主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2019 年 1 学期

信号分析与处理试题（A）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。

姓名　学号　班号　学院

密　封　线

一、简答题（5′ × 4）

1. 线性系统是否一定是时不变系统？是否一定是因果系统？为什么？
2. 若欲使信号通过线性系统不产生失真，则该系统应具有什么特性？
3. 连续非周期信号的频谱密度是连续的还是离散的？为什么？ DTFT
4. 简述离散傅里叶变换 DFT 和离散时间傅里叶变换 DTFT 的关系。

1、不一定，线性系统当前的输出可能与未来的输入有关

线性系统可以对信号产生不同的相移

2、系统函数 $H(j\omega)$ 的幅度特性为直线，相位特性为过原点的直线。

3、连续的，DTFT 的定义为：$DTFT[x(n)] = \sum x(n) e^{-j\Omega n} d\Omega = X(\Omega)$

$e^{-j\Omega n}$ 是关于 Ω 的连续函数，则加和后仍为关于 Ω 的连续函数。

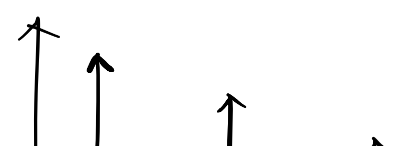
4、见2020

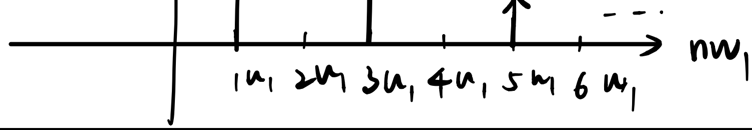
2、用周期傅里叶级数得到：

$$F(\omega) = 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad 其中\ \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= 2\pi \frac{E}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi) - 1]\,\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})$$

$$= \begin{cases} \frac{4E}{n^2\pi} e^{\pi j}\,\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) & n为奇 \\ 0 & n为偶 \end{cases}$$





二、（20 分）已知图 1 所示周期三角信号

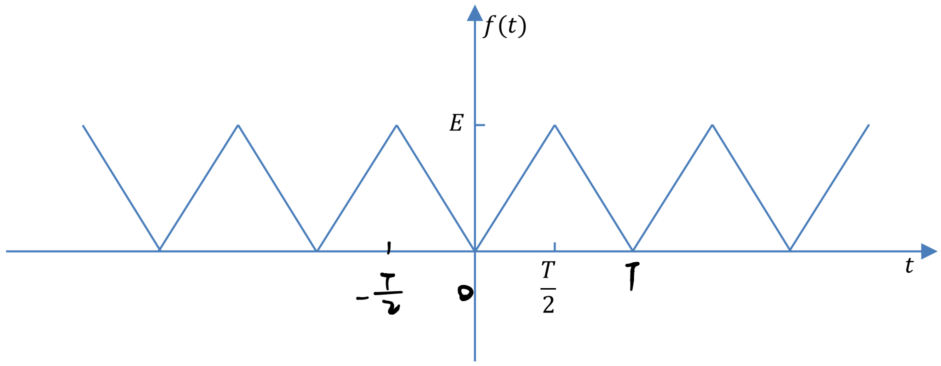


图 1

1. 求$f(t)$的傅里叶级数并画出频谱图；（10 分）
2. 求$f(t)$的傅里叶变换并画出频谱密度图。（10 分）

解：1、 $f(t)=f(-t)$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,[\cos(n\omega t)-j\sin(n\omega t)]\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{2E}{T}t\cdot\cos(n\omega t)\,dt=\frac{4E}{T^2}\int t\cos(n\omega t)\,dt$$

