信号分析与处理(一)：连续信号　　2023.11.26　v1.1

## 1.1 连续信号的时域描述

2023.8.30 Lec 2

绪论补：能量信号与功率信号

## 一、常见信号

### 1、正弦信号

$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$　　与周期复指数信号联系：Euler 公式　　O. 1.3.1

同频率正弦量叠加是该频率正弦量；以 $k\omega_0$ 作频率的正弦信号叠加所得频率为 $\omega_0$。　　赵、P8

(基波与各次谐波)

若有两正弦信号的角频率分别为 $\omega_1$、$\omega_2$，且 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 为有理数，则此二信号之和也为正弦信号，且角频率为原信号角频率的最大公因数(周期为最小公倍数)　　O. 1.3.1

### 2、指数信号　$x(t)=Ae^{st}$

① 实指数信号　　A 与 s 均为实数

② 复指数信号

- 周期复指数信号 (s为纯虚数) $\xrightarrow{\text{Euler公式}}$ 正弦信号　Re cos　Im sin　　赵、P10
- 一般 - - (s为复数) $\sigma+j\omega_0$　　指数包络的正弦型振荡　包络 $e^{\sigma t}$

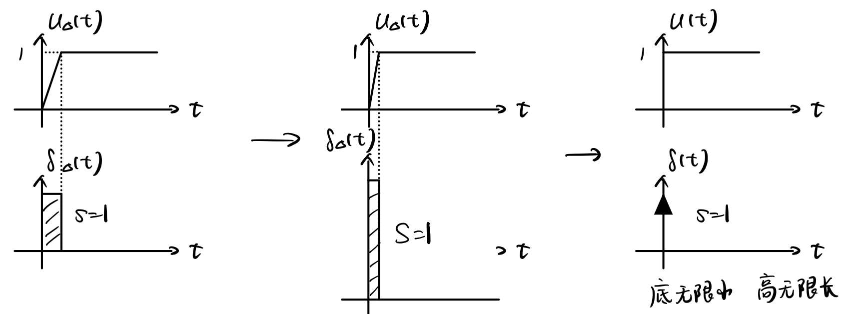
### 3、奇异信号

用于表示三角波　　用于表示矩形脉冲

单位斜坡函数 $r(t)$　　单位阶跃信号 $u(t)$　　单位冲激信号 $\delta(t)$

$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt$　① 1.37　　$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$　"积分区间之移动"

$=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$　② 1.38 "被积函数之移动"




底无限小　高无限长

$\delta(t)=0,\ t\neq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)=1$

O. 1.4.2 好!

$\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t)=u(t)$

$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)=\delta(t)$

性质：① $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$　筛选

取 $t=t_0$ 即可。

③ $\delta(-t)=\delta(t)$　偶

2.5 好!

(卷积/运算定义)

O、习题 1.38、1.39

"通过其性质而不是给出在每一时刻的值来定义 $\delta(t)$"

单位冲激偶信号　→ 其实是通过卷积定义，因为线性时不变系统的响应可由它的冲激响应完全确定 (O.2.3)

是微分器的单位冲激响应

[补充]　　(不同的书有不同的处理方法)

if $k + r = 0$. Therefore, by defining singularity functions in terms of their behavior under convolution, we obtain a characterization that allows us to manipulate them with relative ease and to interpret them directly in terms of their significance for LTI systems. Since this is our primary concern in the book, the operational definition for singularity functions that we have given in this section will suffice for our purposes.[6]

推广：

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=x(t)*u_2(t)$　(unit doublet)

$\int\uparrow\ \downarrow d$

$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)*u_1(t)$　O. 2.5

$\int\uparrow\ \downarrow d$

$x(t)=x(t)*u_0(t)$　恒等系统

$\int(\delta(t))\downarrow d$

$\int x(t)dt=x(t)*u_{-1}(t)$　单位阶跃

$\int(u(t))\downarrow d$

$\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau}x(\sigma)d\sigma\right)d\tau=x(t)*u_{-2}(t)$　两个积分器级联　单位斜坡函数 $r(t)$

