

第四次作业

2024 年 10 月 23 日

1. 求下列微分方程描述的系统单位冲激响应 $h(t)$ 和单位阶跃响应 $c(t)$ ，方法不限，要求写出详细步骤和解释。(20 分，第一小题 6 分，后面两小题各 7 分)

$$(1) \frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t)$$

$$(2) \frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + x(t)$$

$$(3) \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) + 3x(t)$$

提示：冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $c(t)$ 定义为零状态条件下，分别以单位冲激信号 $\delta(t)$ 和单位阶跃信号 $u(t)$ 激励系统得到的输出。根据 $\delta(t)$ 的定义可知， $\delta(t) = 0, t > 0$ ，因而 $h(t)$ 的特解为零，齐次解即完全解，基于系统特征方程求解即可，也可以使用傅里叶变换等方法求解。

2. 用计算机对测量的离散数据 $x(n)$ 进行平均处理，当收到一个测量数据后，计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均，要求使用时域分析、频域分析这两种方法，求解这一运算过程的频率响应 $H(\Omega)$ ，注意每种方法都要写出详细步骤和对应的解释。

(20 分，每个方法各 10 分)

提示：前三次数据意味着 $x(n-1)$ 、 $x(n-2)$ 和 $x(n-3)$ ，四个数据平均后得到输出 $y(n)$ 。时域分析法令 $x(n) = e^{j\Omega n}$ 可求 $y(n)$ ；频域分析法通过对系统差分方程求 Z 变换的方式，代入 $z = e^{j\Omega}$ 得到频率响应。

3. 若系统函数 $H(\omega) = H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$ ，激励为周期信号 $x(t) = \sin t + \sin(3t)$ ，要求回答以下问题。(20 分，每小题 5 分)

(1) 求出响应 $y(t)$ ；

(2) 分别画出 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的波形；

(3) 写出信号无失真传输需要满足的条件（时域条件和频域条件）；

(4) 讨论信号经该系统传输是否引起失真。

提示：基于傅里叶变换、频率响应和无失真传输的相应知识求解。

4. 已知理想低通的系统函数表示式为

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < \frac{2\pi}{\tau}) \\ 0 & (|\omega| > \frac{2\pi}{\tau}) \end{cases}$$

而激励信号的傅里叶变换式为

$$X(\omega) = \tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

求响应的时域函数表示式 $y(t)$ 。(20 分)

提示：利用时域卷积定理，所得结果包含取样函数的积分形式，可用正弦积分函数表示。

5. 求解以下关于滤波器的问题，注意区分模拟和数字角频率。(20 分，每小题 10 分)

(1) 巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当 $\omega_1 = 1000\text{rad/s}$ 时，衰减不大于 3dB；当 $\omega_2 = 5000\text{rad/s}$ 时，衰减至少为 20dB。求此滤波器的实际系统传递函数 $H(s)$ 。

提示：需要查巴特沃思多项式的表，教材和课程讲义上都有该表格；实际系统传递函数需经过反归一化处理得到。

(2) 要求利用巴特沃思滤波特性，通过模拟滤波器设计数字滤波器，考虑 $T = 1\text{s}$ ，给定指标：-3 dB 截止角频率 $\Omega_c = 0.5\pi \text{ rad}$ ，通带内 $\Omega_p = 0.4\pi \text{ rad}$ 处起伏不超过 -1 dB，阻带内 $\Omega_s = 0.8\pi \text{ rad}$ 处衰减不大于 -20dB。如用冲激响应不变法，最少需要多少阶？如用双线性变换法，最少需要多少阶？

提示：注意给定的角频率都是数字角频率，需要先将数字角频率变回模拟角频率，使用巴特沃思滤波器的幅频特性公式计算阶数，查表找到阶数对应的形式。