

2024年秋季学期

信号分析与处理

第一章 连续信号的分析

授课教师：谢晓晨

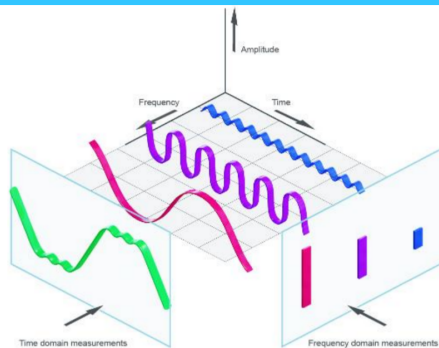
哈尔滨工业大学深圳校区

机电工程与自动化学院

课程回顾

- 信号的定义：信号是信息（消息）的物理表现形式，在数学上是一个或多个变量的函数

信息是信号的具体内容

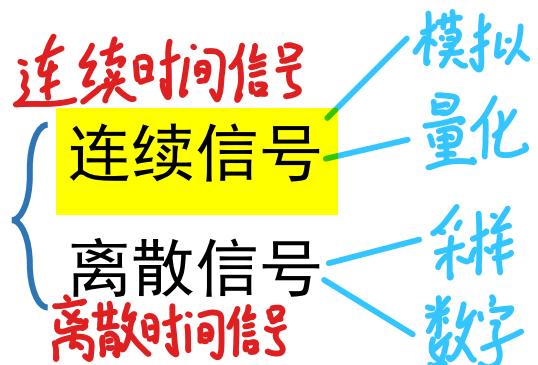


- 信号的描述（时域、频域）

- 信号的分类：根据信号的时间函数特性

判断能量信号与功率信号的方法

- 确定性信号 ✓
- 随机信号



- 周期信号
- 非周期信号

- 能量信号 $E < \infty$
 $p = 0$
- 功率信号 $E = \infty$
 $0 \neq p < \infty$

连续信号只强调时间坐标上的连续，并不强调函数幅度取值的连续

课程回顾：能量信号与功率信号

将信号 $f(t)$ 施加于 1Ω 电阻上 ($R = 1\Omega$)，它所消耗瞬时功率为 $|f(t)|^2$ ，在时间区间 $(-\infty, \infty)$ 的能量和平均功率定义为

$t \in (-T, T)$ 时, 消耗的信号能量为 $\int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$, 平均功率为 $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$

(1) 信号 $f(t)$ 的能量: $E = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$

(2) 信号 $f(t)$ 的平均功率: $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$

信号 {

- 能量信号 —— 若信号 $f(t)$ 的能量有界，即 $E < \infty$ ，则称其为能量有限信号，简称能量信号，此时 $P = 0$
- 功率信号 —— 若信号 $f(t)$ 的功率有界，即 $P < \infty$ ， $P \neq 0$ ，则称其为功率有限信号，简称功率信号，此时 $E = \infty$
- 非能量信号、非功率信号

课程内容

1.1 连续信号的时域描述和分析

1.1.1 连续信号的时域描述

1.1.2 连续信号的时域运算

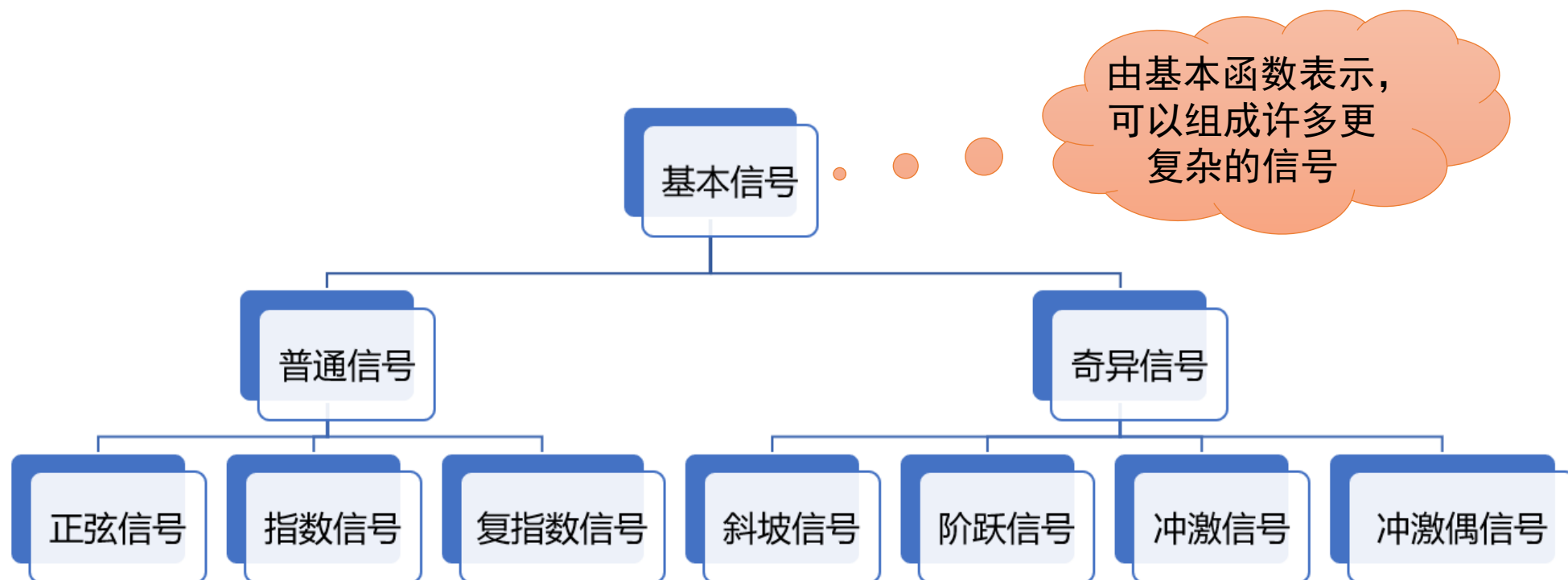
1.1.3 连续信号的时域分解

1.2 连续信号的频域分析

1.3 连续信号的复频域分析

1.1.1 连续信号的时域描述

- 用一个时间函数或一条曲线来表示信号随时间而变化的特性



普通信号——正弦信号

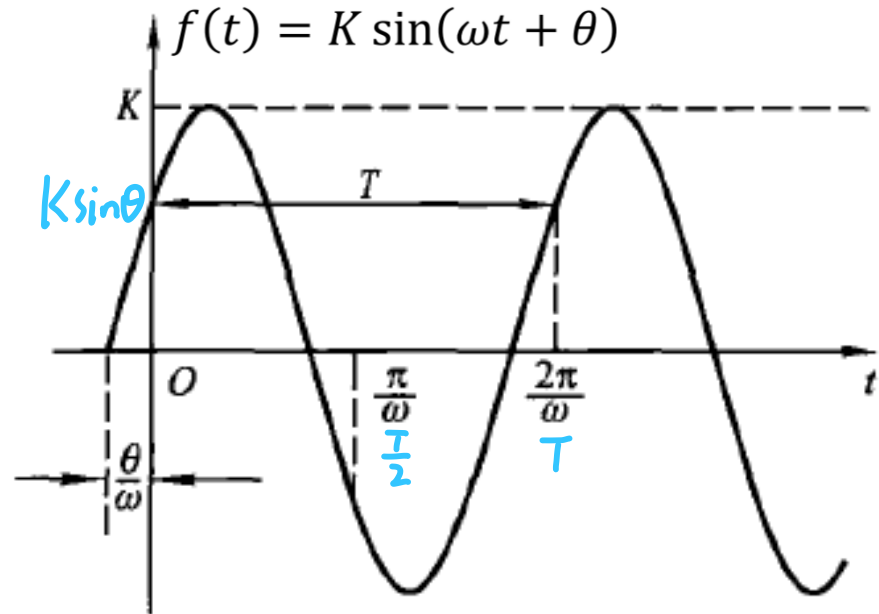
$$f(t) = K \sin(\omega t + \theta) = K \cos\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right), -\infty < t < \infty$$

- 振幅 K , 角频率 ω , 初始相角 θ
- 正弦信号是周期信号, 周期为

★ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 要注意在计算中, 哪些 $\omega_1 T_1 = 2\pi$ 或 $\omega_2 T_2 = 2\pi$

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}) &= \cos[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \theta)] \\ &= \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

正弦滞后余弦 $\frac{\pi}{2}$

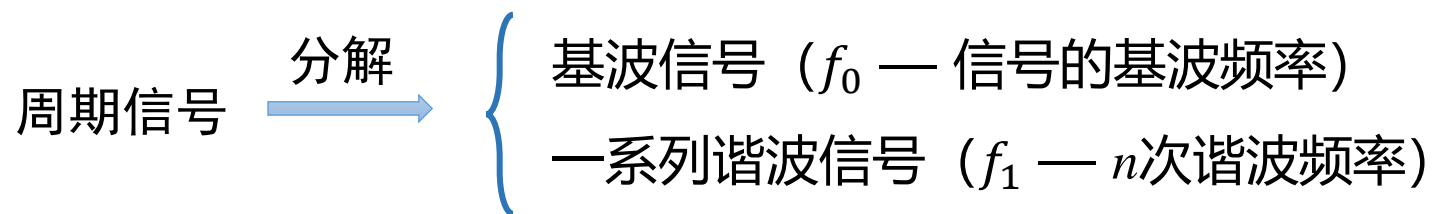


普通信号——正弦信号

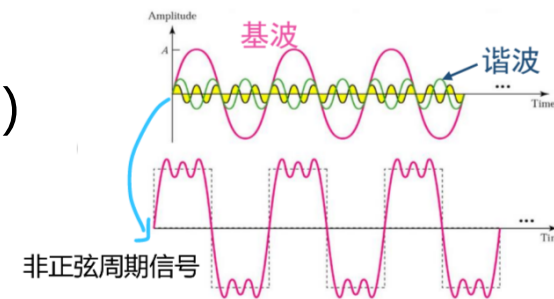
• 正弦信号的性质

(1) 两个同频率的正弦信号相加，结果仍然是原频率的正弦信号。

(2) 若一个正弦信号的频率 f_1 是另一个正弦信号频率 f_0 的整数倍，即 $f_1 = nf_0$ (n 为整数)，则合成信号是频率为 f_0 的非正弦周期信号。

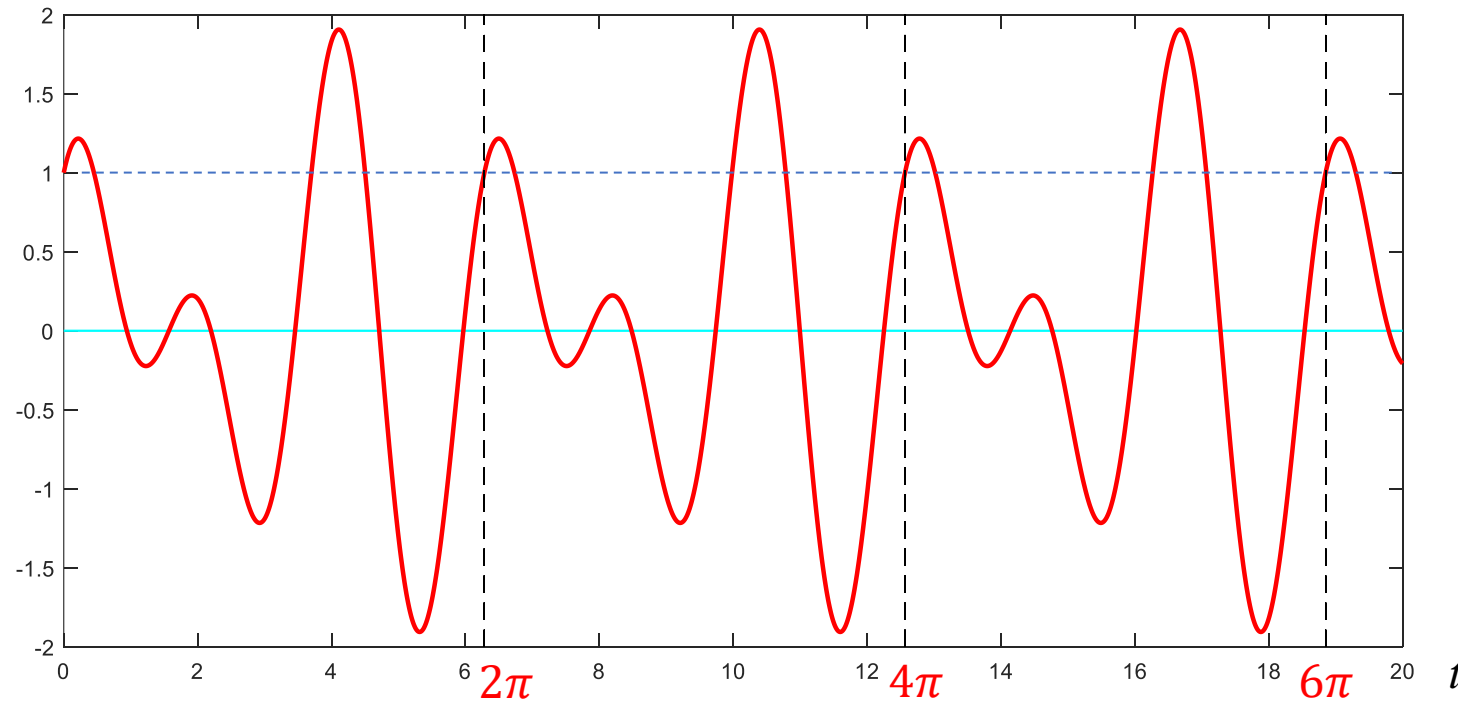


(3) 正弦信号的微分和积分仍然是同频率的正弦信号。



~~(4)~~ 2个正弦（周期）信号相加，若它们的周期之比值 T_1/T_2 为有理数，则结果仍是周期信号，其周期是 T_1 、 T_2 的最小公倍数。

$f(t)$ 思考题 (1): $f(t) = \sin 2t + \cos 3t$ (周期信号)



$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 3$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi = \frac{3\pi}{3}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{3}$$

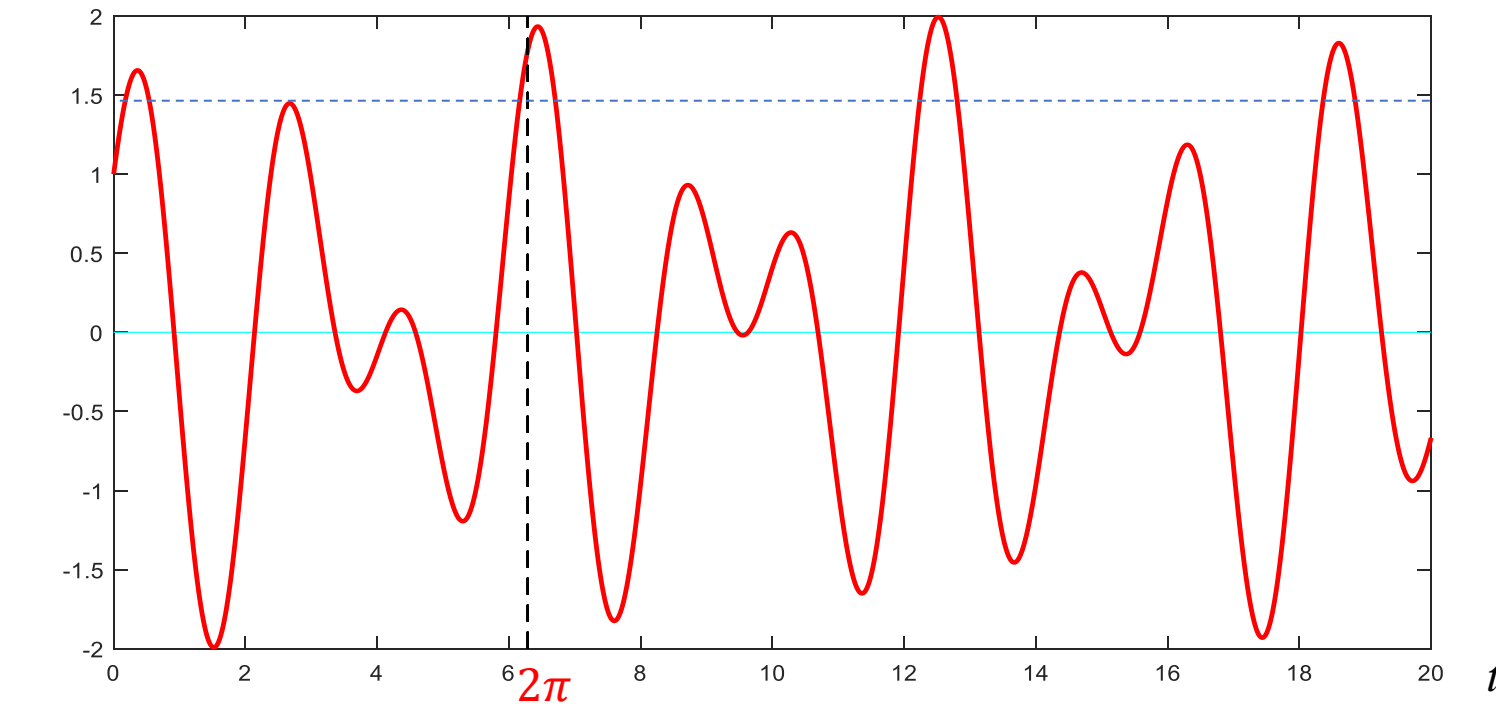
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 1.5 \quad \text{有理数}$$

周期为最小公倍数，即

$$T = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

(4) 2个正弦 (周期) 信号相加, 若它们的周期之比值 T_1/T_2 为有理数, 则结果仍是周期信号, 其周期是 T_1 、 T_2 的最小公倍数。

思考题 (2): $g(t) = \cos 2t + \sin \pi t$ (非周期信号)



$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

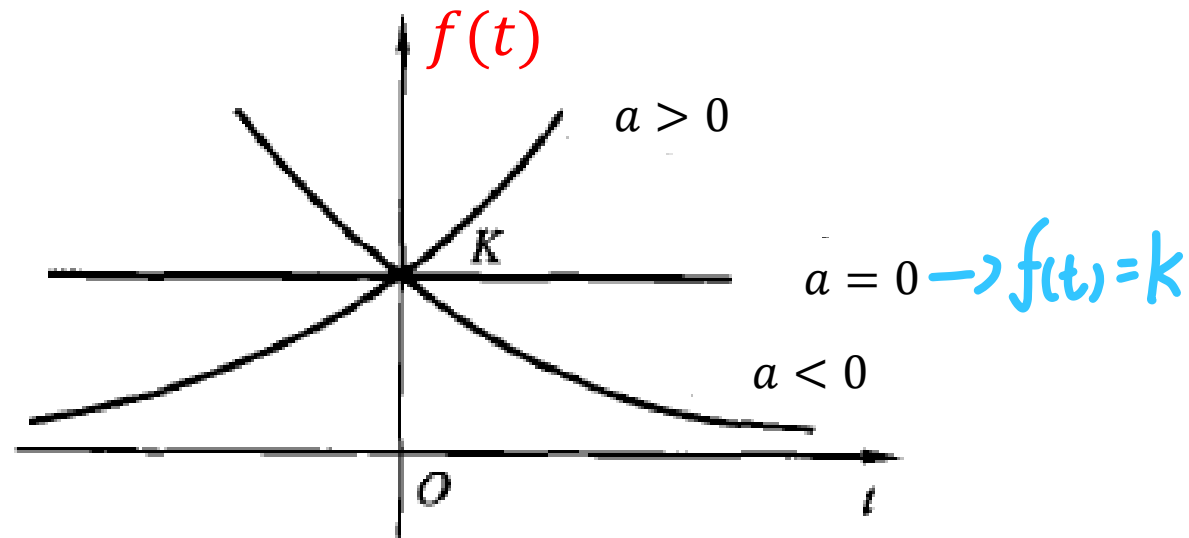
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{不是有理数}$$

