

## 实验四 滤波器的设计

### 一、实验目的

1. 了解滤波器的基本概念，掌握模拟低通滤波器到数字低通滤波器的转换方法；
2. 理解模拟、数字滤波器的滤波类型；
3. 掌握应用基于仿真软件的滤波器设计方法；
4. 掌握应用基于仿真软件的滤波器性能分析方法。

### 二、实验原理

一个  $N$  阶 IIR 数字滤波器的系统函数可表示为：

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{M-1}z^{-M+1} + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N-1}z^{-N+1} + b_Nz^{-N}}$$

数字滤波器的设计就是确定滤波器系统函数的系数  $a_i, b_j (i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M)$ ，使数字滤波器频率响应满足给定的性能指标。因为数字滤波器在很多场合需要完成的任务与模拟滤波器相同，如作低通、高通、带通及带阻滤波等，这时数字滤波也可以看作是“模仿”模拟滤波。因此，本实验采用模拟滤波器的理论来设计数字滤波器，该方法可称为“模拟原型法”，即先设计一个合适的模拟滤波器，然后将其变换为满足预定指标的数字滤波器。冲激响应不变法（或称为脉冲响应不变法）和双线性变换法是两种常用的映射变换方法，实现从  $s$  平面到  $z$  平面的映射。

#### 1. 冲激响应不变法

冲激响应不变法是从滤波器的冲激/脉冲响应出发，用数字滤波器单位脉冲响应序列  $h(n)$  模仿模拟滤波器的单位冲激响应  $h_a(t)$ ，使  $h(n)$  正好等于  $h_a(t)$  的采样值，即：

$$h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = h_a(nT)$$

其中  $T$  为采样周期。该方法特别适用于部分分式表达的系统函数，若模拟滤波器的系统函数只有单阶极点，则可以表达为部分分式形式：

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - p_i}$$

对上式进行拉普拉斯逆变换，得

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t)$$

为了保证转换以后得到数字滤波器的增益不变， $h(n)$ 的设计值通常使用 $Th_a(t)$ 。由此，对模拟滤波器系统的单位冲激响应 $h_a(t)$ 以采样时间 $T$ 进行采样，得

$$h(n) = Th_a(t)|_{t=nT} = T \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} u(nT)$$

显然，这样定义的数字滤波器得到的单位采样响应在采样点上等于模拟滤波器得到的单位脉冲响应。对 $h(n)$ 进行 $Z$ 变换，得

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( T \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} \right) z^{-n} = T \sum_{i=1}^N \left( \sum_{n=0}^{\infty} K_i e^{p_i nT} \right) z^{-n} = \sum_{i=1}^N \frac{TK_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

式中的 $e^{p_i T}$ 为数字滤波器系统函数的极点。

## 2. 双线性变换法

冲激响应不变法主要缺点是频谱交叠产生的混淆，这是从 $s$ 平面到 $z$ 平面的标准变换 $z = e^{sT}$ 的多值对应关系导致的。为了克服这一缺点，可以采用双线性变换法，其 $s$ 平面与 $z$ 平面的单值映射关系如下：

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

双线性变换法得到 $s$ 平面与 $z$ 平面的单值一一对应，所以不会出现由于高频部分超过折叠频率而混淆到低频部分去的现象。由于 $s$ 与 $z$ 之间的简单代数关系，可直接通过变量置换将模拟滤波器的系统函数转换为数字滤波器的系统函数，转换关系如下：

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=k \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

一般来说， $k = \frac{2}{T}$ 。

## 3. 使用模拟原型法设计 IIR 数字低通滤波器

设计 IIR 数字低通滤波器的步骤如下：

(1) 将数字低通滤波器的性能指标转换为模拟低通滤波器的性能指标；

(2) 根据低通滤波器的性能指标和滤波器类型例如巴特沃思、切比雪夫 I 型、切比雪夫 II 型或椭圆形，来估计系统函数的阶数 $N$ 和通带、阻带截止频率；

(3) 由滤波阶数 $N$ 得到模拟低通滤波器的原型系统函数；

(4) 根据通带、阻带截止频率，将模拟低通滤波器原型转换为相应的模拟低通、高通、带通或带阻滤波器；

(5) 使用冲激响应不变法或双线性变换法，将模拟滤波器转换成数字滤波器。

#### 4. 滤波器设计用到的函数（以 MATLAB 为例）

MATLAB 信号处理工具箱提供了几个直接用于设计滤波器的函数，为滤波器设计带来了极大的便利。`butter`、`cheby1`、`cheby2`、`ellip` 这四个函数可以直接设计巴特沃思、切比雪夫 I 型，切比雪夫 II 型和椭圆形四种类型的滤波器，通过设置不同的参数，可以得到高通、低通、带通、带阻滤波器。

