哈尔滨工业大学（深圳）2021年

信号分析与处理试题模拟题（A）

本试卷仅用于螨国内部交流，切勿外传

一、简答题（5*4’）

1、简述系统的**可逆性**和**稳定性**的定义

2、请给出无失真传输的定义，写出无失真传输的频率特性函数

3、请简述DTFT和Z变换的关系

1.可逆性.系统对不同的输入信号有不同的输出信号,即系统的输入输出信号呈一一对应关系

稳定性.系统对有界输入信号的零状态响应也是有界的

2.无失真传输:信号通过系统后,波形不变,只在幅度上等比例地放大或缩小,或在时间上有一固定的延迟

时域条件 $y(t)=Kx(t-t_0)$

频域条件. $Y(w)=Ke^{-jwt_0}X(w) \Rightarrow H(w)=Ke^{-jwt_0}$

3、Z变换与DTFT的关系.

单位圆上的Z变换就是序列的离散时间傅里叶变换 $X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}=DTFT[x(n)]=X(\Omega)$

Z变换与DFT的关系.

DFT是Z变换在单位圆上的N点采样 $X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=DFT[x(n)]=X(k)$

4、请简述如何利用系统函数得到离散系统的频率响应，并给出此时系统应该满足的条件

5、已知时域有限信号`f(t)`的频谱为`F(w)`，在频域对`F(w)`进行采样，得到的时域信号会如何变化?

4.对离散系统.

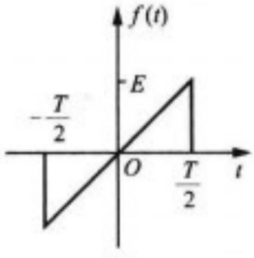
系统函数H(z),当系统稳定时(极点都位于单位圆内部时) $H(\Omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$

对连续系统.

系统函数H(s),当系统稳定时(极点都位于虚轴左侧时) $H(w)=H(s)\big|_{s=jw}$

5.时域冲激采样 $f(t)\longrightarrow f_s(t)$. $F_s(w)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(w-nw_s)$

频域冲激采样 $F(w)\longrightarrow F_s(w)$. $f_s(t)=\frac{1}{w_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-nT_s)$



(a)

（1）求该函数`f(t)`的傅立叶变换

解. 定义法求傅氏变换.

斜率 $k=\frac{2E}{T}$, $y=\begin{cases}\frac{2E}{T}t, & -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\\ 0 & 其它\end{cases}$

$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos\theta$
$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin\theta$

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{2E}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}te^{-j\omega t}dt$ ✓

先求不定积分 $\int te^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}\int td e^{-j\omega t}=\frac{1}{-j\omega}\left[te^{-j\omega t}-\int e^{-j\omega t}dt\right]=\frac{jt}{\omega}e^{-j\omega t}+\frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega t}+C$ ✓

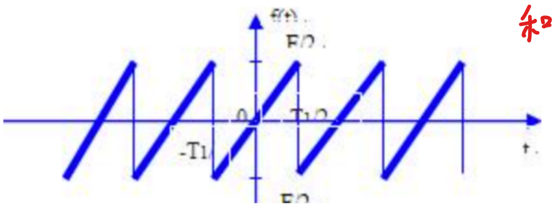
从而 $F(\omega)=\frac{2E}{T}\left[\frac{jT}{2\omega}\left(e^{j\omega\frac{T}{2}}+e^{j\omega\frac{T}{2}}\right)+\frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}}-e^{j\omega\frac{T}{2}}\right)\right]$

$=\frac{2E}{T}\left[\frac{jT}{2\omega}\left(2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)+\frac{1}{\omega^2}(-2j)\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]$

$=\frac{2jE}{\omega}\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-\frac{4jE}{T\omega^2}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)=\frac{2jE}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]$

（2）由该函数得到周期锯齿波函数（下图）， 求其傅立叶级数，其中幅值为`E/2`周期为`T`

和第一问不一样，一定要看题



注意到求傅立叶级数时，信号的周期T, 频率 ω_1 满足. $T_1\omega_1=2\pi$

解 奇函数, 有 $a_0=a_n=0$, $\omega_1T=2\pi$

$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega_1t\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{E}{T}t\sin(n\omega_1t)dt=\frac{4E}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\sin(n\omega_1t)dt$

先求不定积分: $\int t\sin(n\omega_1t)dt=\frac{-1}{n\omega_1}\int td\cos(n\omega_1t)=-\frac{1}{n\omega_1}\left[t\cos(n\omega_1t)-\int\cos n\omega_1t\,dt\right]$

