一.连续信号分析

绪论

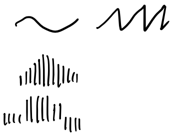
1. 信号分类

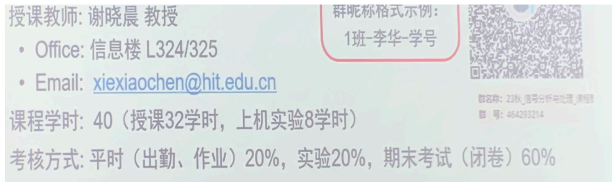
(1) 变量数：一元/多元 ($t, \dots$)

(2) 确定/随机

(3) 连续 —— 模拟信号　　变量 t

离散 {时间离散 — 采样　　变量 n
　　　{幅值离散 — 数字

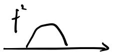




(4) 周期/非周期

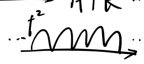
(5) $f(t)$ 视为电压，功率 $|f(t)|^2$，$(-\infty,+\infty)$ 中，

能量 $E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$　　E 有界 → 能量信号



→ 有限时间，有限积分

平均功率 $P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$　　$E=\infty$，P 有界 $(P\neq0)$ → 功率信号



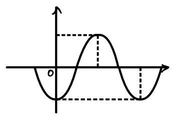
无限时间，f^2 有界

* 周期信号是功率信号

一、时域分析

1. 描述 - 波形图

(1) 正弦：$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$，$-\infty<t<+\infty$，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$



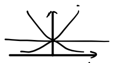
① 微/积分仍为正弦

② 同频正弦相加仍为正弦

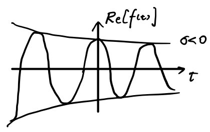
③ $f_1=nf_0$ 与 f_0 相加频率为 f_0，— 基波 f_0，n 次谐波 f_1

(2) 指数：$f(t)=Ae^{st}$，$-\infty<t<\infty$

① $s\in R$：实指数



② $s\notin R$：$f(t)=Ae^{(\sigma+j\omega)t}=Ae^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$，在实指数包络线 $Ae^{\sigma t}$ 内正弦振荡。

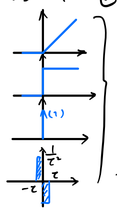


(3) 斜坡：$\begin{cases}kt, & t\geq0\\ 0, & t<0\end{cases}$　$k=1$ 时为单位斜坡 $r(t)$

(4) 阶跃：$\begin{cases}A, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$　$A=1$ 时为单位阶跃 $u(t)$

(5) 冲激：$\begin{cases}\delta(t)=0, & t\neq0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$　为偶函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$

└ 偶冲激，$\delta'(t)$，相当于正负冲激



$r(t)\underset{\int}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftharpoons}}u(t)\underset{\int}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftharpoons}}\delta(t)\underset{\int}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftharpoons}}\delta'(t)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$；奇

2. 运算

(1) 尺度变换：$af(t)$，$\updownarrow\times a$　$f(at)$，$\overset{\times\frac{1}{a}}{\longleftrightarrow}$

(2) 翻转：$-f(t)$、$f(-t)$

(3) 平移：$f(t-t_0)$，$\xrightarrow{t_0}$

(4) 叠加/相乘

(5) 微分/积分

(6) 卷积：$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau$　计算，变换一信号，积分/图解 → 水平翻转 右移 t

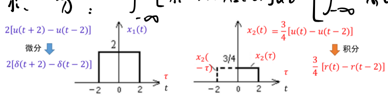
* 卷积后时宽等于两信号时宽之和

① 交换律、分配律、结合律

② 微分：$[x_1(t)*x_2(t)]'=x_1'(t)*x_2(t)=x_1(t)*x_2'(t)$

③ 积分：$\int_{-\infty}^{t}[x_1(t)*x_2(t)]dt=\left[\int_{-\infty}^{t}x_1(t)dt\right]*x_2(t)=$

eg.



$x_1(t)*x_2(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau)*x_2(\tau)]d\tau$　（根据卷积的积分性质，对 x_2 求积分）

$=\frac{d}{dt}\left[x_1(t)*\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau\right]$　（根据卷积的微分性质，对 x_1 求微分）

$=\frac{d}{dt}x_1(t)*\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau$

$\int x(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))dt$　归 $t-t_0$　$=x(t)*\delta(t-t_0)$

④ 与冲激信号：$x(t)\boxed{*\delta(t-t_0)}=x(t-t_0)$，$x(t)*\delta'(t-t_0)=x'(t-t_0)$

⑤ 与阶跃信号：$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，$x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)d\tau$

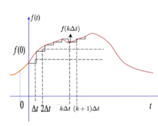
$\Rightarrow x(t)*\delta^{(k)}(t)=x^{(k)}(t)$，$k<0$ 时为 $\left(\int_{-\infty}^{t}\right)^{(-k)}$

3. 分解

(1) 直流 + 交流：交流平均值为 0

(2) 偶分量 + 奇分量：$\begin{cases}f(t)=g(t)+h(t)\\ f(-t)=g(t)-h(t)\end{cases}\Rightarrow$

(3) 冲激之和：以 Δt 离散 $x(t)$，$x(t)=\lim_{\Delta t\to0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta t)\Big|_{t\in(k\Delta t,(k+1)\Delta t)}=\lim_{\Delta t\to0}\sum_{k}x(k\Delta t)[u(t-k\Delta t)-u(t-(k+1)\Delta t)]$



$=\lim_{\Delta t\to0}\sum_{k}x(k\Delta t)\frac{u(t-k\Delta t)-u(t-(k+1)\Delta t)}{\Delta t}\Delta t=\lim_{\Delta t\to0}\sum_{k}x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$　冲激之和

(4) 正交分解

① 正交函数集：定义 $\langle f,g\rangle=\int_{t_1}^{t_2}f(x)\overline{g(x)}dx$，若 $f_1,\dots,f_n$ 满足 $\langle f_i,f_j\rangle=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \neq0, & i=j\end{cases}$，则 $\{f_1,\dots,f_n\}$ 为正交函数集.

若 $C[t_1,t_2]\subset Span(f_1,\dots f_n)$，则为完备正交函数集，则对 $\forall x(t)\in C[t_1,t_2]$ $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle x(t),f_k(t)\rangle}{\langle f_k(t),f_k(t)\rangle}$.

② 无穷维：$n\to\infty$，$v\in F^{\infty}$，若 $\|v\|$ 收敛，则为 Hilbert 空间，保有几何性质.

③ 完备正交集：$\{1,\cos\omega_0 t,\cos 2\omega_0 t,\dots,\sin\omega_0 t,\sin 2\omega_0 t,\dots\}$，对 $C[t_0,t_0+T]$，$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ $\Rightarrow$ $x(t)$ 傅里叶分解

$\{e^{jn\omega_0 t}\}$，$n\in Z$，对 $C[t_0,t_0+T]$，$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$.