因此, 不是周期信号

普通信号——指数信号

$$f(t) = Ke^{at}, -\infty < t < \infty$$

实函数



普通信号——复指数信号

$$f(t) = Ke^{st}, -\infty < t < \infty, \underline{s = \sigma + j\omega}$$

*s*为复数
称为复指数信号的复频率

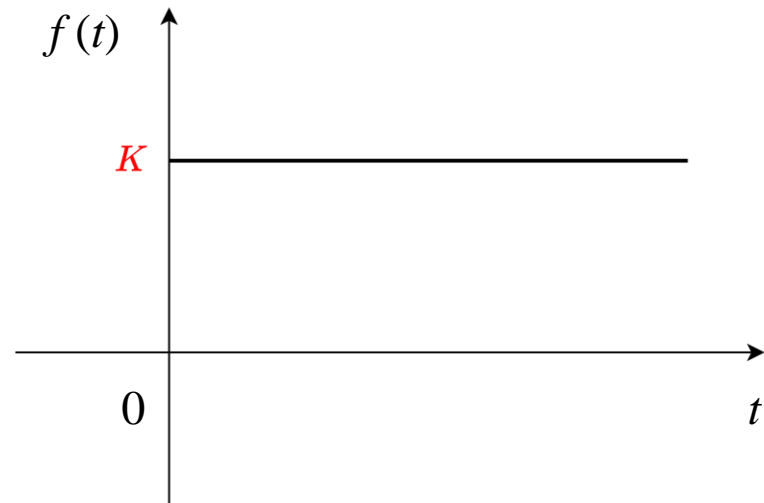
欧拉公式 $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, -\infty < t < \infty$

$$f(t) = Ke^{\sigma t} e^{j\omega t} = Ke^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t), -\infty < t < \infty$$

• 讨论

- $\sigma = 0, \omega = 0$

此时 $f(t) = K$



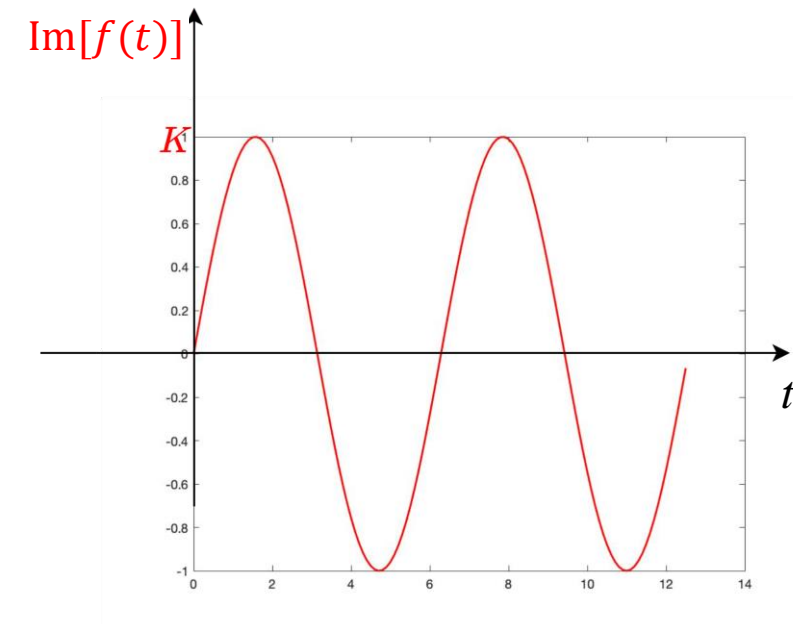
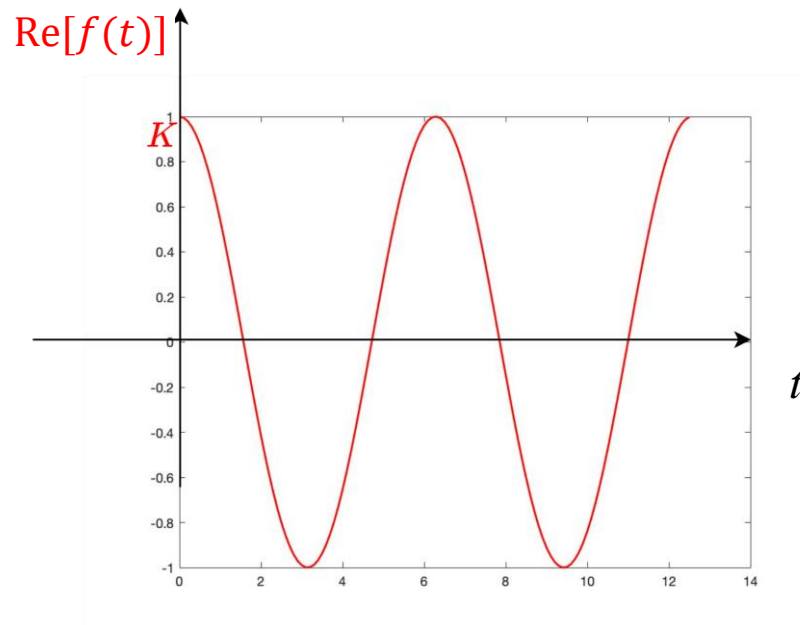
直流信号

$$f(t) = Ke^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t) = \operatorname{Re}[f(t)] + j\operatorname{Im}[f(t)], -\infty < t < \infty$$

$$\operatorname{Re}[f(t)] = Ke^{\sigma t} \cos \omega t$$

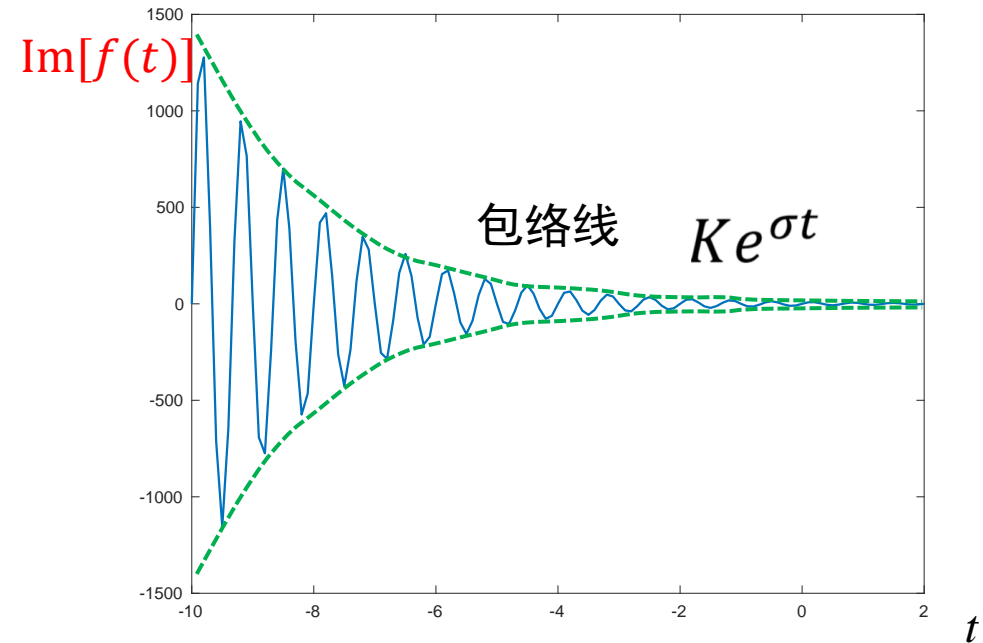
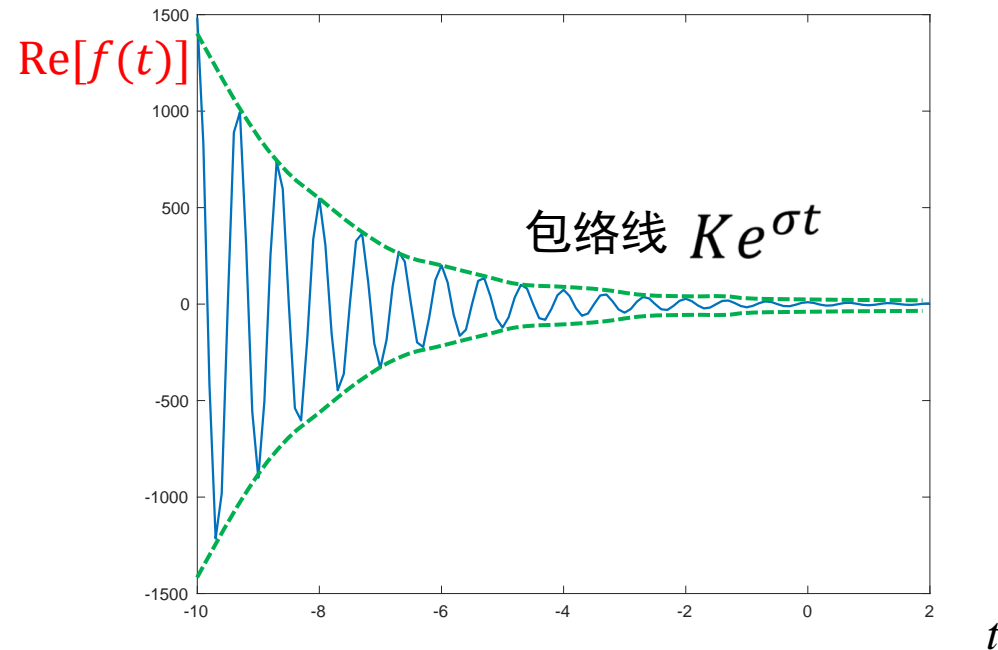
$$\operatorname{Im}[f(t)] = Ke^{\sigma t} \sin \omega t$$

- $\sigma = 0, \omega \neq 0$



$$f(t) = Ke^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t) = \text{Re}[f(t)] + j\text{Im}[f(t)], -\infty < t < \infty$$

$\sigma \neq 0, \omega \neq 0$ $\sigma < 0 \leftarrow$ 收敛



实部和虚部表示了指数包络的正弦型振荡

普通信号——复指数信号

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t) = \text{Re}[f(t)] + j\text{Im}[f(t)]$$

★ 复指数信号 Ke^{st}

$$s = \sigma + j\omega$$

$$t \in (-\infty, \infty)$$

{	$\sigma = 0$	{	$\omega = 0$	直流信号 $f(t)=k$	{	实部：余弦函数
	$\omega \neq 0$	正弦信号	虚部：正弦函数			
{	$\sigma \neq 0$	{	$\omega = 0$	(实) 指数信号 $f(t)=ke^{\sigma t}$	{	$\sigma < 0$ 收敛
			$\omega \neq 0$	指数包络的正弦型振荡		$\sigma > 0$ 发散

普通信号——复指数信号

• 讨论

- 实际信号总是实的，而复指数信号为复函数，不可能实际产生
- 复指数信号的意义：其实部和虚部表示了指数包络的正弦型振荡
- 把直流信号、指数信号、正弦型信号，具有包络线的正弦型信号表示成统一的形式更具普遍意义

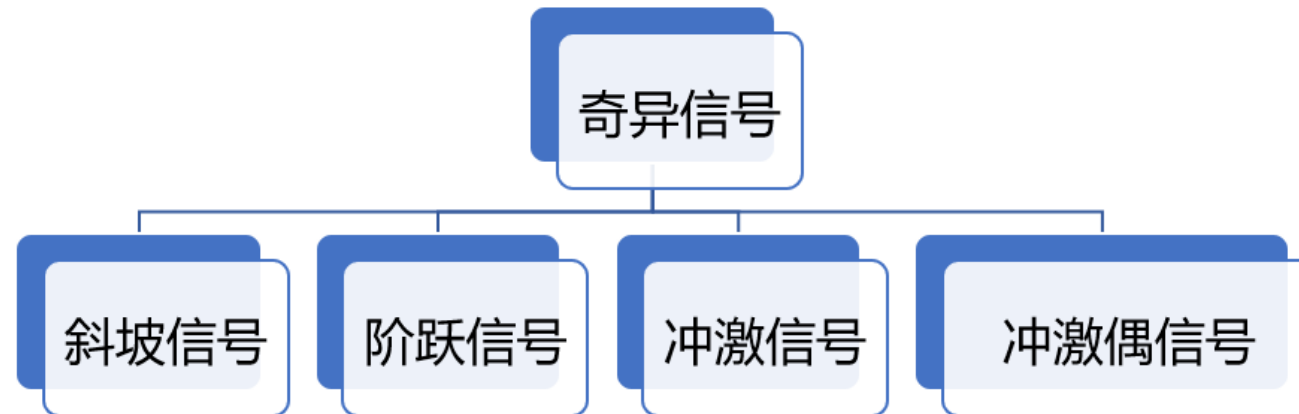
$$\begin{cases} e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \\ e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \end{cases}$$

$$\bullet A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} [e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}] = A \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

$$\bullet A \sin(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2j} [e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}] = A \operatorname{Im}[e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

奇异信号的描述

- 用奇异函数表示的一类特殊的连续时间信号
- 函数本身或者函数导数（包括高阶导数）有不连续点
- 是从实际信号中抽象出来的典型信号，在信号分析中有重要地位



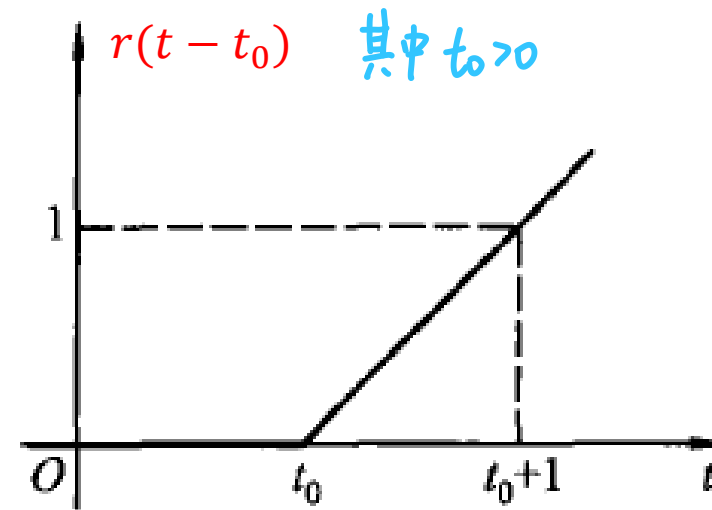
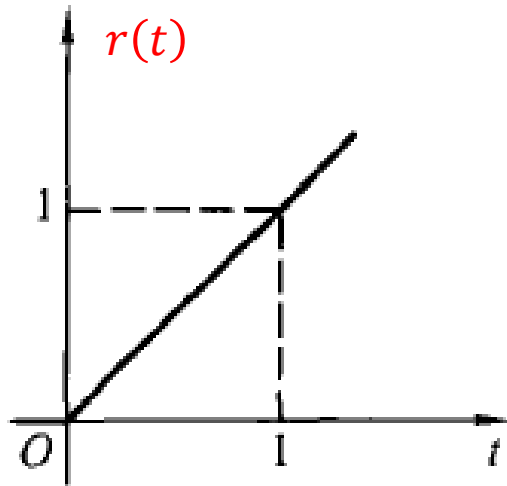
奇异信号——单位斜坡信号

$$\bullet \underline{r(t)} = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

导数在 $t=0$ 处不连续!

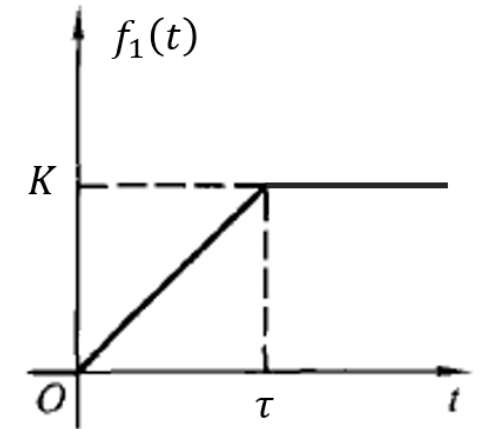
$$\bullet r(t - t_0) = \begin{cases} t - t_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

时移: 左加右减



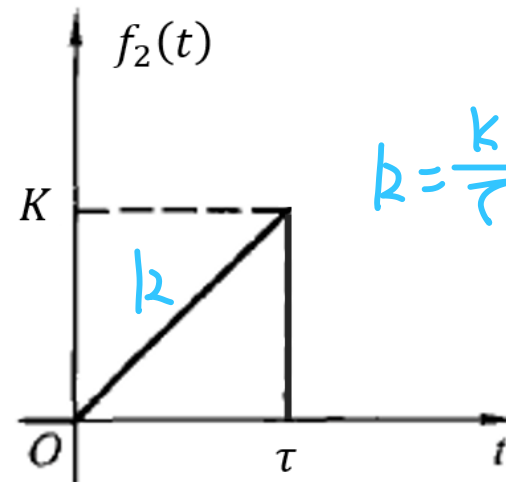
奇异信号——单位斜坡信号

- “截平的”斜变信号 $f_1(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} r(t) & t < \tau \\ K & t \geq \tau \end{cases}$



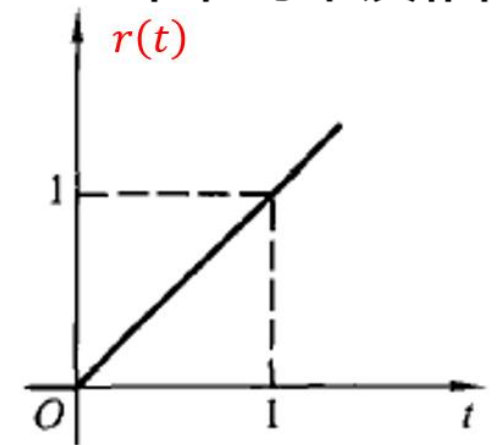
- 用单位斜坡信号表示三角形脉冲

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} r(t) & t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$



注意：增加了对斜率的计算！

单位斜坡信号



奇异信号——单位阶跃信号

单位阶跃信号相乘

$$u(t-t_1)u(t-t_2) = u(t-t_0), t_0 = \max\{t_1, t_2\}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$t=0$ 处无定义 (跳变) 或 $u(0) = \frac{1}{2}$

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

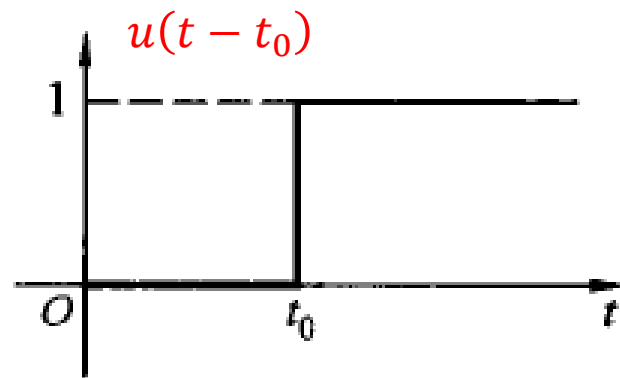
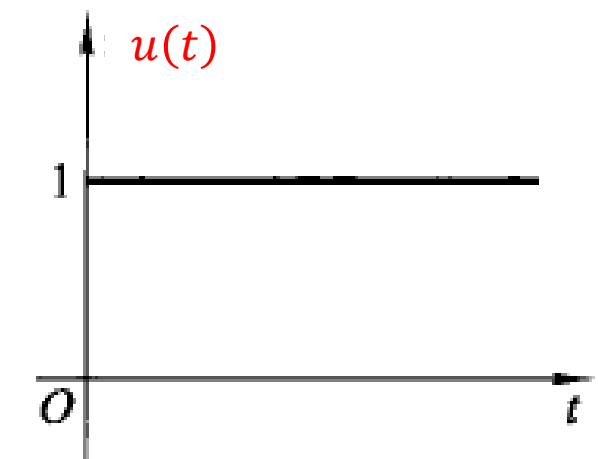
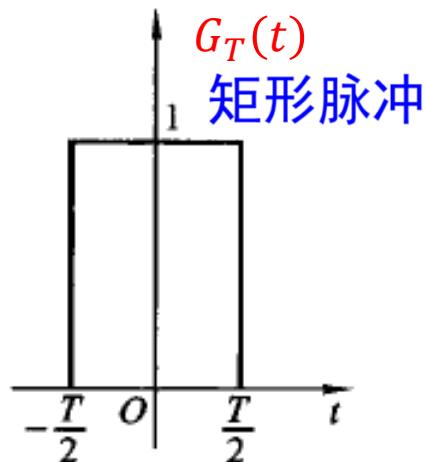
可以用来描述信号的接入特性 (例如接入单位直流电源)

单位斜坡

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t) \leftarrow \text{单位阶跃}$$

• 矩形脉冲

$$G_T(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$



阶跃信号具有单边特性, 即信号在接入时刻 t_0 以前的值为 0, 因此, 可以用来描述信号的接入特性, 例如 $x(t) = \sin\omega_0 t \cdot u(t-t_0)$ 表示 t_0 以前的值为 0, t_0 以后的值为 $\sin\omega_0 t$.