其中：$\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)\,dt$

$$=\frac{1}{n\omega}\int_0^{T/2} t\,d[\sin(n\omega t)]$$

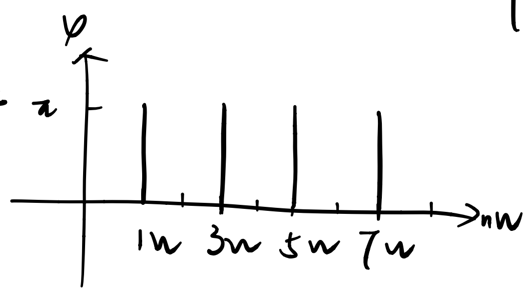
$$=\frac{1}{n\omega}\left(t\sin(n\omega t)\Big|_0^{T/2}-\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{(n\omega)^2}\cos(n\omega t)\Big|_0^{T/2}$$

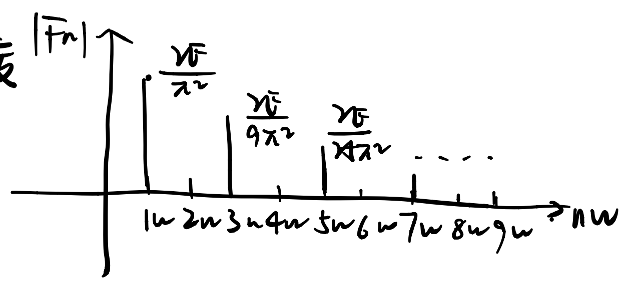
$$=\frac{1}{(n\omega)^2}[\cos(n\pi)-1]$$

即：$F_n=\frac{E}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi)-1]=\begin{cases}\frac{2E}{n^2\pi^2}e^{\pi j} & (n为奇)\\ 0 & (n为偶)\end{cases}$

相位



幅度



三、（20 分）已知三角脉冲如图 2 所示，

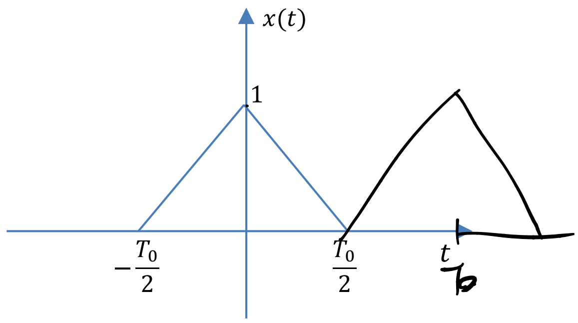
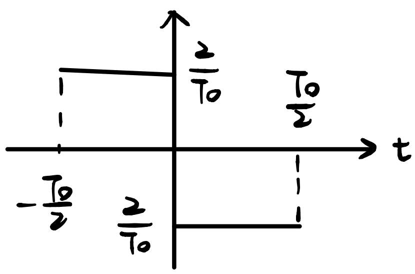


图 2

1. 求三角脉冲的频谱；（10 分）
2. 将$x(t)$以周期T_0重复，构成周期信号$x_p(t)$，画出对$x_p(t)$以$\frac{T_0}{8}$进行理想采样所构成的采样信号$x_{ps}(t)$的频谱$X_{ps}(\omega)$。（10 分）

（常见信号的傅里叶变换：$\mathcal{F}[\delta(t)]=1, \mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$；傅里叶变换的性质：微分性质 $\mathcal{F}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]=(j\omega)^n X(\omega)$；积分性质 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$，其中 $X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$是$x(t)$的傅里叶变换）

1、解：考虑如下函数：设其为 $g(t)$，



则有：$g(t)=x'(t)$

$\Rightarrow x(t)=\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$

要求 $\mathcal{F}(x(t))$，即求 $\mathcal{F}(g(t))$

$$\mathcal{F}(g(t)) = Sa\left(\frac{T_0 w}{4}\right)\cdot e^{+jw\frac{T_0}{4}} - Sa\left(\frac{T_0 w}{4}\right) e^{-jw\frac{T_0}{4}}$$

$$G(w) = 2j\sin\left(\frac{wT_0}{4}\right) Sa\left(\frac{wT_0}{4}\right)$$

且 $G(0)=0$

$$X(w)=\mathcal{F}(x(t)) = \frac{1}{jw}G(w)+0 = \frac{2}{w}\sin\left(\frac{wT_0}{4}\right) Sa\left(\frac{wT_0}{4}\right)$$