④ 分解：$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(t)+x_e(t)$，$t\in(t_1,t_2)$，$x_e(t)$ 为误差，均方误差 $\overline{x_e^2(t)}$. Parseral

选 c_i：$c_i=\frac{\langle x,f_i\rangle}{\langle f_i,f_i\rangle}$. $\{f_i\}$ 越多，$\overline{x_e^2(t)}$ 越小，若 $\{f_i\}$ 完备，则 $\overline{x_e^2(t)}=0$，$E=\int_{t_1}^{t_2}x^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2\|f_i\|$.

二、频域分析

1. 傅里叶级数（周期）

(1) 存在条件：周期信号，一个周期内间断点有限，极值有限，绝对可积.

(2) 形式

① 三角形式：$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$， * 一个周期内即可

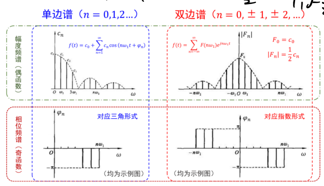
$a_n=\frac{\langle f(t),\cos n\omega_1 t\rangle}{\|\cos n\omega_1 t\|}$，$b_n=\cdots$ $\|1\|=T_1$，$\|\cos n\omega_1 t\|=\|\sin n\omega_1 t\|=\frac{T}{2}$，$n\geq 1$ $\Rightarrow$ $a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)dt$，$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt$，$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega_1 t\,dt$.

或 $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$ $\longrightarrow$ 频谱 $c_n-\omega$，$\varphi_n-\omega$，单边谱. $\left(\begin{smallmatrix}a_{-n}=a_n\\ b_{-n}=-b_n\end{smallmatrix}\right)$

② 指数形式：$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_1 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_1 t}\right)=a_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_1 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$，$F(n\omega_1)=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

$=\frac{\langle f(t),e^{jn\omega_1 t}\rangle}{\|e^{jn\omega_1 t}\|}=\frac{1}{T}\langle f(t),e^{jn\omega_1 t}\rangle$ 双边谱，$F(n\omega_1)=\overline{F(-n\omega_1)}$，频谱对称.

* 正负频率合成一三角分量



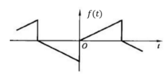
(3) 功率：$P=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}|f(t)|^2dt=c_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)$. Parseral

(4) 对称性

① 奇：$a_n=0$，正弦级数

② 偶：$b_n=0$，余弦级数

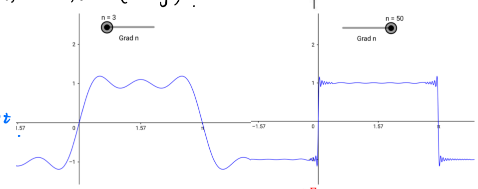
③ 奇谐函数：$f(t)=-f(t\pm\frac{T}{2})$ $\Rightarrow$ $a_n=b_n=0$ (n 偶)，$a_n=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt$，$b_n=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin n\omega_1 t\,dt$ (n 奇).



(5) 近似周期信号：间断点收敛于 $\frac{f(t_0^+)+f(t_0^-)}{2}$，考察均方误差.

eg1. $f(t)=\begin{cases}\frac{E}{2}, & 0<t<\frac{T}{2}\\ -\frac{E}{2}, & -\frac{T}{2}<t<0.\end{cases}$

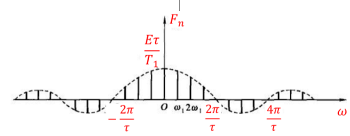
解：$f(t)$ 奇，$a_n=0$，$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{E}{2}\sin n\omega t\,dt=\begin{cases}\frac{2E}{n\pi}, & n=1,3,5,\dots\\ 0, & n=2,4,6,\dots\end{cases}$，$f(t)=\frac{2E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\omega t$



高频 $\longrightarrow$ 跳变，低频 $\longrightarrow$ 平顶；跳变时有超调

eg2. $f(t)=\begin{cases}E, & |t|\leq\frac{\tau}{2}\\ 0, & \frac{\tau}{2}<|t|<\frac{T}{2}.\end{cases}$

解：$b_n=0$，$a_0=\frac{E\tau}{T_1}$，$a_n=\frac{2E}{n\omega_1}\sin\frac{n\pi\tau}{T}=\frac{2E\tau}{T_1}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$，$F_n=\frac{1}{2}a_n=\frac{E\tau}{T_1}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$ $\longrightarrow$ 谱线呈取样函数 $\frac{\sin x}{x}$.

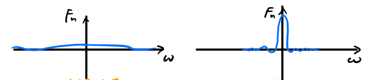


* 主要分布在 $\pm\frac{2\pi}{\tau}$，频带 $=\frac{2\pi}{\tau}$. ($\delta(t)$ $\tau\to 0$，频带 ∞，不易滤除)

eg3. $f(t)=e^{j\omega_1 t}$.

解：$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}e^{j\omega_1 t}e^{-jn\omega_1 t}dt=Sa((1-n)\pi)=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$，$\varphi_n=0$. 只在 $n=1$ 有分量.

说明 $e^{j\omega_1 t}$ 是三角另一形式 ($\cos\omega_1 t+j\sin\omega_1 t$)


τ小，全频分布　　τ大，直流

2. 非周期信号

(1) 傅里叶级数：取 $f(t)$ $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 部分并延拓为周期 T_1 的信号，$f(t)=\sum\hat{F}(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$.

$T_1\to\infty$ 使 $\hat{F}(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}dt\longrightarrow 0$ $\Rightarrow$ 考虑 $T_1\hat{F}(n\omega_1)$，$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ $\longrightarrow$ 频谱密度函数.

(2) 傅里叶变换

① 频谱密度函数：离散级数 $F(n\omega_1)$ 为 $n\omega_1$ 频率强度；

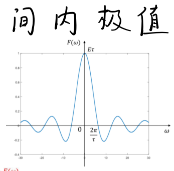
连续 $F(\omega)=\lim_{\omega_1\to 0}\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}2\pi$，$\int_{\omega_1}^{\omega_2}F(\omega)d\omega$ 反映 $[\omega_1,\omega_2]$ 频率强度.

② 正反变换：$f(t)$ — $F(\omega)$，$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$，$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$.

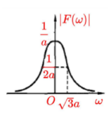
条件：$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 有限，有限第一类间断点，有限区间内极值点有限.

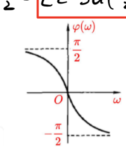
(3) 常见信号频谱　* 不满足 Dirichlet 条件可用极限、$\delta(t)$ 表示

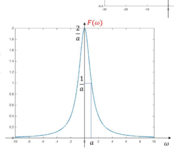
① 矩形脉冲：$f(t)=\begin{cases}E, & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ $F(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ee^{-j\omega t}dt=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=\boxed{E\tau\,Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$



② 单边指数*：$f(t)=\begin{cases}e^{-at}, & t>0, a>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ $F(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$.