奇异信号——单位冲激信号 (Dirac δ 函数)

- 持续时间无穷小，瞬间幅度无穷大，
涵盖面积恒为1的**理想函数（分布）**

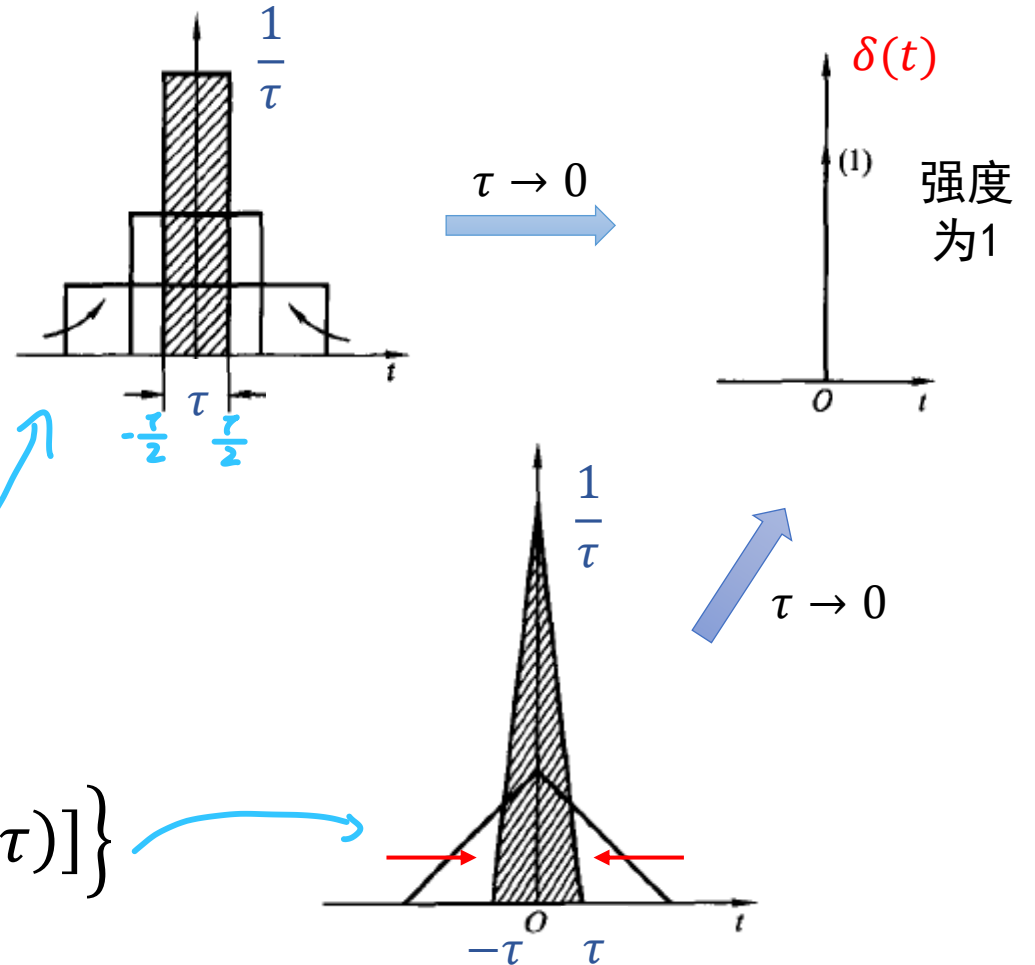
- $\delta(t) = 0, t \neq 0$

物理：理想化的质点
或点电荷的密度

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$

- $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$

- $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [u(t + \tau) - u(t - \tau)] \right\}$



奇异信号——单位冲激信号

• 性质

δ 函数只有在出现在积分以内，才有实质意义！

(1) 抽样特性 (筛选特性)

- 若 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处连续，则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$ 即 $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$
- 若 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续，则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$ 即 $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t)$

(2) 具有偶函数特性

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

例 · $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt = f(t-t_0)|_{t=0} = f(-t_0)$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt = f(t_0-t)|_{t=0} = f(t_0)$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt = u(t-2t_0)|_{t=t_0} = u(-t_0)$

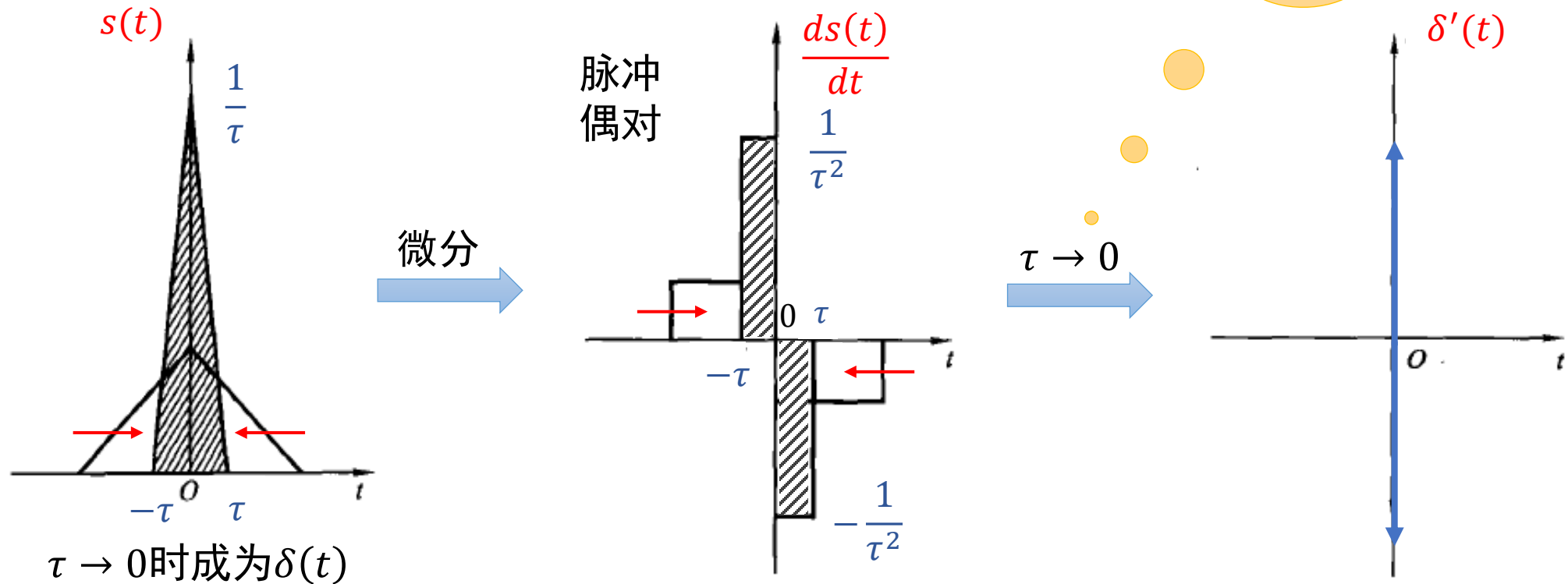
(3) 冲激信号与阶跃信号互为积分和微分关系

- $\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t)$
- $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

奇异信号——单位冲激偶信号

冲激函数的微分：冲激偶信号 $\delta'(t)$

τ 可以从负值或正值趋于0，所以得到正、负一对冲激信号



奇异信号——单位冲激偶信号

• 性质

(1) 若 $f'(t)$ 在 0 点连续, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = -f'(0)$

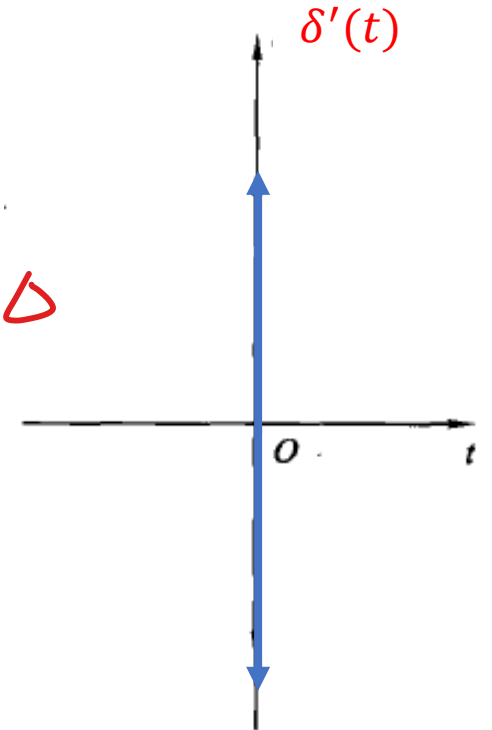
(2) 若 $f'(t)$ 在 t_0 点连续, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0)f(t)dt = -f'(t_0)$ Δ

(3) 冲激偶信号的面积为零, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$ Δ

(4) 冲激偶信号是奇函数 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(-t)f(t)dt = f'(0)$

$\delta^{(n)}(-t) = (-1)^n \delta^{(n)}(t)$ $\delta(t)$ 偶 $\delta'(t)$ 奇

对比 $\delta(t)$



连续信号的时域运算

(1) 基本运算（尺度变换、翻转、平移）

- 幅度尺寸变换不改变信号基本特征，时间尺寸变换改变信号的基本特征（频谱）

(2) 叠加和相乘

- 相同时刻的代数和、乘积

(3) 微分和积分

- 微分——突出信号的变化部分；积分——平滑信号的突变部分

(4) 卷积运算及其性质

- 卷积的图解法；利用卷积的性质简化卷积运算

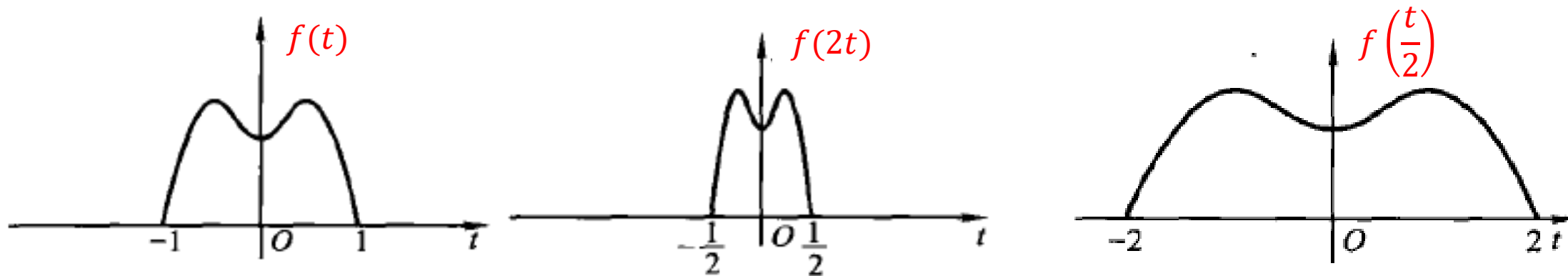
基本运算——尺度变换

- **幅度尺寸**变换（对原信号幅度的放缩，不改变信号基本特征）

- $f_2(t) = af_1(t)$

- **时间尺寸**变换（改变信号的基本特征，信号频谱发生变化）

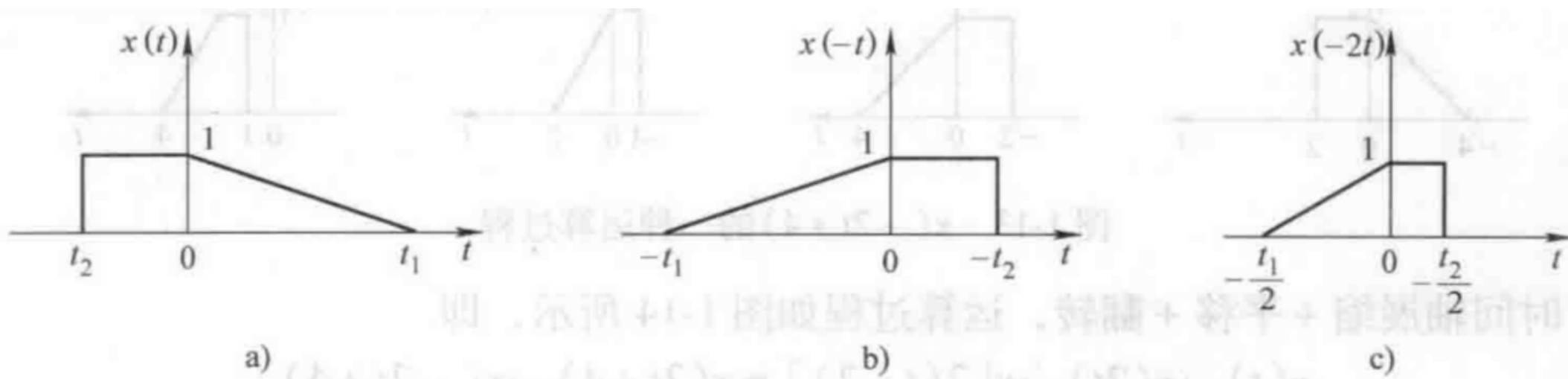
- $f_2(t) = f_1(at)$



$x(t)$ 表示录音带的正常速度放音信号，则 $x(2t)$ 表示了两倍于正常速度放音的信号，放出的声音比原信号尖锐刺耳，而 $x(t/2)$ 表示了放慢一倍于正常速度放音的信号，放出的声音较为低沉。声音声调的变化正是由于信号的频率特性变化引起的。由此也可以认识到，信号的频率特性与幅度不同，它是信号的基本特征。

基本运算——翻转

- 翻转
 - 以纵坐标轴为中心进行对称映射



基本运算——平移

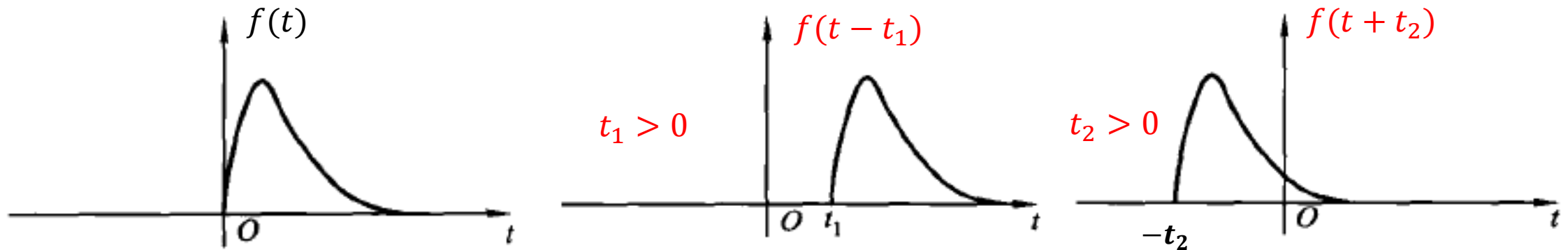
- 平移

左加右减

$$t_0 > 0$$

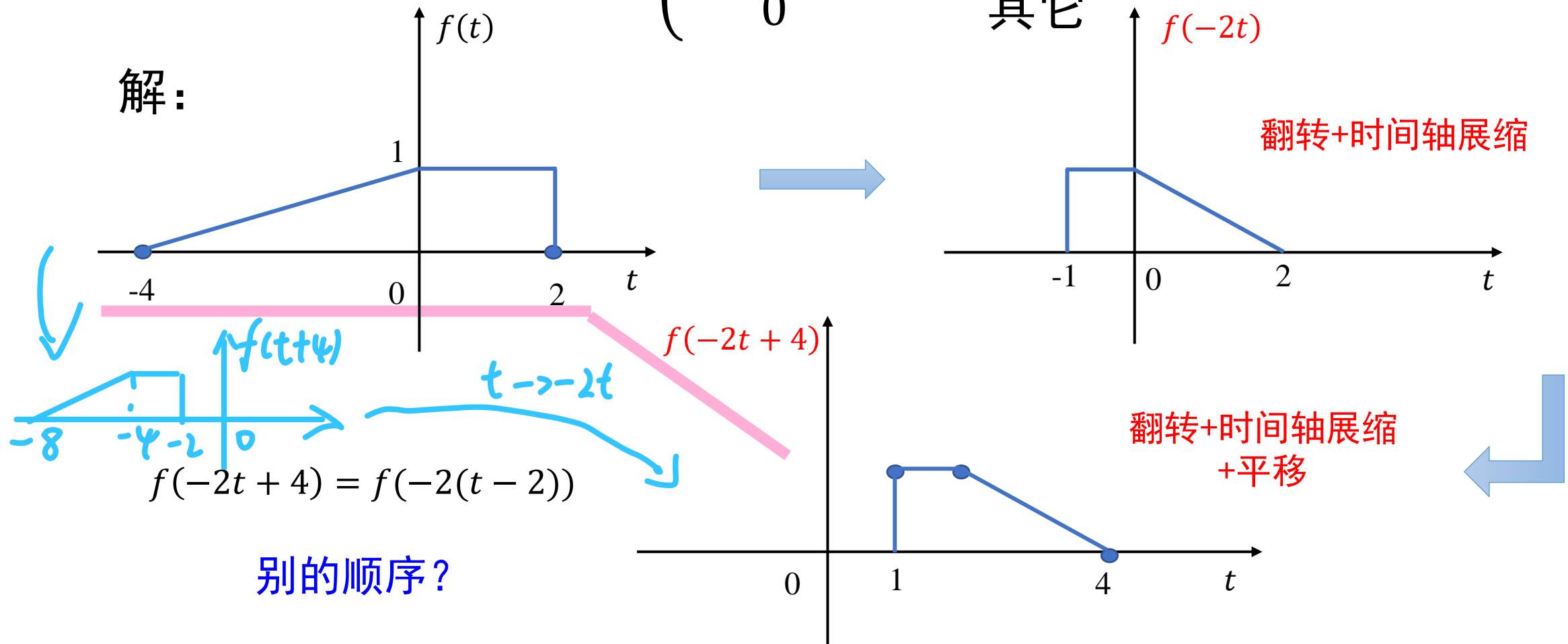
$$f(t) \rightarrow f(t - t_0)$$
$$f(t) \rightarrow f(t + t_0)$$

滞后, 信号波形右移
超前, 信号波形左移



• 例1-1: 已知信号 $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t+4) & -4 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 求 $f(-2t+4)$.

