哈尔滨工业大学（深圳）2021年1学期

信号分析与处理试题模拟题（A）

本试卷仅用于螨国内部交流，切勿外传

一、简答题（5*4’）

1、简述系统的**可逆性**和**稳定性**的定义

2、请给出无失真传输的定义，写出无失真传输的频率特性函数

3、请简述DTFT和Z变换的关系

4、请简述如何利用系统函数得到离散系统的频率响应，并给出此时系统应该满足的条件

5、已知时域有限信号`f(t)`的频谱为`F(w)`，在频域对`F(w)`进行采样，得到的时域信号会如何变化?

1、可逆性：若系统的输入和输出是一一对应，则称系统具有可逆性

稳定性：对于有限的输入信号，系统的输出是有限的，则称系统稳定

2、无失真定义：对于一定输入，系统的输出信号幅度等幅改变且每处移动相同相位

$H(jw) = Ke^{jw_0}$

幅度特性：K　相位特性 $\varphi = w_0 t$

3、在单位圆上的z变换为DTFT，即 $X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = X(\Omega)$

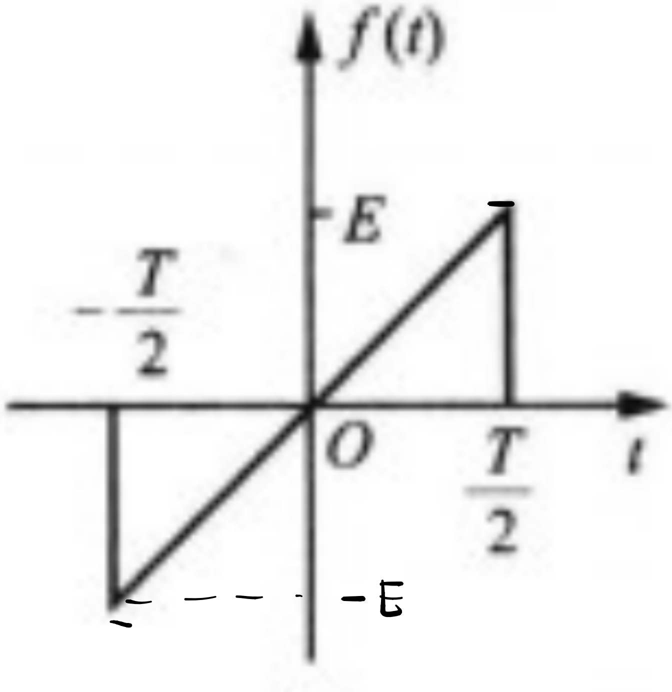
4、已知系统的系统函数为$H(z)$，则当系统极点都位于单位圆内部时

系统 $H(\Omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$

5、以w_s进行频域采样，则到时域信号 $\frac{1}{w_s}\sum f(t-nT_s)$

其中 $w_s = \frac{2\pi}{T}$

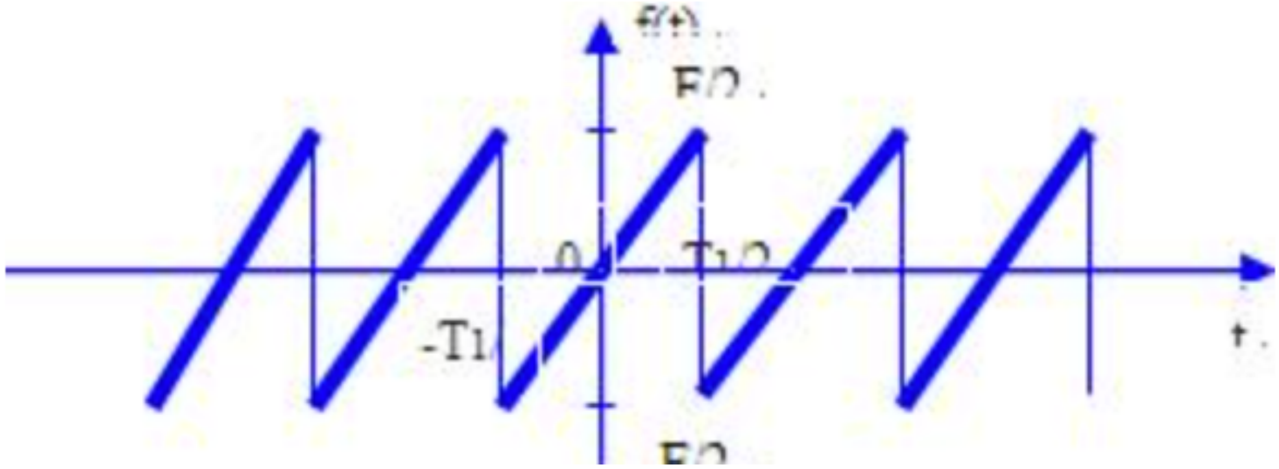
二、已知图a所示的函数



(a)