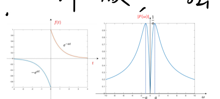


③ 双边指数*：$f(t)=e^{-a|t|}$，$a>0$，$F(\omega)=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$.

lim

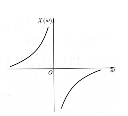
④ 直流信号：$1=\lim_{a\to 0}e^{-a|t|}$，$F(\omega)=\lim_{a\to 0}\frac{2a}{a^2+\omega^2}=\begin{cases}0, & \omega\neq 0\\ \infty, & \omega=0\end{cases}$ $\longrightarrow$ 冲激，强度为 $\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a}{a^2+\omega^2}d\omega=2\pi$. 故 $\mathcal{F}[1]=\boxed{2\pi\delta(\omega)}$

⑤ 双边奇指数*：$f(t)=\begin{cases}-e^{at}, & t<0\\ e^{-at}, & t>0\end{cases}$ $(a>0)$. $F(\omega)=-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$.



lim

⑥ 符号函数：$sgn(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$ $F(\omega)=\lim_{a\to 0}-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}=\boxed{\frac{2}{j\omega}}$.



⑦ 阶跃：$u(t)=\frac{1}{2}(\text{sgn}(t)+1)$，$F(\omega)=\frac{1}{2}\mathcal{F}[\text{sgn}(t)]+\frac{1}{2}\mathcal{F}[1]=\boxed{\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}}$

⑧ 冲激：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$，$\boxed{F(\omega)=1}$ ⇒ 均匀分布，白色频谱

(4) 性质

① 线性

② $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$，$\overline{f(t)}\longleftrightarrow\overline{F(-\omega)}$。若 $f(t)\in R$，则 $F(\omega)=\overline{F(-\omega)}$ $\begin{cases}Re(F(\omega))\text{偶}\\Im(F(\omega))\text{奇}\end{cases}$

$\begin{cases}f(t)\text{ 偶}：Im(F(\omega))=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=0，F(\omega)\text{ 实偶}.\\f(t)\text{ 奇}：Re(F(\omega))=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=0，F(\omega)\text{ 虚奇}.\end{cases}$

③ 对偶性：$f(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega)$，$F(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}2\pi f(-\omega)$。 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}^{-1}$ 的关系.

eg. 求 $\mathcal{F}\{Sa(t)\}$.

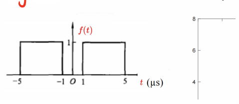
解：由 $f(t)=\begin{cases}E, & |t|<\frac{\tau}{2}\\0\end{cases}$，$F(\omega)=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$。令 $\tau=2, E=\frac{1}{2}$，则 $\mathcal{F}\{f(t)\}=Sa(\omega)$.

则 $\mathcal{F}\{Sa(t)\}=2\pi f(-\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1\\0\end{cases}$.

④ 尺度变换，$f(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega)$，$f(at)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$. 时域压缩 $\overset{f\!f}{\longrightarrow}$ 频域展宽

⑤ 时移：$f(t-t_0)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}e^{-j\omega t_0}F(\omega)$.

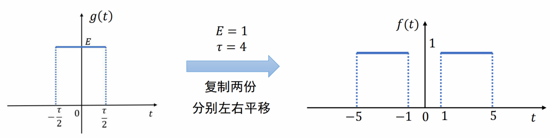
eg1. 求$f(t)$频谱的带宽B_f



解：$f(t)$是宽为 $\tau=4$ 的单位矩形脉冲 $g(t)$ 复制两份后分别左右平移 $\frac{3\tau}{4}=3$ 后相加得到，即

$$f(t)=g\left(t+\frac{3\tau}{4}\right)+g\left(t-\frac{3\tau}{4}\right)$$

其中$g(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$，已知$G(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$。



解：$f(t)$是宽为 $\tau=4$ 的单位矩形脉冲 $g(t)$ 复制两份后分别左右平移 $\frac{3\tau}{4}=3$ 后相加得到，即

$$f(t)=g\left(t+\frac{3\tau}{4}\right)+g\left(t-\frac{3\tau}{4}\right)$$

其中$g(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$，已知$G(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$。根据傅里叶变换的时域移位性质，以及 $E=1$、$\tau=4$，有

（提示：欧拉公式）

$$F(\omega)=G(\omega)\left(e^{j\omega\frac{3\tau}{4}}+e^{-j\omega\frac{3\tau}{4}}\right)=2E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{3\omega\tau}{4}\right)=8Sa(2\omega)\cdot\cos 3\omega$$

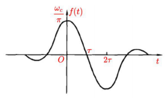
所以信号 $f(t)$ 的带宽是 $Sa(2\omega)$ 和 $\cos(3\omega)$ 各自的第一个过零点中的较小值，即

$$B_f=\min\left(\frac{2\pi}{\tau},\frac{2\pi}{3\tau}\right)=\frac{2\pi}{3\tau}=\frac{\pi}{6}\ (\text{rad}/\mu\text{s})$$，换算单位后，带宽为 $B_f=\frac{1}{12}$ MHz

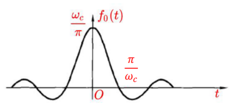
eg2. 已知$\omega_c>0$，$\tau>0$，求双取样信号（双Sa信号）

$$f(t)=\underbrace{\frac{\omega_c}{\pi}\{Sa(\omega_c t)}_{f_0(t)}-Sa(\omega_c(t-2\tau))\}$$

的频谱。



解：



$f_0(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$　$t=0$时，$f_0(0)=\frac{\omega_c}{\pi}$

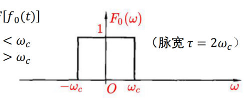
当 $\sin\omega_c t=0$且$t\neq0$时，得 $\omega_c t=\pi$，$t=\frac{\pi}{\omega_c}$　（此处只计算了一个点）

令 $\mathcal{F}[Sa(t)]=F_s(\omega)$，已知 $F_s(\omega)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\0 & |\omega|>1\end{cases}$

由傅里叶变换的线性及尺度变换特性，得

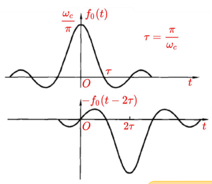
$$\mathcal{F}[f_0(t)]=\mathcal{F}\left[\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)\right]=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{1}{|\omega_c|}F_s\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$F_0(\omega)=\mathcal{F}[f_0(t)]$
$=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$

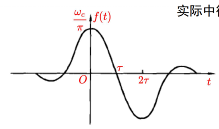


（脉宽 $\tau=2\omega_c$）

已知 $F_0(\omega)=\mathcal{F}[f_0(t)]=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$　由时移特性，$F(\omega)=\mathcal{F}[f_0(t)]-\mathcal{F}[f_0(t-2\tau)]=\begin{cases}1-e^{-j2\omega\tau} & |\omega|<\omega_c\\0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$

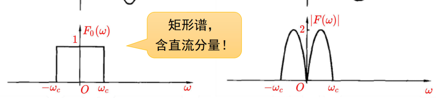


因此，从中可以得到幅度谱为 $|F(\omega)|=\begin{cases}2|\sin(\omega\tau)| & |\omega|<\omega_c\\0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$



实际中往往选 $\tau=\frac{\pi}{\omega_c}$，则幅度谱变为

$$|F(\omega)|=\begin{cases}2\left|\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_c}\right)\right| & |\omega|<\omega_c\\0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$



单Sa信号的频谱最为集中（矩形谱），但是含有直流分量，使得它在实际传输过程中带来不便；而双Sa信号的频谱仍然限制在$|\omega|<\omega_c$范围内，却消去了直流分量。

⑥ 频移：$e^{j\omega_0 t}f(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega-\omega_0)$　可平移频谱

⑦ 微分：$\frac{d^n f(t)}{dt^n}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}(j\omega)^n F(\omega)$.