① $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)dt=-f'(t_0)$　利用分部积分法证明

② 面积为0

③ 奇函数

## 二、信号变换与运算

1、时移

2、时间反转　　　　例：赵 P14（例 1-2）

3、尺度变换（幅度、自变量）

4、乘积与微积分（略）

### 5、卷积

$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$　　O. 2.2, 2.3

卷积的计算例　　O. p62-63

先微后积 / 先积后微 有时有帮助

↑

卷积之积分相当于将其中一信号换成其积分后卷积

结合律　　微分　　微分

卷积的性质　　O. 2.3（其实也即 LTI 的性质）　题 2.4.3 + 微积分性质

运算定义奇异函数

$x(t)*u_k(t)=\dfrac{d^k x(t)}{dt^k}$　$(\delta^{(k)}(t))$

$x(t)*u_{-k}(t)=x(t)*\underbrace{u(t)*\cdots*u(t)}_{k个}$

$=\int$

单位冲激偶

$u_{-k}=\overbrace{u(t)*\cdots}^{k-1个看作x(t)}*\underbrace{u(t)}_{看作h(t)}$　[ h(t) of running integral ]

$=\int_{-\infty}^{t} u_{-(k-1)}(\tau)\,d\tau$

$u_k=\overbrace{u_1(t)*\cdots}^{k-1个看作x(t)}*\underbrace{u_1(t)}_{看作h(t)}$　[ h(t) of first difference ]

特别：$u_{-2}(t)=t\,u(t)$　unit ramp　$r(t)$　←　2023.9.4　Lec 3

$\underset{(-1)}{u}(t)*u_1(t)=\underset{(u_0(t))}{\delta(t)}$

Convolution Definition of Singular Functions

$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$

## 三、连续信号的时域分解

1、交+直、奇+偶（O. 1-2、3）

### 2、分解成冲激函数之和　　O. 2.2.1

Oppen 的逻辑：$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,\underbrace{\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta}_{为1}$　将信号阶梯化处理　　O、图 2.12　强调：加权移位冲激函数之和（无限和即成为积分）

$\Delta\to 0$：$\hat{x}(t)\to x(t)$　$x(k\Delta)\to x(\tau)$　$\delta_\Delta(t-k\Delta)\to\delta(t-\tau)$　$\Delta\to d\tau$　$\Sigma\to\int$

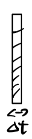
因而 $x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$　卷积积分

用冲激（延迟冲激）之组合可表示连续时间信号，

用冲激响应　——　——　在线性时不变系统下的响应、→ 后续

赵的逻辑：

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\left\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k-1)\Delta t]\right\}$



$\updownarrow\ \delta$（$\Delta t\to 0$ 时）

$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\,\dfrac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k-1)\Delta t]}{\Delta t}\,\Delta t$

$\to\ \delta(t-k\Delta t)\to\delta(t-\tau)$

$\Delta t\to d\tau$，$k\Delta t\to\tau$

$\Sigma\to\int$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=x(t)*\delta(t)$

