信号分析与处理(二)：离散信号

2023.10.21 $v1.0$

2.1 信号的采样和恢复

← 2023.9.20 Lec 8

一、离散信号与采样信号

离散信号：时间离散、幅值？

采样信号：用采样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中抽取一系列离散样值，幅值连续。$f_s(t)$

数字信号：时间、幅值都离散

连续信号 $f(t) \xrightarrow{\text{采样}}$ 采样信号 $f_s(t) \xrightarrow{\text{量化编码}}$ 数字信号

问题：$f_s(t)$ 与 $f(t)$ 频域特性的联系？ 能否从 $f_s(t)$ 无失真地恢复 $f(t)$？

二、时域采样

$f_s(t) = f(t)\,p(t)$ 其中 $P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi P_n \delta(\omega - n\omega_s)$ （采样周期为 T_s，角频率为 $\frac{2\pi}{T_s} = \omega_s$）

$\Updownarrow$ 代入 P_n 为 Fourier 系数（第一章中）

$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s)$ 即：时域采样对应频域上以 ω_s 为周期进行周期延拓

例1 矩形脉冲采样 由 $P_n = \frac{E\tau}{T_s} Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$

$\downarrow$ 脉宽 $\tau \to 0$ 得 $F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$

例2 冲激采样 由 $P_n = \frac{1}{T_s}$ $\Rightarrow$ $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$ 原信号频谱以 ω_s 为周期重复

为便于讨论，引入"频谱受限信号"（频带限制在 $\pm\omega_m$ 之间），并考虑其采样和恢复。

发现：采样频率低于 $2\omega_m$ 时，采样信号的频谱（由原信号频谱移位重复而来）发生"交叉"，即频谱混叠现象！

时域采样定理（Shannon 定理）：对于频谱受限信号，若其频谱只覆盖 $\pm\omega_m$ 的范围，则 $f(t)$ 可用等间隔采样值唯一表示，采样间隔不少于 $\frac{1}{2f_m}$（频率高于 $2\omega_m$），$\omega_s = 2\omega_m$ 称为 Nyquist 频率。

低采样率（欠采样）会导致频谱混叠。 ppt 例2-2

时域离散化、频域周期化
时域周期化、频域离散化

三、频域采样

对 $F(\omega)$ 在频域上以 ω_0 为间隔采样，得 $F_p(\omega)$

$F_p(\omega) = F(\omega)\,\delta_\omega(\omega)$ 其中 $\delta_\omega(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$

由 $\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T_0}\delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0)$ $\Rightarrow$ $\delta_\omega(\omega) = \frac{1}{\omega_0}\mathcal{F}[\delta_T(t)]$

$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)] = \frac{1}{\omega_0}\delta_T(t)$

$f_p(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_p(\omega)] = f(t) * \mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)] = f(t) * \frac{1}{\omega_0}\delta_T(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0)$ 频域采样带来时域上的周期重复

频域采样定理

对于时间受限信号，若其只集中在 $\pm t_m$ 的范围，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 进行采样，则频域采样后的频谱可以唯一表示原信号。

从采样信号恢复原信号？

频域 $F(\omega)=F_s(\omega)\cdot H(\omega)$ → 频域上加矩形窗，取出周期延拓的频谱的一段 $H(\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|\le\omega_c\\0, & 其他\end{cases}$

(卷积定理)↓ 取样函数

时域 $f(t)=f_s(t)*h(t)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right)*Sa\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)$

$h(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}H(\omega)$

$H(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}2\pi h(-\omega)$

此处要求 $\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]=h(t)$，则符合第一条。可用第二条来算出 $h(\omega)$，再将变量替换成 t。

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\,Sa\left[\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)\right]$ → 恢复连续时间信号的内插公式

2.2 离散信号的表示与运算

一、离散信号的表示

$x(n)$，n 为整数　　表示法：闭式表达式、序列表示、图像表示

(标出 $n=0$ 位置) $\{\cdots,0,1,2,3,\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{4},3,2,\cdots\}$

常见离散信号：

① 单位脉冲序列 $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\ne0\end{cases}$　　$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)$

进一步，用单位脉冲序列表示任意序列：$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(n-k)$ 与用时移单位冲激表示连续信号一样。

② 单位阶跃序列 $u(n)=\begin{cases}1 & n\ge0\\0 & n<0\end{cases}$　　$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$ （差分）

$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$

③ 矩形序列 $R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\0 & 其他\end{cases}$　　$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$