$=\frac{1}{n^2\omega_1^2}\sin(n\omega_1t)-\frac{1}{n\omega_1}t\cos(n\omega_1t)$

故 $b_n=\frac{4E}{T^2}\left[\frac{1}{n^2\omega_1^2}\sin n\pi-\frac{1}{n\omega_1}\frac{T}{2}\cos n\pi-0-0\right]=\frac{-E}{n\pi}\cos(n\pi)=\frac{E}{n\pi}(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}E}{n\pi}\sin(n\omega_1t)$

（3）求上述周期锯齿波函数的傅立叶变换

（4）在第（2）问的基础上，对信号以Ts进行采样，求采样后信号`fs(t)`的频谱密度`Fs(w)`

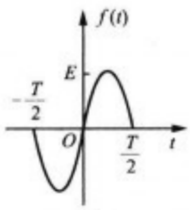
(3) 由 $F_0(\omega)=\frac{jE}{\omega}\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-\frac{2jE}{T\omega^2}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ 知复傅里叶级数为 $F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}=\frac{jE}{2\pi n}\cos(n\pi)$

注意 $T_1\omega_1=2\pi$

法二: 即然已经求了 a_n 和 b_n : $F_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{jE}{2n\pi}(-1)^n$

故 $F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi F_n\delta(\omega-k\omega_1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{jE}{n}(-1)^n\delta(\omega-k\omega_1)$ ，其中 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$

(4) 时域采样, $F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}F(\omega-m\omega_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{jE}{n}(-1)^n\delta(\omega-k\omega_1-m\omega_s)$



(d)

$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$

$e^{j\omega_1 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_1)$

$\sin(\omega_1 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]$

(1) 求`f(t)`的傅立叶变换

(2) 求`f1(t)=f(-2t+pi/2)`的傅立叶变换

(1) 解：令 $T_1=T,\ \omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$, $f(t)=E\sin(\omega_1 t)\quad(-\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2})$

令 $g(t)=\begin{cases}E & -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}\\ 0\end{cases}$, $h(t)=\sin(\omega_1 t)$, 有 $f(t)=g(t)h(t)$

$G(\omega)=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})\Big|_{E=E,\ \tau=T_1}=ET_1Sa(\frac{\omega T_1}{2})$, $H(\omega)=j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]$

由卷积定理知

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*H(\omega)=\frac{jET_1}{2}\left[Sa(\frac{\omega T_1}{2})*(\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1))\right]$$

$$=\frac{jET_1}{2}\left[Sa(\frac{\omega+\omega_1}{2}T_1)-Sa(\frac{\omega-\omega_1}{2}T_1)\right]$$

$$=\frac{jET_1}{2}\left[Sa(\frac{\omega T_1}{2}+\pi)-Sa(\frac{\omega T_1}{2}-\pi)\right]$$

$$=\frac{jET_1}{2}\left[\frac{-\sin(\frac{\omega T_1}{2})}{\frac{\omega T_1}{2}+\pi}+\frac{\sin(\frac{\omega T_1}{2})}{\frac{\omega T_1}{2}-\pi}\right]$$

$$=\frac{j4ET_1\pi}{\omega^2T_1^2-4\pi^2}\sin(\frac{\omega T_1}{2})$$

$$=\frac{2jE\cdot\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}\sin(\frac{\omega T_1}{2})$$ 其中 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$, $T_1=T$

(2) $f_1(t)=f(-2t+\frac{\pi}{2})$ $\quad f(t)\longrightarrow F(\omega)$

$f(t+\frac{\pi}{2})\longrightarrow e^{j\omega\frac{\pi}{2}}F(\omega)$

$f(-2t+\frac{\pi}{2})\longrightarrow \frac{1}{2}e^{-j\omega\frac{\pi}{4}}F(-\frac{\omega}{2})$ 代入即可

尺度变换特性

实常数a

$$f(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega)\ \Rightarrow\ f(at)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

四、已知两个有限序列如下，计算他们的圆周卷积

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$$

$$h(n) = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$$

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, k = 0,1,\dots,N-1, W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, n = 0,1,\dots,N-1$$

有限序列

线性卷积: $x(n)*h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$

圆周卷积: $x(n)\circledast h(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N\right]R_N(n)$

时域圆周卷积. $x(n)\circledast h(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)H(k)$

频域圆周卷积. $x(n)h(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N}X(k)\circledast H(k)$