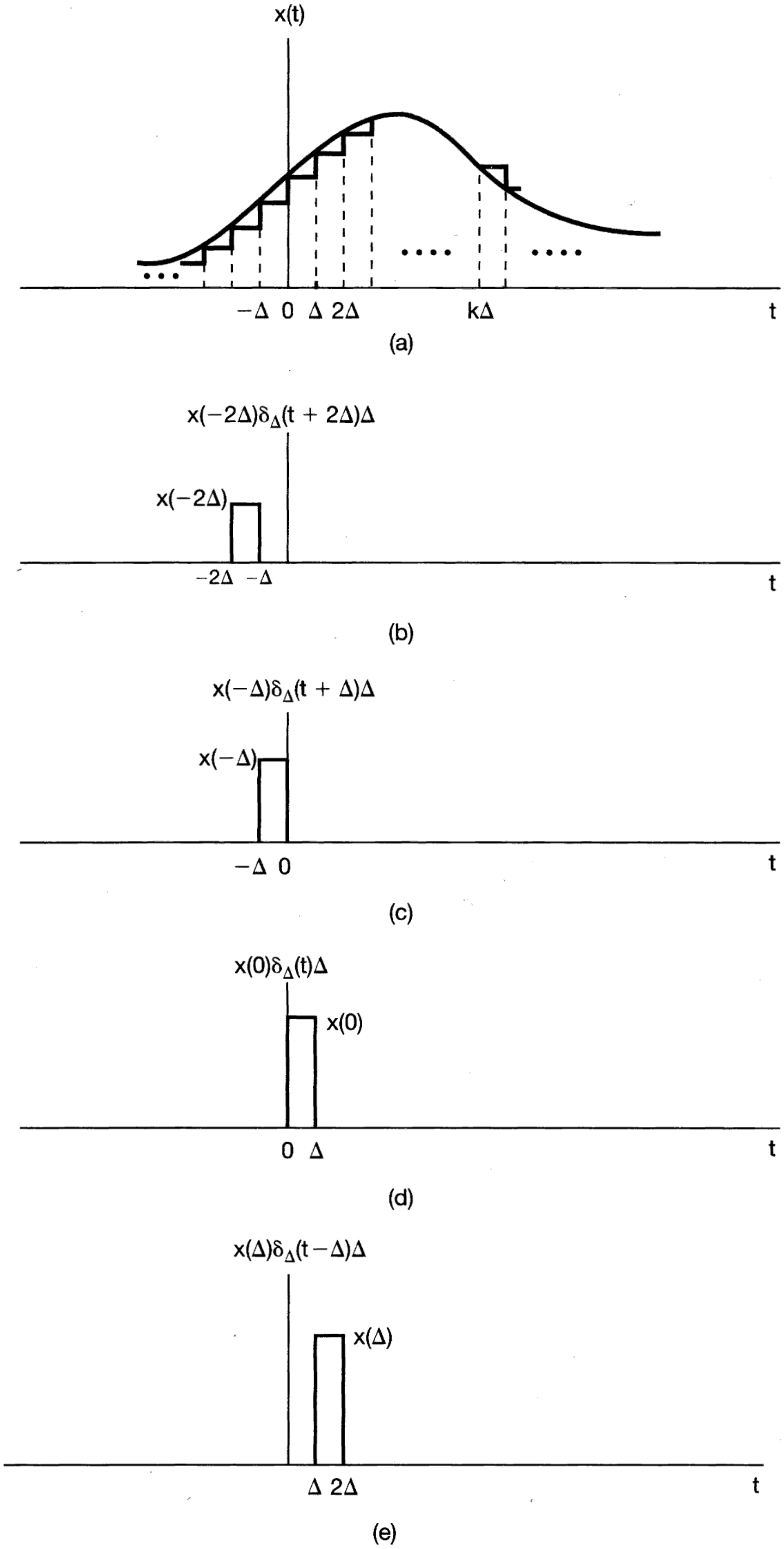



**Figure 2.12** Staircase approximation to a continuous-time signal.

## 3、正交分解与完备正交函数集 （O. 题3.65-3.66 较为抽象）

若 $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) = 0$ 则称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(t_1, t_2)$ 内正交。

若 $f_1(t), \cdots, f_n(t)$ 构成的函数集满足 $\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$，则此函数集为正交函数集。

若不存在 $\varphi(t)$，与正交函数集中的函数正交，则此函数集为完备正交函数集。

常见：三角函数集在区间 $(t_0, t_0+T)$ 复指数函数集在区间 $(t_0, t_0+T)$

用正交函数集表示 $x(t)$ [类比：用正交基底表示向量]： $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i(t) + x_e(t)$

为使 $\overline{x_e^2(t)}$ 最小（均方误差最小，即能量最为接近），用 $\frac{\partial \overline{x_e^2}}{\partial C_j} = 0$ 求出 $C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_j(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_j^2(t) dt}$.

Parseval 方程：$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 k_i$ （$n \to \infty$，可用完备正交函数集在能量无偏差意义下完全逼近信号）

$$\downarrow$$

$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i(t)$ 　　O. 3.4 仅有能量意义，不代表处处相等.

$\longrightarrow$ 引入 Fourier Transform 的数学说明（正确性）

引入 Fourier 变换的方便性：O. 3.2 （响应；特征函数）

## 1.2 连续信号的频域分析

$\longleftarrow$ 2023.9.6 Lec 4

### 一、周期信号的 Fourier 级数

#### 1. Fourier 级数用于表达周期信号的充分条件（Dirichlet 条件）

O. 图 3.8.

① 一周期内绝对可积　② 只有有限个不连续点　③ 只有有限个极大值与极小值.