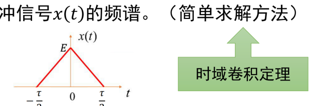
⑧ 积分：$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$. * 初值的积分带来直流分量→$\delta(\omega)$

⑨* Paserval：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$.

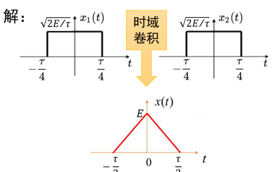
⑩ 卷积：$f_1(t)*f_2(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}F_1(\omega)F_2(\omega)$，$f_1(t)f_2(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$.

eg. 求三角形脉冲信号$x(t)$的频谱。（简单求解方法）

$$x(t)=\begin{cases}E\left(1-\frac{2}{\tau}|t|\right) & |t|<\frac{\tau}{2}\\0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$



解：



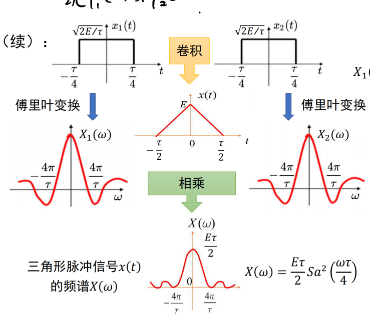
已知 $x_1(t)=x_2(t)=\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\left[u\left(t+\frac{\tau}{4}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{4}\right)\right]$

$$x_1(t)*x_2(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}*\left[\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{4}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{4}\right)\right]*\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\left[r\left(t+\frac{\tau}{4}\right)-r\left(t-\frac{\tau}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{2E}{\tau}\left[r\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-2r(t)+r\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=x(t)$$

解（续）：



$X(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

$$X_1(\omega)=X_2(\omega)=\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\cdot\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

由时域卷积定理，得

$$X(\omega)=X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)=\frac{2E}{\tau}\cdot\frac{\tau^2}{4}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)=\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

3、周期信号傅里叶变换

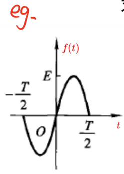
(1) $f(t)=e^{j\omega_0 t}$：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}e^{j\omega_0 t}dt=F(\omega-\omega_0)$，$f(t)=1$时 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，即 $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.

(2) $f(t)=\sin\omega_0 t$：$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\}=-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$.

(3) $f(t)=\cos\omega_0 t$：$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\}=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$.

} 单频.

eg. 求单周正弦脉冲的傅里叶变换。（频域卷积定理方法）



解：该信号可以写为 $f(t)=E\sin\omega_1 t\cdot\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$，$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$

（相当于用一个单位矩形脉冲取出了$t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$的正弦信号$E\sin\omega_1 t$）

由频域卷积定理和正弦信号的傅里叶变换，得

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot E\cdot\mathcal{F}[\sin\omega_1 t]*\mathcal{F}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{E}{2\pi}\cdot j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]*TSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$=\frac{ET}{2j}[\delta(\omega-\omega_1)-\delta(\omega+\omega_1)]*Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$=\frac{ET}{2j}\left[Sa\left(\frac{(\omega-\omega_1)T}{2}\right)-Sa\left(\frac{(\omega+\omega_1)T}{2}\right)\right]$$

相当于矩形脉冲的频谱 $E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 其中$E=1$，$\tau=T$

当$\omega=\omega_1$时，由$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$，有

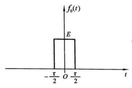
$$F(\omega_1)=\frac{ET}{2j}[Sa(0)-Sa(2\pi)]=\frac{ET}{2j}(1-0)=\frac{ET}{2j}$$

(4) 一般周期：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \longrightarrow \mathcal{F}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1) \longrightarrow$ 离散无穷个冲激 → 谱波.

周期矩形脉冲信号的傅里叶变换

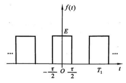
从单矩形脉冲信号$f_0(t)$出发，其傅里叶变换为

$$F_0(\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



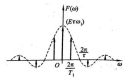
则周期矩形脉冲信号$f(t)$的傅里叶级数为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_1}E\tau Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)e^{jn\omega_1 t}$$



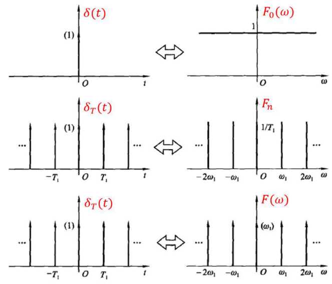
则周期矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T_1}E\tau Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$



周期单位冲激序列的傅里叶级数系数 vs 傅里叶变换

单位冲激信号 $\delta(t)$



单位冲激信号的傅里叶变换 $F_0(\omega)$

周期单位冲激序列 $\delta_T(t)$

周期单位冲激序列的傅里叶级数系数 F_n

周期单位冲激序列的傅里叶变换 $F(\omega)$

三、复频域分析

1、从FT过渡

FT不易有f(t)绝对可积 ⇒ 使f(t)衰减，$\times e^{-\sigma t}$.

频域 ω → 复数域 $s=\sigma+j\omega$.

$\Big\}\ j\omega\to s$，$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$.

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$.

2、σ

(1) 收敛域：$\mathcal{L}\{f(t)\}$ 存在，需 $\sigma>\sigma_0$，为收敛域 ⟶ σ 抵消 f(t) 发散.

(2) s 域中，极点 $\sigma>0$ → 发散，$\sigma<0$ ⟶ 收敛.

3、$\mathcal{L}\to\mathcal{F}$

左半平面极点　　虚轴极点

$\sigma>0$：无FT．$\sigma<0$：$s=j\omega$ 即为FT．$\sigma=0$，极点 $j\omega_n$，$F(j\omega)=\sum\frac{K_n}{s-p_n}+\sum K_n\pi\delta(\omega-\omega_n)$

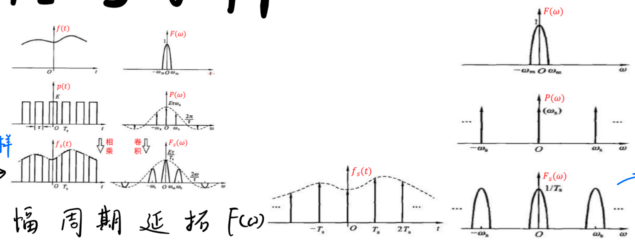
二、离散信号分析

一、信号的采样与恢复

1. 采样

对连续信号 $f(t)$ 取特定时刻值 $f_s(t)$.

