《信号分析与处理》实验指导书

2024 年 10 月

实验一　周期信号的分解与合成

一、实验目的

1. 熟练 MATLAB 或 MWORKS 仿真软件的使用；
2. 掌握连续周期信号的频谱分析方法——连续傅里叶级数及其物理意义；
3. 掌握离散周期信号的频谱分析方法——离散傅里叶级数及其物理意义。

二、实验原理

1. 连续周期信号的三角傅里叶级数

设周期为T的周期信号$f(t)$满足狄里赫利（Dirichlet）条件，按照傅里叶级数的定义，$f(t)$可以由三角函数的线性组合来表示，即：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

式中，$\omega_0 = 2\pi/T$为周期信号的角频率，a_0、a_n和b_n称为傅里叶级数，由以下各式求出：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

利用三角函数恒定等式：

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

式中，$a_n = c_n \cos\theta_n$，$b_n = -c_n \sin\theta_n$。在基础上，可将三角傅里叶级数写成更为简洁的余弦-相位形式：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

其中：

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

上式表明，任何满足狄里赫利条件的周期信号都可分解为一系列不同频率的余弦信号的叠加。其中c_0是常数项，表示周期信号中包含的直流分量；$c_n\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$称为周期信号的$n$次谐波，$c_n$表示谐波分量的幅值，$\theta_n$表示谐波分量的初始相位。

2. 连续周期信号的复指数傅里叶级数

复指数集$e^{jn\omega_0 t}(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$在时轴上的任一周期内$T = 2\pi/\omega_0$内是正交的，即:

$$\int_t^{t+T} e^{jm\omega_0 t}(e^{jn\omega_0 t})^* dt = \int_t^{t+T} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T & m = n \end{cases}$$

则周期为T的信号$f(t)$可以展开成复指数傅里叶级数，

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

其中：

$$F_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

可见，周期信号可以分解为一系列不同频率的复指数信号的叠加，式中的F_n称为复傅里叶系数。

事实上，可以直接从三角傅里叶级数推导出（复）指数形式傅里叶级数。利用欧拉公式，谐波分量可以表示为如下形式：

$$c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{c_n}{2}\left[e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-(jn\omega_0 t + \theta_n)}\right] = F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

其中$F_n = \frac{1}{2} c_n e^{j\theta_n}$。已知三角傅里叶级数的余弦-相位形式为：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

令$c_0 = F_0$，即可得到：

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n}e^{-jn\omega_0 t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

由此可见，指数傅里叶级数是三角傅里叶级数的另一种表达方式。表 1 给出了周期信号的三角函数形式傅里叶级数和指数形式傅里叶级数及其系数，以及系数之间的关系。

表 1 连续周期信号三角函数傅里叶级数及指数傅里叶系数关系表

形式	指数形式	三角函数形式
周期信号傅立叶级数展开式	$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$ $F_n=\lvert F_n\rvert e^{j\theta_n}$	$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$ $=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$
傅立叶系数	$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$	$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt$ $a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad n=1,2,3,\ldots$ $b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad n=1,2,3,\ldots$ $c_0=a_0$ $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad n=1,2,3,\ldots$ $\theta_n=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad n=1,2,3,\ldots$
系数间的关系	$F_n=\frac{1}{2}c_n e^{j\theta_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$ $\lvert F_n\rvert=\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, 是 n 的偶函数 $\theta_n=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$, 是$n$ 的奇函数	$a_n=c_n\cos\theta_n=F_n+F_{-n}$, 是 n 的偶函数 $b_n=-c_n\sin\theta_n=j(F_n-F_{-n})$, 是$n$ 的奇函数 $c_n=2\lvert F_n\rvert$

3. 离散周期信号的复指数傅里叶级数

设离散周期信号$x_p(n)$的周期为N，其同样可以展开成复指数形式的傅里叶级数，与连续时间情况不同的是，此时的傅里叶级数是有限项。离散傅里叶级数（DFS）变换对如下（由于已知数字角频率 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$，通过 DFS 得到的$X_p(k\Omega_0)$此时可简写为$X_p(k)$）：

$$X_p(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)\,e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$x_p(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)\, e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}, \qquad n=0,1,\cdots,N-1$$

通过欧拉公式，可以得到$X_p(k)$的实部a_k和虚部b_k分别为：

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)$$

$$b_k=-\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)$$

用实部a_k和虚部b_k表示$X_p(k)$，将其代入由 IDFS 得到的 $x_p(n)$ 的表达式，得：

$$x_p(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)-b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)\right]+j\sum_{k=0}^{N-1}\left[a_k\sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)+b_k\cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)\right]$$