#### 2. 三角函数形式：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

其中 $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t \, dt$ （$a_0$ 也包含在内），$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t \, dt$ （$b_0 = 0$ 也包含在内）

也可写为 $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ 或 $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$，

此时 $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t \, dt$ 　　$a_n, b_n$ 表达式不变

进一步，可以将余弦函数与正弦函数合并为余弦函数，

$$x(t) = \underset{\downarrow\, a_0}{C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = \underset{\downarrow\, a_0}{C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underset{\downarrow\, a_n}{C_n \cos\varphi_n} \cos n\omega_0 t - \underset{\downarrow\, b_n}{C_n \sin\varphi_n} \sin n\omega_0 t]$$

$$\Longrightarrow C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n} \quad \left( \begin{aligned} b_n &= -C_n \sin\varphi_n \\ a_n &= C_n \cos\varphi_n \end{aligned} \right)$$

## 3、复指数函数形式：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)=\underset{\downarrow\ F(0)}{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underset{\downarrow\ F(n\omega_1)}{\frac{a_n-jb_n}{2}}e^{jn\omega_1 t}+\underset{\downarrow\ F(-n\omega_1)}{\frac{a_n+jb_n}{2}}e^{-jn\omega_1 t}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{n}F(n\omega_1)e^{j\omega_1 t}\qquad \underline{F_n=F_{-n}^{*}}$$

可由 $F_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$ 或直接利用正交性得出计算 $F_n$ 的公式 $F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{2}C_n e^{j\varphi_n}\left(=\frac{1}{2}[C_n\cos\varphi_n+jC_n\sin\varphi_n]\right)=\frac{a_n-jb_n}{2}\qquad |F(n\omega_1)|=\frac{1}{2}|C_n|$$

信号的频谱　待Fourier变换结束后再总结

## 4、函数的对称性与傅里叶系数的关系　0.3.5.6、3.5.3

奇函数：$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$　$a_n=0$　无直流分量　$F_n$ 为纯虚奇函数

偶函数：$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$　$b_n=0$　有直流分量　$F_n$ 为实偶函数

$a_0=\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)dt$

奇谐函数：$f(t)=-f(t\pm\frac{T}{2})$

无直流分量　$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt=\frac{2}{T_1}\left(\int_0^{\frac{T_1}{2}}+\int_{-\frac{T_1}{2}}^{0}\right)f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$

（仅有奇次谐波，所以叫奇谐）

$$=\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t-\tfrac{T_1}{2})\cos[n\omega_1(t-\tfrac{T_1}{2})]dt+\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$$

$$=-\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t-n\pi)dt+\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$$

$n$ 为偶数时　$\cos(n\omega_1 t-n\pi)=\cos(n\omega_1 t)$　上式等于0

$n$ 为奇数时　$\cos(n\omega_1 t-n\pi)=-\cos(n\omega_1 t)$　上式为 $\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$

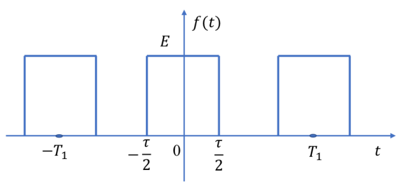
同理　$b_n=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$　（$n$ 为奇数）

## 5、有间断点信号的逼近 → Gibbs 现象

低频分量影响脉冲顶部
高频分量影响脉冲跳变沿

## 6、典型周期信号的 Fourier 级数

① 周期矩形脉冲信号




为偶函数　$b_n=0$，　$a_n=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{4E}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\cos(n\frac{2\pi}{T_1}t)dt$　$(T_1=\frac{2\pi}{\omega})$

$a_0=\frac{E\tau}{T_1}$　　$=\frac{4E}{T_1}\frac{T_1}{2\pi n}\sin(\frac{2\pi n}{T_1}t)\Big|_0^{\frac{\tau}{2}}=\frac{2E}{n\pi}\sin(\frac{n\pi\tau}{T_1})=\frac{2E\tau}{T_1}\frac{\sin(\frac{n\pi\tau}{T_1})}{\frac{n\pi\tau}{T_1}}=\underline{\frac{2E\tau}{T_1}Sa(\frac{n\pi\tau}{T_1})}$