使用周期矩波采样，$f_s(t)=f(t)p(t)$，$p(t)$ 脉宽小.



2. $f(t)$ 与 $f_s(t)$

$\mathcal{F}\{f_s(t)\}=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\mathcal{F}\{p(t)\}=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*2\pi\sum P_n\delta(\omega-n\omega_s)=\sum P_nF(\omega-n\omega_s)\Rightarrow$

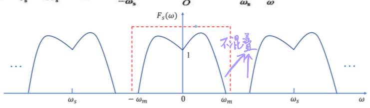
$p(t)$ 脉宽 $\to 0$，梳函数采样，$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum F(\omega-n\omega_s)\Rightarrow$ 等幅周期延拓 $F(\omega)$

→理想，不失信息

3. 时域采样定理

$\mathcal{F}[\delta_T(t)]=\frac{1}{T_s}\sum\delta(\omega-n\omega_s)$

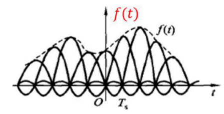
$F(\omega)$ 频带有限，$|\omega|<\omega_m$，则采样频率 $\omega_s\geq 2\omega_m$ 才能保留原信号所有信息.

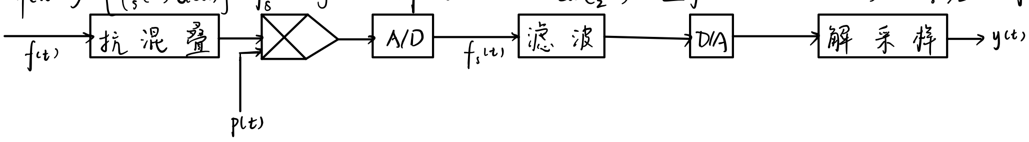


$F_s(\omega)\cdot G(\omega)$，$G(\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|\leq\frac{\omega_s}{2}\\ 0\end{cases}$ 即为 $F(\omega)\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$ 恢复信号 $f(t)$.

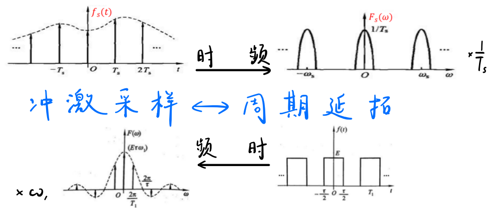
内插公式

$\tilde{f}(t)=\mathcal{F}^{-1}[F_s(\omega)G(\omega)]=f_s(t)*g(t)=\sum f(nT_s)\delta(t-nT_s)*Sa(\frac{\omega_s}{2}t)=\sum f(nT_s)Sa(\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s))\to\omega_s\geq 2\omega_m$ 时，$\tilde{f}(t)=f(t)$.





4. 频域采样定理



冲激采样 ⟷ 周期延拓

对 $F(\omega)$ 进行冲激串调制，$F_p(\omega)=F(\omega)\Delta_{\omega_0}(\omega)$，则时域 $f_p(t)=f(t)*\mathcal{F}[\delta_{\omega_0}(\omega)]$

$=f(t)*\frac{1}{\omega_0}\delta_{\omega_0}(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum f(t-kT_1)\to f(t)$ 周期延拓.

若 $f(t)$ 时间有限，$|t|\leq t_m$，则应 $\omega_0\leq\frac{\pi}{t_m}$ $\left(\frac{1}{2\pi\omega_0}\geq 2t_m\right)$. $F(\omega)=\sum F(k\omega_0)Sa(t_m(\omega-k\omega_0))$.

二、离散信号描述

1. 概念

序列：$x(n)$，$n\in Z$. → 集合、表达式、图

2. 典型序列

(1) 单位脉冲：$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$ → 取样：$x(n)\delta(n-k)=x(k)$.

(2) 单位阶跃：$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$. $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$ 差分

(3) 矩形：$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$.

(4) 实指数：$x(n)=a^n u(n)$

(5) 正弦：$x(n)=A\sin(n\omega_0T_s+\varphi_0)$，采样周期 T_s，$\Omega_0=\omega_0T_s$ 离散域角频率.

$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{Q}{P}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow x(n)$ 有周期 Q.

(6) 复指数：$x(n)=e^{(\sigma+j\Omega_0)n}$

(7) 任意：用 $\delta(n)$ 表示：$x(n)=x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)*\delta(n)$.

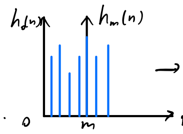
3. 时域变换

(1) 尺度：$m\in N^+$，$x(\frac{n}{m})$：采样频率 $=\frac{1}{m}T_s$. $x(nm)$，采样频率 $=mT_s$.

(2) 卷积：$x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)y(n-m)$.

$\sum x(m)\delta(n-m)\to x(m)h(n-m)$

由 LTV 冲激响应 $h_m(n)$，$x(n)\to LTV\to y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h_m(n)$



$\to LTI$，$h_m(n)=h_0(n-m)$.

对 LTI，$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$.

$f(X+Y)=f(X)*f(Y)$

性质：交换结合分配，$x(n)*\delta(n-m)=x(n-m)$.

例2-5：$h(n)=\{-1,2,4,0,5\}$，$x(n)=\{1,3,6,1,-1,4\}$

求 $y(n)=h(n)*x(n)$ $y(n)$是一个长度为10的序列

$m=0$

						-1	2	4	0	5					
4	-1	1	6	3	1										
	4	-1	1	6	3	1									
		4	-1	1	6	3	1								
			4	-1	1	6	3	1							
				4	-1	1	6	3	1						
					4	-1	1	6	3	1					
						4	-1	1	6	3	1				
							4	-1	1	6	3	1			
								4	-1	1	6	3	1		
									4	-1	1	6	3	1	
										4	-1	1	6	3	1
						-1	-1	4	23	32	13	34	21	-5	20

$y(n)=\{-1,-1,4,23,32,13,34,21,-5,20\}$

or

n	0	1	2	3	4	5				
h	-1	2	4	0	5					
x	1	3	6	1	-1	4				
h(0)x(n)	-1	2	4	0	5					
h(1)x(n)		-3	6	12	0	15				
⋮			-6	12	24	0	30			
				-1	2	4	0	5		
					1	-2	-4	0	-5	
						-4	8	16	0	20
	-1	**-1**	**4**	**23**	**32**	**13**	**34**	**21**	**-5**	**20**

$h(n)=\{-1,2,4,0,5\}$，$x(n)=\{1,3,6,1,-1,4\}$

$h(n)=-\delta(n)+2\delta(n-1)+4\delta(n-2)+0\cdot\delta(n-3)+5\delta(n-4)$

$x(n)=\delta(n)+3\delta(n-1)+6\delta(n-2)+\delta(n-3)-\delta(n-4)+4\delta(n-5)$

-1 -1 4 23 32 13 34 21 -5 20

	-1	2	4	0	5	0
1	-1	2	4	0	5	0
3	-3	6	12	0	15	0
6	-6	12	24	0	30	0
1	-1	2	4	0	5	0
-1	1	-2	-4	0	-5	0
4	-4	8	16	0	20	0

$x(n)*h(n)=(\sum x(m)\delta(n))*(\sum h(m)\delta(m))$

$x(0)=x(0)\delta(0)*h(0)\delta(0)=x(0)\delta(0)$,

$x(1)=x(0)\delta(0)*h(1)\delta(1)+x(1)\delta(1)*h(0)\delta(0)$
$=x(0)h(1)+x(1)h(0)$.

