主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2023 年秋季学期

信号分析与处理试题（A 卷）（回忆版）

2023.12.3 V1.1

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。
在开始测试之前，请先阅读试卷末页的备注。

姓名 学号 班号 学院

密 封 线

一、简答题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

1. 说明为什么经典滤波器不能滤除拍球产生的噪声？
2. 说明利用 FFT 计算两序列线性卷积的原理。使用时需要注意什么？
3. 说明 z 变换与 DTFT、DFT 的关系。
4. 函数集$\cos(t), \cos(2t), \cdots, \cos(nt)$（$n$ 为正整数）是否为区间$(0,\pi/2)$上的完备正交函数集？请说明理由。

1. 因为拍球产生的噪声可近似视为冲激，占据无限的频率范围，和有用信号有频带重叠，经典滤波器当有用信号和噪声的频谱相互重叠时无能为力

2、利用FFT求线性卷积（快速卷积）通过求解圆周卷积求解两个序列的线性卷积

$$\left.\begin{aligned} x(n) &\xrightarrow{FFT} X(k) \\ h(n) &\xrightarrow{FFT} H(k) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{序列相乘}} X(k)H(k) \xrightarrow{IFFT} y(n)$$

注意将两序列分别补零至长度 $L \geq N_1+N_2-1$

3、Z变换与DTFT的关系：

单位圆上的Z变换就是序列的离散时间傅里叶变换 $X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = DTFT[x(n)] = X(\Omega)$

Z变换与DFT的关系：

DFT是Z变换在单位圆上的N点采样 $X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = DFT[x(n)] = X(k)$

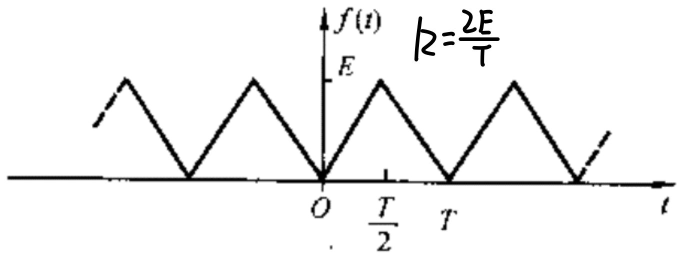
4、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos 3t + \cos t]dt = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}\sin 3t + \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \neq 0$

不满足正交性，不是正交函数集

三角函数集$\{1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cdots, \sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots\}$在区间$(t_0, t_0+T)$上是完备正交的

$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$

二、计算题（20 分）有以下周期为 T 的三角波信号。



1. 求 a_0、a_n 和 b_n，并写出完整的傅里叶级数表达式。（10 分）
2. 用一幅度为 E，宽度为 T 的矩形脉冲信号给 $f(t)$在$[0,T]$加窗，记所得信号为 $g(t)$。求 $g(t)$的频谱 $G(\omega)$。（5 分）
3. 用周期为 $T/10$ 的单位冲激序列对 $g(t)$进行理想采样，求所得采样信号的频谱 $G_s(\omega)$。（5 分）

解. 为偶函数，$b_n=0$，记 $T_1=T$，$w_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{2\pi}{T}$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)dt=\frac{1}{T_1}\cdot\frac{2E}{T_1}\cdot 2\int_0^{\frac{T_1}{2}}t\,dt=\frac{E}{2}$$

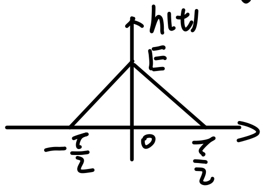
$$\int t\cos nw_1t\,dt=\frac{1}{nw_1}t\sin(nw_1t)+\frac{1}{n^2w_1^2}\cos(nw_1t)+c$$

故 $a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos nw_1t\,dt=\frac{8E}{T_1^2}\int_0^{\frac{T_1}{2}}t\cos(nw_1t)dt=\frac{2E}{n^2\pi^2}[\cos n\pi-1]=\frac{2E}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}\frac{-4E}{n^2\pi^2} & n\text{为奇}\\ 0 & n\text{为偶}\end{cases}$

从而 $f(t)=\frac{E}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4E}{(2n-1)^2\pi^2}\cos[(2n-1)w_1t]$

$$=\frac{E}{2}-\frac{4E}{\pi^2}\cos w_1t-\frac{4E}{9\pi^2}\cos 3w_1t-\cdots$$

2\. 法一：已知对于三角形脉冲 $h(t)$. $H(w)=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{w\tau}{4})$



$g(t)$相比 $h(t)$. 幅度 $\times E$，右移 $\frac{\tau}{2}$，且 $\tau=T$，代入有

$$G(w)=Ee^{-jw\frac{\tau}{2}}H(w)\Big|_{\tau=T}=\frac{E^2T}{2}e^{-jw\frac{T}{2}}Sa^2(\frac{wT}{4})$$

