哈尔滨工业大学（深圳）2020 年 1 学期

信号分析与处理试题（A）

一、简答题（$5' \times 4$）

1. 简述何为因果系统。
2. 对连续周期信号进行采样得到的信号是否一定是周期信号？为什么？

(1) • 对于任意的输入信号，如果系统在任何时刻的输出值，只取决于该时刻和该时刻以前的输入值，而与将来时刻的输入值无关，就称该系统具有因果性；否则，如果某个时刻的输出值还与将来时刻的输入值有关，则为非因果的。

• 具有因果性的系统称为因果系统，具有非因果性的系统为非因果系统。

• 通常由电阻器、电感线圈、电容器构成的实际物理系统都是因果系统。而在信号处理技术领域中，待处理的时间信号已被记录并保存下来，可以利用后一时刻的输入来决定前一时刻的输出，将构成非因果系统。

(2) 不一定，反例.

示例3　对正弦信号进行采样，$t = nT_s$，$T_s = 1\text{s}$

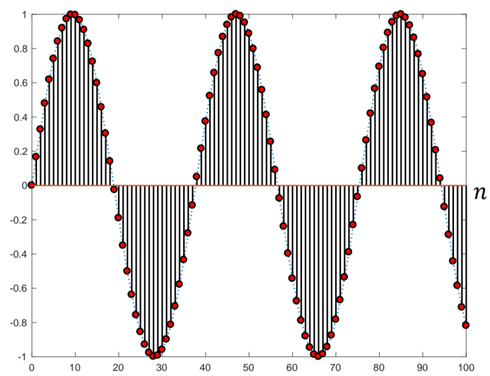
$x(t) = \sin\left(\frac{t}{6}\right)$

$T = 12\pi$ s　$\omega_0 = \frac{1}{6}$

$x(n) = \sin\left(\frac{n}{6}\right)$　$\Omega_0 = \omega_0 T_s = \frac{1}{6}$

$\frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \times 6 = 12\pi$（无理数）

不是周期序列！



3. 圆周卷积和线性卷积的定义分别是什么？在什么情况下，两者结论一致？
4. 简述离散傅里叶变换 DFT 和离散时间傅里叶变换 DTFT 的关系。

3)

有限长序列

线性卷积：$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$

圆周卷积：$x(n) ⊛ h(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N\right] R_N(n)$

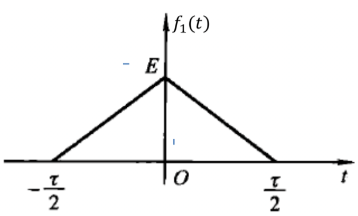
对于x(n)与h(n)，设其长度分别为N、M，当补零后长度$L \geq N+M-1$时，两者(线性卷积与L点圆周卷积)结果一致

4)、离散信号的DTFT是Ω的连续周期函数，尽管在理论上有重要意义，但在计算机上实现有困难。为此，需要一种时域和频域上都是离散的傅里叶变换对，实现计算机的快速计算，即DFT

DFT是对DTFT的结果X(Ω)的长度为2π的主值区间进行N点采样得到的

信号$f_2(t)$可以写成$f_1(t)$的调制：

$$f_2(t) = f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$$



1. 求函数$f_1(t)$的傅里叶变换；（10 分）
2. 利用有关定理求函数$f_2(t)$的傅里叶变换（10 分）

（傅里叶变换积分特性：$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$，其中$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$）

$k = \frac{2E}{\tau}$

解 $f_1'(t) = \frac{2E}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2}) - 2u(t) + u(t-\frac{\tau}{2})\right]$，$f_1''(t) = \frac{2E}{\tau}\left[\delta(t+\frac{\tau}{2}) - 2\delta(t) + \delta(t-\frac{\tau}{2})\right]$

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$，知 $\mathcal{F}[f_1''(t)] = \frac{2E}{\tau}\left[e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - 2 + e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right] = \frac{-8E}{\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

由 $\mathcal{F}[f_1'(t)]\big|_{w=0}=0$，故 $\mathcal{F}[f_1'(t)]=\frac{-8E}{jw\tau}\sin^2(\frac{w\tau}{4})$，有 $\mathcal{F}[f_1'(t)]\big|_{w=0}=0$

故 $F_1(w)=\mathcal{F}[f_1(t)]=\frac{-8E}{j^2w^2\tau}\sin^2(\frac{w\tau}{4})=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{w\tau}{4})$ ⟵ 直接背下来，和单矩形脉冲对比记忆

窗 $\xrightarrow{\mathcal{F}} E\tau Sa(\frac{w\tau}{2})$

三角 $\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{w\tau}{4})$

2. $f_2(t)=f_1(t-\frac{\tau}{2})\cdot\frac{1}{2}(e^{jw_0t}+e^{-jw_0t})$

$$\frac{1}{2}f_1(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}F_1(w)$$

$$\frac{1}{2}f_1(t-\frac{\tau}{2})\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}e^{-jw\frac{\tau}{2}}F_1(w)$$

$$\frac{1}{2}f_1(t-\frac{\tau}{2})e^{jw_0t}\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}e^{-j(w-w_0)\frac{\tau}{2}}F_1(w-w_0)$$

故 $F_2(w)=\frac{1}{2}\left[e^{-j(w-w_0)\frac{\tau}{2}}F_1(w-w_0)+e^{-j(w+w_0)\frac{\tau}{2}}F_1(w+w_0)\right]=\cdots$