三、实验内容

1. 利用 MATLAB 或 MWORKS 观察连续周期方波信号的分解与合成

连续周期方波信号$f(t)$如图 1 所示，求出该信号三角函数形式的傅里叶级数，编程实现各次谐波叠加情况的观察与分析。

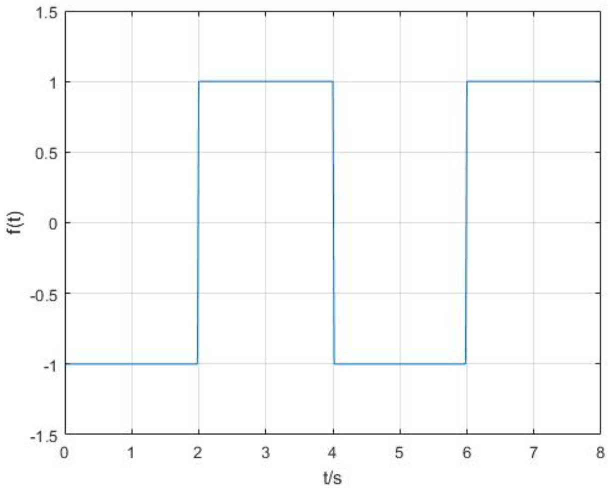

图 1 连续周期方波信号

该周期方波信号$f(t)$解析表达式为：

$$f(t)=\begin{cases}1, & 4k+2\le t\le 4(k+1)\\ -1, & 4k\le t\le 4k+2\end{cases} \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

该周期方波信号的周期$T=4$，且为奇函数，故$a_n=0$，所以：

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\omega_0 t\right)$$

计算可得：

$$b_n=\begin{cases}0 & n=2,4,6,\cdots \\ -\dfrac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

该周期方波信号的傅里叶级数为:

$$f(t)=-\frac{4}{\pi}\{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}t\right]\} \quad n=1,2,\cdots$$

因此，只要由b_n计算出$f(t)$各次谐波的振幅，再根据各次谐波的频率，就可以利用软件绘出周期方波信号的各次谐波叠加后的波形。当周期信号合成中包含的谐波分量越多时，合成波形越接近原来的周期方波信号。叠加后的波形如图 2。

