB 截止角频率 $\Omega_c=0.5\pi$ rad，通带内 $\Omega_p=0.4\pi$ rad 处起伏不超过-1 dB，阻带内$\Omega_s=0.8\pi$ rad 处衰减不大于-20dB。如用冲激响应不变法，最少需要多少阶？如用双线性变换法，最少需要多少阶？

$n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\frac{w_s}{w_c}}$

$\alpha=10\lg[1+(\frac{w}{w_c})^{2n}]$

$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

$w=\frac{2}{T}\tan(\frac{\Omega}{2})$

$\Omega=wT$

$\Omega_p=0.4\pi$ rad, $\alpha_p=1dB$, $\Omega_c=0.5\pi$ rad, $\alpha_c=3dB$, $\Omega_s=0.8\pi$ rad. $\alpha_s=20$ dB

解 ①冲激响应不变法

$w_p=\frac{\Omega_p}{T}=0.4\pi$ rad/s. $w_c=\frac{\Omega_c}{T}=0.5\pi$ rad/s. $w_s=\frac{\Omega_s}{T}=0.8\pi$ rad/s

$$n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\frac{w_s}{w_c}}=\frac{\lg\sqrt{10^2-1}}{\lg(\frac{8}{5})}=4.89$$

考虑在 $w_p=0.4\pi$ rad/s 时 $\alpha_p\leq1dB$ 即 $-20\lg\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{w_p}{w_c})^{2n}}}\leq1\Rightarrow10\lg\sqrt{1+(\frac{w_p}{w_c})^{2n}}\leq1$

解得 $n\geq3.03\Rightarrow$ 用冲激响应法最少要5阶

②双线性变换法

$w_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p}{2}=1.453$ rad/s $w_c=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_c}{2}=2$ rad/s. $w_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_s}{2}=6.155$ rad/s

$$n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\frac{w_s}{w_c}}=\frac{\lg\sqrt{10^2-1}}{\lg(\frac{6.155}{2})}=2.044$$

考虑在 $w_p=1.453$ rad/s 时 $\alpha_p\leq1dB$ 即 $-20\lg\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{w_p}{w_c})^{2n}}}\leq1\Rightarrow10\lg\sqrt{1+(\frac{w_p}{w_c})^{2n}}\leq1$

解得 $n\geq2.115$ 最小阶数为3阶