主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020 年 1 学期

信号分析与处理试题（A）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。

姓名　　学号　　班号　　学院

密　封　线

一、简答题（5′ × 4）

1. 简述何为因果系统。
2. 对连续周期信号进行采样得到的信号是否一定是周期信号？为什么？
3. 圆周卷积和线性卷积的定义分别是什么？在什么情况下，两者结论一致？
4. 简述离散傅里叶变换 DFT 和离散时间傅里叶变换 DTFT 的关系。

1、因果系统：系统当前时刻的输出仅取决于当前时刻以及以前所时刻的输入，与当前时刻以后的输入无关

2、不一定，?

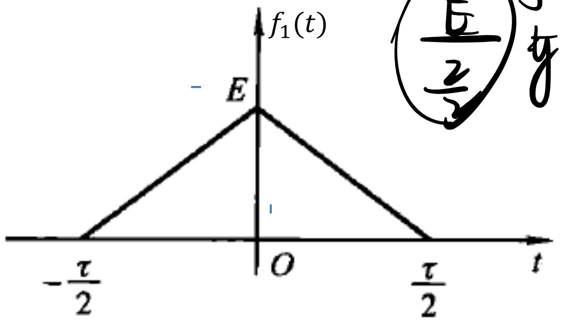
3、圆周卷积定义：$x(n) \circledast h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot h((n-m))_N R_N(n)$

线性卷积定义：$x(n) * h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n-m)$

对于 $x(n)$. $h(n)$，设其长度分别是 L, M，线性卷积的结果长度是 $L+M-1$，则当卷积序列 $x(n)$. $h(n)$ 均补零至长度为 N，使得 $N \geq L+M-1$ 时，两者结论相同

4、离散时间变换 DTFT 是对时域离散的序列进行傅里叶变换，得到其频域连续的频谱，用计算机研究连续信号不方便，所以引入 DFT，DFT 是对 DTFT 的结果 $X(\omega)$ 在频域进行采样后取主值区间得到的，在频域是离散的

二、（20 分）已知三角脉冲$f_1(t)$如图 1 所示



$\frac{E}{\frac{\tau}{2}}$ $f_1'(t)$ $y=\frac{E2}{\tau}t+E$

图 1 三角脉冲信号

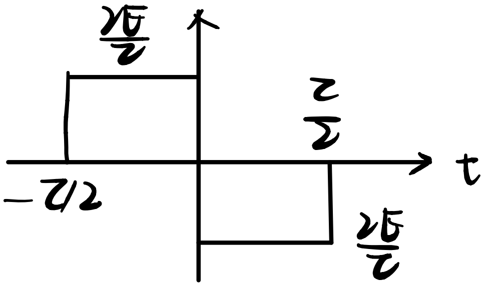
信号$f_2(t)$可以写成$f_1(t)$的调制：

$$f_2(t) = f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$$

1. 求函数$f_1(t)$的傅里叶变换；（10 分）
2. 利用有关定理求函数$f_2(t)$的傅里叶变换（10 分）

（傅里叶变换积分特性：$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$，其中$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$）

解：(1) 考虑下面的函数 $f_0(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau}, -\frac{\tau}{2}<t\le 0 \\ -\frac{2E}{\tau}, 0<t<\frac{\tau}{2} \end{cases}$



则有：$f_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f_0(\tau)d\tau$

而 $\mathcal{F}(f_0(t)) = ESa(\frac{w\tau}{4})\cdot e^{jw\frac{\tau}{4}} - ESa(\frac{w\tau}{4})e^{-jw\frac{\tau}{4}}$

$\Rightarrow F_0(w) = ESa(\frac{w\tau}{4})\cdot[e^{jw\frac{\tau}{4}} - e^{-jw\frac{\tau}{4}}]$

即：$\mathcal{F}(f_1(t)) = \mathcal{F}(\int_{-\infty}^{t} f_0(\tau)d\tau) = \frac{F_0(w)}{jw} = \frac{2E}{w}\sin(\frac{w\tau}{4})Sa(\frac{w\tau}{4})$

(2) $f_2(t) = f_1(t-\frac{\tau}{2})\cdot\frac{1}{2}(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t})$

则 $F_2(w) = \frac{1}{2}\{F_1(w-w_0)\cdot e^{-j(w-w_0)\frac{\tau}{2}} + F_1(w+w_0)\cdot e^{-j(w+w_0)\frac{\tau}{2}}\}$

$= \cdots$

姓名 学号 班号 学院 密 封 线

三、（20 分）已知矩形脉冲信号$f_0(t)$如图 2 所示，

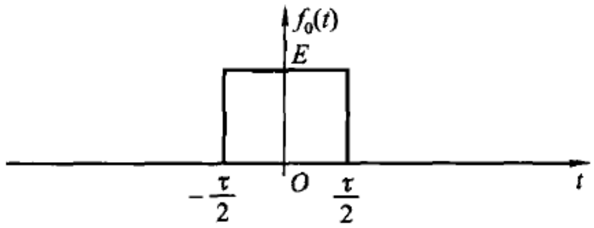


图 2 矩形脉冲信号

1. 求矩形脉冲的频谱$F_0(\omega)$；（8 分）
2. 对$f_0(t)$以$T_1(T_1 > \tau)$为周期进行周期延拓，得到周期矩形脉冲$f_1(t)$，求相应的频谱$F_1(\omega)$；（6 分）

矩形如何?