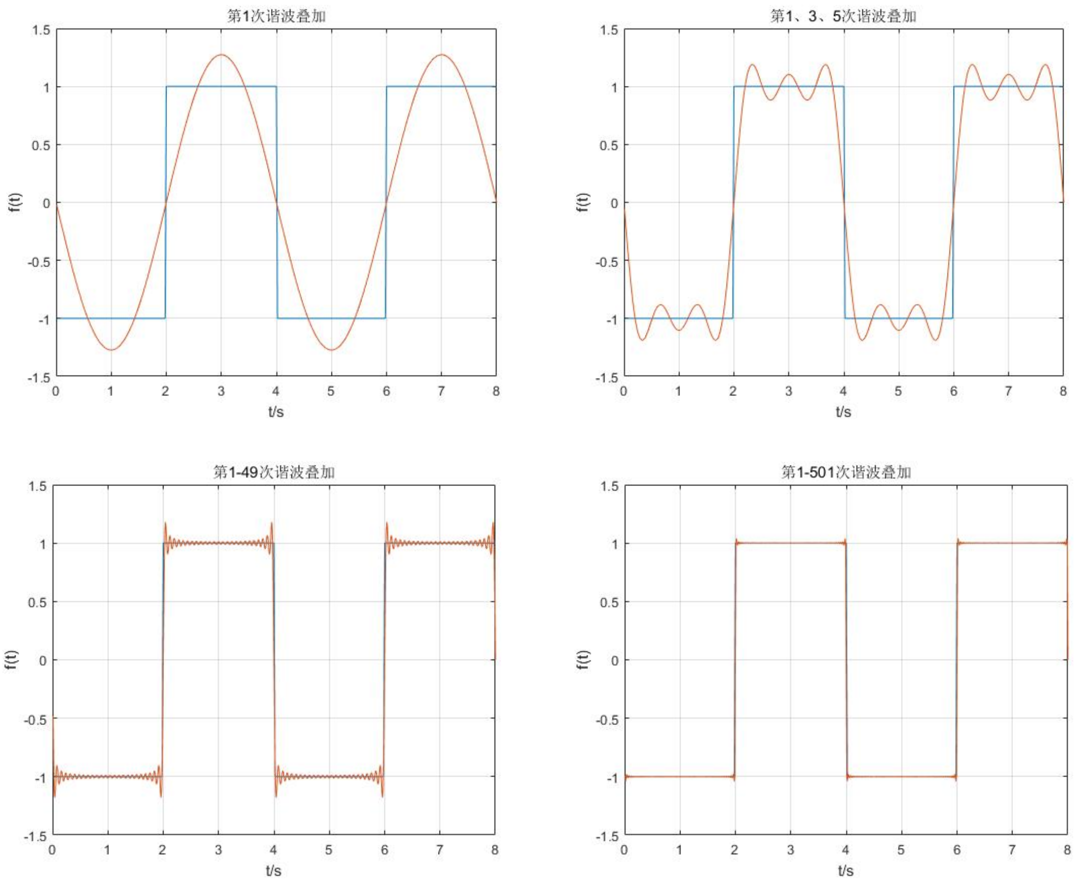

图 2 连续周期方波的合成与分解

注意：在理论分析中，时间都是从 0 开始的；但是在编写程序时，绘图使用的时间区间需要自行离散化，对应时间的整数需要从 1 开始。

2. 观察离散方波信号的分解与合成

（1）对上一节的连续周期方波信号进行采样，取不同的采样间隔（至少 2 种情况），编程得到 60 次谐波合成的图像$x(n)$。结合所得结果，自行讨论。

注意：在使用（0：ts：T）表示离散时间点时，会多出一个点；例如考虑 4s 的时间区间长度，采样点数为 60，则采样间隔为 4/60 s，在 0 到 4s 上会生成 61 个点，去掉最后一个点直接使用 DFS 公式计算即可，否则后续绘图时，时间点数和数值个数对不上，可能出现报错。离散周期信号的 DFS 是基于复指数形式获得的，绘图时注意观察幅值，结合课上所学知识，思考如何得到需要合成的离散方波信号。

（2）编程得到各次谐波组成的包络线（先绘制频谱图，再绘制外轮廓线即包络线）。

3. 利用 MATLAB 观察周期锯齿波信号的分解与合成

周期锯齿波的分析与周期方波类似，编程求出周期锯齿波的傅里叶级数。将锯齿波各次谐波叠加后的波形与原周期信号的时域波形进行比较，观察周期信号的分解与合成过程。图 3 给出了 7 次谐波合成的例子。

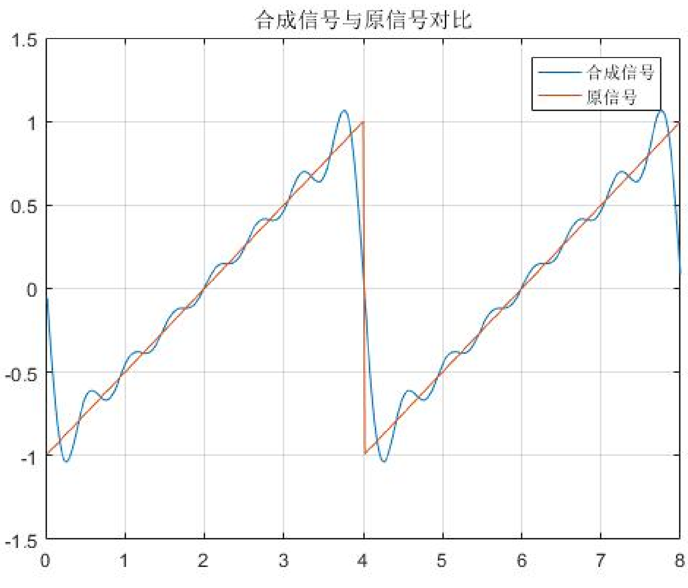

图 3 周期锯齿波的合成与分解（7 次谐波合成）

四、实验预习要求

1. 复习周期信号的分解与合成，认真思考并回答实验思考题。

2. 仔细阅读实验指导书，熟悉实验内容、要求和注意事项。
3. 提前自学相关仿真软件，了解软件的基础使用方法。
4. 认真阅读程序，掌握有关函数的使用方法。

五、实验报告要求

1. 注明所使用的仿真软件，整理程序步骤，在实验报告中给出详细代码、流程图以及仿真画出的曲线图。
2. 对实验结果进行分析讨论，回答思考题。
3. 实验报告交电子版，按实验老师的要求提交。

六、实验思考题

1. 结合理论与实验结果，简述连续周期信号频谱的特点。
2. 结合理论与实验结果，简述离散周期信号频谱的特点。
3. 以周期矩形脉冲信号为例，分析：当信号的周期 T 和脉冲宽度 τ 发生变化的时候，信号的频谱将如何变化？离散时间矩形周期信号当采样间隔发生变化时，信号的频谱会如何变化？