解:

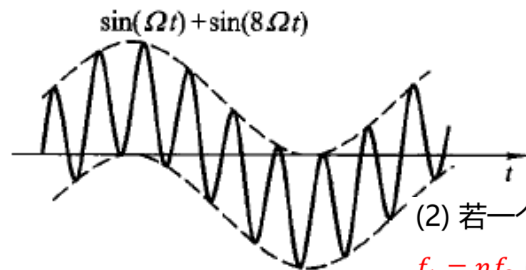
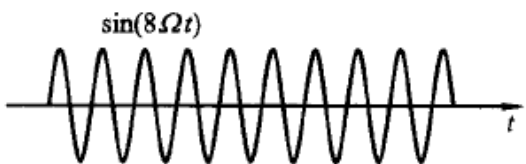


连续信号的时域运算

- 叠加和相乘

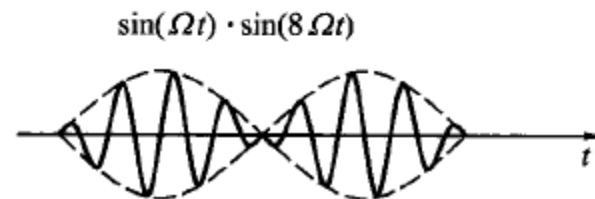
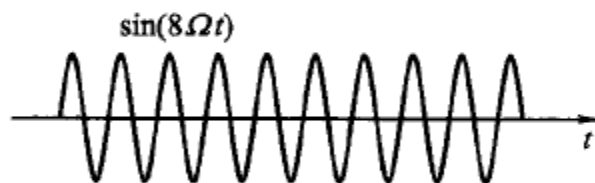
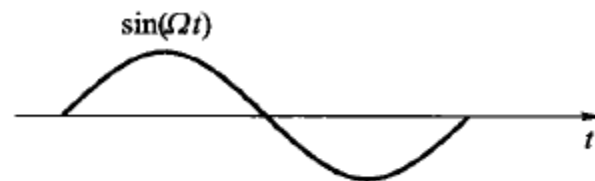
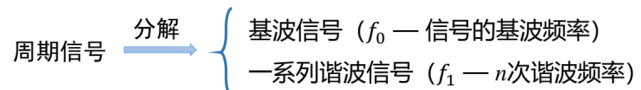
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$$



代数和

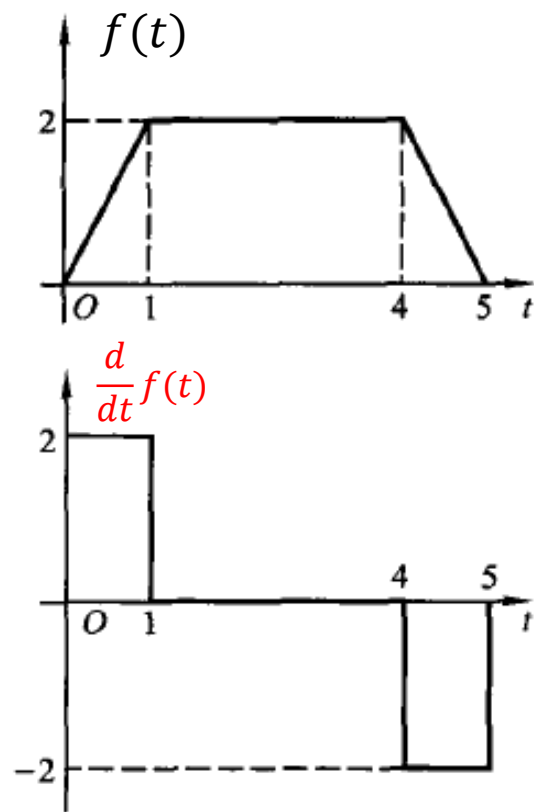
(2) 若一个正弦信号的频率 f_1 是另一个正弦信号频率 f_0 的整数倍, 即 $f_1 = n f_0$ (n 为整数), 则合成信号是频率为 f_0 的非正弦周期信号。



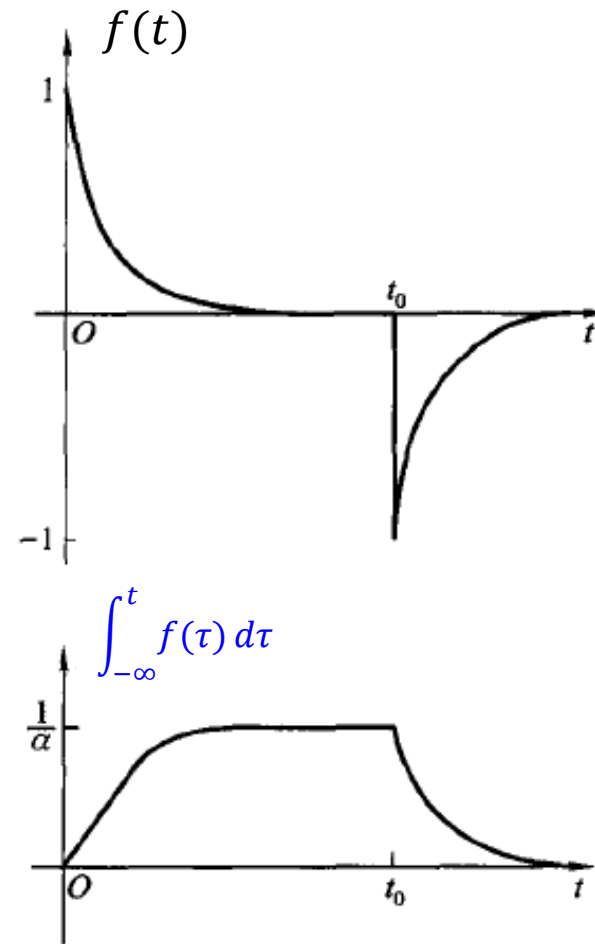
乘积

连续信号的时域运算

- 微分和积分

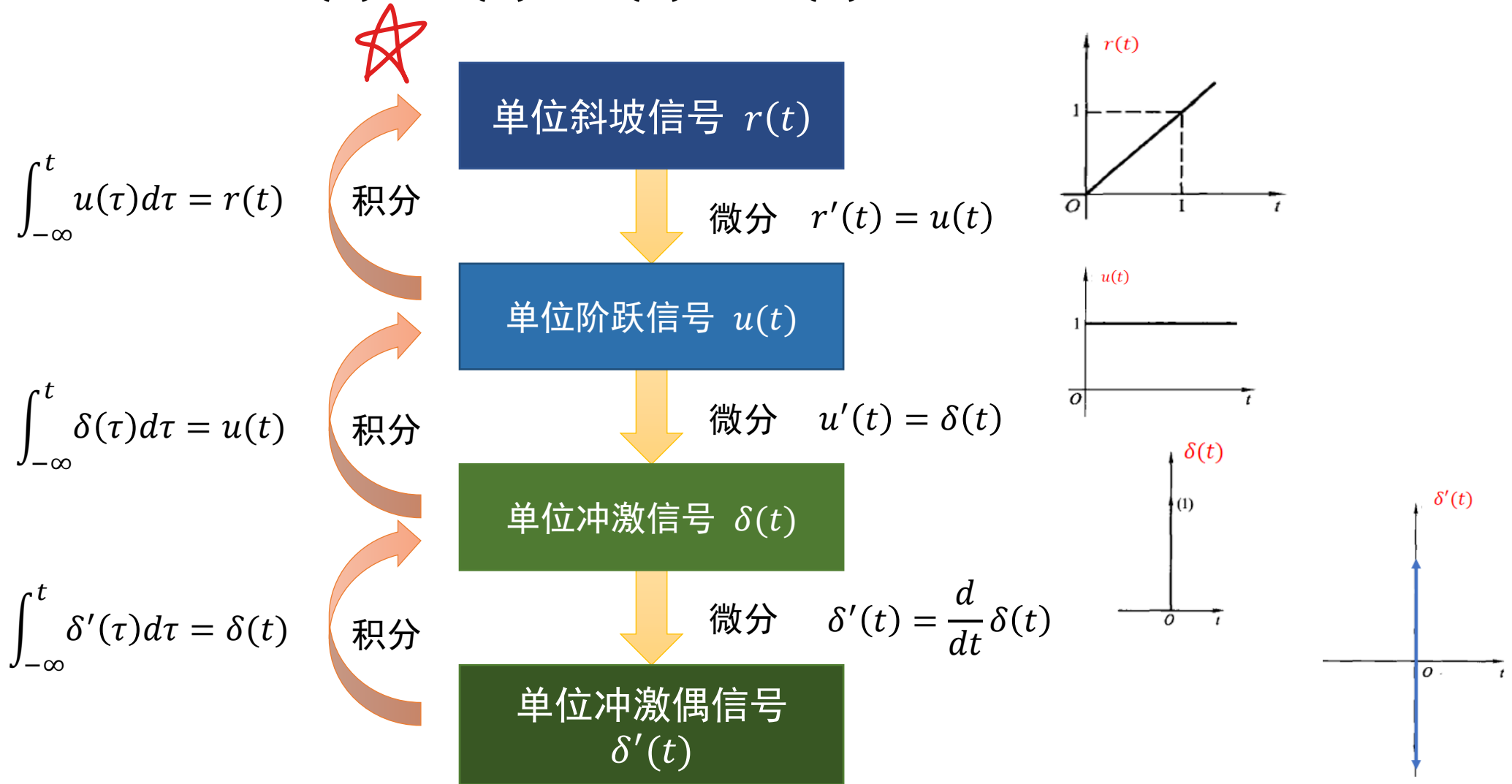


信号经微分后突出显示了它的变化部分



信号经积分后可平滑突变部分

奇异信号 $r(t), u(t), \delta(t), \delta'(t)$ 之间的相互关系



卷积运算

对比: 线性卷积. $x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) x_2(n-m)$ $L = L_1 + L_2 - 1$

圆周卷积. $x_1(n) \otimes x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m)_N) \right] R_N(n)$, $L = L_1 = L_2$

- 对于两个连续时间信号 $x_1(t)$, $x_2(t)$, 定义它们的 卷积积分运算 (简称卷积运算)

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau$$

- 卷积运算的步骤

- 变量替换
- 翻转
- 平移
- 相乘
- 积分

$$x_1(t) \rightarrow x_1(\tau), \quad x_2(t) \rightarrow x_2(\tau)$$

$$x_2(\tau) \rightarrow x_2(-\tau)$$

$$x_2(-\tau) \rightarrow x_2(t - \tau)$$

$$x_1(\tau) x_2(t - \tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

★ 卷积结果所占有的时宽等于两个函数各自时宽的总和!

要求: 熟练掌握!

卷积运算 (定义法) 不要这样算

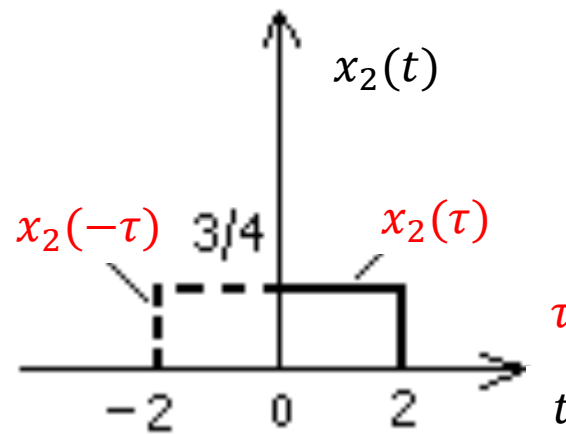
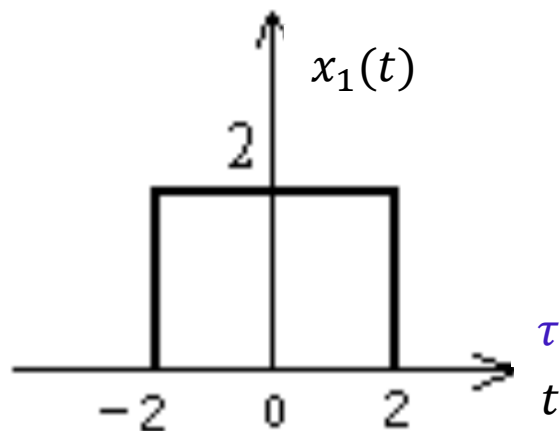
• 例1-2: 设 $x_1(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 2 & -2 \leq t \leq 2, \\ 0 & t > 2 \end{cases}$, $x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \leq t \leq 2, \\ 0 & t > 2 \end{cases}$,

求卷积 $x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$

变量 t 替换为 τ ,

$$x_1(\tau) \neq 0$$

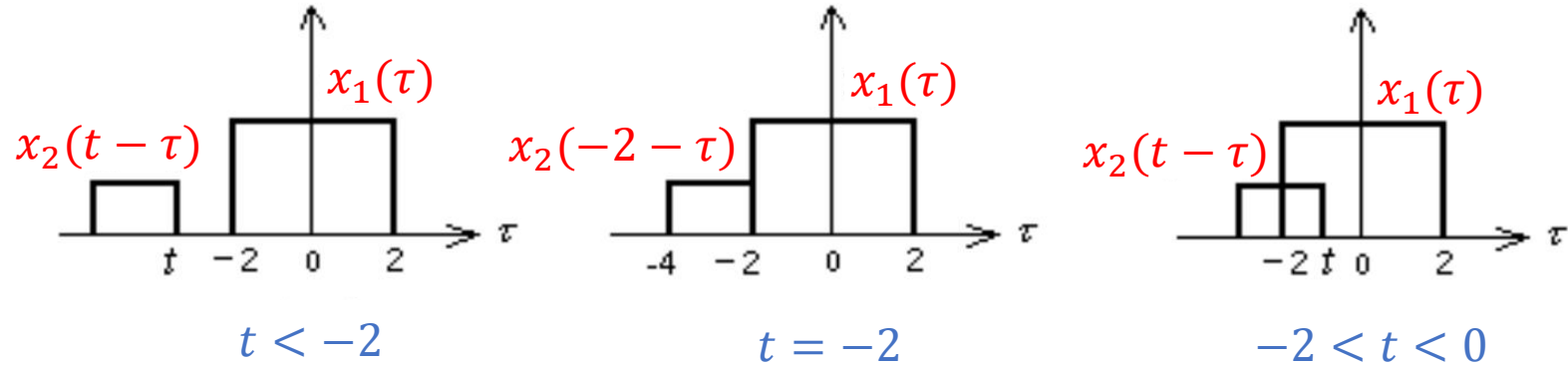
$$\Leftrightarrow \tau \in [-2, 2]$$



变量 t 替换为 $t - \tau$,

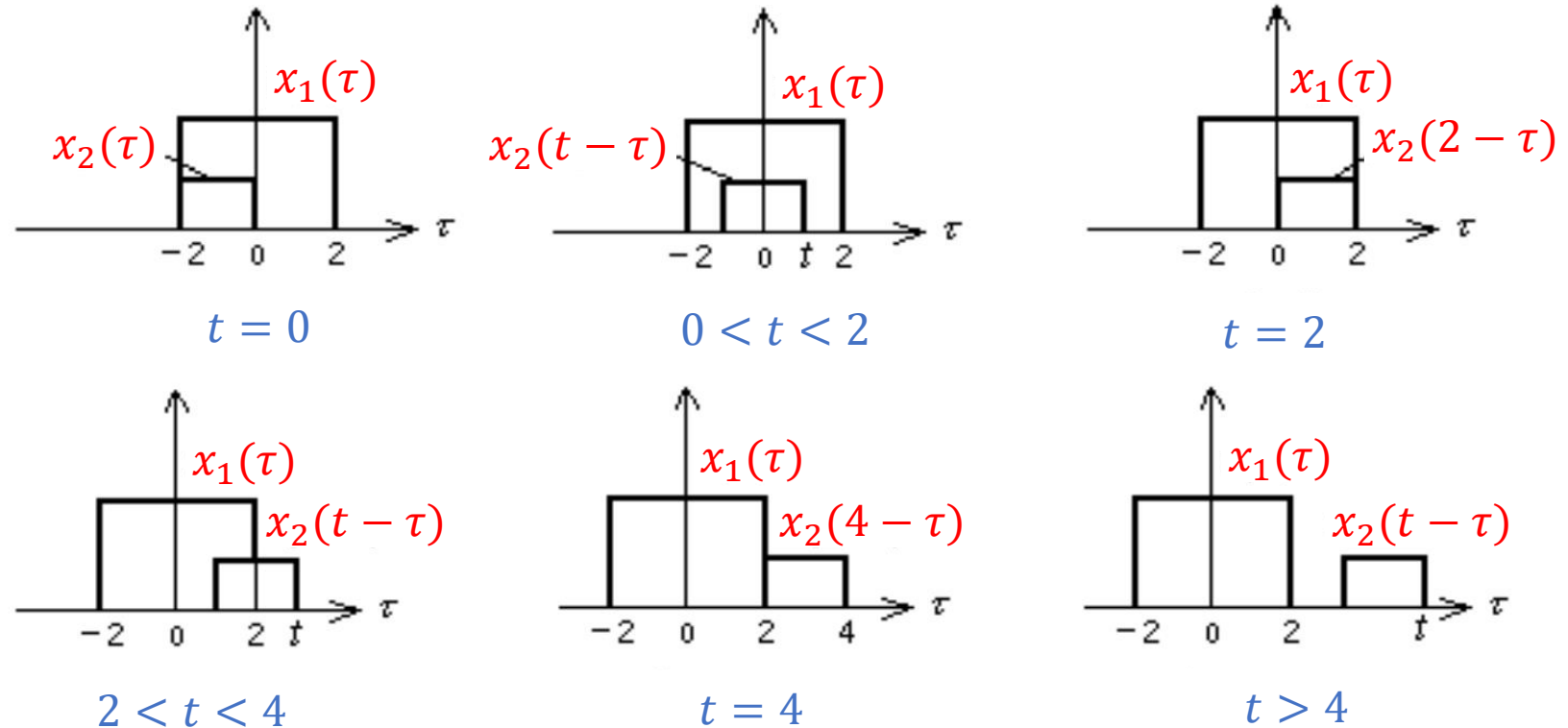
$$x_2(t - \tau) \neq 0$$

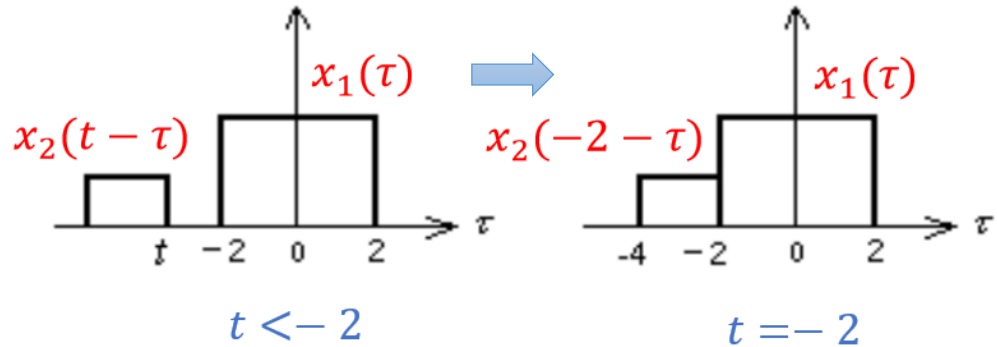
$$\Leftrightarrow t - \tau \in [0, 2]$$



卷积的图解法

关键：
积分上下限的
选取！

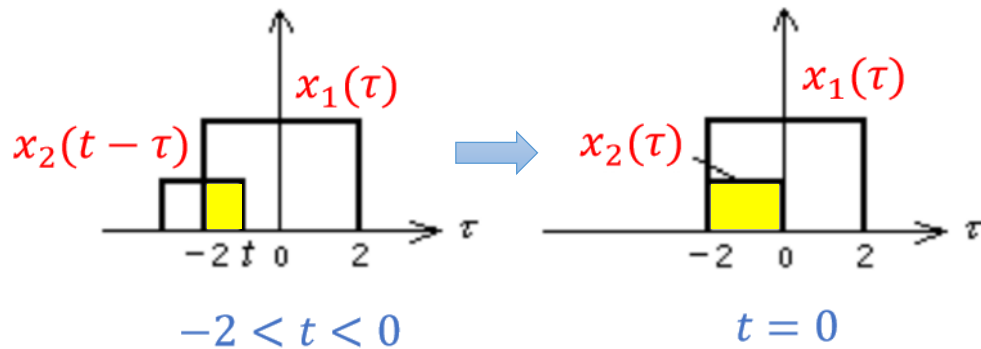




$t < -2$, $x_1(\tau) = 0$, $\tau < -2$; $t = -2$ 交点处面积为0

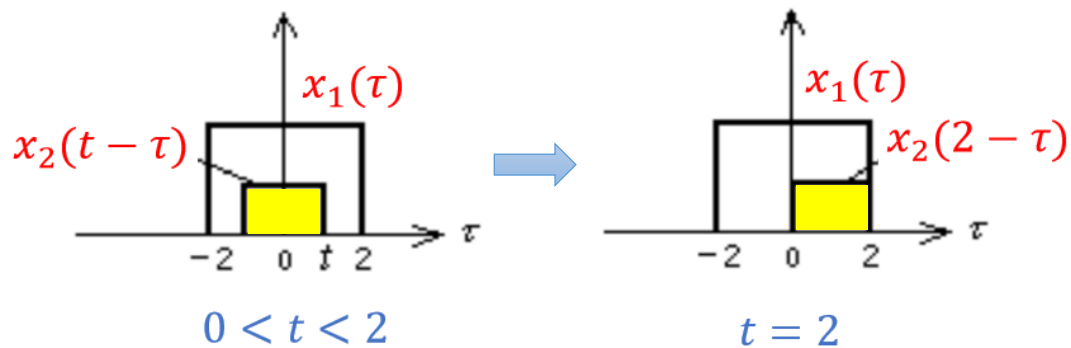
$$x_1(\tau)x_2(t - \tau) = 0$$

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{-2} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = 0$$