④ 斜变序列 $R(n)=nu(n)$　　$r(n)=n^2u(n)$

⑤ 单边指数序列 $x(n)=a^n u(n)$　　$a>0$　$|a|>1$　$|a|<1$
$a<0$

⑥ 正弦型序列 $x(n)=A\sin(n\Omega_0+\phi)$　　Ω_0 为数字角频率（单位为 rad）

$\Omega_0=\omega_0T_s=\frac{\omega_0}{f_s}$

理解：$x(t)=A\sin\omega_0t\xrightarrow{t=nT_s}x(n)=x(nT_s)=\sin(n\underline{\omega_0T_s})$

与连续时间正弦序列的区别：

① 连续　$t\pm t_0\Leftrightarrow\varphi+\varphi_0$　　时移、相移一一对应

离散　$n\pm n_0\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}\phi\pm\phi_0$　　仅有 ϕ_0 时 Ω_0 的整数倍时才成立

② 连续：总是周期的　　$(n+N)\Omega_0=n\Omega_0+2k\pi$　　← 2023.9.25　Lec 9

离散：仅有 $\underset{\in N_+}{N}=\frac{2\pi}{\Omega_0}k$ 为整数时才是周期的（即 $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ 为有理数）

满足上式的最小的 N 为该序列的周期。

③ 连续：$\omega_1\ne\omega_2\Leftrightarrow x_1(t)\ne x_2(t)$

离散：若 $\Omega_1=\Omega_2+2k\pi$，则 $x_1(n)=x_2(n)$

相同的离散时间信号可能有不同的角频率

⑦ 复指数序列 $x(n)=e^{(\sigma+j\Omega_0)n}=e^{\sigma n}(\cos\Omega_0n+j\sin\Omega_0n)$

可与正弦序列比照。

二、离散信号的运算

平移、翻转、和、积、累加、差分 $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$ 前向差分

$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$ 后向差分

时间尺度变换：$x(n)=x(t)\big|_{t=nT_s}$

$x(2n)=x(t)\big|_{t=2nT_s}$ 不是在时间轴上按比例压缩为原先一半，而是将采样频率降为原来一半。

卷积和：
（线性卷积）

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \xrightarrow{\Delta} x(n)=x(n)*\delta(n)$$

线性时不变系统的单位脉冲响应，$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\underbrace{h(n-m)}_{\text{单位脉冲响应}}$ $\quad y(n)=x(n)*h(n)$

计算法：列表法，平移叠加法等 （略去）

2.3 离散信号的频域分析

一、离散 Fourier 级数 (Discrete Fourier Series, DFS) 适用于离散周期序列

连续时间复指数信号 $e^{j\omega t}$ $\quad \omega\in(-\infty,+\infty)$

离散时间复指数序列 $e^{j\Omega n}$，Ω为数字角频率，以2π为周期，故常取$\Omega\in[0,2\pi)$或$[-\pi,\pi)$

由 $e^{j(\Omega+2k\pi)n}=e^{j\Omega n}e^{\pm j2k\pi n}=e^{j\Omega n}$

时域离散化、频域周期化
时域周期化、频域离散化

DFS：频域不仅周期，而且离散

引入：对于一个周期为N的周期信号$x(n)$，其基波周期为N，基本数字角频率为$\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$

现在想用基波周期为N的复指数序列$e^{jk\Omega_0 n}$的线性组合来表示上述信号。注意到 这些复指数序列只在k的N个相继值的区间上不同（$e^{j\Omega n}$的周期性），因此将求和限以$<N>$表示，则：$x(n)=\sum_{k=<N>}\underbrace{X(k\Omega_0)}_{(X_k)}e^{jk\Omega_0 n}$

0.3.7：离散 Fourier 级数不存在收敛性问题，因为其本质上是以下N个线性方程的解：（独立方程）

$$\begin{cases} x(0)=\sum\limits_{k=<N>}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}=\sum\limits_{k=<N>}X(k\Omega_0) \\ x(1)=\sum\limits_{k=<N>}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0} \\ \quad\vdots \\ x(n-1)=\sum\limits_{k=<N>}X(k\Omega_0)e^{j(N-1)k\Omega_0 n} \end{cases}$$

"任何离散时间周期序列$x(n)$完全是由有限个参数（即N个）来表征的，也就是在一个周期内的N个序列值。Fourier 系数公式只是把这N个参数等效变换为一组等效的N个Fourier系数值。"