法二：

$$g(t)=\begin{cases}\frac{2E^2}{T}t & 0<t<\frac{T}{2}\\ -\frac{2E^2}{T}(t-T), & \frac{T}{2}<t<T\\ 0 & ，其它\end{cases}=\frac{2E^2}{T}r(t)-\frac{4E^2}{T}r(t-\frac{T}{2})+\frac{2E^2}{T}r(t-T)$$

$$g'(t)=\frac{2E^2}{T}[u(t)-2u(t-\frac{T}{2})+u(t-T)]\Rightarrow g''(t)=\frac{2E^2}{T}[\delta(t)-2\delta(t-\frac{T}{2})+\delta(t-T)]$$

$$\mathcal{F}[g''(t)]=\frac{2E^2}{T}(1-2e^{-jw\frac{T}{2}}+e^{-jwT})=\frac{2E^2}{T}e^{-jw\frac{T}{2}}(e^{jw\frac{T}{2}}+e^{-jw\frac{T}{2}}-2)=\frac{4E^2}{T}e^{-jw\frac{T}{2}}(\cos\frac{wT}{2}-1)=\frac{-8E^2}{T}e^{-jw\frac{T}{2}}\sin^2(\frac{wT}{4})$$

由 $f(t)\longrightarrow F(w)$

$f'(t)\longrightarrow(jw)F(w)$

$f''(t)\longrightarrow(jw)^2F(w)$

知 $\mathcal{F}[g(t)]=\frac{\mathcal{F}[g''(t)]}{(jw)^2}=\frac{TE^2}{2}e^{-jw\frac{T}{2}}Sa^2(\frac{wT}{4})$

3\. 理想采样公式：$F_s(w)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(w-nw_s)$ 代入 $T_s=\frac{T}{10}$，$w_s=\frac{2\pi}{T_s}=\frac{20\pi}{T}$，有

$$G_s(w)=\frac{10}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{TE^2}{2}e^{-j(w-\frac{20\pi}{T}n)\frac{T}{2}}Sa^2[\frac{T}{4}(w-\frac{20\pi}{T}n)]$$

$$=5E^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-j\frac{wT}{2}}Sa^2(\frac{wT}{4}-5n\pi)$$

姓名____ 学号____ 班号____ 学院____

密 封 线

三、计算题（20 分，每小题 5 分）

考虑有限长序列 $x(n)=\begin{cases}0.5, n=0\\ 1, n=1\\ 1, n=2\\ 0.5, n=3\end{cases}$

1. 用 DFT 的矩阵形式求 $X(k)$ = DFT[$x(n)$]（需写出详细计算过程）;
2. 由第 1 题所得结果求 IDFT[$X(k)$]，并验证所得结果是正确的;
3. 求$x(n)$与$x(n)$的 10 点圆卷积（方法不限，需有详细过程）;
4. 欲使$x(n)$与$x(n)$的圆卷积和线性卷积相同，求圆周卷积点数的最小值，并做出解释。

1. $N=4,\ W_4^1=e^{-j\frac{2\pi}{4}}=-j$ 从而

$$X(k)=\begin{bmatrix}X(1)\\X(2)\\X(3)\\X(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\1\\1\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\1\\1\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-0.5-0.5j\\0\\-0.5+0.5j\end{bmatrix}$$

$$x(n)=\begin{bmatrix}x(1)\\x(2)\\x(3)\\x(4)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-0.5-0.5j\\0\\-0.5+0.5j\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&j&-1&-j\\1&-1&1&-1\\1&-j&-1&j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-0.5-0.5j\\0\\-0.5+0.5j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\1\\1\\0.5\end{bmatrix}$$

3. 圆周卷积：$x(n)\circledast h(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h((n-m))_N\right]R_N(n)$

$x(m)$	0.5	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0
$x(0-m)R_{10}(m)$.	0.5	0	0	0	0	0	0	0.5	1	1
$x(1-m)R_{10}(m)$.	1	0.5							0.5	1
2	1	1	0.5							0.5
3	0.5	1	1	0.5						
4	0	0.5	1	1						
5	0	0	0.5	1						
6	0	0	0	0.5						
7	0	0	0	0						

$y(n)=x(n)\circledast x(n)=\{0.25,1,2,2.5,2,1,0.25,0,0,0\}$

4、$L=2N-1=7$，7点，由第3问可知圆周卷积结果后面有3个零

四、计算题（20 分，每小题 5 分）

1. 连续 LTI 系统的微分方程为$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=2x(t)$，求系统的单位冲激响应；

2. 对于第 1 题的系统，若输入信号$x(t)=te^{-2t}u(t)$，求系统的输出响应；

3. 离散 LTI 系统的差分方程为$y(n)+0.5y(n-1)=x(n)$，求系统的频率响应；

4. 对于第 3 题的系统，若输入信号$x(n)=\delta(n)+0.5\delta(n-1)$，求系统的输出响应。

1. $s^2Y(s)+6sY(s)+8Y(s)=2X(s)$，其中 $X(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]=1$

故 $Y(s)=\dfrac{2}{s^2+6s+8}=\dfrac{2}{(s+2)(s+4)}=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+4}$