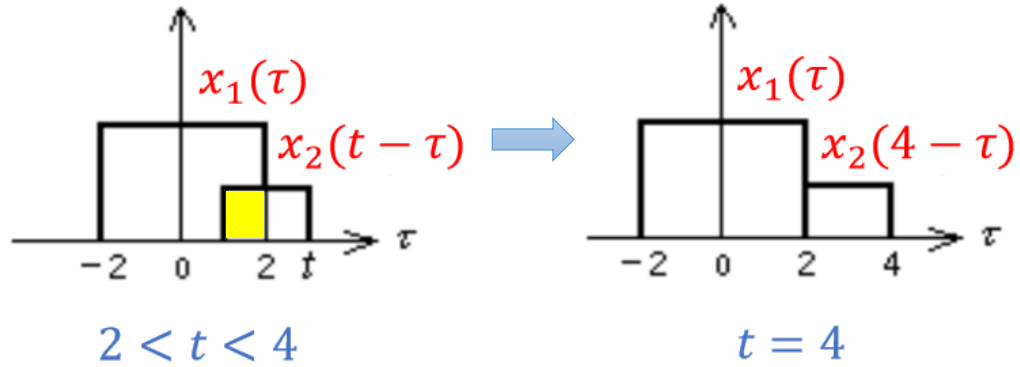
$-2 < t \leq 0$, $-4 < \tau < 0$, 实际交叠部分 $-2 \leq \tau \leq t$

$$x(t) = \int_{-2}^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_{-2}^t 2 \times \frac{3}{4}d\tau = \frac{3}{2}(t + 2)$$



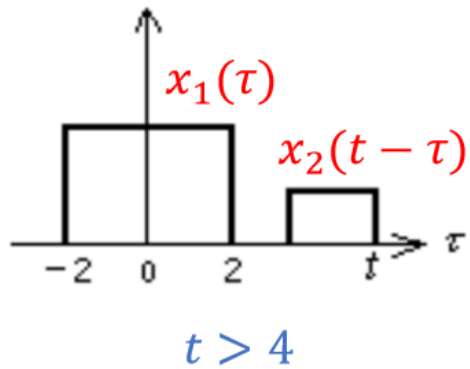
$0 < t \leq 2$, $-2 < \tau < 2$, 实际交叠部分 $t - 2 \leq \tau \leq t$

$$x(t) = \int_{t-2}^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_{t-2}^t 2 \times \frac{3}{4}d\tau = 3$$



$2 < t \leq 4, 0 < \tau < 4$, 实际交叠部分 $t - 2 \leq \tau \leq 2$

$$x(t) = \int_{t-2}^2 x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^2 2 \times \frac{3}{4} d\tau = \frac{3}{2}(4-t)$$



$t > 4, x_1(\tau) = 0, \tau > 2; t = 2$ 交点处面积为0

$$x_1(\tau)x_2(t-\tau) = 0$$

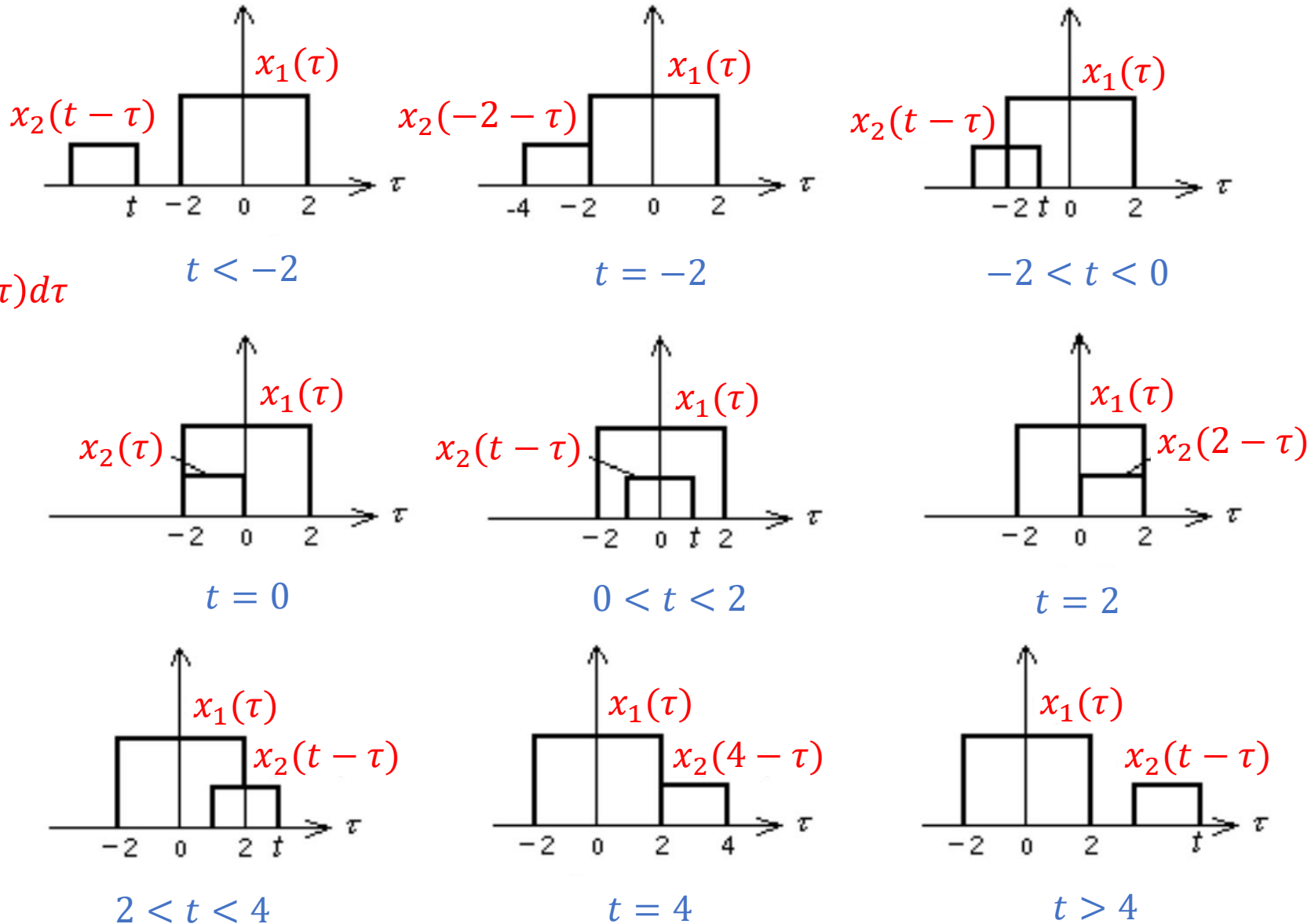
$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_2^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = 0$$

卷积中积分限的确定，取决于两个函数图形交叠部分的范围！

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

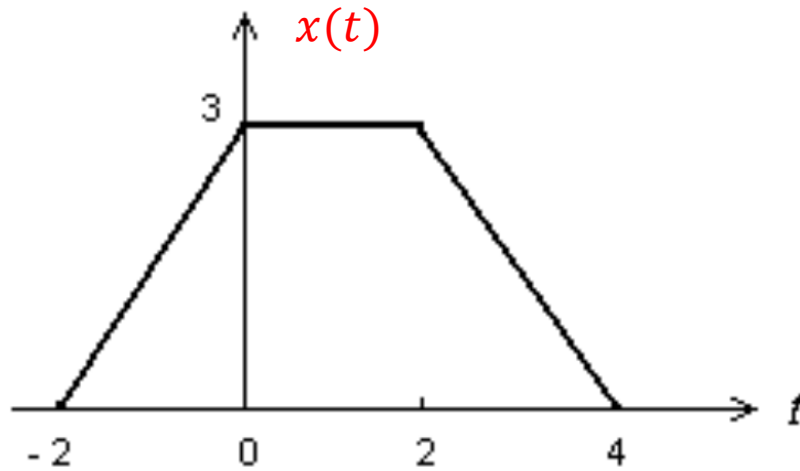
卷积的图解法

关键：
积分上下限的
选取！

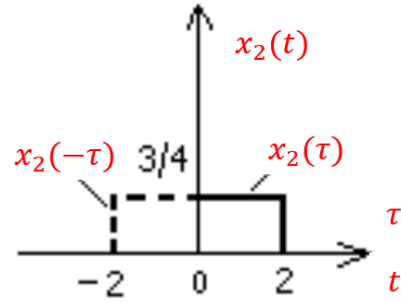
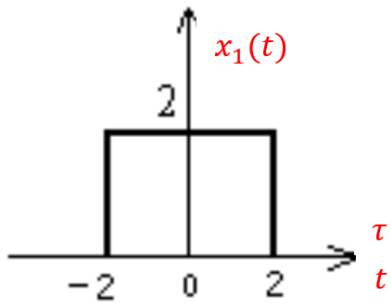


卷积结果：

卷积结果所占有的时宽等于两个函数各自时宽的总和！



$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -2 \\ \frac{3}{2}(t+2) & -2 < t \leq 0 \\ 3 & 0 < t \leq 2 \\ \frac{3}{2}(4-t) & 2 < t \leq 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$



注：现实中的信号通常是在 $t \geq 0$ 时才有意义，此时亦需要 $t - \tau \geq 0$ 故 $\tau \in [0, t]$ ，所以自动控制方向的教材或文献通常把卷积公式写成

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

卷积运算的性质

- 交换律

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

证明: $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\lambda)x_1(t - \lambda)d\lambda = x_2(t) * x_1(t)$

令 $\lambda = t - \tau$

★ 定积分换元

- ① 代入被积式
- ② 换微分
- ③ 换上下限

卷积运算的性质

- ~~交换律~~

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

- ~~分配律~~

$$x(t) * [x_1(t) + x_2(t)] = x(t) * x_1(t) + x(t) * x_2(t)$$

- ~~结合律~~

$$[x(t) * x_1(t)] * x_2(t) = x(t) * [x_1(t) * x_2(t)]$$

出现了两次卷积运算！改变积分次序即可证明



证明卷积运算的结合律

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$$

证明 $[x(t) * x_1(t)] * x_2(t) = x(t) * [x_1(t) * x_2(t)]$, 为了方便看变量, 等式左边可写成

$$\begin{aligned} & \{[(x(\lambda) * x_1(\lambda))(\tau)] * x_2(\tau)\}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)x_1(\tau - \lambda)d\lambda \right) x_2(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau - \lambda)x_2(t - \tau)d\tau \right) d\lambda && \text{在整个平面上积分} \\ & && \text{(改换积分次序)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\xi)x_2((t - \lambda) - \xi)d\xi \right) d\lambda && \text{(换元, 令 } \xi = \tau - \lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \underbrace{[x_1(\xi) * x_2(\xi)](t - \lambda)}_{a(t - \lambda)} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)a(t - \lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)a(t - \tau)d\tau && \text{(换元, 令 } \lambda = \tau) \\ &= x(t) * [x_1(t) * x_2(t)] \end{aligned}$$

卷积运算的性质 ★ 微分+积分: $x_1(t) * x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) * \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$

- 卷积的微分

$$\frac{d}{dt} [x_1(t) * x_2(t)] = x_1(t) * \frac{d}{dt} x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) * x_2(t)$$

- 卷积的积分

$$\int_{-\infty}^t [x_1(\lambda) * x_2(\lambda)] d\lambda = x_1(t) * \left[\int_{-\infty}^t x_2(\lambda) d\lambda \right]$$

$$= \left[\int_{-\infty}^t x_1(\lambda) d\lambda \right] * x_2(t)$$

乘法的微分 vs 卷积的微分

- 乘法的微分 **前导后不导 + 前不导后导**

$$\frac{d}{dt} [x_1(t)x_2(t)] = \frac{d}{dt} x_1(t) \cdot x_2(t) + x_1(t) \cdot \frac{d}{dt} x_2(t)$$

- 卷积的微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x_1(t) * x_2(t)] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \frac{d}{dt} x_2(t - \tau) d\tau \\ &= x_1(t) * \frac{d}{dt} x_2(t) \end{aligned}$$

只需要对其中一个函数
进行微分就可以了
(积分同理)

★卷积运算的性质

- 与冲激信号、冲激偶信号的卷积

等式右边均为函数

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$\star x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$$

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$$

$$\delta(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

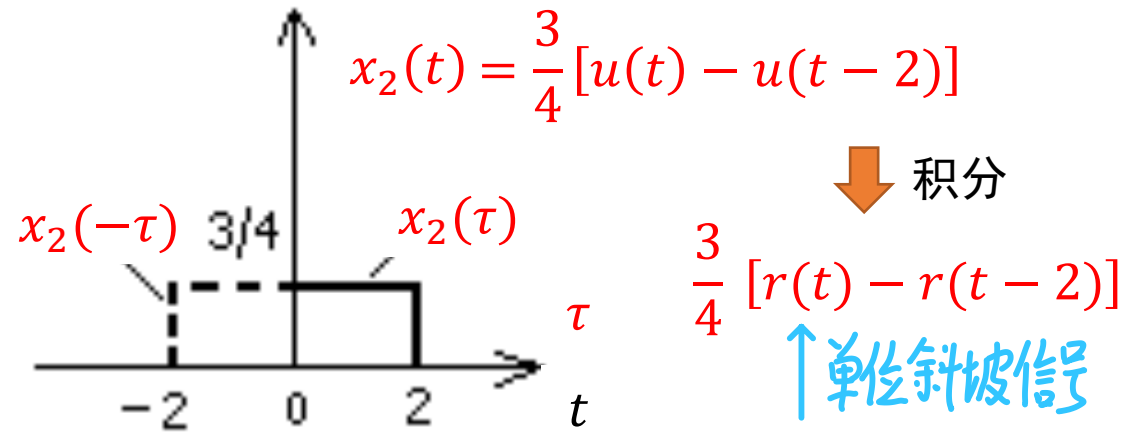
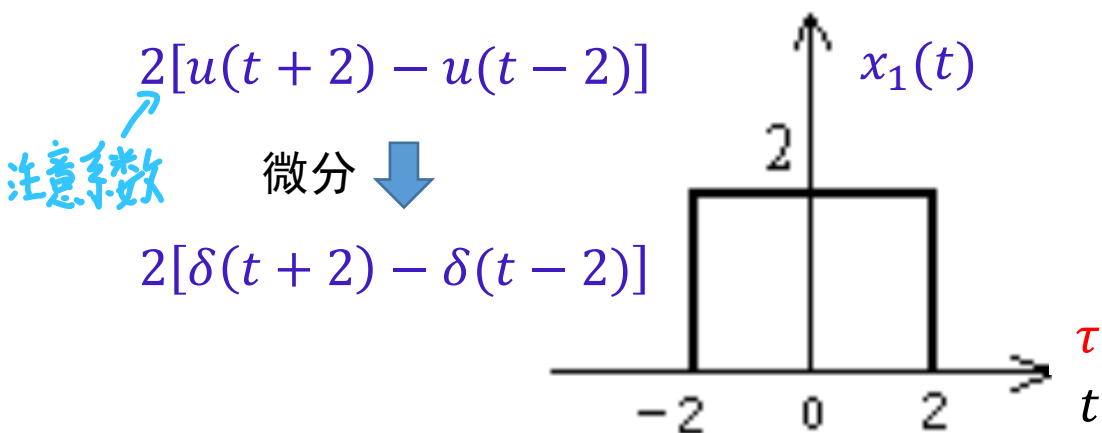
对比记忆
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$: 一个值

微分 $\rightarrow x(t) * \delta'(t) = x'(t)$

- 与阶跃信号的卷积

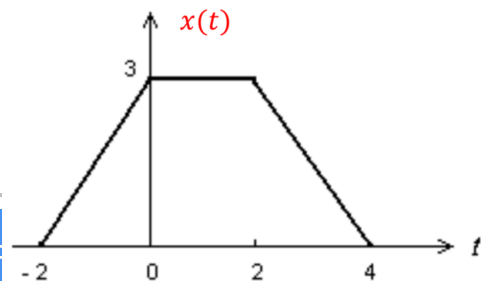
积分 $\rightarrow x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

利用卷积性质简化卷积运算 $x_1(t) * x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) * \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$



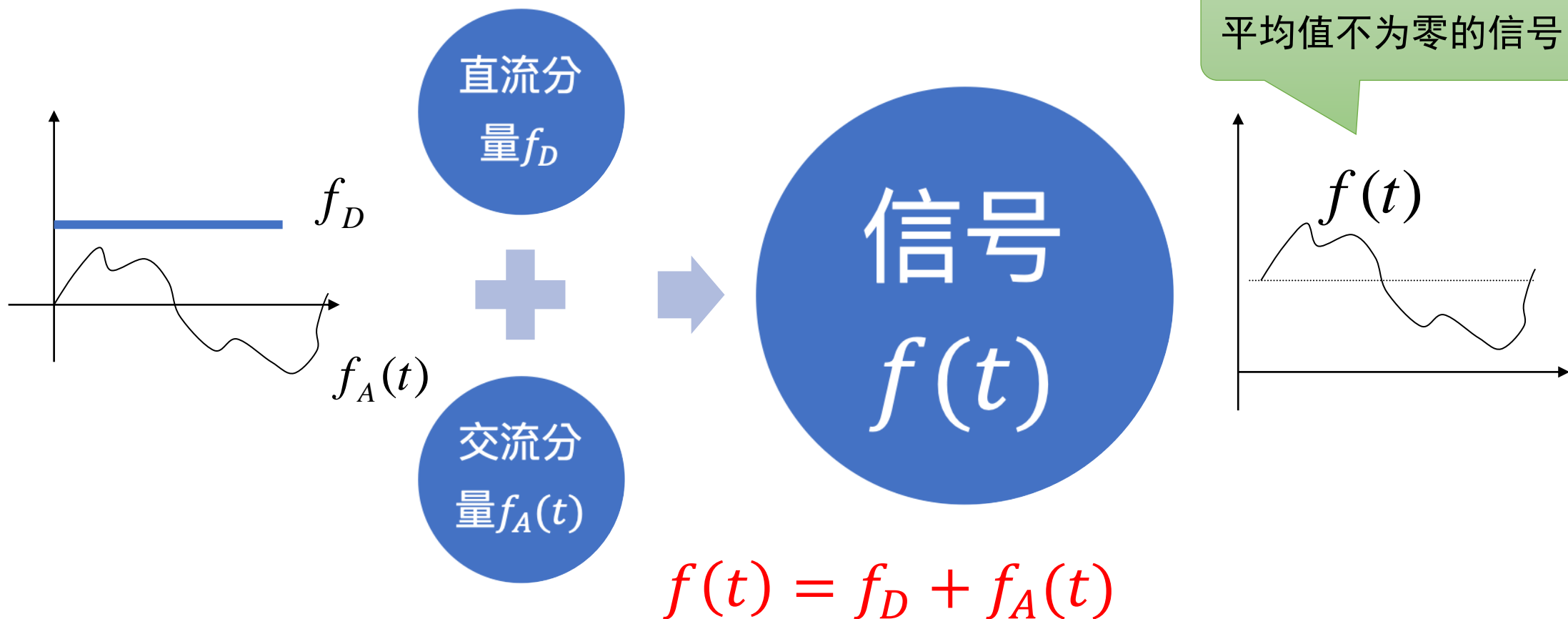
$$\begin{aligned}
 x_1(t) * x_2(t) &= \frac{d}{dt} x_1(t) * \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \\
 &= 2[\delta(t+2) - \delta(t-2)] * \frac{3}{4}[r(t) - r(t-2)] \\
 &= \frac{3}{2}[\delta(t+2) * r(t) - \delta(t+2) * r(t-2) - \delta(t-2) * r(t) + \delta(t-2) * r(t-2)] \\
 &= \frac{3}{2}[r(t+2) - r(t) - r(t-2) + r(t-4)]
 \end{aligned}$$