下面讨论系数的求取：在该式左右两边分别乘上$e^{-jr\Omega_0 n}$，然后在N项上求和，有

$$\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jr\Omega_0 n}=\sum_{n=<N>}\sum_{k=<N>}X(k\Omega_0)e^{j(k-r)\Omega_0 n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=<N>}x(n)e^{-jr\Omega_0 n}=\sum_{k=<N>}X(k\Omega_0)\sum_{n=<N>}e^{j(k-r)\Omega_0 n}$$

当且仅当$k=r$时为N，其余情形均为0。

由 $\sum_{n=<N>}e^{jk\Omega_0 n}=\begin{cases}N, & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ （易证） 有 $\underbrace{\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jr\Omega_0 n}}_{\text{左边}}=\underbrace{NX(r\Omega_0)}_{\text{右边}}$

得 Fourier 系数表达式为 $X(r\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jr\Omega_0 n}$.

因此离散时间 Fourier 级数对为

$$\boxed{\begin{aligned} x(n)&=\sum_{k=<N>}X_k e^{jk\Omega_0 n} \\ X_k&=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}\end{aligned}}$$

也记作

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{IDFS}\,[X(k\Omega_0)]&=\sum_{k=<N>}X_k e^{jk\Omega_0 n} \\ \mathrm{DFS}\,[x(n)]&=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}\end{aligned}}$$

连续与离散 时间频谱的关系

$x(t) \xrightarrow[T_0 = NT_s]{\text{每周期}N\text{点采样}} x(n)$ ⟶ 采出的 n 从哪开始并无所谓，为方便常从 0 开始

ppt例2.7，2.8：满足采样定理的条件下，$X(k\Omega_0)$ 可看作是 $X(k\omega_0)$ 的周期重复

说法存疑。例如 $\sin(\frac{4\pi}{3}n)$，这种算每周期 N 点采样吗？（不是在最小周期内采样）

此时基本频率应该仍是 $\frac{2\pi}{N}$

但就不是从"每周期（默认2π）采样 N 个点"得来的了，因为一周期采不到 N 个点。

（周期延拓 并在频率上乘以下作线性变换）

所以重复频率有两种说法？

不满足采样定理时，$X(k\Omega_0)$ 出现频谱混叠，不能准确表示 $X(k\omega_0)$

课本中的例子太特殊（每周期采样整数点）

私以为周期 N 应从离散信号自身出发，而不是由采样而来

DFS 的性质：

← 2023.9.27　　Lec 10

1、线性性质　（略）

2、周期卷积定理

周期卷积：$x(n) \circledast h(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n-m)$

仅在单个周期内求和，而线性卷积考虑 $m \in (-\infty, \infty)$

定理：$x(n) \circledast h(n) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} N X(k\Omega_0) H(k\Omega_0)$

$x(n) h(n) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0) \circledast H(k\Omega_0)$

证明：依据定义、提出只与求和中单变量有关的量先行求和即可

3、复共轭　$x^*(-n) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} X^*(k\Omega_0)$

4、位移性质　$x(n-m) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\Omega_0 m} X(k\Omega_0)$

5*、帕塞瓦尔定理　$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) h^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) H^*(k\Omega_0)$

二、离散时间傅里叶变换（Discrete Time Fourier Transform，DTFT）

适用于离散非周期序列

与 CFS → CTFT 的思想一致：非周期信号是周期为无穷大的周期信号

这也就意味在频率分量上的无限细分（不存在基频与谐频）

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x_N(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

分母上的 N 导致无穷小量

同 CTFT 一样，定义频谱密度函数（相当于把 N 乘过去）

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad 可见 \quad X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} X(\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$$

$$x(n) = \lim_{N\to\infty} x_N(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \lim_{N\to\infty} \sum \boxed{\frac{1}{N}} X(\Omega) e^{jk\Omega_0 n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum \boxed{\frac{\Omega_0}{2\pi}} X(\Omega) e^{jk\Omega_0 n}$$

$N\to\infty$ 时，$\Omega_0 \to d\Omega$，$k\Omega_0 \to \Omega$，$\sum \to \int$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

非周期带来频域上的连续（积分、Ω 为连续变量）

$$\boxed{DTFT[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \qquad IDTFT[X(\Omega)] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega}$$

常见离散时间傅里叶变换对：（见下页）

DTFT性质与CTFT很像

特别：卷积性质 $x(n)*y(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)Y(\Omega)$ 频域微分 $nx(n) \xleftrightarrow{DTFT} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

$x(n)y(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda)Y(\Omega-\lambda)d\lambda$