三、频域分析

1. 周期信号

(1) 离散傅里叶级数 DFS：$x(t)$ 周期 T_0 内采样 N 次，$T=\frac{T_0}{N}$，$\omega=N\omega_0$，$\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$ 为数字频率.

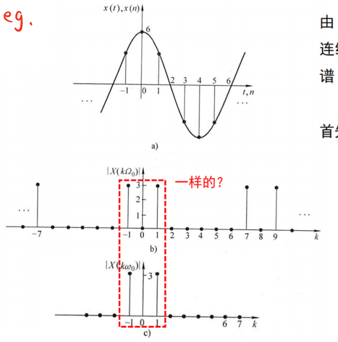
$X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0t}dt\Rightarrow X(k\frac{\Omega_0}{T})=\frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jk\Omega_0n}\cdot T=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jk\Omega_0n}$，$\boxed{\tilde{X}(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0n}}$ $k\in Z$

$x(nT)$为采样信号，$\tilde{x}(n)$为序列，周期N

$\boxed{\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0n}}$，$n=0,1,2,\ldots,N-1$.

$\tilde{X}(k\Omega_0)$ 周期 N，$\tilde{X}(-k\Omega_0)=\overline{\tilde{X}(k\Omega_0)}$，$|\tilde{X}(k\Omega_0)|-n$ 谱周期，偶.

eg.



由 $x(t)=6\cos\pi t=3(e^{j\pi t}+e^{-j\pi t})$，可以通过连续时间周期信号的傅里叶级数求得相应的频谱（离散谱），幅度频谱用$|X(k\omega_0)|$表示。

首先，以 k 为横坐标，比较$x(t)$和$x(n)$的频谱：

$$|X(k\Omega_0)|=\begin{cases}3 & k=\pm1,\ \pm7\\ 0 & k=0,\ \pm2,\ \pm3,\pm4,\pm5,\ \pm6\end{cases}$$

$$|X(k\omega_0)|=\begin{cases}3 & k=\pm1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

连续 $x(t) \longrightarrow X(k\omega_0)$

$\downarrow$

采样 $x_s(nT)$ 周期延拓，需周期 $N\geq 2n_{max}$ 不混叠

$\downarrow$

序列 $x^*(n) \longrightarrow X^*(k\Omega_0)$

(2) DFS性质：

① 线性

② 周期卷积定理： $x(n)\circledast h(n)=\sum_{m=k}^{N-1}x(k)h(n-k) \longleftrightarrow N\,X(k\Omega_0)H(k\Omega_0)$.

③ 复共轭： $\overline{x(-n)} \longleftrightarrow \overline{X(k\Omega_0)}$

④ 位移： $x(n-m)\longleftrightarrow e^{-jk\Omega_0 m}X(k\Omega_0)$.

⑤ 帕斯瓦尔： $\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{k=0}^{N-1}|X(k\Omega_0)|^2$.

2、非周期信号

(1) DTFT：非周期信号延拓后DFS，$T,N\to\infty$， $\boxed{X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\Omega n}}$，$\boxed{x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega}$

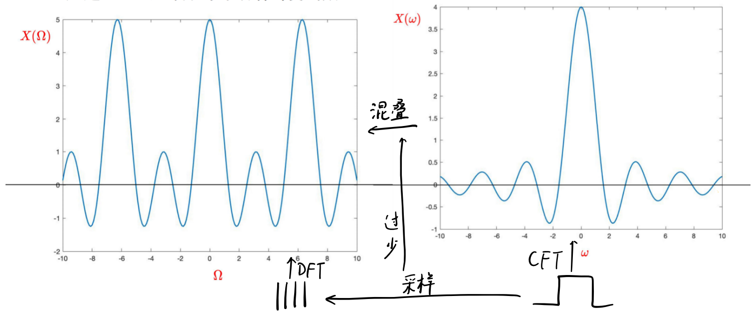
$X(\Omega)$收敛充分条件： $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|$ 收敛.

例2-10：求有限长序列$x(n)$的频谱：

$$x(n)=\begin{cases}1 & -2\leq n\leq 2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

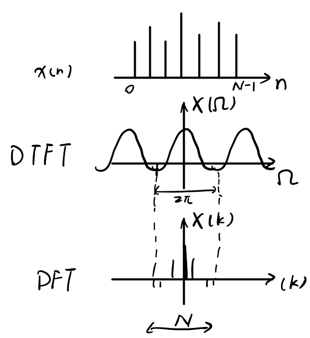
解： $X(\Omega)=\sum_{n=-2}^{2}x(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-2}^{2}e^{-j\Omega n}=\frac{\sin\left(2+\frac{1}{2}\right)\Omega}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$ 频谱为连续的

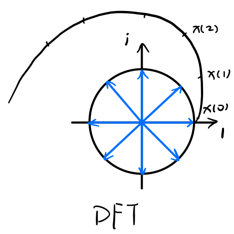
$$|X(\Omega)|=\left|\frac{\sin\left(2+\frac{1}{2}\right)\Omega}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right|,\quad \varphi(\Omega)=\begin{cases}0 & X(\Omega)>0\\ \pm\pi & X(\Omega)<0\end{cases}$$



(2) DTFT性质

线性	$ax(n)+by(n)$	$aX(\Omega)+bY(\Omega)$
时域平移	$x(n-n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
时间翻转	$x(-n)$	$X(-\Omega)$
频域平移	$e^{j\Omega_0 n}x(n)$	$X(\Omega-\Omega_0)$
时域卷积	$x(n)*y(n)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
共轭对称	$\overline{x}(n)$	$\overline{X}(-\Omega)$
频域微分	$nx(n)$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
频域卷积	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\lambda)Y(\Omega-\lambda)d\lambda$





3、DFT

时域离散⇒频域真实信息离散，$\Omega=k\frac{2\pi}{N}=0,\frac{2\pi}{N},\cdots\frac{2\pi}{1}$.