$x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$



1.1.3 连续信号的时域分解

- 复杂信号分解成一些简单信号或基本信号



偶函数 *even*

$$f_e(t) = f_e(-t)$$

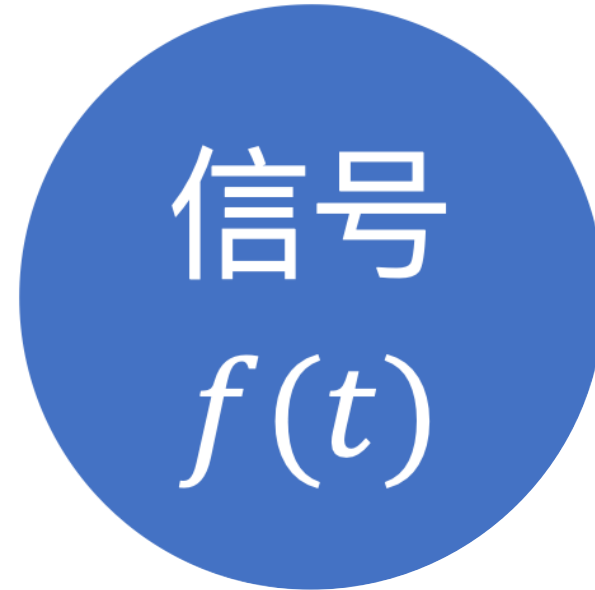
$$\begin{cases} f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \\ f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \end{cases}$$

$$f_o(t) = -f_o(-t)$$

奇函数 *odd*

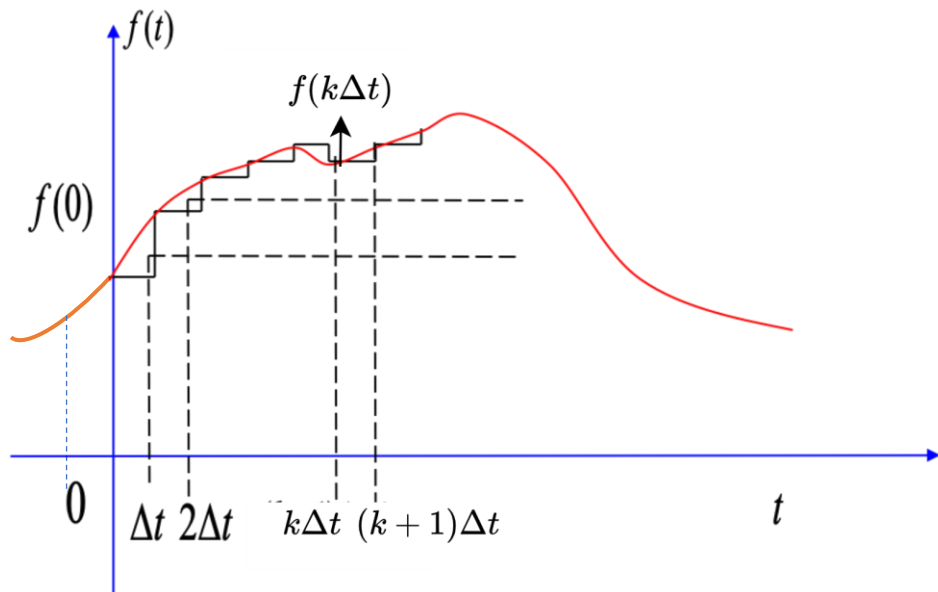


$$\begin{cases} \underline{f(t) = f_e(t) + f_o(t)} \\ f(-t) = f_e(-t) + f_o(-t) = f_e(t) - f_o(t) \end{cases}$$



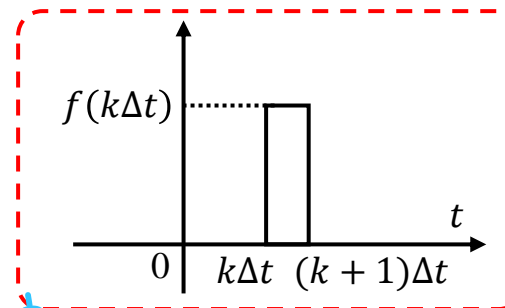
任何信号 $f(t)$ 可以分解为偶分量 $f_e(t)$ 和奇分量 $f_o(t)$ 之和

• 分解成冲激函数之和



$f(t)$ 可用经平移的无穷多个 $\delta(t)$ 加权后的连续和 (积分) 表示

考虑函数 $f(t)$



$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{f(k\Delta t)}_{\text{矩形脉冲}} \{u(t - k\Delta t) - u[t - (k + 1)\Delta t]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \cdot \underbrace{\frac{1}{\Delta t}}_{\Delta t \rightarrow 0, \delta(t - k\Delta t)} \cdot \{u(t - k\Delta t) - u[t - (k + 1)\Delta t]\} \cdot \Delta t$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 有 $\Delta t \rightarrow d\tau$, $k\Delta t \rightarrow \tau$, 可知

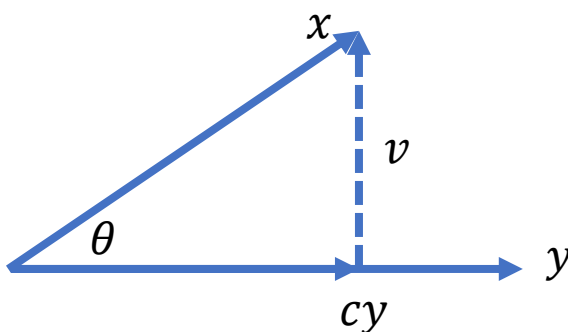
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \{u(t - k\Delta t) - u[t - (k + 1)\Delta t]\} = \delta(t - \tau)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) * \delta(t) \quad \text{和前面给出的一致!}$$

任意信号可以分解为一系列具有不同强度的冲激函数

正交分解

- 二维空间中的正交矢量 (向量)

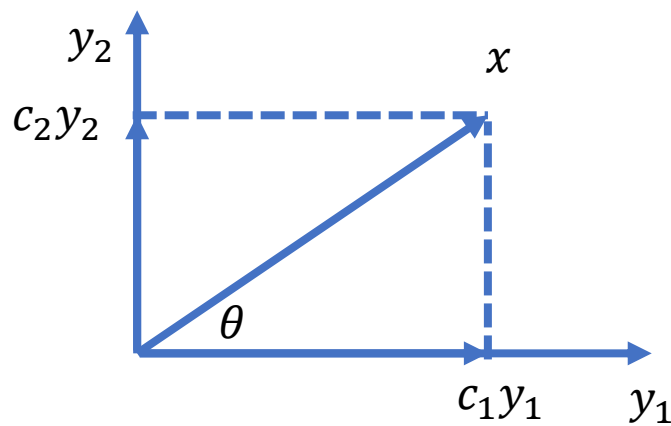


$$\min \|\vec{x} - c\vec{y}\|_2^2$$

近似误差函数为凸函数,
 $\frac{d\|\vec{x}-c\vec{y}\|_2^2}{dc} = 0$ 时有最小值

$$c = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$\begin{aligned} x &= cy \\ y^T x &= cy^T y \\ c &= \frac{y^T x}{y^T y} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \end{aligned}$$



$$\min \|\vec{x} - \vec{c}\vec{y}\|_2^2$$

$$c_i = \frac{\langle x, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle}$$

$$\begin{aligned} \vec{y} &= [y_1, y_2]^T, \\ \vec{c} &= [c_1, c_2]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ \text{求线性系数 } c_1: \\ y_1^T x &= c_1 y_1^T y_1 + c_2 y_1^T y_2 \\ c_1 &= \frac{y_1^T x}{y_1^T y_1} = \frac{\langle x, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \end{aligned}$$

• n 维信号向量空间

唯一表达式!

情况一·若向量 x 在 V_1, V_2, \dots, V_n 所张成的空间中.

V_1, \dots, V_n 正交, 用 V_1, \dots, V_n 的线性组合表示向量 x , 即 $x = \sum_{i=1}^n c_i V_i$

正交分解!

线性无关,
可以张成一个
 n 维空间

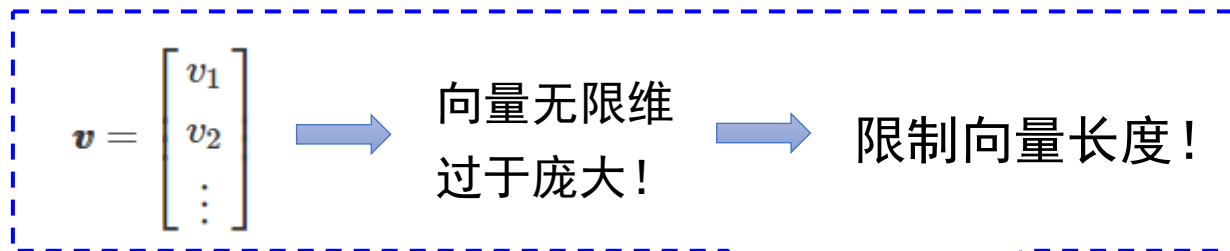
$$\star c_i = \frac{\langle x, V_i \rangle}{\langle V_i, V_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

一般情况下, n 维向量**必须**用 n 个正交分量表示 (如果把它表示成不是 n 个正交分量的线性组合, 会产生误差)

情况二: 若向量 x 为空间任意向量, 向量 u 为 x 在 V_1, V_2, \dots, V_n 所张成的空间中的正交投影, 则

$$u = \sum_i c_i V_i, \quad c_i = \frac{\langle u, V_i \rangle}{\langle V_i, V_i \rangle} = \frac{u \cdot V_i}{\|V_i\|^2}$$

• 从向量空间到函数空间



n 维实向量空间 \mathbb{R}^n \longrightarrow 无穷维实向量空间 \mathbb{R}^∞ , 向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^\infty$

为使以下定义依然成立: $\|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots$ 该无穷级数需收敛至有限值, 例如, 取 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \end{bmatrix}$

由此, 加入了有限长度向量的限制, 仍然符合向量空间的定义, 因为

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (有限长度向量之和的长度仍是有限的) 且 $a\mathbf{x}$ 是有限量 (a 是标量)

\longrightarrow 希尔伯特 (Hilbert) 空间 (保有一般几何性质的无限维实向量空间) **完备的内积空间**

一个抽象的希尔伯特空间中的元素往往被称为向量, 在实际应用中可能代表一系列复数或一个函数。

例: $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx = \pi$ 可以测量函数的长度! \longrightarrow 无限维数的向量空间 (希尔伯特空间)

\longrightarrow **函数空间** (可以在其中计算内积)

正交函数集

此处上标*符号表示共轭，可涵盖复函数；
若 $f_2(t)$ 为实函数，则 $f_2^*(t) = f_2(t)$

- 考虑两个非零函数 $f_1(t), f_2(t)$ ，若满足

函数内积的定义

$$\langle f, g \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t)g^*(t)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)dt = 0 \quad (\text{内积为0})$$

则称 $f_1(t), f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内**正交**。

- 考虑 n 个非零函数 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 构成一个函数集，且这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t)f_j^*(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases} \quad (\text{a})$$

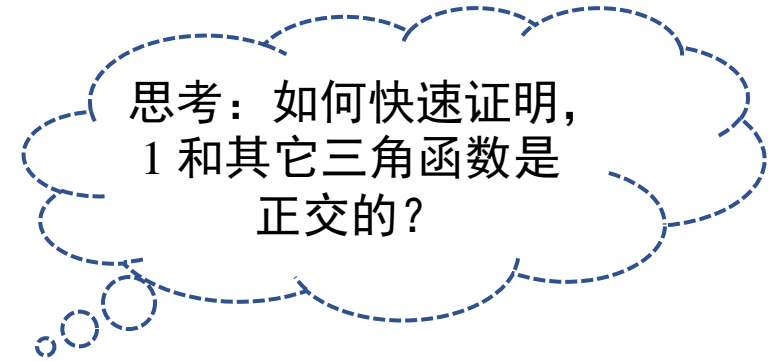
其中 k_i 为常数，则称此函数集为在区间 (t_1, t_2) 内的**正交函数集**。

- 上述非零函数 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内构成**完备正交函数集**的条件：**(a)式成立，且不存在非零函数 $\varphi(t)$ 满足**

①正交性 ②完备性

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t)\varphi^*(t)dt = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

常见的完备正交函数集



- 三角函数集在区间 $(t_0, t_0 + T)$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots\}$$

- 复指数函数集在区间 $(t_0, t_0 + T)$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

可以证明. $\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t} \underline{e^{-jm\omega_0 t}} dt = 0$
 注意共轭

$$\{e^{jn\omega_0 t}\} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

证明 利用 $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
 $\int_0^T \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$
 $= \frac{1}{2} \int_0^T \sin((n+m)\omega_0 t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sin((n-m)\omega_0 t) dt$
 由于 $n+m, n-m$ 均为整数, 在 \sin 的整数倍周期上积分为零 \Rightarrow 积分 = 0

信号的正交分解

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$

- $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) + x_e(t), t \in (t_1, t_2), f_i(t)$ 为实信号
- 选取系数 $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 使这种线性组合表示最接近原信号 $x(t)$

均方误差 $\overline{x_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right]^2 dt$

其中 $c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [f_i(t)]^2 dt}$ k_i $\left(\text{复变函数情况为} \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_i^*(t) dt} \right)$

推导近似系数的两种思路

此处已知： $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内构成**完备正交函数集**

- 从优化的角度（对系数 c_i 求偏导数）

$$\frac{\partial \overline{x_e^2(t)}}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right]^2 dt \right\} = 0 \Rightarrow c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [f_i(t)]^2 dt} = \frac{1}{k_i} \int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt$$

- 从内积（投影）的角度（直接考虑 $x_e(t) = 0$ 的最优情况）

$$\langle x(t), f_i(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i \int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j(t) dt \Rightarrow c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [f_i(t)]^2 dt} = \frac{1}{k_i} \int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt$$

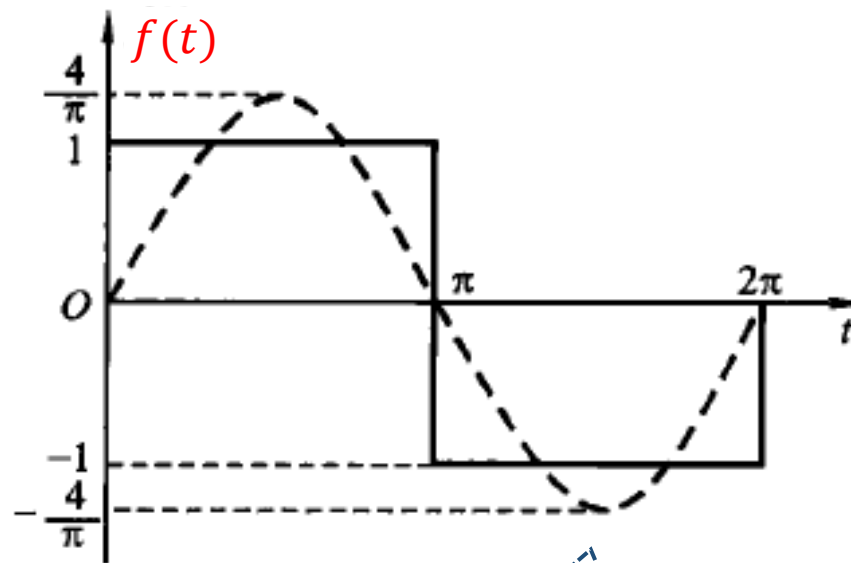
$\text{代 } \lambda x(t) = \sum_i c_i f_i(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$

只有当 $i = j$ 时，内积才不为0

例1-3: 用正弦波 $\sin t$ 在 $(0, 2\pi)$ 内近似如下矩形脉冲 $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} +1 & 0 < t < \pi \\ -1 & \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad c_i = \frac{\langle x, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$



解: 在 $(0, 2\pi)$ 内用 $\sin t$ 逼近 $f(t)$,

最佳系数为 $f(t) = c_1 \sin t + \chi_e(t)$

$$c_1 = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} = \frac{4}{\pi}$$

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t) dt$$

$\langle v_i, v_i \rangle$

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$$

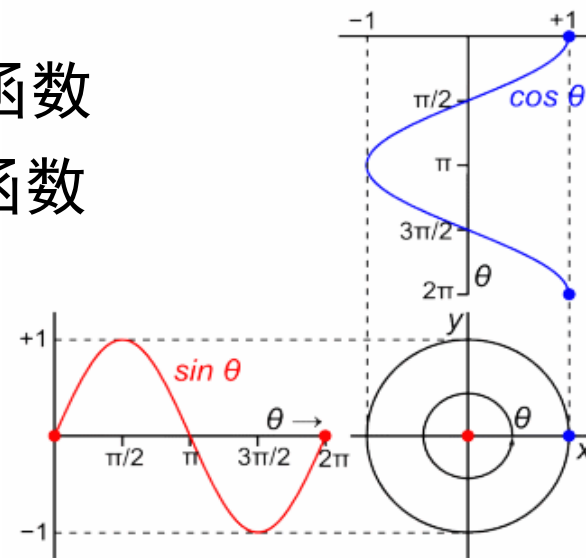
近似波形是振幅为 $\frac{4}{\pi}$ 的正弦波 (虚线所示), 存在一定的近似误差

例1-4：用正弦函数 $\sin t$ 在 $(0, 2\pi)$ 内近似表示余弦函数 $\cos t$

解：显然，由于 $c_1 = \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$ ，其分子

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt = 0$$

所以 $c_1 = 0$ ，也就是余弦函数 $\cos t$ **不包含** 正弦函数（信号） $\sin t$ 这一分量，或者说， $\cos t$ 与 $\sin t$ 函数正交。



帕斯瓦尔 (Parseval) 方程

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$

- 如果 $\overline{x_e^2(t)} = 0$, 则 $x(t)$ 可以完全由 n 个正交函数精确描述, 此时正交函数集完备。但是对于不完备的正交函数集, 即使 $n \rightarrow \infty$ 时也不能使 $\overline{x_e^2(t)} = 0$, 这时信号在正交函数集中各分量的能量总和小于信号本身的能量。因此又可以由帕斯瓦尔方程是否成立来考察描述任意信号 $x(t)$ 的正交函数集是否完备。
- 一般 $\overline{x_e^2(t)} > 0$, n 越大, 均方误差越小。当 $n \rightarrow \infty$, 有 $\overline{x_e^2(t)} = 0$ 以及