（频域卷积，$X(\Omega)*Y(\Omega)$）

三、离散傅里叶变换（Discrete Fourier Transform, DFT） 0.习题5.53 ← 2023.10.9 Lec 11

$\begin{cases}\text{计算机一段一段处理信号（有限长序列）} \\ \text{DTFT 是连续的，无谐波性，不利于计算机的计算与分析}\end{cases}$ 处理对象是有限长离散序列

$x(n) \xrightarrow{\text{周期延拓}} x_p(n) \Rightarrow \begin{cases} \text{DFS} & X_p(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=<N>} x_p(n)e^{-jk\Omega_0 n} \\ \text{IDFS} & x_p(n) = \sum\limits_{k=<N>} X_p(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}\end{cases}$

取主值区间：$x_p(n) = x(n)$ $(n=0,1,\cdots,N-1)$

$X_p(k\Omega_0) = X(k\Omega_0)$ $(k=0,1,\cdots,N-1)$

$k\Omega_0$在$[0,2\pi)$内变化

$\Rightarrow$ $X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$

$x(n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$

可试将其中一式代入另一式即得到验证。

又由 $\underset{\text{Fourier变换（频谱密度函数）}}{X(\Omega)} = N\underset{\text{Fourier系数}}{X(k\Omega_0)}$，对$\Omega$在数字频域主值作N点取样，自变量取为$k$（对应上$X(k\Omega_0)$中的$k$），即得

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} X(k) &= NX(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = DFT[x(n)] \\ x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} NX(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = IDFT[X(k)]\end{aligned}}$$

有限项和与离散化频率

总之：有限长序列 ⇒ 周期延拓 ⇒ 得DFS ⇒ 取主值区间发现对应上x(n)的DTFT

时域有限，频域取主值区间（2π范围）

[x(n) 本身是非周期序列]

定义DFT ⇐ 借用DTFT与DFS的联系

也可从有限长序列的DTFT导出DFT（将有限长序列的频谱密度函数作N点采样） 这也是DFT的本质。

DFT的矩阵表示法

设 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 则 $X(k) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$，$k=0,1,\cdots,N-1$ （$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$）

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1)\end{bmatrix}$$

$x(n) = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$ $n=0,1,\cdots,N-1$ （$W_N^{-nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(-nk)}$）

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1)\end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & \cdots & W_N^{-1\times(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)\times 1} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1)\end{bmatrix}$$

(此处ω为本笔记中的Ω，即数字角频率)

表 5.2　基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数(若为周期的)
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi m}{N}$ $a_k=\begin{cases}1, & k=m,m\pm N,m\pm 2N,\cdots\\0, & \text{其余 } k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$\cos\omega_0 n$	$\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\}$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi m}{N}$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=\pm m,\pm m\pm N,\pm m\pm 2N,\cdots\\0, & \text{其余 } k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$\sin\omega_0 n$	$\frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)\}$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi r}{N}$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2j}, & k=r,r\pm N,r\pm 2N,\cdots\\-\frac{1}{2j}, & k=-r,-r\pm N,-r\pm 2N\cdots\\0, & \text{其余 } k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$x[n]=1$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi l)$	$a_k=\begin{cases}1, & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\0, & \text{其余 } k\end{cases}$
周期方波 $x[n]=\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\leqslant N_1\\0, & N_1<\lvert n\rvert\leqslant N/2\end{cases}$ 和 $x[n+N]=x[n]$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k=\frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1+\frac{1}{2})]}{N\sin[2\pi k/2N]}$, $k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\cdots$ $a_k=\frac{2N_1+1}{N}$, $k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k=\frac{1}{N}$ 对全部 k
$a^n u[n]$, $\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$	—
$x[n]\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\leqslant N_1\\0, & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0<W<\pi$	$X(\omega)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\lvert\omega\rvert\leqslant W\\0, & W<\lvert\omega\rvert\leqslant\pi\end{cases}$ $X(\omega)$周期的，周期为 2π	—
$\delta[n]$	1	—