3. 若$f_1(t)$被间隔为$T_s(T_s \ll \tau)$的冲激序列所抽样，令抽样后的信号为$f_s(t)$，求信号$f_s(t)$的傅里叶变换$F_s(\omega)$。（6 分）

解：(1) $F_0(w) = \int_{-\infty}^{\infty} E \cdot e^{-jwt} dt$

$= E\tau Sa(\frac{w\tau}{2})$

(2) 周期矩形脉冲$f_1(t)$的傅里叶级数为

$F_n = \frac{1}{T_1} \cdot F_0(w) \Big|_{w=nw_1}$

即 $F_n = \frac{E\tau}{T_1} Sa(\frac{nw_1\tau}{2})$

$F_1(w) = 2\pi \sum F_n \delta(w-nw_1)$

即 $F_1(w) = E\tau \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{nw_1\tau}{2}) \cdot \delta(w-n\frac{2\pi}{T_1})$

(3) 连续时间信号取样后，频谱幅度变为$\frac{1}{T_s}$，以w_s为周期重复

则 $F_s(w) = \frac{2E\tau\cdot\pi}{T_1 T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{nw_1\tau}{2}) \delta(w-n\frac{2\pi}{T_1}-m\frac{2\pi}{T_s})$

四、（20 分）若已知有限长序列$x(n)$如下式

$$x(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 2 & n=1\\ 1 & n=2\\ -3 & n=3\end{cases}$$

1. 求 DFT$[x(n)]=X(k)$。（10 分）
2. 由所得$X(k)$，求 IDFT$[X(k)]$，并验证计算是否正确。（10 分）

（建议写作矩阵形式）

解：(1)

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0\times0} & W^{0\times1} & W^{0\times2} & W^{0\times3} \\ W^{1\times0} & W^{1\times1} & W^{1\times2} & W^{1\times3} \\ W^{2\times0} & W^{2\times1} & W^{2\times2} & W^{2\times3} \\ W^{3\times0} & W^{3\times1} & W^{3\times2} & W^{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

而$W=e^{-j\frac{2\pi}{4}}=-j$，则有：

$X(0)=1$，$X(1)=-5j$　$X(2)=3$　$X(3)=5j$

(2)

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5j \\ 3 \\ 5j \end{bmatrix}$$

得到 $x(0)=1$，$x(1)=2$，$x(2)=1$　$x(3)=-3$

姓名 学号 班号 学院

密 封 线

五、（20 分）设模拟滤波器系统的微分方程为

$$y'(t)+ay(t)=u'(t)$$

1. 求该系统的传递函数$H_a(s)$；（10 分）
2. 设采样间隔为$T=2$，用双线性变换法将$H_a(s)$变化成数字滤波器的系统函数$H(z)$（5 分）。 ？
3. 求数字滤波器的单位样值响应$h(n)$（5 分）。 4.为什么不能用冲激响应不变法

（典型信号 Z 变换：$\mathcal{Z}^{-1}[1]=\delta(n),\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]=u(n),\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right]=a^n u(n)$）

解：(1) 做拉氏变换： $sY(s)+aY(s)=sU(s)$

即： $H_a(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s}{s+a}$

(2) 对应关系为 $s=\dfrac{2}{T}\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)=\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\dfrac{z-1}{z+1}$

即 $H(z)=\dfrac{z-1}{z+1}\cdot\dfrac{z+1}{z-1+a(z+1)}=\dfrac{z-1}{z-1+a(z+1)}$

(3) $H(z)=\dfrac{z-1}{(a+1)z+(a-1)}=\dfrac{2a}{a^2-1}\dfrac{(a+1)z}{(a+1)z+(a-1)}+\dfrac{1}{1-a}$

$$=\frac{2a}{a^2-1}\cdot\frac{z}{z+\frac{a-1}{a+1}}+\frac{1}{1-a}$$

则有：

$$h(n)=\frac{1}{1-a}\delta(n)+\frac{2a}{a^2-1}\cdot\left(\frac{1-a}{a+1}\right)^n u(n)\quad(a\neq1)$$

$a=1$ 时有 $H(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2z}$

得 $h(n)=\dfrac{1}{2}\delta(n)-\dfrac{1}{2}\delta(n-1)$