证明. 由 $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i(t)$ 知

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i c_i f_i(t) \right)^2 dt$$

$$= \sum_{i \neq j} c_i c_j \int f_i(t) f_j(t) dt + \sum_{i=j} c_i^2 \int f_i^2(t) dt$$

$$= 0 + \sum c_i^2 k_i$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 k_i$$

帕斯瓦尔 (Parseval) 方程: 表示了信号分解的能量关系, 信号 $x(t)$ 的能量等于此信号在完备正交函数集中各分量的能量之和。

课程内容

1.1 连续信号的时域描述和分析

1.2 连续信号的频域分析

1.2.1 周期信号的傅里叶级数

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换

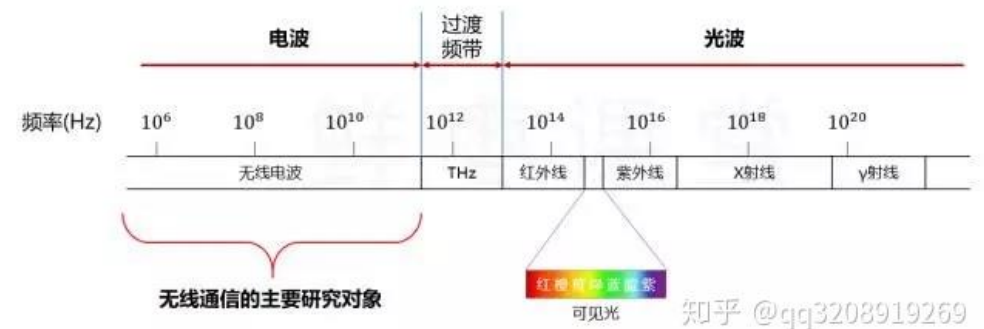
1.2.3 傅里叶变换的性质

1.2.4 周期信号的傅里叶变换

1.3 连续信号的复频域分析

信号的频域分析法

- 三角函数集是**完备正交函数集**，任意信号都可以分解为三角函数表达式
- 任何信号都可视为一系列正弦信号的组合，这些正弦信号的**频率、相位**反映了原信号的性质
- 信号的频域分析法：用频率域的特性（频率特性）来描述时间域信号
- 信号的频率特性具有很强的**物理意义**
 - 频率特性是信号的客观性质
 - 光线的颜色由频率决定
 - 声音音调的不同也在于频率的差异



课程内容

1.1 连续信号的时域描述和分析

1.2 连续信号的频域分析

1.2.1 周期信号的傅里叶级数

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换

1.2.3 傅里叶变换的性质

1.2.4 周期信号的傅里叶变换

1.3 连续信号的复频域分析

信号 $f(t)$ 的周期 T_1 , 频率 ω_1 **基波周期 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, 基波频率**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

其中

傅里叶系数

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt \Rightarrow \text{直流分量} \\ a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt \\ b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \end{array} \right.$$

$$\underline{c_0 = a_0} = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt \quad \underline{c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

复指数形式的傅里叶级数

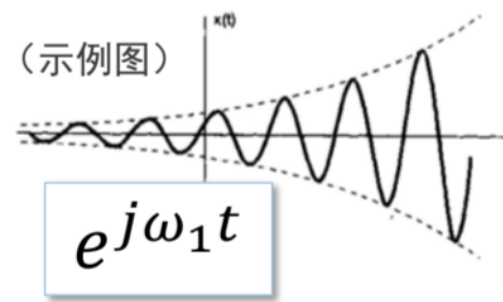
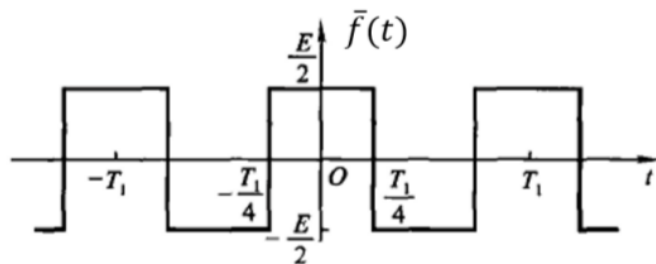
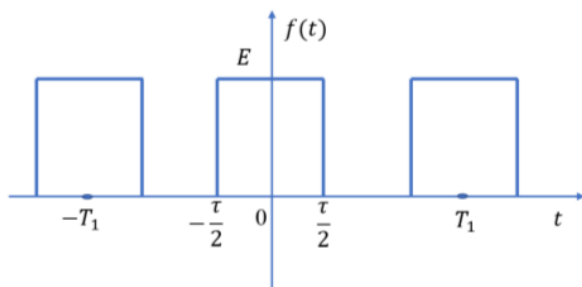
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \quad F(n\omega_1) = \frac{1}{2} c_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n),$$

$$F_0 = c_0 = a_0, \quad |F_n| = \frac{1}{2} |c_n|$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

周期信号的频谱分析

- 周期信号的傅里叶级数
- 典型周期信号的傅里叶级数



周期矩形脉冲信号

对称方波信号

复指数信号

$$F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \xleftrightarrow{\text{相同}} F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

↑ 求法: $F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Rightarrow F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$

$$e^{j\omega_1 t}: F(n\omega_1) = F_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\omega_1 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}), \quad \sin\omega_1 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t})$$

狄里赫利 (Dirichlet) 条件 在一个周期内有限个间断点, 有限个极值点 绝对可积 (又译: “狄利克雷条件”)

- 在一个周期内, 如果有间断点存在, 则间断点的数目应是有限个
- 在一个周期内, 极大值和极小值的数目应是有限个
- 在一个周期内, 信号是绝对可积的, 即 $\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)| dt$ 等于有限值

狄里赫利条件是傅里叶级数存在的充分条件

注: 通常实际应用中的周期性信号都能满足狄里赫利条件, 所以一般的周期信号都具有傅里叶级数。

三角函数形式的傅里叶级数展开式

讨论 a_n, b_n 的奇偶性
为了分析 F_n 与 F_{-n} , 用于
数学上的负频率分析

- 信号 $f(t)$ 的周期 T_1 , 频率 ω_1 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

三角函数的
线性组合

其中

傅里叶
系数

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \end{aligned} \right.$$

直流分量

余弦分量的幅度
 n 的偶函数

正弦分量的幅度
 n 的奇函数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

傅里叶系数的求解

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

- 正交分解法（基于内积求解近似系数，以 a_0 、 a_n 为例） 系数 $c_i = \frac{\langle f(t), f_i(t) \rangle}{\|f_i(t)\|^2}$

三角函数完备正交集 $\{1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin n\omega_1 t, \dots\}$

$$a_0 = \frac{\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cdot 1 dt}{\int_{-T_1/2}^{T_1/2} 1 dt} = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt}{\int_{-T_1/2}^{T_1/2} (\cos n\omega_1 t)^2 dt} = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

- 积分法（以 b_n 为例）

用到半角公式 $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$, $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin k\omega_1 t dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} a_0 \sin k\omega_1 t dt + \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \sin k\omega_1 t dt$$

= 0 正交

$n \neq k$ 时, 正交

（只留下了 $n = k$ 的情况） $= \int_{-T_1/2}^{T_1/2} b_n \sin k\omega_1 t \sin k\omega_1 t dt = \frac{T_1}{2} b_n$ 令 $k = n$ $\rightarrow b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt$

$\hookrightarrow b_n \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sin^2 k\omega_1 t dt$

三角函数形式的傅里叶级数

物理意义明显，
但运算不方便！

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$= a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$$

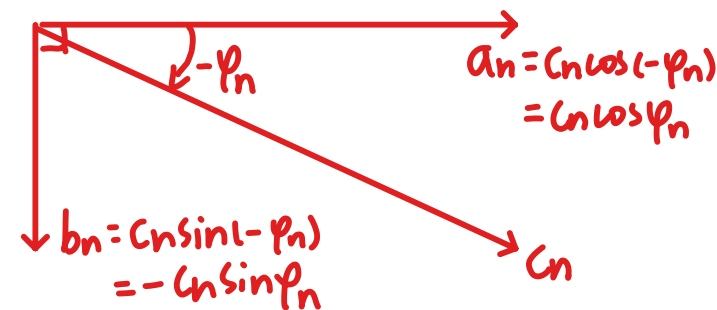
$$= c_n \cos n\omega_1 t \cos \varphi_n - c_n \sin n\omega_1 t \sin \varphi_n$$

- $c_0 = a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$

- $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

c_n 是 n 的偶函数， φ_n 是 n 的奇函数

- $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$, $a_n = c_n \cos \varphi_n$, $b_n = -c_n \sin \varphi_n$



- 一个周期信号可以分解为**直流分量**和一系列余弦或正弦形式的**交流分量**

信号在一个周期内的平均值, $a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$

周期信号的频谱

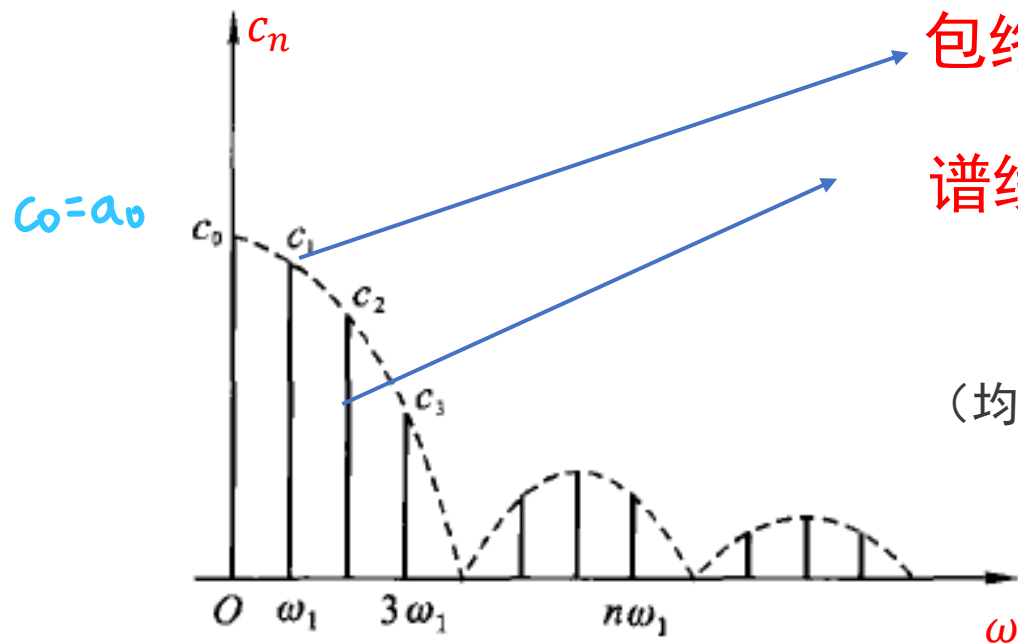
$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

直流分量

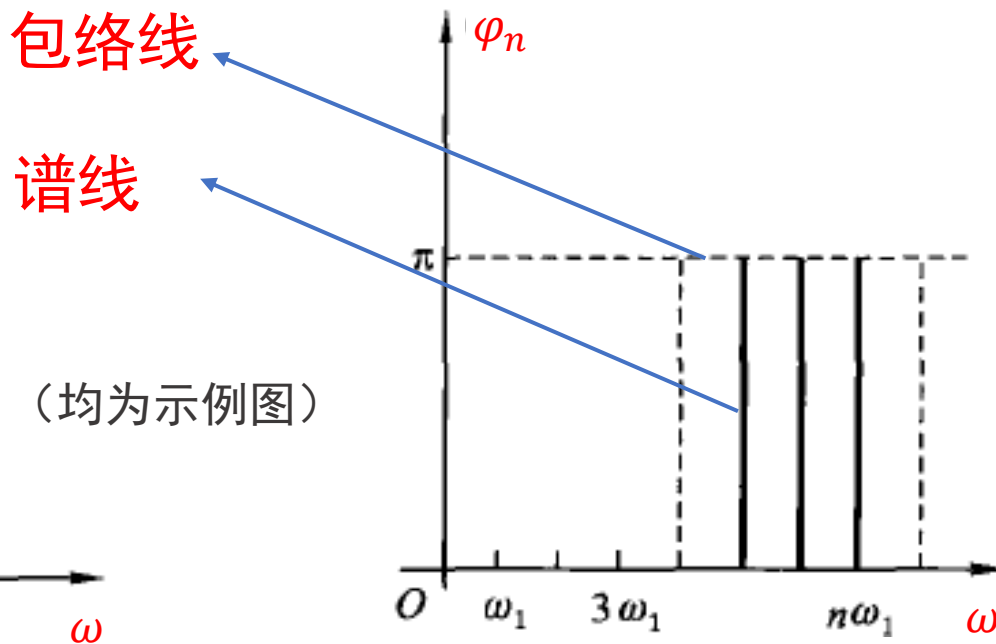
- 周期信号由直流分量、频率为原信号频率整数倍的一系列正弦型信号（分量）组成
- **基波**分量 $n = 1$ —— 一次谐波信号
- 二次谐波分量 ($n = 2$)
- 三次、四次谐波分量 ($n = 3, 4$)
- 周期信号的傅里叶级数展开式全面描述了组成信号的各正弦分量的特征：各谐波分量的**频率**、**幅度**和**相位**

幅度谱和相位谱

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$



幅度频谱 (幅度谱)



相位频谱 (相位谱)

包络线

谱线

(均为示例图)

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

整数 $n > 0$

周期性对应离散性

周期信号的频谱只会出现在 $0, \omega_1, 2\omega_1, \dots$ 离散频率点上, 称为 离散谱

从三角傅里叶级数到 (复) 指数傅里叶级数

三角函数完备正交集 $\{1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin n\omega_1 t, \dots\}$

复指数函数完备正交集 $\{e^{jn\omega_1 t}\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, t \in (t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega_1}), \forall t_0$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \\
 &= \underbrace{a_0}_{F(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{a_n - jb_n}{2}}_{= F(n\omega_1)} e^{jn\omega_1 t} + \underbrace{\frac{a_n + jb_n}{2}}_{= F(-n\omega_1)} e^{-jn\omega_1 t} \right) \\
 &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1) e^{-jn\omega_1 t}) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}
 \end{aligned}$$

其中 $F(n\omega_1) = \frac{a_n - jb_n}{2}$

欧拉公式 $e^{jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t + j \sin n\omega_1 t$

$$\cos n\omega_1 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t})$$

$$\sin n\omega_1 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

(a_n 是 n 的偶函数, b_n 是 n 的奇函数)

$$a_{-n} = a_n$$

$$b_{-n} = -b_n$$

从三角傅里叶级数到 (复) 指数傅里叶级数 (续)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

(a_n 是 n 的偶函数, b_n 是 n 的奇函数)
 $a_{-n} = a_n$ $b_{-n} = -b_n$

互为共轭

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$F_{-n} = |F_{-n}| e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

为了方便, 把系数 $F(n\omega_1)$ 简写作 F_n

$$F(n\omega_1) = F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt - \frac{2j}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \right\}$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) (\cos n\omega_1 t - j \sin n\omega_1 t) dt$$

欧拉公式!

$$= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

F_n 是复函数! 称为复傅里叶系数

思考: F_n 的其它求解方法?

复指数形式的傅里叶级数

由于 $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

幅度变成了三角函数形式的一半

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$\bullet F(n\omega_1) = \frac{1}{2} c_n e^{j\varphi_n}, \quad \star F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \quad F_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

$$\bullet F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

$$\bullet F_n + F_{-n} = a_n, \quad \underline{|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2} |c_n|}, \quad b_n = j(F_n - F_{-n}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

• 负频率的出现是数学运算的结果，把负频率项与相应的正频率项成对地合并起来，才是实际的频谱函数

周期信号的复数频谱

$$F(n\omega_1) = F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) (\cos n\omega_1 t - j \sin n\omega_1 t) dt$$

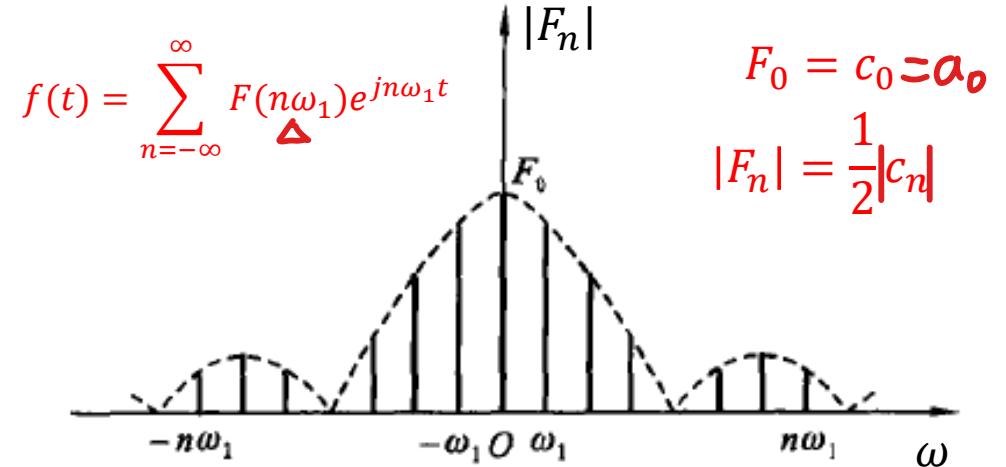
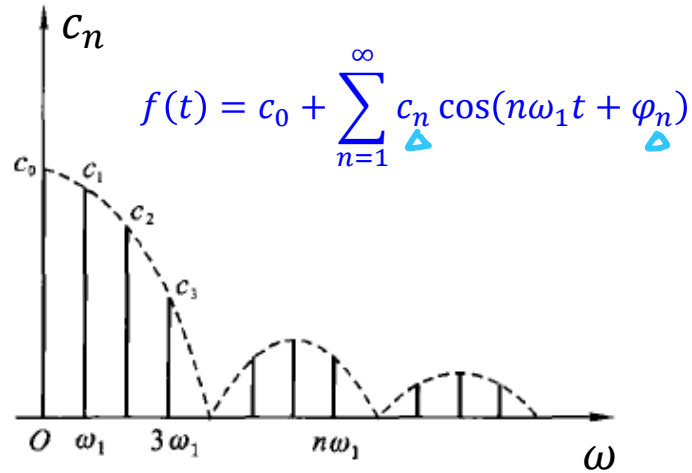
- $F(n\omega_1)$ 是 $n\omega_1$ 的复函数, $F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{a_n - jb_n}{2}$
- 模 $|F_n|$ 反映了各谐波分量的幅度, 随频率的分布称为 幅度频谱 (幅频)
 n 的偶函数 $|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} |C_n|$ C_n 是 n 的偶函数
 $|F_{-n}| = |F_n|$
- 相角 φ_n 反映了各谐波分量的相位, 随频率的分布称为 相位频谱 (相频)

n 的奇函数
 $\varphi_{-n} = -\varphi$

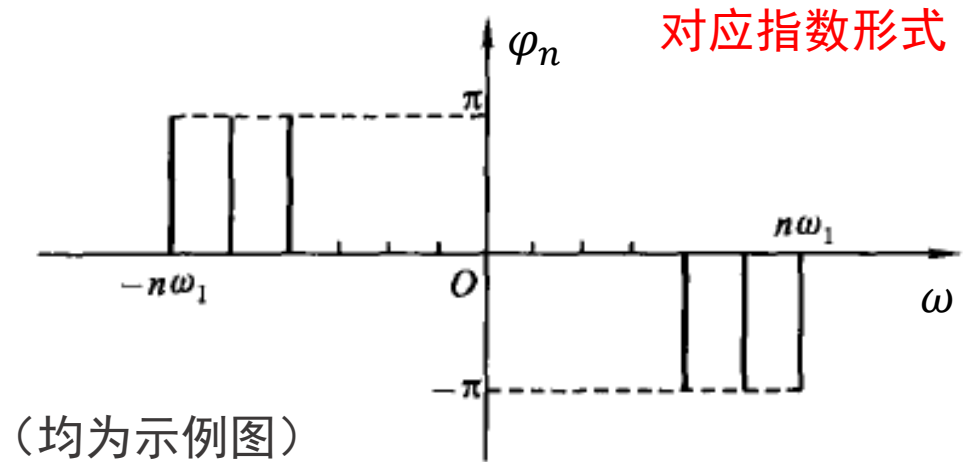
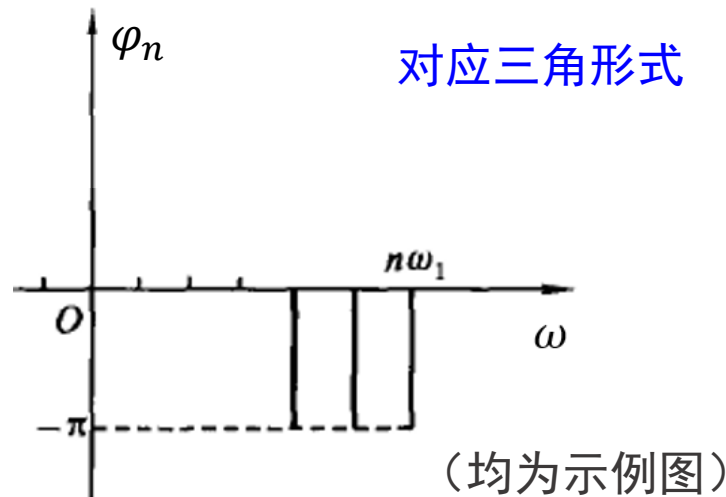
单边谱 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