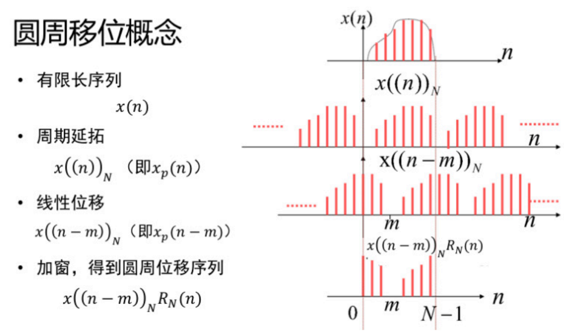
DFT的性质：

1、线性　　注意不等长的序列需补零

2、圆周移位性质

先后顺序无影响

序列 $x(n)$ 的圆周移位：　$x((n-m))_N R_N(n)$　　周期延拓、移位、再加矩形窗取主值



时域　　若 $x(n)\xleftrightarrow{DFT}X(k)$，则

$$x((n-m))_N R_N(n) \xleftrightarrow{DFT} W_N^{mk}X(k)$$

频域　　若 $x(n)\xleftrightarrow{DFT}X(k)$，则

$$W_N^{-nl}x(n) \xleftrightarrow{DFT} X((k-l))_N R_N(k)$$

3、圆周卷积性质

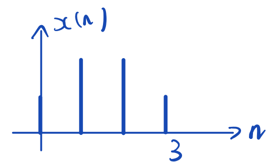
两序列一样长

N点　圆周卷积定义为　$x(n)\circledast h(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N\right]R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x((n-m))_N\right]R_N(n)$

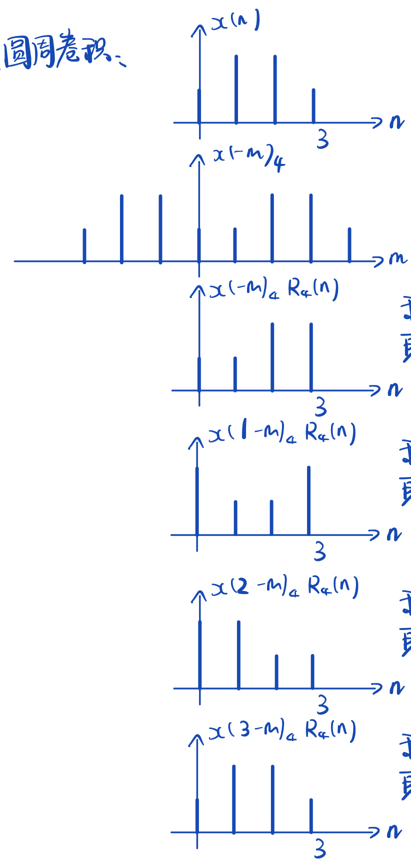
未加特殊说明，⊛ 均表示圆周卷积。

若N大于 $x(n)$、$h(n)$ 的周期，须在延拓时在未定义的位置补上零。默认N即为 $x(n)$、$h(n)$ 的周期。

直接求解例：求 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的4点和10点圆周卷积。



4点圆周卷积：　　设所得序列为 $y(n)$



周期延拓

移位 取主值　$y(0)=\frac{9}{4}$

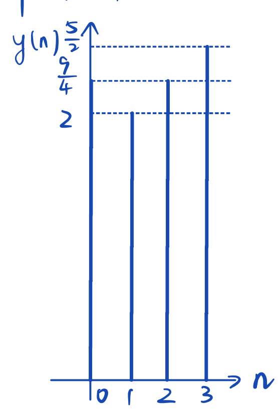
移位 取主值　$y(1)=2$

移位 取主值　$y(2)=\frac{9}{4}$

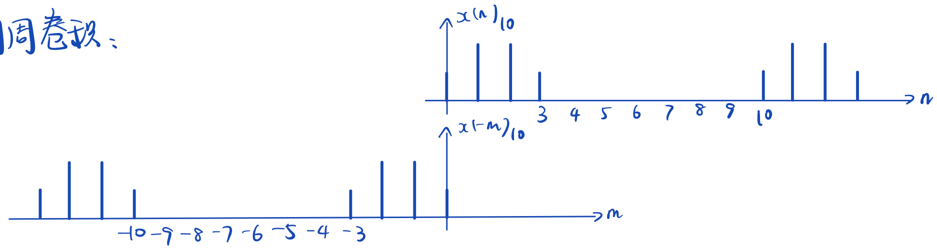
移位 取主值　$y(3)=\frac{5}{2}$

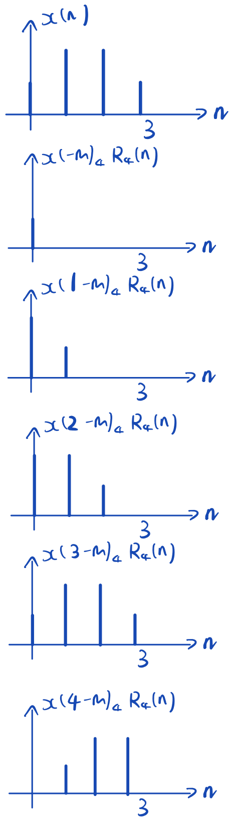
$$\Rightarrow\ y(n)=x(n)\circledast x(n)=\begin{cases}\frac{9}{4}, & n=0\text{或}2\\ 2, & n=1\\ \frac{5}{2}, & n=3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所得序列为：