从离散序列到离散频域序列

(1) 从DFS到DFT： $X(k)=NX(k\Omega_0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$，$k=0,1,\ldots,N-1$. $x(n)$长为N. (不混叠)

(2) 从DTFT到DFT：对连续的$X(\Omega)$采样，$X(k)=X(k\frac{2\pi}{N})$，$k=0,1,\ldots,N-1$，采样间隔$\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$. $x(n)$长为$L\leq N$. (一般$L=N$)

矩阵形式： $X(k)=[X(0)\cdots X(N-1)]^T$，$x(n)=[x(0)\cdots x(N-1)]^T$，$W_{nk}=(e^{-jk\frac{2\pi}{N}n})_{N\times N}$，$X(k)=W_{nk}\,x(n)$.

(3) 性质

① 线性： $ax_1(n)+bx_2(n)\longleftrightarrow aX_1(k)+bX_2(k)$，$x_1(n)$，$x_2(n)$长度相同，否则短的补零 $((n-m))_N=(n-m)\%N$

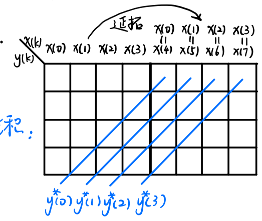
② 圆周移位性质：取$0\sim N-1$的$x(n)$ N个值排成环移位($x(n+kN)=x(n)$)，$x((n-m))_N$仍在$0\sim N-1$取值.

圆周移位可记为 $x((n-m))_N R_N(n) \longleftrightarrow X(k)e^{-jk\Omega_0 m}$ ②移位 ③加窗 ①延拓

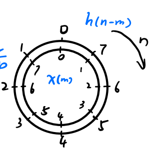
③ 圆周卷积性质： $x(n)\circledast h(n)\longleftrightarrow X(k)H(k)$，

$x(n)\circledast h(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h((n-m))_N R_N(n)$，$x(n)$，$h(n)$长为$N$.

列表求圆周卷积：



圆周移位后乘积和



④ 奇偶虚实性： $\overline{x}(n)\longleftrightarrow\overline{X}(N-k)$

4、FFT

$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nk}x(n)$，$W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$，$W_N^{nk}$只与$nk$有关，长为$N$的序列计算DFT需$O(N^2)$.

W_N^r有周期N，对$n,k=0,1,2,\ldots,N-1$，$N\times N$的W_N^{nk}矩阵有重复计算

W_N^r各值对称，$W_N^r=-W_N^{r+\frac{N}{2}}$. ($N$偶)

$$(nk)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&3&6&9\end{bmatrix}$$

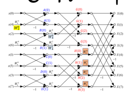
$W_N^{rn}=W_{\frac{N}{r}}^{n}\Rightarrow$ 可将 N 个点分为 2 组 $\frac{N}{2}$ 个点计算，$(r=2)$ $X(k)=\sum_{n偶}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n奇}x(n)W_N^{nk}=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_{\frac{N}{2}}^{lk}+W_N^k\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l+1)W_{\frac{N}{2}}^{lk}$

W_4：$0=$ + X (W_4旋转，$\times W_N^k$)　$W_N^k W_N^{(n-1)k}$，W_N^{nk}

$=G(k)+W_N^kH(k)$，$G(k)$、$H(k)$ 均为 $\frac{N}{2}$ 长的DFT.

$\to X(k+\frac{N}{2})=G(k)-W_N^kH(k)$

0 1 2 3 4 5 6 7	0 2 4 6 / 1 3 5 7	0 4 2 6 / 1 5 3 7



无限平分，对长 $N=2^m$ 的序列，$O(N\log_2 N)$.

对 $N=2$ 序列，$X(0)=A(0)+B(0)$

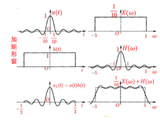
$X(1)=A(0)-B(0)$

5. 信号恢复的逼近

(1) 时间有限信号：频带无限，会混叠，需对 $F(\omega)$ 加窗

(2) 频率有限信号：时间无限，对 $f(t)$ 加窗不当会使 $F(\omega)$ 变无限宽 → 频谱泄露

若 $f(t)$ 周期，则加窗长度需为周期.



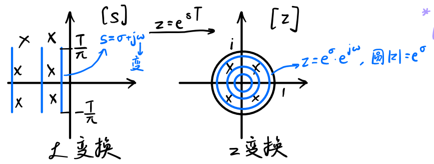
四、z域

1. z变换

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$.　$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$，$C: z=re^{j\Omega}, 0\le\Omega<2\pi$.

由DTFT乘 r^{-n} 得到，$z=re^{j\Omega}$

从 s 域到 z 域，$z=e^{sT}$



* s平面纵向(频带) $\frac{2\pi}{T}$ 的长度缠绕在z平面

$H(j\omega)$ $[\frac{\pi}{T},-\frac{\pi}{T}]$ 之外有值 → z平面上混叠，条件：$\frac{\pi}{T}>\omega_h\Rightarrow\omega_s>2\omega_h$

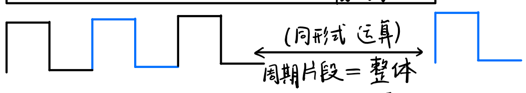
从 $\mathcal{L}$ 到 Z，$H(z)\big|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(s+j\frac{2\pi}{T}k\right)$

求Z变换 $H(z)$ 时 ⇐ 多值映射

不能直接代 $z=e^{sT}$ 到 $H_a(s)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-nT_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)e^{jn\omega_0 t},$$
$$F(n)=\frac{1}{T_0}F(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}$$
$$F_T(\omega)=2\pi\sum_n F(n)\delta(\omega-n\omega_0)=\omega_0\sum_n F(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}\delta(\omega-n\omega_0)$$

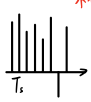
延拓　$f(t)$　采样



(同形式运算)

周期片段 = 整体

最低频 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$\mathcal{F}$	频域离散 ↑ (周期)级数　频率有最小分量 ω_0　($T=T_0$)	频率为 $0\sim\omega_h$　频域连续 ↑ 变换(非周期)　($T=\infty$)
t　ω　$\omega t=\Omega n$　$T_s=\frac{T}{N}$ 采样 N 点　连续 → 频域非周期	CFS：$F(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$	CTFT：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
$n=\frac{t}{T_s}$　$\Omega=\omega T_s$　离散 → 频域周期 最高频 $\omega_h=\frac{2\pi}{T_s}$，$\Omega_h=2\pi$ → 采样的结果  T_s	DFS：$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$ $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ $x(n)$ 无限,周期N,离散 $X(k\Omega)$ 无限,周期N,离散 最低频 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$　取主值 → DFT：$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$ $x(n)$,$X(k)$有限 离散,(周期)　$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{jk\Omega_0 n}$ ⊛	DTFT：$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$ $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$. $x(n)$无限,非周期,离散 $X(\Omega)$无限,周期 2π,连续 频域采样
卷积公式	$x_1 * x_2 \longleftrightarrow N X_1X_2$ $x_1x_2 \longleftrightarrow X_1 * X_2$	$x_1 * x_2 \longleftrightarrow X_1X_2$ $x_1x_2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1 * X_2$ → 连续频域 $\frac{1}{N}X_1 * X_2$ → 离散频域

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-nT_s)$

$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\sum_n\frac{2\pi}{T_s}\delta(\omega-n\omega_s)$

$=\frac{1}{T_s}\sum_n F(\omega-n\omega_s)$.