故 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=e^{-2t}-e^{-4t}\quad t\geq0$

或写成 $y(t)=(e^{-2t}-e^{-4t})u(t)$

$-tf(t)\longrightarrow F'(s)$

2. $x(t)=te^{-2t}u(t)$ 由 $u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s}$, $e^{-2t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+2}$, $te^{-2t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{(s+2)^2}$

$Y(s)=\dfrac{2}{s^2+6s+8}X(s)=\dfrac{2}{(s+2)^3(s+4)}=\dfrac{a}{s+2}+\dfrac{b}{(s+2)^2}+\dfrac{c}{(s+2)^3}+\dfrac{d}{s+4}$

$d=\lim\limits_{s\to-4}(s+4)Y(s)=-\frac{1}{4}$, $c=\lim\limits_{s\to-2}(s+2)^3Y(s)=1$, $b=\lim\limits_{s\to-2}\frac{d}{ds}(s+2)^3Y(s)=-\frac{1}{2}$ $a=\lim\limits_{s\to-2}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+2)^3Y(s)\right]=\frac{1}{4}$

从而 $Y(s)=\dfrac{\frac{1}{4}}{s+2}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{(s+2)^2}+\dfrac{1}{(s+2)^3}+\dfrac{-\frac{1}{4}}{s+4}$ $e^{-2t}\to\frac{1}{s+2}$, $-te^{-2t}\to-\frac{1}{(s+2)^2}$ $t^2e^{-2t}\to2\frac{1}{(s+2)^3}$

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\left(\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{2}t^2e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-4t}\right)u(t)$

3. $Y(z)+0.5z^{-1}Y(z)=X(z)$, $\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z}{z+0.5}$

频率响应: $H(j\Omega)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\dfrac{1}{1+0.5e^{-j\Omega}}$

4. $x(n)=\delta(n)+0.5\delta(n-1)$, 有 $X(z)=1+0.5z^{-1}$

$Y(z)=\dfrac{z}{z+0.5}(1+0.5z^{-1})=1\Rightarrow y(n)=\delta(n)$

五、综合题（20 分）

滤波器是用于信号处理和滤除噪声的系统。回答下列问题：

1. 简述在模拟滤波器设计中，如何针对最小相位系统正确配置零极点。（5 分）

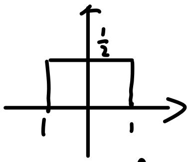
2. 简述在数字滤波器设计中，双线性变换法的作用。（5 分）

3. 输入信号$x(t)=Sa(t)\cos(2t)$，求其经过截止频率$\omega_c=2rad/s$的理想低通滤波器（设其通带内放大倍数为 3）的输出。（10 分）

1. 极点：H(s)的极点均在左半平面　(偶数阶重零点)
   零点：H(s)的零点为左半平面所有零点+虚轴上均分的一半

2. 建立S域到Z域的一一映射，防止频谱混叠

3. 滤波器 $H(\omega)=\begin{cases}3e^{-j\omega t_0} & |\omega|<2rad/s\\ 0 & 其它\end{cases}$

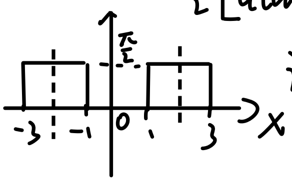


$\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa(\omega)$，故 $Sa(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & 其它\end{cases}=\pi[u(\omega+1)-u(\omega-1)]$

$e^{j2t}\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega-2)$，$e^{-j2t}\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega+2)\Rightarrow\cos(2t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$

故 $X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[Sa(t)]*\mathcal{F}[\cos(2t)]=\frac{1}{2\pi}\pi^2[u(\omega+1)-u(\omega-1)]*[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$

$=\frac{\pi}{2}[u(\omega+3)+u(\omega-1)-u(\omega+1)-u(\omega-3)]$



设 $g_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac12\\ 0 & |\omega|>\frac12\end{cases}$，有 $Y_1(\omega)=\frac{3\pi}{2}\{g_1(\omega+\frac32)+g_1(\omega-\frac32)\}$

$=\frac{3\pi}{2}\{g_1(\omega)*[\delta(\omega+\frac32)+\delta(\omega-\frac32)]\}$

$y_1(t)=3\pi^2\mathcal{F}^{-1}[g_1(\omega)]\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega+\frac32)+\delta(\omega-\frac32)]$

$=3\pi^2\frac{1}{2\pi}Sa(\frac{t}{2})\cdot\frac{1}{\pi}\cos(\frac32 t)$

$=\frac32 Sa(\frac{t}{2})\cos(\frac32 t)$

故 $y(t)=\frac32 Sa(\frac{t-t_0}{2})\cos(\frac32(t-t_0))$

输出响应为 $y(t)=\frac{K(\omega_c-1)}{2}Sa\left[\frac{\omega_c-1}{2}(t-t_0)\right]\cos\left[\frac{\omega_c+1}{2}(t-t_0)\right]$,　$-\infty<t<\infty$

姓名　学号　班号　学院

密　封　线