10点圆周卷积：





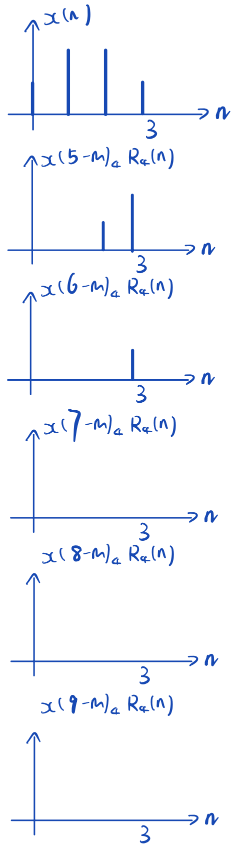
$y(0)=\frac{1}{4}$

$y(1)=1$

$y(2)=2$

$y(3)=\frac{5}{2}$

$y(4)=2$



$y(5)=1$

$y(6)=\frac{1}{4}$

$y(7)=0$

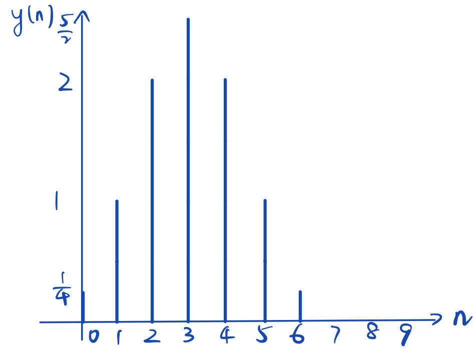
$y(8)=0$

$y(9)=0$

设所得序列为 $y(n)$

$$\Rightarrow y(n)=x(n)*x(n)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & n=0\\ 1, & n=1\\ 2, & n=2\\ \frac{5}{2}, & n=3\\ 2, & n=4\\ 1, & n=5\\ \frac{1}{4}, & n=6\\ 0, & n=7,8,9\end{cases}$$

所得序列为：



定理内容：

(时域) $x(n)\circledast h(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)H(k)$

(频域) $x(n)h(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N}X(k)\circledast H(k)$

圆周卷积与线性卷积： 线性卷积在序列右移过程中，左端依次留出零值空位；

圆周卷积过程中，会将右移值循环回序列左端。

将两长度分别为N,M的序列都补零到至少 $L=N+M-1$ 点，则二者L点圆周卷积结果与线性卷积相同。 → 用FFT计算线性卷积的条件（利用计算圆周卷积）

↓ 确保一个序列能走完全程，不出现从另一头"冒"出来的情况

4. 奇偶虚实性

- 实偶函数的 DFT 也为实偶函数
- 实奇函数的 DFT 为虚奇函数
- 虚偶函数的 DFT 是虚偶函数
- 虚奇函数的 DFT 是实奇函数

四、快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT)

0.习题5.54 ← 2023.10.11 Lec 12

$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{nk}$ $(W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}})$

↓ 算一次 $X(k)$ 需要 N 次乘法，$(N-1)$ 次加法，共有 N 个 $X(k)$ 点， → N点 DFT 的计算量：$O(N^2)$

利用 W_N 的特性简化计算：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk}\left(W_N^{mk}\right)^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases}1, & n-m=lN\\ 0, & n-m\neq lN\end{cases}$$ l为整数 (正交性！)

$W_N^{r} = W_N^{r+mN}$ 以$N=4$为例，有 $W^4=W^0$, $W^6=W^2$, $W^9=W^1$

$W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^{r}$ 以$N=4$为例，有 $W^2=-W^0$, $W^3=-W^1$

$W_N^{rn} = W_{N/r}^{n}$ $\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = e^{-j\frac{2\pi}{N/r}n}\right)$

$$\Rightarrow W_4^{nk} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3\\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6\\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1\\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0\\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1\end{bmatrix}$$

因此可将 N点DFT分解为2组 $\frac{N}{2}$点 DFT运算，然后取和 (设序列长度 $N=2^m$) [具体见下]

由于DFT计算量与N成几何级数增长，可将长序列分解成多个短序列信号，然后分别求各短序列的DFT，最后将它们组合成原序列的DFT。

将长为 $N=2^m$ 的序列分解为两个长为 $\frac{N}{2}$ 的子序列 $x(2l)$ 与 $x(2l+1)$ $l=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