$C_n=|a_n|$，$\varphi_n=\pm\pi$　　$F(\omega)=F(n\omega_1)=F_n=\frac{a_n}{2}=\frac{E\tau}{T_1}Sa(\frac{n\pi\tau}{T_1})=\frac{E\tau}{T_1}Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$

这就是频谱上的ω　注意与后续频谱密度函数区分

$Sa(0)=1$，　$Sa(n\pi)=0$　⇒ 带宽为 $B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$，<u>第一个过零点频率为 $\frac{2\pi}{\tau}$</u>　主要能量集中在第一个过零点内

$T_1$ 不变时，$\tau$ 变小，第一个过零点频率增大，谱线幅值减小，

$\tau$ 不变时，$T_1$ 变大，过零点频率不变，振幅变小，谱线变密（即点越来越“多”）

② 对称方波信号（峰峰值为E） $\tau=\frac{T_1}{2}$ （脉宽为周期的一半）

此函数等于周期矩形脉冲向下平移 $\frac{E}{2}$

$$a_0=\underbrace{\frac{E\tau}{T_1}-\frac{E}{2}}_{\text{直流分量}}\overset{=0}{} \qquad \underset{\text{偶}}{b_n=0} \qquad a_n=\frac{2E\tau}{T_1}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)=E\,Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$F_n$ 与周期矩形脉冲信号相同.（用定义即可证）

③ 复指数信号

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}e^{j\omega_1 t}e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}e^{j(1-n)\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1 j(1-n)\omega_1}e^{j(1-n)\omega_1 t}\Big|_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi j(1-n)}\left[e^{j(1-n)\pi}-e^{-j(1-n)\pi}\right]\overset{Euler}{=\!=}\frac{\cancel{2j}\sin(1-n)\pi}{\cancel{2}\pi\cancel{j}(1-n)}=Sa[(1-n)\pi]\begin{cases}1 & n=1\\0 & n\neq1\end{cases}$$

$F(n\omega_1)=F(\omega_1)$

即，$e^{j\omega_1 t}$ 仅在 $\omega_1$ 这一单一频率下有幅度为1的分量

$\cos\omega_1 t \longrightarrow \frac{1}{2}(e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t})$

$\sin\omega_1 t \longrightarrow \frac{1}{2j}(e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t})$

同理可得复数频谱、

7、周期信号的功率分配

Parseval 方程：$\int_{t_1}^{t_2}x^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}C_i^2k_i \rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T}f_i(t)f_j^*(t)dt$

$$P=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}|f(t)|^2dt=C_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2\times\frac{1}{2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2$$

$|F_k|=\frac{1}{2}C_n$ $\quad |F_{-k}|=\frac{1}{2}C_n$ $\qquad |F_k|^2+|F_{-k}|^2=\frac{1}{2}C_n^2$

把负频率项与相应的正频率项成对地合并起来，才是实际的频谱函数

周期信号在时域的平均功率等于在频域的平均功率

↓

直流、基波分量与各次谐波分量功率之和

## 二、信号的 Fourier 变换

← 2023.9.11 Lec 5

引入：非周期信号可看成具有无限周期的周期信号，或将周期信号的周期延至无限长可得非周期信号！

将非周期信号作周期延拓，再求 Fourier 系数：$\hat{F}_n=\frac{1}{T_1}\int_T\hat{f}(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \overset{\text{一周期内 }\hat{f}(t)=f(t)}{=\!=\!=} \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

$T_1\to\infty$ 时 $\hat{F}_n\to0$，则将 $T_1$ 乘到左侧：$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \overset{\omega_1\to0}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

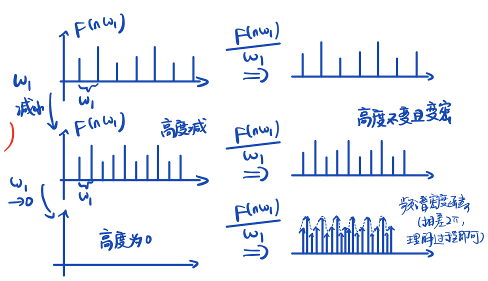
注意 $F(\omega)$ 取 $\omega=n\omega_1$ 并不是直接等于频谱 $F(n\omega_1)$

