信号分析与处理－作业3

1. $f(t)=f_1(t)f_2(t)=Sa(1000\pi t)Sa(2000\pi t)$，又知 $f_s(t)=f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

对 $f_s(t)$ 进行傅里叶变换，可知时域相乘变换为频域卷积、$f(t)\xrightarrow{F}F(\omega)$，$p(t)\xrightarrow{F}\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot F(\omega)*\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_0)$

由于需要从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$ 需要 $\omega_0\geq 2\omega_m$，$\omega_m$ 为 $F(\omega)$ 的带限范围，题目求最大采样间隔 $T_{max}$，则求 $\omega_0=2\omega_m$

又知 $f(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$ 则 $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot F_1(\omega)*F_2(\omega)$

已知 $x(t)=\begin{cases}\frac{1}{\tau_1} & |t|\leq\frac{\tau_1}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau_1}{2}\end{cases}$ 其傅里叶变换为 $Sa(\frac{\tau_1}{2}\omega)$，由对称性可知：

$$f_1(t)=Sa(1000\pi t)\xrightarrow{F}F_1(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{1000} & |\omega|\leq 1000\pi\\ 0 & |\omega|>1000\pi\end{cases}=\frac{1}{1000}(u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi))$$

$$f_2(t)=Sa(2000\pi t)\xrightarrow{F}F_2(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{2000} & |\omega|\leq 2000\pi\\ 0 & |\omega|>2000\pi\end{cases}=\frac{1}{2000}(u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi))$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{dF_1(\omega)}{d\omega}*\int_{-\infty}^{\omega}F_2(\lambda)d\lambda \quad \underline{令\omega_1=1000\pi,\omega_2=2000\pi}$$

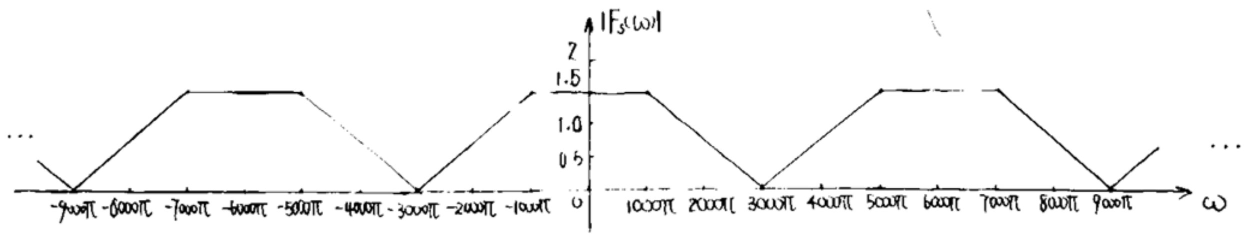
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1000}(\delta(\tau+\omega_1)-\delta(\tau-\omega_1))\frac{1}{2000}(r(\omega+\omega_2-\tau)-r(\omega-\omega_2-\tau))d\tau$$

$$=\frac{1}{4\pi\times10^6}\left(r(\omega+\omega_2+\omega_1)-r(\omega-\omega_2+\omega_1)-r(\omega+\omega_2-\omega_1)+r(\omega-\omega_2-\omega_1)\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\times10^6}\left(r(\omega+3000\pi)-r(\omega-1000\pi)-r(\omega+1000\pi)+r(\omega-3000\pi)\right)$$

而 $F_s(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_0)$，可知 $\omega_M=3000\pi$，故 $\omega_0=2\omega_m=6000\pi$，则 $T_{max}=\frac{1}{3000}s$

1.(2) 由于 $F_s(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_0)$，可画图，幅值可算 $\frac{1}{4\pi\times10^6}\times2000\pi\times3000=\frac{3}{2}$




2.(1) $x(n)=A\cos(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8})$，每隔 $\frac{3\pi}{7}$ 采样，$\frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{7}}=\frac{14k}{3}$，其为有理数（k为整数），故其为周期序列

k=3时，最小周期为14

2(2) $x(n)=e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}=\cos(\frac{1}{8}n-\pi)+j\sin(\frac{1}{8}n-\pi)$

要想 $x(n)$ 为周期序列，则其实部、虚部均为周期序列．

二者均为 $\frac{2K\pi}{\frac{1}{8}}=16K\pi$．（$K$为整数）．为无理数．故为非周期序列．

3. $x_p(n)$．周期 $N=4$，$\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{1}{2}\pi$

$$X_p(k\Omega_0)=DFS(x_p(n))=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)\cdot e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x_p(n)e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$=\frac{1}{4}(2\cdot e^0+e^{-jk\frac{\pi}{2}}+0+e^{-jk\frac{3\pi}{2}})=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}k)+\frac{1}{2}$$

亦为周期序列，周期为4

4. $X_{p1}(k)$表示当周期为$N$时的DFS系数，$X_{p2}(k)$表示周期为$2N$的DFS系数．令$\Omega_1=\frac{2\pi}{N}$，$\Omega_2=\frac{\pi}{N}$

$$X_{p1}(k)=X_{p1}(k\Omega_1)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-jk\Omega_1 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X_{p2}(k)=X_{p2}(k\Omega_2)=\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{2N-1}x_p(n)e^{-jk\Omega_2 n}=\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{2N-1}x_p(n)e^{-jk\frac{\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\frac{k}{2}\frac{2\pi}{N}\cdot n}+\frac{1}{2N}\sum_{n=N}^{2N-1}x_p(n)e^{-jk\frac{\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{2}X_{p1}(\frac{k}{2}\Omega_1)+\frac{1}{2N}\sum_{n=N}^{2N-1}x_p(n)e^{-jk\frac{\pi}{N}n}\quad\cdots①$$

而 $$\frac{1}{2N}\sum_{n=N}^{2N-1}x_p(n)e^{-jk\frac{\pi}{N}n}=\frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{N-1}x_p(m+N)e^{-j\frac{k}{2}\frac{2\pi}{N}(m+N)}=\frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{N-1}x_p(m)\cdot e^{-j\frac{k}{2}\frac{2\pi}{N}m}\cdot e^{-jk\pi}$$

故 ①式 $$=\frac{1}{2}X_{p1}(\frac{k}{2}\Omega_1)+\frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{N-1}x_p(m)\cdot e^{-j\frac{k}{2}\frac{2\pi}{N}m}\cdot e^{-jk\pi}=\frac{1}{2}X_{p1}(\frac{k}{2}\Omega_1)+\frac{1}{2}X_{p1}(\frac{k}{2}\Omega_1)\cdot e^{-jk\pi}$$

$$=\frac{1}{2}X_{p1}(\frac{k}{2})\left(1+e^{-jk\pi}\right)$$

或 $$=\begin{cases}X_{p1}(\frac{k}{2}) & k\text{为偶数}\\ 0 & k\text{为奇数}\end{cases}$$