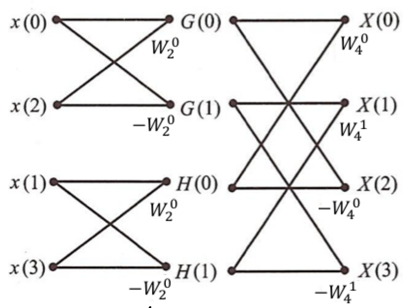
$$X(k)=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l)+W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1)\,W_N^{(2l+1)k} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l)(W_N^2)^{lk} + W_N^k\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1)(W_N^2)^{lk}$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l)\,W_{N/2}^{lk} + W_N^k\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1)\,W_{N/2}^{lk}$$

$$= G(k) + W_N^k\,H(k)$$ → k仅能取至 $0,\cdots,\frac{N}{2}-1$

后$\frac{N}{2}$个点： $X(k+\frac{N}{2}) = G(k+\frac{N}{2}) + W_N^{(k+\frac{N}{2})}H(k+\frac{N}{2}) = G(k) - W_N^k H(k)$ $k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

(周期性，$W_{N/2}^{r+mN/2} = W_{N/2}^{r}$)   ↓ 蝶形算法



蝶形表示

以$N=4$为例： $X(0)=G(0)+W_4^0H(0)$ $X(2)=G(0)-W_4^0H(0)$

$X(1)=G(1)+W_4^1H(1)$ $X(3)=G(1)-W_4^1H(1)$

$G(0)$、$G(1)$、$H(0)$、$H(1)$ 也可用蝶形运算单元表示，因 $G(0)=x(0)+W_2^0x(2)$

$G(1)=x(0)-W_2^0x(2)$

$H(0)=x(1)+W_2^0x(3)$

$H(1)=x(1)-W_2^0x(3)$

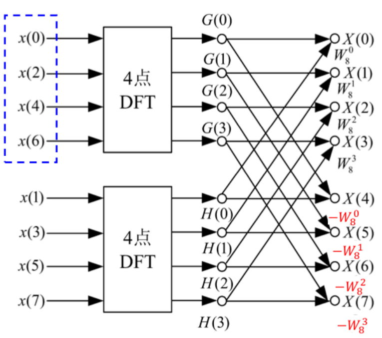
↓ 其实 $W_2^0=W_4^0$，也可全写成 W_4^0

8点FFT拆解成三级： 8点 → 4点   4点 → 2点：

$$G(k)=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l)W_{N/2}^{lk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(2\cdot 2r)\,W_{\frac{N}{2}}^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x[2\cdot(2r+1)]\,W_{N/2}^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r)\,W_{N/4}^{rk} + W_{N/2}^{k}\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+2)\,W_{N/4}^{rk}$$

$$= A(k) + W_N^{2k}\,B(k)$$ $k=0,\cdots,\frac{N}{4}-1$



$G(k+\frac{N}{4}) = A(k) - W_N^{2k}B(k)$ (可类似推得)

$H(k) = C(k) + W_N^{2k}D(k)$ $H(k+\frac{N}{4}) = C(k) - W_N^{2k}D(k)$

$C(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+1)\,W_{N/4}^{rk}$ $D(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+3)\,W_{N/4}^{rk}$

→ W_2^0 也可写为 W_8^0

$\Rightarrow A(0)=x(0)+W_2^0x(4)$ $A(1)=x(0)-W_2^0x(4)$ $G(0)=A(0)+W_8^0B(0)$ $G(1)=A(1)+W_8^2B(1)$

$B(0)=x(2)+W_2^0x(6)$ $B(1)=x(2)-W_2^0x(6)$ $G(2)=A(0)-W_8^0B(0)$ $G(3)=A(1)-W_8^2B(1)$

$C(0)=x(1)+W_2^0x(5)$ $C(1)=x(1)-W_2^0x(5)$ $H(0)=C(0)+W_8^0D(0)$ $H(1)=C(1)+W_8^2D(1)$

$D(0)=x(3)+W_2^0x(7)$ $D(1)=x(3)-W_2^0x(7)$ $H(2)=C(0)-W_8^0D(0)$ $H(3)=C(1)-W_8^2D(1)$