2、解：$x_p(t)$ 的级数为：$\frac{1}{T_0} X(w)\big|_{w=nw_0}$

即 $F_n = \frac{2}{nw_0T_0}\sin\left(\frac{nw_0T_0}{4}\right) Sa\left(\frac{nw_0T_0}{4}\right) = \frac{8}{(nw_0T_0)^2}$

$x_p(t)$ 的傅里叶变换为 $X_p(w) = 2\pi F_n\,\delta(w-nw_0)$

即：$X_p(w) = 2\pi \times \frac{8}{(nw_0T_0)^2} \times \delta(w-nw_0) = \frac{16\pi}{(nw_0T_0)^2}\delta(w-nw_0)$

取样后信号频谱为：$X_{ps}(w) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{-\infty}^{\infty} X_p(w)\cdot\delta(w-mw_s)$

即 $X_{ps}(w) = \frac{8}{T_0}\cdot\sum^{\infty}\sum^{\infty}\frac{16\pi}{(nw_0T_0)^2}\cdot\delta\left(w-n\frac{2\pi}{T_0}-m\cdot\frac{16\pi}{T_0}\right)$

$= \cdots$

四、(20 分)设$X(z)=\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$，试问$x(n)$在以下三种收敛域下，哪一种是左边序列？哪一种是右边序列？哪一种是双边序列？并求出各对应的$x(n)$。

1. $|z|>2$;（6 分）右.
2. $|z|<0.5$;（6 分）左
3. 0.5<|z|<2。（8 分）双.

（常见序列的 Z 变换：$\mathcal{Z}[u(n)]=\frac{z}{z-1}, 1<|z|\le\infty$; $\mathcal{Z}[-u(-n-1)]=\frac{z}{z-1}, 0\le z<1$; $\mathcal{Z}[a^n u(n)]=\frac{z}{z-a}, |a|<|z|\le\infty, \mathcal{Z}[-a^n u(-n-1)]=\frac{z}{z-a}, 0\le|z|<|a|$）

解：① |z|>2 是左边序列，

$$X(z)=\frac{-3z}{2z^2+2-5z}=\frac{2z}{2z-1}-\frac{z}{z-2}$$ ✓.

右 ① 当 |z|>2 为收敛域时有：$x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-2^n\right]u(n)$

左 ② 当 |z|<0.5 时 ———— 有：$x(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)+2^n u(-n-1)$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n\right]u(-n-1)$$

双 ③ ———————— 有：$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot u(n)+2^n u(-n-1)$

输入为 $z(n)$

五、（20 分）线性时不变因果离散系统的差分方程为

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

1. 求该系统的单位样值响应；（15 分）
2. 判断系统是是否是线性时不变系统（5 分）。

问？

1、做z变换：$Y(z)-5z^{-1}Y(z)+6z^{-2}Y(z)=X(z)-3z^{-2}X(z)$

$$(1-5z^{-1}+6z^{-2})Y(z)=(1-3z^{-2})X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-3z^{-2}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{z^2-3}{z^2-5z+6}$$

$$H(z)=\frac{z^2-3}{z^2-5z+6}=-\frac{1}{2}\frac{z}{z-2}+\frac{2z}{z-3}-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h(n)=\left(-\frac{1}{2}\cdot 2^n+2\cdot 3^n\right)u(n)-\frac{1}{2}\delta(n)$$

2、系统是LTI

姓名 学号 班号 学院

密 封 线

学院________ 班号________ 学号________ 姓名________

密 封 线

学院________ 班号________ 学号________ 姓名________

密 封 线