（1）求该函数`f(t)`的傅立叶变换

（2）由该函数得到周期锯齿波函数（下图）， 求其傅立叶级数，其中幅值为`E/2`周期为`T`



（3）求上述周期锯齿波函数的傅立叶变换

（4）在第（2）问的基础上，对信号以Ts进行采样，求采样后信号`fs(t)`的频谱密度`Fs(w)`

(1) $f(t) = E(\delta(t+\frac{T}{2}) + \delta(t-\frac{T}{2})) + \frac{2E}{T}(u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2}))$

$\mathcal{F}(f'(t)) = (j\omega)F(\omega) = E(e^{j\omega(-\frac{T}{2})} + e^{j\omega\frac{T}{2}}) + \frac{2E}{T}\cdot T\,Sa(\frac{\omega T}{2})$

$\Rightarrow F(\omega) = \frac{2E}{\omega j}[\cos(\omega T/2) + Sa(\omega T/2)]$

(2) 奇函数 $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{T/2} \frac{E}{T_1} t \sin(n w_1 t)\, dt$$

$$= \frac{4E}{T_1^2} \int t \sin(n w_1 t)\, dt$$

$$= -\frac{4E}{T_1^2} \cdot \frac{1}{n w_1} \left(t\cos(n w_1 t)\Big|_0^{T/2} - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n w_1 t)\, dt \right)$$

$$= -\frac{E}{\pi n}\cos(n\pi) = \begin{cases} \frac{E}{\pi n}, & n\text{为奇} \\ -\frac{E}{\pi n}, & n\text{为偶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{E}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cdot\cos(wt) - \frac{1}{2}\cos(wt) + \frac{1}{3}\cos(wt) - \cdots \right)$$

(3) 已知周期锯齿波的级数为

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j n w_1 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n w_1 t)\, dt$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{2} b_n = -\frac{E}{2\pi n}\cos(n\pi)$$

则 $F_T(w) = 2\pi \sum F_n \delta(w - n w_1)$

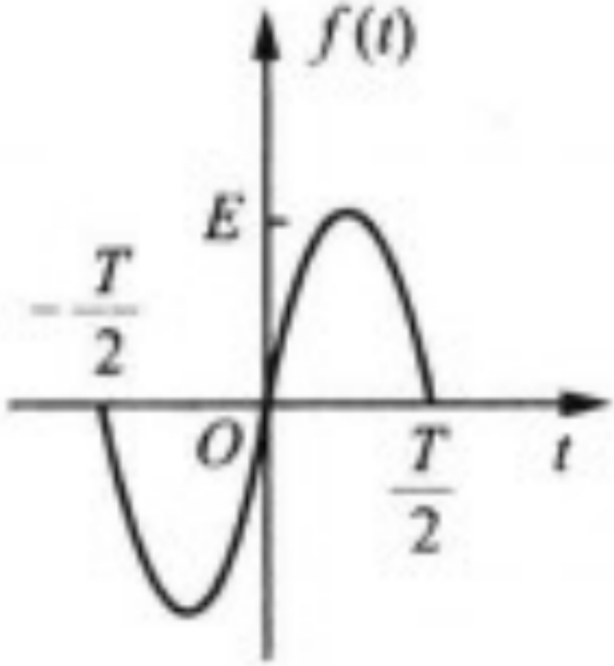
$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{E}{n}\cos(n\pi)\, \delta\left(w - n\frac{2\pi}{T_1}\right)$$

(4) 周期信号频谱密度为 $F(w) = -\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{n}\cos(n\pi)\, \delta\left(w - n\frac{2\pi}{T_1}\right)$

$$\Rightarrow F_s(w) = -\frac{E}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}\, \delta\left(w - n\frac{2\pi}{T_1} - m\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

下略

三、求图中函数的傅立叶变换



(d)

（1）求`f(t)`的傅立叶变换

（2）求`f1(t)=f(-2t+pi/2)`的傅立叶变换

(1) $f(t) = E\sin(w_1 t)\,[u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})]$

$f'(t) = E\sin(w_1 t)\,[\delta(t+\frac{T}{2}) - \delta(t-\frac{T}{2})] + Ew_1\cos(w_1 t)\,[u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})]$

$= Ew\cos(w_1 t)\,[u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})]$

$f''(t) = -Ew^2\sin(w_1 t)\,[u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})] + Ew_1\cos(w_1 t)\,[\delta(t+\frac{T}{2}) - \delta(t-\frac{T}{2})$

$\Rightarrow f''(t) = -w_1^2 f(t) - Ew_1[\delta(t+\frac{T}{2}) - \delta(t-\frac{T}{2})]$

两侧F $\Rightarrow$ $(jw)^2 F(w) = -w_1^2 F(w) - Ew_1[e^{+jw\frac{T}{2}} - e^{-jw\frac{T}{2}}]$

即: $F(w) = j\dfrac{2Ew_1}{-w_1^2+w^2}\sin(\frac{wT}{2})$

$F(w_1) = j\dfrac{2Ew_1\cos(\frac{wT}{2})\cdot\frac{T}{2}}{2w}\Big|_{w=w_1} = \cdots$