事实上，对非周期信号没法这样做；对周期信号，从单脉冲的 $F(\omega)$ 到周期的 $F(n\omega_1)$ 会特殊讨论。

称为频谱密度函数

频谱密度函数的理解：

Fourier 系数中：$\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ （$\omega_1$ 为基频）可表示单位频带的频谱值（频谱密度）
一个"单位"的感觉




非周期信号：$\omega_1\to0$ 变为无限多个冲激函数之和，意义不变

↓ ↓

构成一连续函数，即频谱密度函数

事实上相差 $2\pi$，理解意义即可、

由频谱密度函数变回原来信号?

$$f(t)=\lim_{T_1\to\infty}\hat{f}(t)=\lim_{T_1\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{F}_n e^{jn\omega_1 t}=\lim_{T_1\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}T_1\hat{F}_n e^{jn\omega_1 t}\frac{1}{T_1}$$

$$=\lim_{T_1\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{jn\omega_1 t}\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$\omega_1\to 0$
$d\omega$

$$\boxed{F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

例题 ppt(P134)

Fourier 变换 用于表达非周期信号的充分条件 (Dirichlet 条件)

① 无限区间 绝对可积 苛刻 ② 只有有限个不连续点 有限区间内 ③ 只有有限个极大值与极小值. 有限区间内

常用 Fourier 变换对:

① 矩形脉冲信号 $f(t)=\begin{cases}E & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$ $F(\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 记忆: 乘T, $n\omega_1\to\omega$

② 单边指数信号 $f(t)=\begin{cases}e^{-at} & t>0,\ a>0\\ 0 & t<0\end{cases}$ $F(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$

③ 双边指数信号 $f(t)=e^{-a|t|}$ $a>0$ $F(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}\left(=\underset{左}{\frac{1}{a-j\omega}}+\underset{右}{\frac{1}{a+j\omega}}\right)$

④ 单位直流信号 不满足 Dirichlet 条件

用双边指数信号的极限来求 $F(\omega)=\lim_{a\to0^+}\frac{2a}{a^2+\omega^2}=\begin{cases}0, & \omega\neq0\\ \infty, & \omega=0\end{cases}$ (冲激函数)

$\omega=0$ 时冲激强度为 $\lim_{a\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2a}{a^2+\omega^2}d\omega=\lim_{a\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{2}{a}}{1+(\frac{\omega}{a})^2}d\omega=\lim_{a\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+(\frac{\omega}{a})^2}d(\frac{\omega}{a})$

(积分定义)

$$=\lim_{a\to0^+}2\arctan\frac{\omega}{a}\Big|_{-\infty}^{\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$$

⑤ 双边奇指数信号 $f(t)=\begin{cases}e^{-at} & t>0,\ a>0\\ -e^{at} & t<0,\ a>0\end{cases}$ $F(\omega)=\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\left(=\underset{右}{\frac{1}{a+j\omega}}-\underset{左反}{\frac{1}{a-j\omega}}\right)$

⑥ 符号函数信号 $sgn(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$ 不满足 Dirichlet 条件

用双边奇指数信号的极限来求 $F(\omega)=\lim_{a\to0^+}\left(-\frac{2j\omega}{a^2+\omega^2}\right)=-\frac{2j}{\omega}=\frac{2}{j\omega}$

⑦ 单位阶跃信号 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}=\frac{1}{2}sgn(t)+\frac{1}{2}$ (单位直流信号)

则 $F(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

⑧ 单位冲激信号 利用筛选性质即得 $F(\omega)=1$

## Fourier 变换的性质：

← 2023.9.13 Lec 6

1、线性

2、奇偶虚实性（共轭对称性质）　$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ 则 $f^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F^*(-\omega)$

证明：$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{Re}\,f(t) + j\,\mathrm{Im}\,f(t)]\,e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{Re}\,f(t)\cos\omega t + \mathrm{Im}\,f(t)\sin\omega t]\,dt$

$+\,j\int_{-\infty}^{\infty}[-\mathrm{Re}\,f(t)\sin\omega t + \mathrm{Im}\,f(t)\cos\omega t]\,dt$