先求 $DFT[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} 1 e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k=0 \\ \frac{1-e^{jk2\pi}}{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}n}} = 0, & 其它 \end{cases}$ $\Rightarrow DFT[R_N(n)] = N\delta(k)$

圆周位移性质

从而 $DFT[e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}] = N\delta(k-k_0)$, $DFT[e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}] = N\delta(k+k_0)$

$$DFT[\cos(\tfrac{2\pi}{N}n)R_N(n)] = \frac{N}{2}[\delta(k+1)+\delta(k-1)]$$

$$DFT[\sin(\tfrac{2\pi}{N}n)R_N(n)] = \frac{jN}{2}[\delta(k+1)-\delta(k-1)]$$

故 $Y(k) = X(k)H(k) = \frac{jN^2}{4}[\delta(k+1)+\delta(k-1)][\delta(k+1)-\delta(k-1)]$

$$= \frac{jN^2}{4}[\delta(k+1)-\delta(k-1)]$$

$$y(n) = IDFT[Y(k)] = \frac{N}{2}\sin(\tfrac{2\pi}{N}n)R_N(n)$$

五、已知两个系统的差分方程：

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

（1）求这两个系统的单位样值响应

解 (1) 单位样值信号指的是单位脉冲序列 $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$，有 $Z[\delta(n)]=1$

① $y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$，零状态 z 变换

$Y(z)[1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}]=X(z)\Rightarrow Y(z)=\dfrac{X(z)}{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}=\dfrac{z^3}{z^3-3z^2+3z-1}=(\dfrac{z}{z-1})^3$

故 $y(n)=Z^{-1}[Y(z)]=\sum_i Res[\dfrac{z^3}{(z-1)^3}z^{n-1}]=Res[\dfrac{z^{n+2}}{(z-1)^3},z=1]$

$=\dfrac{1}{2!}\lim_{z\to1}\dfrac{d^2}{dz^2}(z^{n+2})=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$，$n\geq0$

或写成 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)u(n)$，均可

② $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$，零状态 z 变换.

$Y(z)[1-5z^{-1}+6z^{-2}]=X(z)[1-3z^{-2}]\Rightarrow Y(z)=\dfrac{z^2-3}{z^2-5z+6}=\dfrac{z^2-3}{(z-2)(z-3)}$

$y(n)=Z^{-1}[Y(z)]=\sum_i Res[\dfrac{z^2-3}{(z-2)(z-3)}z^{n-1}]$

当 $n=0$ 时，$y(n)=1$

当 $n\neq0$ 时，有 $z=2,z=3$ 两个极点，$y(n)=\lim_{z\to2}\dfrac{(z^2-3)z^{n-1}}{z-3}+\lim_{z\to3}\dfrac{(z^2-3)z^{n-1}}{z-2}$

$=-2^{n-1}+6\times3^{n-1}=-\frac{1}{2}\cdot2^n+2\cdot3^n$

综上所述，$y(n)=-\frac{1}{2}\cdot2^n+2\cdot3^n-\frac{1}{2}\delta(n)$ $n\geq0$

$=-\frac{1}{2}\cdot2^n u(n)+2\cdot3^n u(n)-\frac{1}{2}\delta(n)$

（2）判断下面的系统是否是LTI系统

$$r(t)=\int_{-\infty}^{5t}e(\tau)d\tau$$

① 线性性：设输入分别为 $e_1(t)$，$e_2(t)$，输出分别为 $r_1(t)$，$r_2(t)$

则对输入 $c_1e_1(t)+c_2e_2(t)$，输出为

$r(t)=\int_{-\infty}^{5t}[c_1e_1(\tau)+c_2e_2(\tau)]d\tau=c_1\int_{-\infty}^{5t}e_1(\tau)d\tau+c_2\int_{-\infty}^{5t}e_2(\tau)d\tau$

$=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$，

系统满足线性性

② 时不变性. 设输入 $e(t)$ 有输出 $r(t)$，则对于输入 $e_1(t)=e(t-t_0)$.

输出 $r_1(t)=\int_{-\infty}^{5t}e(\tau-t_0)d\tau\xrightarrow{\alpha=\tau-t_0}\int_{-\infty}^{5t-t_0}e(\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{5(t-\frac{t_0}{5})}e(\tau)d\tau=r(t-\frac{t_0}{5})$

不满足时不变性

③ 因果性：当时间为 $t=1$ 时，输入 $e(1)$，输出 $r(1)=\int_{-\infty}^{5}e(\tau)d\tau$ 与未来时刻有关，不满足因果性