(2) 由性质: $f_1(t) = f(-2t+\frac{\pi}{2})$

有点问

$\mathcal{F}(f(-2t)) = \frac{1}{2}F(-\frac{1}{2}w) = j\dfrac{Ew_1}{w_1^2 - w^2/4}\sin(\frac{1}{4}wt)$

$= \left(\dfrac{4Ew_1 j}{4w_1^2 - w^2}\right)\cdot e^{-jw\frac{\pi}{4}}$

题 (

$= \cdots$

四、已知两个有限序列如下，计算他们的圆周卷积

$$x(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)R_N(n) \qquad h(n)=\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$$

答案见作业题 9-18

$$x(n) \circledast h(n) \overset{DFT}{\rightleftharpoons} X(k)\cdot H(k)$$

$$\Rightarrow \quad Y(k) = X(k)\cdot H(k)$$

而 $X(k) = DFT\left[\frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + e^{j\frac{2\pi}{N}n}\right)R_N(n)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[N\delta(k-1) + N\delta(k+1)\right]$$

由于周期为N $\Rightarrow X(k) = \frac{N}{2}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right]$

同理: $H(k) = DFT\left\{\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)R_N(n)\right\}$

$$= \frac{N^2}{2j}\left[\delta(k-1) - \delta(k+1)\right]$$

$$Y(k) = H(k)\cdot X(k) = \frac{N^2}{4j}\left[\delta(k-1) - \delta(k+1)\right]R_N(n)$$

则 $y(n) = IDFT = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\frac{N^2}{4j}\left[\delta(k-1) - \delta(k+1)\right]e^{j\frac{2\pi}{N}nk}R_N(n)$

$$= \frac{N}{4j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)R_N(n)$$

$$= \frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$$

注：5-2 5-9出的可能性也比较大，属于系统的范畴，但是都涉及到卷积的概念

五、已知两个系统的差分方程：

A (4) $y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$

B $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$

（1）求这两个系统的单位样值响应

（2）判断下面的系统是否是LTI系统

$$r(t)=\int_{-\infty}^{5t}e(\tau)\,d\tau。$$

(1) Z变换： $Y(k)-3z^{-1}Y(k)+3z^{-2}Y(k)-z^{-3}Y(k)=X(k)$

A $\Rightarrow H(z)=\dfrac{Y(k)}{X(k)}=\dfrac{1}{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}$

$$=\frac{z^3}{z^3-3z^2+3z-1}=\frac{z^3}{(z-1)^3}$$

$$\frac{z^3}{(z-1)^3}=a\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}+b\frac{z}{(z-1)^2}+c\frac{z}{z-1}$$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$8=6\times\frac{1}{2}+2b+2c \Rightarrow b+c=\frac{5}{2}$ ①

$\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c \Rightarrow 2c-b=\frac{1}{2}$ ②

$$\Rightarrow c=1 \quad b=\frac{3}{2}$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\,\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{3}{2}\,\frac{z}{(z-1)^2} + \left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right)u(n)$$

$$= \frac{1}{2}(n+2)(n+1)\,u(n)$$

B $Y(z) - 5z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = X(z) - 3z^{-2}X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-3z^{-2}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}} = \frac{z^2-3}{z^2-5z+6}$$

设 $H(z) = \dfrac{z^2-3}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{az}{z-2} + \dfrac{bz}{z-3} + c$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{2} \quad b=2 \quad c=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h(z) = -\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-2}\right) + \frac{2z}{z-3} - \frac{1}{2}$$

$$h(n) = -\frac{1}{2}\cdot 2^n u(n) + 2\cdot 3^n u(n) - \frac{1}{2}\delta(n)$$

(2) $r(t)=\int_{-\infty}^{5t} e(\tau)d\tau$

① 线性： 对输入 $e_1(t)$ 输出为 $\int_{-\infty}^{5t} e_1(\tau)d\tau$

对输入 $e_2(t)$ 输出为 $\int_{-\infty}^{5t} e_2(\tau)d\tau$

则对输入 $c_1e_1(t)+c_2e_2(t)$

输出为 $\int_{-\infty}^{5t}[c_1e_1(\tau)+c_2e_2(\tau)]d\tau$

$$= c_1\int_{-\infty}^{5t} e_1(\tau)d\tau + c_2\int_{-\infty}^{5t} e_2(\tau)d\tau$$

② 时不变： 对输入 $e(t-t_0)$

输出为 $\int_{-\infty}^{5t} e(\tau-t_0)\,d\tau \xrightarrow{\tau-t_0=\alpha} \int_{-\infty}^{5t-t_0} e(\alpha)d\alpha$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{5t-t_0} e(\alpha)d\alpha \neq \int_{-\infty}^{5(t-t_0)} e(\tau)d\tau$$

不满足时不变

③ 令 $t=1$ $\Rightarrow$ $r(1)=\int_{-\infty}^{5} e(\tau)d\tau$

其中 $r(1)$ 由未来时刻决定，不满足因果性.