$\mathcal{F}[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Re}\,f(t) - j\,\mathrm{Im}\,f(t)]\,e^{-j\omega t}dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Re}\,f(t)\cos\omega t - \mathrm{Im}\,f(t)\sin\omega t]\,dt + j\int_{-\infty}^{\infty}[-\mathrm{Re}\,f(t)\sin\omega t - \mathrm{Im}\,f(t)\cos\omega t]\,dt$　①

$F^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Re}\,f(t)\cos\omega t - \mathrm{Im}\,f(t)\sin\omega t]\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty}[+\mathrm{Re}\,f(t)\sin\omega t + \mathrm{Im}\,f(t)\cos\omega t]\,dt$　②

比较①②，得证。

或：$F^*(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}dt\right]^* \overset{!!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\,e^{j\omega t}dt$　　比较即得，　此种证法简便！

$\mathcal{F}[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\,e^{-j\omega t}dt$

用此法思想

实函数 $f(t) = f^*(t)$，因此 $F(\omega) = F^*(-\omega)$　（共轭对称）

实偶函数 $f(t) = f(-t)$

$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{j\omega t}dt \overset{\text{偶}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\,e^{j\omega t}dt \overset{\text{变量替换}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}dt = F(\omega)$　偶

$F^*(\omega) = F(-\omega) = F(\omega)$　　实

实奇函数 $f(t) = -f(-t)$

$F(-\omega) = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{j\omega t}dt} \overset{\text{奇}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\,e^{j\omega t}dt \overset{\text{变量替换}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}dt = -F(\omega)$　奇

$F^*(\omega) = F(-\omega) = -F(\omega) \Rightarrow F^*(\omega) + F(\omega) = 0$　　虚

3、对偶性　$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$，则 $F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$

证明：$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$　　将变量名 t 换成 ω，ω 换成 t 有

$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,e^{j\omega t}dt$　　则 $f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,e^{j(-\omega)t}dt = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(t)]$

（单位直流信号）$1 \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} 2\pi\delta(\omega) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} 2\pi$　　偶，故负号未体现

（单位冲激信号）$\delta(t) \longrightarrow 1 \longrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

4、尺度变换特性　$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \Rightarrow f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

证明：$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,e^{-j\omega t}dt = \begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,e^{-j\omega\left(\frac{\lambda}{a}\right)}d\left(\frac{\lambda}{a}\right) \\ \int_{\infty}^{-\infty} f(\lambda)\,e^{-j\omega\left(\frac{\lambda}{a}\right)}d\left(\frac{\lambda}{a}\right)\end{cases} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\lambda}d\lambda$　　||

从生活中录音快慢放很容易理解此性质

+ 翻转 $(a=-1)$

## 5、时移特性

$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ 则 $f(t \pm t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{\pm j\omega t_0} F(\omega)$

证明：$F[f(t\pm t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\pm t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega(t\mp t_0)} dt$

注意到含 $t_0$ 的项与积分无关，提出则有 $F[f(t\pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} F(\omega)$.

例：ppt 171页、174页、176页

## 6、频移特性

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ 则 $\underline{e^{\mp j\omega_0 t} f(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underline{F(\omega \pm \omega_0)}$

证明：$F[f(t) e^{\pm j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\pm j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega\mp\omega_0)t} dt = F(\omega \mp \omega_0)$.

应用：通信中常用的调制技术 将原信号乘以载波信号 $\cos\omega_0 t$ / $\sin\omega_0 t$，实现频谱搬移

## 7、微分特性

$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$

证明：由 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 两边求导得 $\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{[j\omega F(\omega)]}_{\text{产生}} e^{j\omega t} d\omega$

则 $F\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$. 依次类推即得n阶导、

时域微分 ⟶ 增强高频

## 8、积分特性

$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$ 涉及初值，逐层求解.

证明：$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \underbrace{u(t-\tau)}_{\text{构造延迟阶跃函数}} d\tau\right] e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau}_{\text{交换积分次序}}$

$= F[u(t-\tau)] = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]\underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{\text{时移}}$，其中 $F[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{f(\tau)}\, \pi \delta(\omega) \underline{e^{-j\omega\tau}} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega} d\tau$

$= \underbrace{\pi F(\omega)\delta(\omega)}_{\text{筛选}} + \frac{1}{j\omega}F(\omega) = \pi F(0)\delta(\omega) + \underbrace{\frac{1}{j\omega}F(\omega)}_{\text{积分}\to\text{平滑}}$.

