实验二　时域采样和频域采样

一、实验目的

1. 掌握时域采样定理及采样前后频谱的变化规律；
2. 掌握频域采样定理及其对频域采样点数选择的指导作用；
3. 掌握时域采样频率的选择方法及频域采样点数的选择方法。

二、实验原理

1. 时域采样原理

对模拟信号$x(t)$以间隔T_s进行时域等间隔理想采样，形成的采样信号$x_s(t)$的频谱$X_s(\omega)$是原模拟信号频谱$X(\omega)$以采样角频率ω_s（$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$）为周期进行周期延拓。其公式表示为：

$$X_s(\omega)=\mathcal{F}[x_s(t)]=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

对上式进行计算并不容易，因此，需要采用另外一种公式，以便在计算机上进行实验。已知理想采样信号$x_s(t)$和模拟信号$x(t)$之间的关系为：

$$x_s(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

对上式进行傅里叶变换得到：

$$X_s(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right]e^{-j\omega t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT_s)e^{-j\omega t}\,dt$$

上式中，只有当$t=nT_s$时才有非零值，因此：

$$X_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$

在数值上$x(nT_s)=x(n)$，将$\Omega=\omega T_s$代入上式，得到：

$$X_s(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}$$

上式说明，理想采样信号的傅里叶变换可采用相应的采样序列的傅里叶变换得到，只要将自变量Ω用ωT_s代替即可。由时域采样定理可知，采样频率ω_s必须大于等于模拟信号最高频率的两倍以上，才能使采样信号的频谱不产生频谱混淆。

2. 频域采样原理

对信号$x(n)$的频谱函数$X(\Omega)$在[0，2π]上等间隔采样N个点，得到：

$$X_N(k) = X(\Omega) \quad \Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

则N点 IDFT$[X(k)]$（IDFT 指离散傅里叶逆变换）得到的序列就是原序列$x(n)$以N为周期进行周期延拓后的主值区间序列，公式为：

$$x_N(n) = \mathrm{IDFT}[X_N(k)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iN)\, R_N(n)$$

由上式可知，频域采样点数 N 必须大于等于时域离散信号的长度M（$N \geq M$），才能使时域不产生混叠，此时N点 IDFT$[X_N(k)]$得到的序列$x_N(n)$就是原序列$x(n)$，即$x_N(n) = x(n)$。

如果$N > M$，$x_N(n)$比原序列尾部多$N-M$个零点；如果$N < M$，则$x_N(n) = \mathrm{IDFT}[X_N(k)]$发生了时域混叠失真，而且$x_N(n)$的长度$N$也比$x(n)$的长度$M$短，因此$x_N(n)$与$x(n)$不相同。对比时域采样原理和频域采样原理，可以得知：两种采样理论具有对偶性——“时域采样，频谱周期延拓；频域采样，时域信号周期延拓”。

三、实验内容

1. 时域采样的验证

给定模拟信号$x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t)u(t)$，其中$A = 444.128$，$\alpha = 50\sqrt{2}\pi$，$\omega_1 = 50\sqrt{2}\pi\ rad/s$，它的幅频特性曲线如图 1 所示：

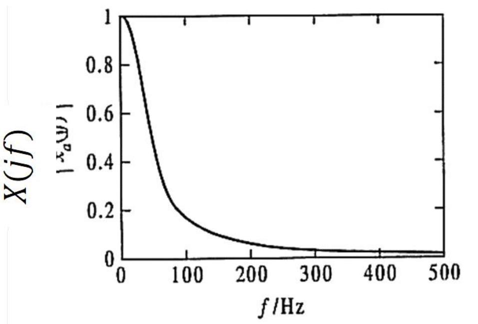

图 1 模拟信号$x(t)$的幅频特性曲线

现拟采用 DFT（离散傅里叶变换）或 FFT（快速傅里叶变换）求该模拟信号的幅频特性，以验证时域采样理论。步骤如下：

- 通过观察给定模拟信号的幅频特性曲线及模拟信号的自身频率，拟选取三种采样频率进行观测，即f_s=1000Hz，300Hz，200Hz，观察时间 T_p=64ms。
- 为使用 DFT，首先用下面的公式产生时域离散信号，对三种采样频率，采样序列按顺序用$x_1(n), x_2(n), x_3(n)$表示：

$$x(n) = x(nT_s) = Ae^{-\alpha nT_s}\sin(\omega_1 nT_s)u(nT_s)$$

- 因为采样频率不同，得到的$x_1(n), x_2(n), x_3(n)$的长度不同，长度（点的数量）可以用公式 $N = T_p \cdot f_s$ 计算：

$$X(k) = \text{FFT}[x(n)], k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