分析模拟、数字滤波器的冲激或脉冲响应可以调用函数 `impulse`、`impz`；分析模拟、数字滤波器的频率响应可以调用函数 `freqs`、`freqz`；求滤波器系统函数可以调用函数 `tf`；冲激响应不变法调用函数 `impinvar`，双线性变换法调用函数 `bilinear`。

其中，`freqz` 基本调用格式为 `freqz(b,a)`，此时函数内部默认进行 512 点算术插值，所以输出是 512 点的幅度值和对应的  $0\sim\pi$  自变量向量，如果需要改变向量长度便于绘图，可附加维度信息，例如 `freqz(b,a,N)` 则进行  $N$  点插值。**注意：此工具箱遵循的约定是将单位频率设定为奈奎斯特频率，定义为采样频率的一半，所有基本滤波器设计函数的截止频率参数均用奈奎斯特频率进行归一化处理。**所有函数均可以调用仿真软件帮助文档，查阅相关功能。

### 三、实验内容

#### 1. 模拟低通滤波器设计（依次用到函数：`buttord`, `butter`, `tf`, `impulse`, `freqs`）

参考赵光宙教材第 300 页例 4-17 及其程序说明，设计一个低通模拟滤波器，其中通带截止频率为  $300\text{rad/s}$ ，阻带截止频率为  $500\text{rad/s}$ ，通带内波动为  $3\text{dB}$ （即通带最大衰减对应  $3\text{dB}$ ），阻带内最小衰减为  $20\text{dB}$ ，仿真计算**模拟滤波器**的系统函数，使用 `freqs` 函数求解滤波器的频率特性（频率点数可自行选取），在绘图窗口绘制滤波器的冲激响应（横轴时间取  $0\sim 0.1\text{s}$ ）、幅频特性（坐标轴的显示范围设置为 `axis([0 600 -30 8])`）以便

观察)，绘图时显示网格（grid on），显示 x 轴、y 轴坐标含义文本。

## 2. 数字低通滤波器设计（依次用到函数：buttord, butter,impinvar, impz, tf, freqz）

采用冲激响应不变法设计一个巴特沃思低通数字滤波器，其通带截止频率为 0.4rad，阻带截止频率为 0.8rad，采样频率为  $F_s=100\text{Hz}$ （根据采样定理，最高截止频率为 50Hz），通带内的最大衰减为 3dB，阻带内的最小衰减为 15dB，仿真计算**数字滤波器**系统函数，在绘图窗口绘制出滤波器的脉冲响应、幅频特性。

说明：首先设计模拟巴特沃思低通滤波器，使用 buttord 计算滤波器阶数，应注意数字角频率和模拟角频率之间的转换；然后利用冲激响应不变法，将模拟滤波器转换为数字滤波器。以 MATLAB 为例，幅频特性使用 freqz 函数进行分析，在绘制幅频特性曲线时，如直接使用 freqz(b,a)形式进行绘图，仿真软件将自动输出幅频特性和相频特性的图像，横坐标为归一化以后的频率；如使用  $[H, W] = \text{freqz}(b,a)$ 形式，此时频率 W 输出范围为  $0\sim\pi$ ，如果希望横坐标显示单位为 Hz，可以将频率输出值乘以  $F_s/2\pi$ 。

## 3. 数字低通滤波器设计（依次用到函数：buttord, butter, bilinear, impz, tf, freqz）

采用双线性变换法设计实验内容 2 所述的巴特沃思低通数字滤波器，使用基于仿真计算**数字滤波器**的系统函数，在绘图窗口绘制出滤波器的脉冲响应、幅频特性，并将所得结果与冲激响应不变法设计得到的结果进行比较。

说明：在设计模拟巴特沃思低通滤波器原型时，应特别注意频率预畸变问题；然后利用双线性变换法，将模拟滤波器转换为数字滤波器。关于幅频特性的分析请参考实验内容 2 的说明。

## 四、实验要求

给出设计实现上述滤波器的仿真程序代码，程序中所用的变量和函数都应添加适当的注释；为便于观察，绘制图像时须显示网格（grid on）；讨论滤波器不同实现方法的特性，比较模拟、数字滤波器的不同时域和频域性能指标。实验报告交电子版。

## 五、实验思考题

1. 总结巴特沃思低通滤波器幅频特性的特点。
2. 双线性变换法中模拟频率与数字频率之间的关系是非线性的，在设计数字滤波器时，应如何处理这种非线性关系？