课件例 1-11 (P185)

## 9、卷积定理

← 2023.9.18 Lec 7

非常有用性质

$f(t) * g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)G(\omega)$ [时域]

$f(t)\, g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$ [频域]

证明：$F[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau}_{\text{交换积分次序}}$

[时域]

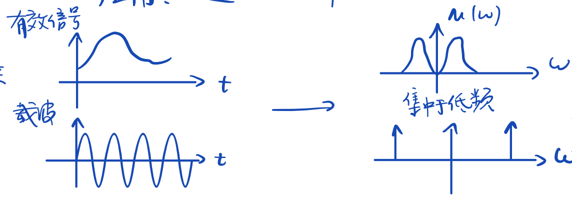
$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{\text{时移}} \underbrace{F_2(\omega)}_{\text{提出}} d\tau = F_1(\omega) F_2(\omega)$

$F[f_1(t) f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[F_1(\omega)] f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda\right] f_2(t) e^{-j\omega t} dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \underbrace{e^{-j(\omega-\lambda)t}}_{\text{频移}} dt\right] d\lambda$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) F_2(\omega-\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$ 乘

应用：通信系统中的调制与解调




卷
就频移!

周期信号的 Fourier 变换：利用冲激函数和Fourier级数

复指数信号的Fourier变换：　$F[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = F(\omega-\omega_0)$

令 $f(t)=1$　由 $F[1]=2\pi\delta(\omega)$　利用频移性质　$F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

利用上述结果可得正弦信号的Fourier变换　$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$

余弦信号的Fourier变换　$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

结合一般周期信号可表示为 Fourier 级数之和　$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$

则得一般周期信号的Fourier变换为　$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)\,2\pi\delta(\omega-n\omega_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)$

其中　$F(n\omega_1) = F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$　(傅里叶系数)

即：周期信号的Fourier变换由无穷多个冲激函数组成．

周期序列Fourier变换的求取：

单脉冲Fourier变换 $\xrightarrow{?}$ 周期脉冲序列的Fourier系数 $\longrightarrow$ 周期脉冲序列的Fourier变换

周期脉冲序列的Fourier系数　$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

单脉冲Fourier变换　$F(\omega)=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$\Rightarrow F(n\omega_1) = F_n = \frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$

例：周期矩形脉冲序列和周期冲激序列的 Fourier 变换的求取

[参考答案：$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T_1}E\tau Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$　$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T_1}\delta(\omega-n\omega_1)$　复习时务必手推一遍！]

信号的频谱：都是关于ω的函数

① 周期信号的频谱：复数频谱 是其 Fourier 系数 $|F_n|$ 与 $\varphi$ 关于ω的函数

幅度谱、相位谱分别是其 Fourier 系数 $C_n$ 与 $\varphi_n$ 关于ω的函数

只在有限个点上(间隔为基频$\omega_1$) 取有限值

② 非周期信号的频谱：是其 Fourier 变换关于ω的函数

( Fourier 变换 $\underset{\text{周期无限}\ (\text{一段无限周期的周期函数即为非周期函数})}{\overset{\text{周期有限}\ (\text{离化为周期函数})}{\rightleftarrows}}$ Fourier 系数 )

Fourier 变换是 连续化、非周期化的 Fourier 系数

Fourier 系数是 离散化、周期化的 Fourier 变换

## 1.3 连续信号的复频域分析

引入：Fourier 变换对函数要求苛刻，不满足 Dirichlet 条件的函数或是需引入冲激函数或极限，

或是不存在 Fourier 变换

Laplace 变换：引入 $e^{-\sigma t}$（衰减因子），减少对信号绝对可积性的要求

$F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$　　　　有收敛域问题

$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}ds$

从已知 Laplace 变换求 Fourier 变换：

① 收敛边界 $\sigma_0>0$　　不存在 Fourier 变换

② 　　　　$\sigma_0<0$　　令 $s=j\omega$ 即可

③ 　　　　$\sigma_0=0$　　若虚轴上有 $N$ 个极点 $\omega_1\cdots\omega_N$　则 $\mathcal{F}[f(t)]=F_b(s)\big|_{s=j\omega}+\sum_{n=1}^{N}K_n\pi\delta(\omega-\omega_n)$