式中，k代表的频率为$\frac{2\pi}{N}k$，N为周期。

请自行编写采样频率分别为 1000Hz、300Hz 和 200Hz 的采样点图和幅频特性曲线，并观察比较。请将图像放到对应位置，即 subplot(3,2,1)、subplot(3,2,2)、subplot(3,2,3)、subplot(3,2,4) 、subplot(3,2,5) 、subplot(3,2,6)。便于观察比较。

2. 频域采样的验证

给定信号如下：

$$x(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \le n \le 13 \\ 27-n & 14 \le n \le 26 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

实验步骤如下：

- 编写程序分别对频谱函数$X(e^{j\Omega}) = FT[x(n)]$在区间$[0,2\pi]$上等间隔采样 32 和 16 个点，得到 $X_{32}(k)$ 和 $X_{16}(k)$ 如下：

$$X_{32}(k) = X(e^{j\Omega}) \quad \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{32}k}, k = 0, 1, 2, \dots, 31$$

$$X_{32}(k) = X(e^{j\Omega}) \quad \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{16}k}, k = 0, 1, 2, \dots, 15$$

- 再分别对 $X_{32}(k)$ 和 $X_{16}(k)$ 进行 32 点和 16 点 IDFT，得到 $x_{32}(n)$ 和 $x_{16}(n)$：

$$x_{32}(n) = \text{IFFT}[X_{32}(k)]_{32} \quad , \quad n = 0,1,2,\cdots,31$$

$$x_{16}(n) = \text{IFFT}[X_{16}(k)]_{16} \quad , \quad n = 0,1,2,\cdots,15$$

请自行编写采样程序，分别画出$X(e^{j\Omega})$、$X_{32}(k)$和$X_{16}(k)$的幅度谱，并绘图显示三角波序列$x(\text{n})$，16 点 IDFT 序列$x_{16}(n)$和 32 点 IDFT 序列$x_{32}(n)$的波形进行对比和分析，验证总结频域采样理论，并将图像放到对应位置，即 subplot(3,2,1)、subplot(3,2,2)、subplot(3,2,3)、subplot(3,2,4) 、subplot(3,2,5) 、subplot(3,2,6)，便于观察比较。

四、实验预习要求

1. 复习时域采样定理以及频率域采样定理，认真思考并回答实验思考题。
2. 仔细阅读实验指导书，熟悉实验内容、要求和注意事项。
3. 认真阅读程序，掌握有关函数使用方法。DFT 的计算过程可以自行编写函数实现，也可以直接使用软件内置的函数（例如 fft，可以查阅帮助文档）。

   注意：绘制 $X(e^{j\Omega})$ 幅度谱时，两种方法的采样点都应补充到$2^m(m \geq 5)$个，以满足后续实验等间隔采样 32 和 16 个点的要求。

五、实验报告要求

1. 整理程序步骤，实验报告需给出详细代码、流程图和仿真得到的图像。
2. 结合所得实验结果进行分析讨论，并回答实验思考题。
3. 实验报告交电子版，**注明使用的仿真软件类型，画图时应标注横、纵坐标的含义**。

六、实验思考题

1. 如果序列$x(n)$的长度为 M，希望得到其频谱 $X(e^{j\omega})$ 在$[0,2\pi]$上的 N 点等间隔采样，当$N < M$时，如何用一次最少点数的 DFT 得到该频谱采样？
2. 在时域采样的验证过程中，为什么采用 DFT（离散傅里叶变换）或者 FFT（快速傅里叶变换）求模拟信号的幅频特性？