三、（20 分）已知矩形脉冲信号 $f_0(t)$ 如图 2 所示，

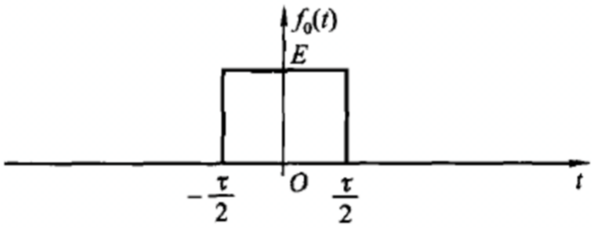


图 2 矩形脉冲信号

1. 求矩形脉冲的频谱 $F_0(\omega)$；（8 分）
2. 对 $f_0(t)$ 以 $T_1(T_1>\tau)$ 为周期进行周期延拓，得到周期矩形脉冲 $f_1(t)$，求相应的频谱 $F_1(\omega)$；（6 分）
3. 若 $f_1(t)$ 被间隔为 $T_s(T_s\ll\tau)$ 的冲激序列所抽样，令抽样后的信号为 $f_s(t)$，求信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换 $F_s(\omega)$。（6 分）

矩形如何？

解. 1. $F_0(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_0(t)e^{-jwt}dt=E\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-jwt}dt=\frac{-2jE\sin(\frac{w\tau}{2})}{-jw}=E\tau Sa(\frac{w\tau}{2})$

2. $F_n=\frac{1}{T_1}F_0(w)\big|_{w=nw_1}=\frac{E\tau}{T_1}Sa(\frac{n\pi\tau}{T_1})$

$$F_1(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi F_n\delta(w-nw_1)=E\tau w_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{n\pi\tau}{T_1})\delta(w-nw_1)$$

3. $F_s(w)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}F_1(w-mw_s)=\frac{E\tau w_1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{n\pi\tau}{T_1})\delta(w-nw_1-mw_s)$

四、（20 分）若已知有限长序列 $x(n)$ 如下式

$$x(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 2 & n=1\\ 1 & n=2\\ -3 & n=3\end{cases}$$

1. 求 DFT$[x(n)]=X(k)$。（10 分）
2. 由所得 $X(k)$，求 IDFT$[X(k)]$，并验证计算是否正确。（10 分）

解. $W_4=e^{-\frac{2\pi}{4}}=-j$， 记忆：$W_2=-1$，$W_4=-j$

$$\begin{bmatrix}X(1)\\X(2)\\X(3)\\X(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(1)\\x(2)\\x(3)\\x(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5j\\3\\5j\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x(1)\\x(2)\\x(3)\\x(4)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^{-1}&W^{-2}&W^{-3}\\W^0&W^{-2}&W^{-4}&W^{-6}\\W^0&W^{-3}&W^{-6}&W^{-9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(1)\\X(2)\\X(3)\\X(4)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&j&-1&-j\\1&-1&1&-1\\1&-j&-1&j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-5j\\3\\5j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\-3\end{bmatrix}$$

五、（20 分）设模拟滤波器系统的微分方程为

$$y'(t) + ay(t) = u'(t)$$

1. 求该系统的传递函数$H_a(s)$；（10 分）
2. 设采样间隔为$T = 2$，用双线性变换法将$H_a(s)$变化成数字滤波器的系统函数$H(z)$（5 分）。 ?
3. 求数字滤波器的单位样值响应$h(n)$（5 分）。 4、为什么不能用冲激响应不变法

（典型信号 Z 变换：$\mathcal{Z}^{-1}[1] = \delta(n), \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = u(n), \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^n u(n)$）

解：(1) $sY(s) + aY(s) = sU(s)$

传递函数 $H_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s+a}$

(2) 冲激响应不变法：$\Omega = \omega T$

双线性变换法：$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$

$$H(z) = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + a} = \frac{z-1}{(a+1)z + a - 1}$$

(3) $Z[\delta(n)] = 1$，故 $Y(z) = H(z) Z[\delta(n)] = \frac{z-1}{(a+1)z + a - 1} = \frac{\frac{z-1}{a+1}}{z + \frac{a-1}{a+1}}$

$y(n) = Z^{-1}[Y(z)] = \sum_i Res[Y(z) z^{n-1}] = \lim_{z \to -\frac{a-1}{a+1}} \left(\frac{z-1}{a+1}\right) z^{n-1} = -\frac{2a}{(a+1)^2}\left(-\frac{a-1}{a+1}\right)^{n-1}$ $(n \neq 0)$ $= \frac{2a}{a^2-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n$

$n=0$ 时，$y(n) = Z^{-1}[Y(z)] = \lim_{z \to -\frac{a-1}{a+1}} \left(\frac{z-1}{a+1}\right) z^{-1} + \lim_{z \to 0} \frac{\frac{z-1}{a+1}}{z + \frac{a-1}{a+1}} = \frac{2a}{a^2-1} + \frac{1}{1-a}$

故 $y(n) = \frac{1}{1-a}\delta(n) + \frac{2a}{a^2-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n u(n)$ $(a \neq 1)$

当 $a=1$ 时，$Y(z) = \frac{z-1}{2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} \Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}[\delta(n) - \delta(n-1)]$

(4) 会造成频谱混叠