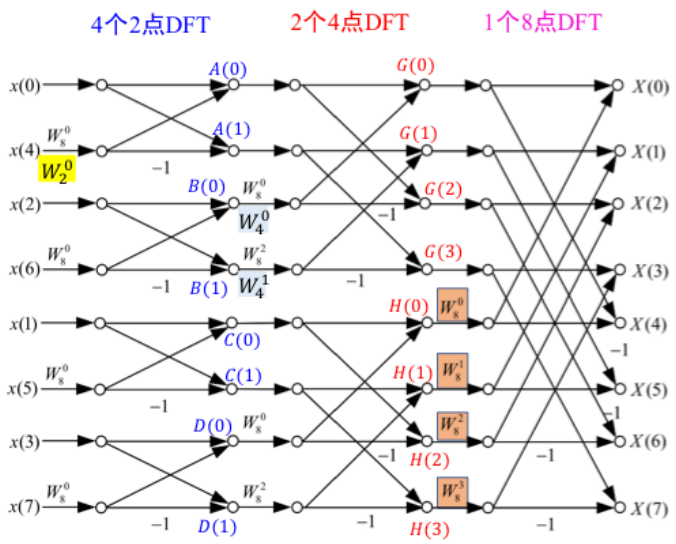
$X(0)=G(0)+W_8^0H(0)$ $X(1)=G(1)+W_8^1H(1)$

$X(2)=G(2)+W_8^2H(2)$ $X(3)=G(3)+W_8^3H(3)$

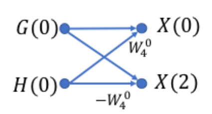
$X(4)=G(0)-W_8^0H(0)$ $X(5)=G(1)-W_8^1H(1)$

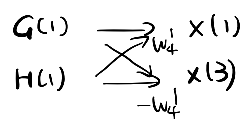
$X(6)=G(2)-W_8^2H(2)$ $X(7)=G(3)-W_8^3H(3)$

画出蝶形运算图如下所示

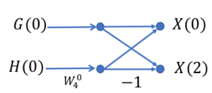


注意，每个蝶形运算单元都是独立的！





也可写为



FFT的应用：快速卷积

注意事项：① 采样频率要满足 Nyquist 频率 ② N为2的整数次幂，不足补零；

③ 基波频率越小，频率分辨率越高 $f_0=\frac{f_s}{N}=\frac{1}{NT_s}$

连续时间信号分析的逼近：

① 时限连续信号：由于时域加窗带来频域上无限宽度，无论取多大采样频率都会产生频谱混叠。

但过度减小采样间隔不可取。 可用抗混叠滤波器 / 选取合适 T_s，使混叠产生的误差在允许范围内

② 频率有限信号：采样频率容易选择，但带限信号一般时域无限（频域加窗导致），不符合DFT在时域对信号的要求

需进行加窗截断。但需合理选择窗函数，否则会产生频谱泄漏现象（频谱从原有频率范围扩展出来，并发生失真）

用比较光滑的窗函数代替矩形窗函数，使被截断后的时域波形两端变平滑

③ 连续周期信号：非时限信号作DFT处理时也需加窗截断。

若截断长度刚好是信号周期时，不会产生频谱泄漏，反之则会。⇒ 合理选取截断长度，确保整周期截断

2.4 Z变换 离散信号的Z域分析

为了满足收敛条件，类似Laplace变换，将 $x(n)$ 乘以一衰减的实指数信号 r^{-n}，使 $x(n)r^{-n}$ 满足收敛条件

$$\mathrm{DTFT}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\underbrace{(re^{j\Omega})}_{\text{令其为复变量}z}{}^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}}_{\text{定义 } Z[x(n)]}$$

单位圆上 $(r=1)$ 的Z变换就是序列的离散时间傅里叶变换 $X(\Omega)$

而DFT可视为Z变换在单位圆上的N点采样

Z反变换亦可由DTFT得出：$x(n)r^{-n} = \mathrm{IDTFT}[X(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)e^{j\Omega n}d\Omega$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)(re^{j\Omega})^n d\Omega = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \triangleq Z^{-1}[X(z)]$$

Z变换收敛域：可用比值判别法、根值判别法

考虑采样信号 $x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$

取Laplace变换 $X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt}_{\text{筛选}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT} \xrightarrow{s\to z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$

Z变换可看作序列的理想冲激采样信号的Laplace变换进行 $z=e^{sT}$ 映射的结果，由复变量s平面映射至复变量z平面

由 $z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\omega T} = e^{\sigma T}e^{j\Omega} = e^{\sigma T}e^{j(\Omega+2k\pi)} = e^{\sigma T}e^{j(\omega+\frac{2k\pi}{T})T}$

↓

在s域上每沿虚轴平移 $\frac{2\pi}{T}=\omega_s$，则在z域上沿单位圆转一圈 ⟶ z－s映射不是单值的