三、信号的处理

第三章系统仅保留的(更多见自控A)

3.1.2 系统的性质

(1) 记忆性：瞬时系统，动态系统

(2) 因果性：因果系统，非因果系统

(3) 可逆性：可逆系统　——对应

(4) 稳定性

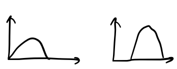
(5) 时不变性：时变系统，时不变系统

(6) 线性：线性系统，增量线性系统

一、信号无失真传输

1. 不失真

$y(t)=Kx(t-t_0)$，$Y(\omega)=Ke^{-j\omega t_0}X(\omega)$.



对不同谐波，$x(t)=E_1\sin\omega_1 t+E_2\sin\omega_2 t$，$y(t)=KE_1\sin(\omega_1 t-\varphi_1)+KE_2\sin(\omega_2 t-\varphi_2)$,

各延迟 $\frac{\varphi_1}{\omega_1}$、$\frac{\varphi_2}{\omega_2}$，不相位失真需 $\frac{\varphi_1}{\omega_1}=\frac{\varphi_2}{\omega_2}$，$\varphi\propto\omega$，$\varphi=-\omega t_0$

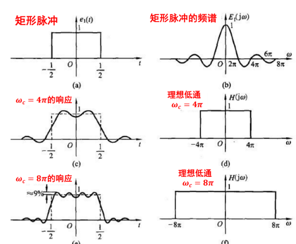
2. 实际传输

$H(j\omega)$ 频率有限.

(1) 理想低通滤波：$H(\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0}, & |\omega|<\omega_c\\ 0\end{cases}$.

→ $h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$，时域无限、非因果系统 → 不可实现

时域上振荡 → 吉布斯现象

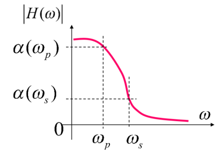


二、滤波器

1、指标

$(|H(j\omega)|^2$ 下降一半$)$

(1) 通带、阻带、截止频率. $20\lg|H(j\omega)|$ 下降 3dB 时取 $\omega_p=\omega_{3dB}$,



(2) 中心频率: $\omega_0=\sqrt{\omega_p\omega_s}$.

(3) 衰减函数: $\alpha=20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega)|}=-20\lg|H(\omega)|$.

2、零极点分析

s 替换 $j\omega$. $H(s)$ 中极点位于左半平面 → 稳定系统

零点位于左半平面 → 最小相位系统 → 时滞小

$|H(j\omega)|^2\big|_{s=j\omega}=H(s)H(-s)$ → 零极点对称，$H(s)$ 零极点在左半平面.

3、Butterworth 滤波器

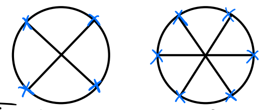
$\boxed{|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}}$. n 为阶数, $|H(\omega_c)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(1) 最大平坦性: $H^{(n)}(0)=1$

(2) 单调下降, 从 $1\to0$

(3) $n\to\infty$ 时趋于理想低通滤波

(4) $H(s)H(-s)$ 极点 2n 等分单位圆



n=2　　n=3

阶次确定: 由 ω_s、ω_c、α_s 确定 $n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\frac{\omega_s}{\omega_c}}$.

4. 切比雪夫滤波器

5. 数字滤波器

处理数字信号 → 离散. $h(n)\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}H(z)$

$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$.

$a_i=0\Rightarrow H(z)=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}$, 冲激响应 $h(n)=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)+\cdots+b_m\delta(n-m)$ → 有限冲激响应 $\begin{cases}\text{时间有限}\\ \text{稳定(极点 } z=0)\end{cases}$

有 $a_i\neq0\Rightarrow H(z)=\sum_{i=0}^{\infty}c_iz^{-i}$, 响应无限时间 → 无限冲激响应 → 需极点 $|p|<1$ 稳定.

(1) IIR 滤波器

① 冲激响应不变法: 设计 $H(s)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}h(t)\xrightarrow{t=nT}h(n)$.

② 双线性变换法: 将 s 域频带压缩至 $[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]$ $\hat{s}$ 域, 再到 z 域.

$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-e^{-\hat{s}T}}{1+e^{-\hat{s}T}}\right)$, $z=e^{\hat{s}T}$ $\Rightarrow$ $\boxed{s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}$, $z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$. s、z 一一对应, 不混叠, 会畸变.

$\downarrow$

$\omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$

例4-5：设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s)=\frac{2s}{s^2+3s+2}$$

用冲激响应不变法求相应的数字滤波器的系统函数$H(z)$。

解： $H_a(s)=\frac{2s}{s^2+3s+2}=\frac{2s}{(s+1)(s+2)}=\frac{-2}{s+1}+\frac{4}{s+2}$ ，由 s 平面映射到 z 平面，得

$$H(z)=\frac{-2}{1-e^{-T}z^{-1}}+\frac{4}{1-e^{-2T}z^{-1}}=\frac{2+(2e^{-2T}-4e^{-T})z^{-1}}{1-(e^{-T}+e^{-2T})z^{-1}+e^{-3T}z^{-2}}$$

$$\frac{1}{s-s_k}\Rightarrow\frac{1}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

例4-7：用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，采样周期 $T=1s$，巴特沃思数字低通滤波器的技术指标为：

1) 在通带截止频率 $\Omega_p=0.5\pi$ rad 时，衰减不大于3dB；
2) 在阻带截止频率 $\Omega_s=0.75\pi$ rad 时，衰减不小于15dB。

解：将频率进行预畸变处理。则有

$$\omega_c=\omega_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p}{2}=2\text{ rad/s},\qquad \alpha_p=3\text{ dB}$$

$$\omega_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_s}{2}=4.828\text{ rad/s},\qquad \alpha_s=15\text{ dB}$$

设计满足技术指标的巴特沃思模拟低通滤波器，其阶数 $n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}\approx1.941$

解（续）：取 $n=2$，归一化巴特沃思模拟低通滤波器的传递函数为

$$H_a(\bar{s})=\frac{1}{\bar{s}^2+1.414\bar{s}+1}$$

进行反归一化处理，得到巴特沃思模拟低通滤波器的实际传递函数为

$$H_a(s)=H_a(\bar{s}\omega_c)=\frac{\omega_c^2}{s^2+1.414\omega_cs+\omega_c^2}$$

利用双线性变换法求出数字滤波器的传递函数$H(z)$：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}=\frac{1+2z+z^2}{0.586+3.414z^2}$$

(2) FIR 滤波器

设计 $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$ 逼近频率响应 $H_d(\Omega)$.

① 线性相位条件: $h(n)=\pm h(N-1-n)$.

② 窗函数法: 对 $h_d(n)$ 加窗得 $h(n)=h_d(n)w(n)$, $n=0,1,\ldots,N-1$, 有限.