双边谱 ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

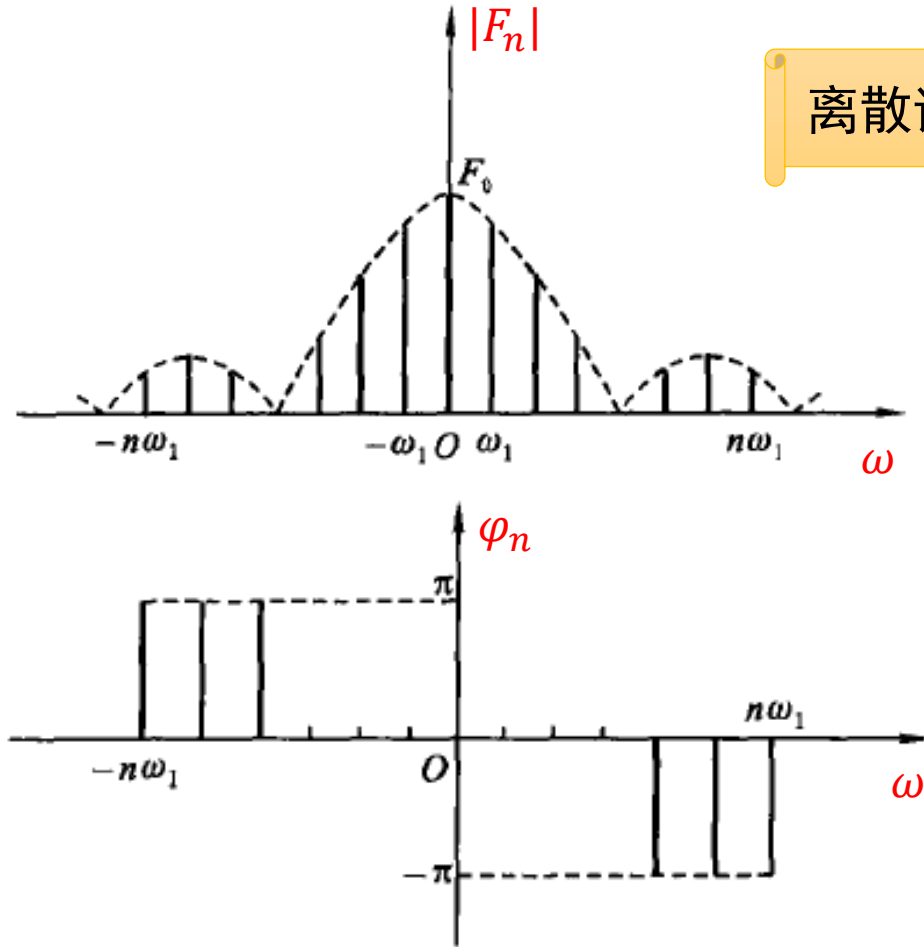
幅度频谱 (偶函数)



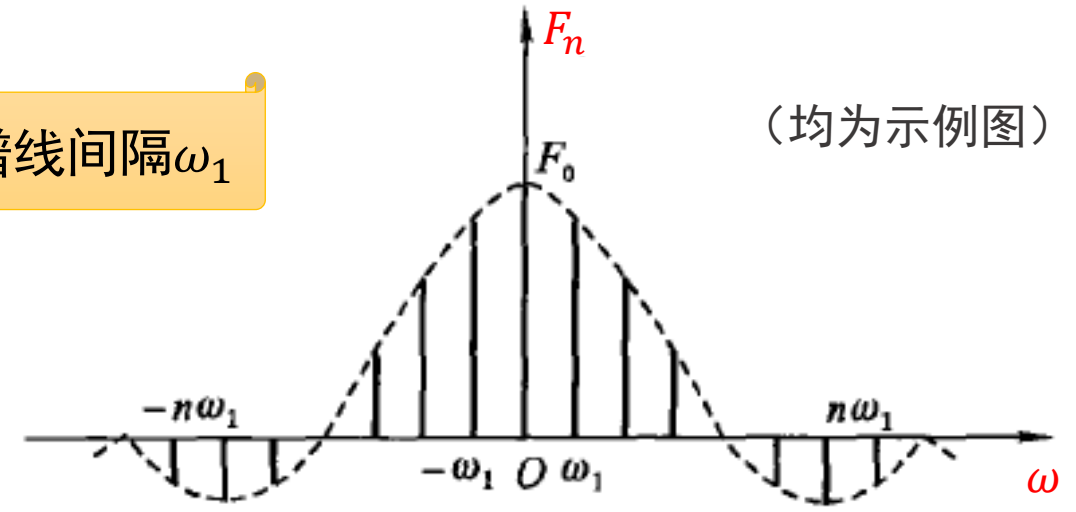
相位频谱 (奇函数)



周期信号的复数频谱



离散谱，谱线间隔 ω_1



(均为示例图)

当 F_n 为实数时，可以用 F_n 的正、负表示 φ_n 的0或 π ，因此也可以把幅度与相位体现在一张图上

周期信号的功率分配 了解

- 回顾**帕斯瓦尔 (Parseval) 方程**：表示信号分解的能量关系，信号 $x(t)$ 的能量等于此信号在完备正交函数集中各分量的能量

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 k_i$$

- 周期信号 $f(t)$ 的平均功率（周期为 T_1 ）？

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt, \quad t \in [t_1, t_2]; \quad P = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} |f(t)|^2 dt, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

平均功率的定义

周期信号的功率分配

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

- 功率信号 $f(t)$ 的帕斯瓦尔 (Parseval) 公式:

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} |f(t)|^2 dt = (c_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} c_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

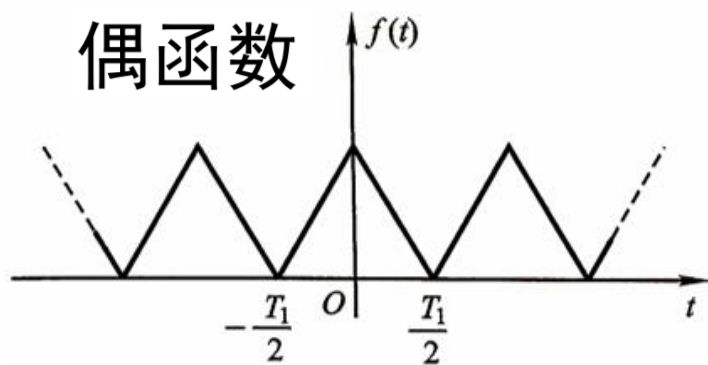
- 周期信号在时域的平均功率等于信号所包含的直流、基波及各次谐波的平均功率之和 (时域和频域的能量守恒)
- 周期信号的功率频谱: 将各次谐波包括直流的平均功率分配关系表示成谱线形式

函数的对称性与傅里叶系数的关系

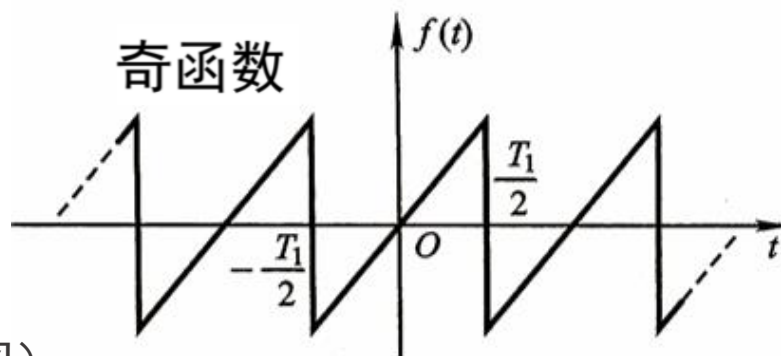
- 傅里叶级数展开式: $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt \quad b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

- 若周期信号的函数波形对称: **对称区间上积分 偶倍奇零**



(示例图)



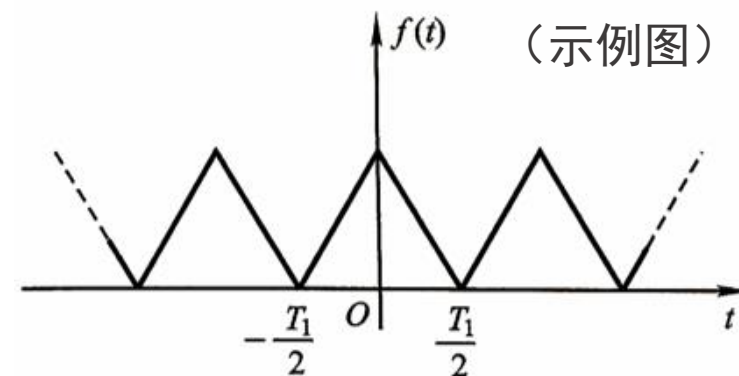
系数可否
简化?



函数的对称性与傅里叶系数的关系 (偶函数)

• 偶函数

$$f(t) = f(-t)$$



$$\bullet a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt \quad (\text{首项系数不变})$$

$$\bullet a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \underbrace{f(t) \cos n\omega_1 t}_{\text{偶}} dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad \underline{b_n = 0}$$

$$\bullet c_n = a_n = 2 F_n, \quad \underline{F_n = F_{-n} = \frac{a_n}{2}} \quad (\text{实部, 偶函数})$$

$$\bullet \varphi_n = 0 \text{ 或 } \pi \quad \text{由复数 } F_n \text{ 的虚部为零. } F_n \text{ 位于实轴}$$

性质的用途?

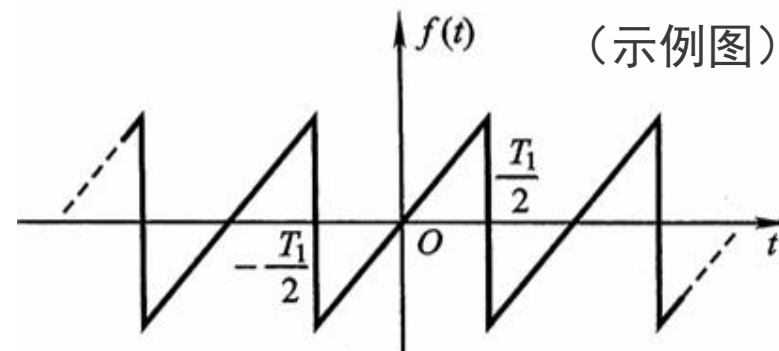
简化计算!



函数的对称性与傅里叶系数的关系 (奇函数)

• 奇函数

$$f(t) = -f(-t)$$



$$\underline{a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = 0, \quad a_n = 0}$$

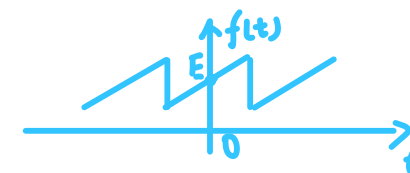
$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

$$c_n = b_n, \quad \underline{F_n = -F_{-n} = -\frac{jb_n}{2}} \quad (\text{虚部, 奇函数})$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{2} \quad \text{由于复数 } F_n \text{ 的实部为零, } F_n \text{ 位于虚轴}$$

如：奇函数+直流分量？

- 仍是奇函数？ ✗
- 余弦项为0？ ✔



$a_0 = E, a_n = 0$
其中 $F_0 = C_0 = a_0$



函数的对称性与傅里叶系数的关系 (奇谐函数)

- 奇谐函数 (半波对称函数)

只有奇次谐波的函数

① 没有直流分量

② 没有偶次谐波

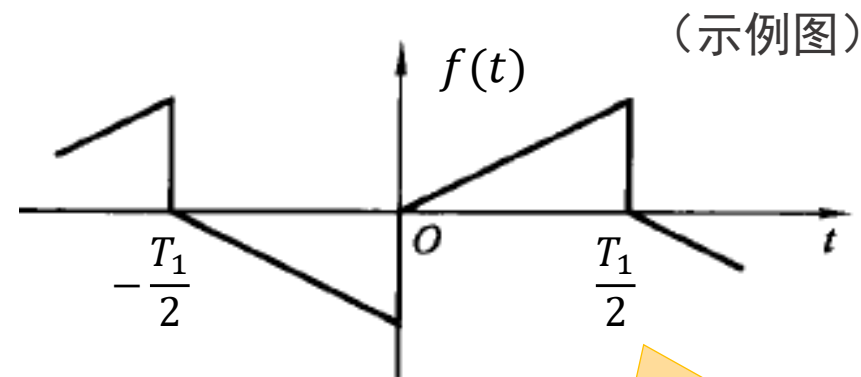
$$f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$$

- $a_0 = 0$

- $a_n = b_n = 0$ (n为偶数)

- $a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$ (n为奇数)

- $b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$ (n为奇数)



波形沿时间轴平移并
相对于该轴上下反转

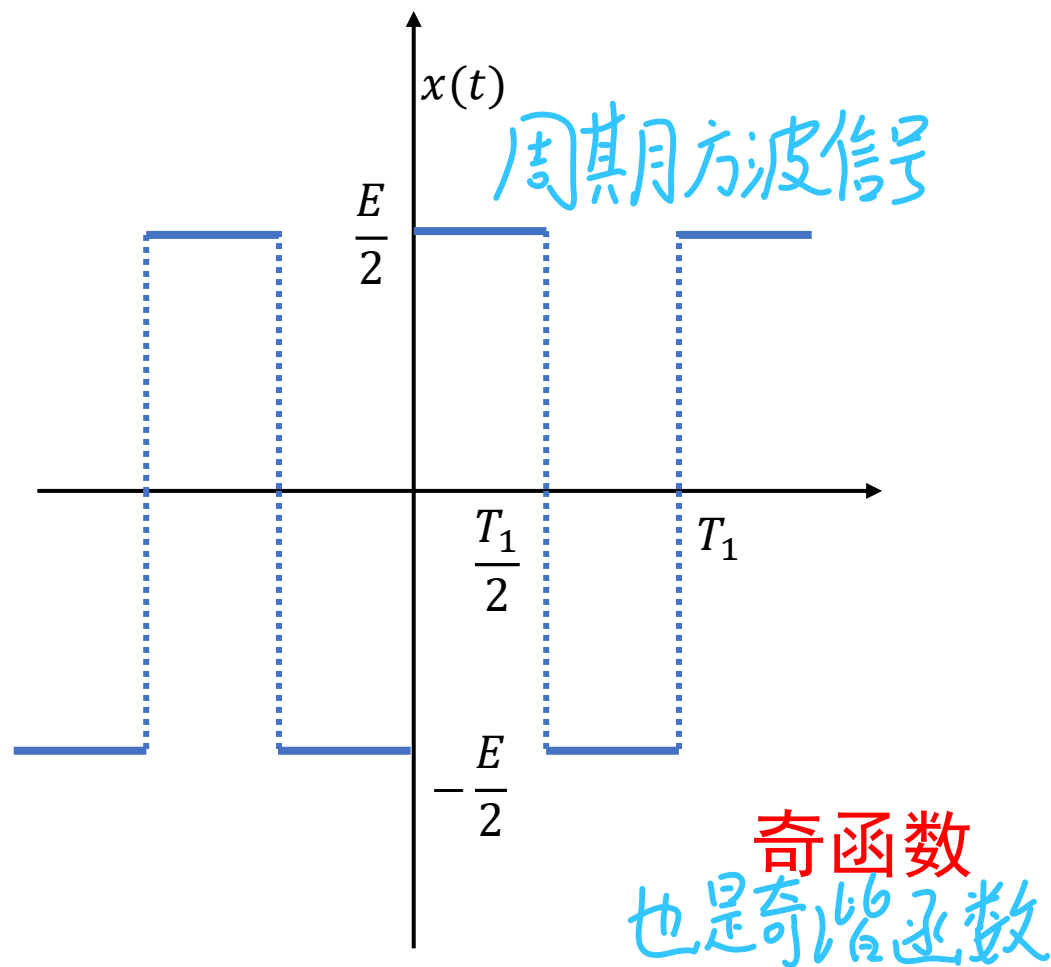
奇次谐波的正弦、余弦项

函数的对称性与傅里叶系数的关系

函数 $f(t)$	波形举例	★ 直流分量 a_0, F_0	★ 余弦分量 $a_n (n \neq 0)$	★ 正弦分量 b_n	★ 复指数分量 F_n
偶函数 $f(t) = f(-t)$		$F_0 = C_0 = a_0$ $\frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$	$\frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 2, \dots$)	0	$\frac{a_n}{2}$ (实数) ($n = 1, 2, \dots$)
奇函数 $f(t) = -f(-t)$		0	0	$\frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 2, \dots$)	$-j \frac{b_n}{2}$ (虚数) ($n = 1, 2, \dots$)
奇谐函数 $f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$		0	$\frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 3, \dots$)	$\frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 3, \dots$)	$\frac{a_n - jb_n}{2}$ (复数) ($n = 1, 3, \dots$)

(其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, $f(t)$ 为实函数)

周期信号的傅里叶近似



$$f(t) = \begin{cases} -\frac{E}{2} & -\frac{T_1}{2} \leq t < 0 \\ \frac{E}{2} & 0 \leq t < \frac{T_1}{2} \end{cases}$$

提示: $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$

代入系数公式计算 $a_0=0$ $a_n=0$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} \frac{E}{2} \sin n\omega_1 t dt$$

$$= \frac{2E}{T_1 n \omega_1} (-\cos n\omega_1 t) \Big|_0^{\frac{T_1}{2}} = \frac{E}{n\pi} [1 - \cos n\pi]$$

$$\text{由} \begin{cases} \cos 2n\pi = 1 \\ \cos (2n-1)\pi = -1 \end{cases}$$

$$b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

周期方波信号的三角形傅里叶展开式 $f(t) = \sum_n b_n \sin n\omega_1 t$

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right)$$

近似：对展开式作截断，取傅里叶级数的前 N 项来逼近 $f(t)$

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^N b_{2n-1} \sin(2n-1)\omega_1 t$$

误差

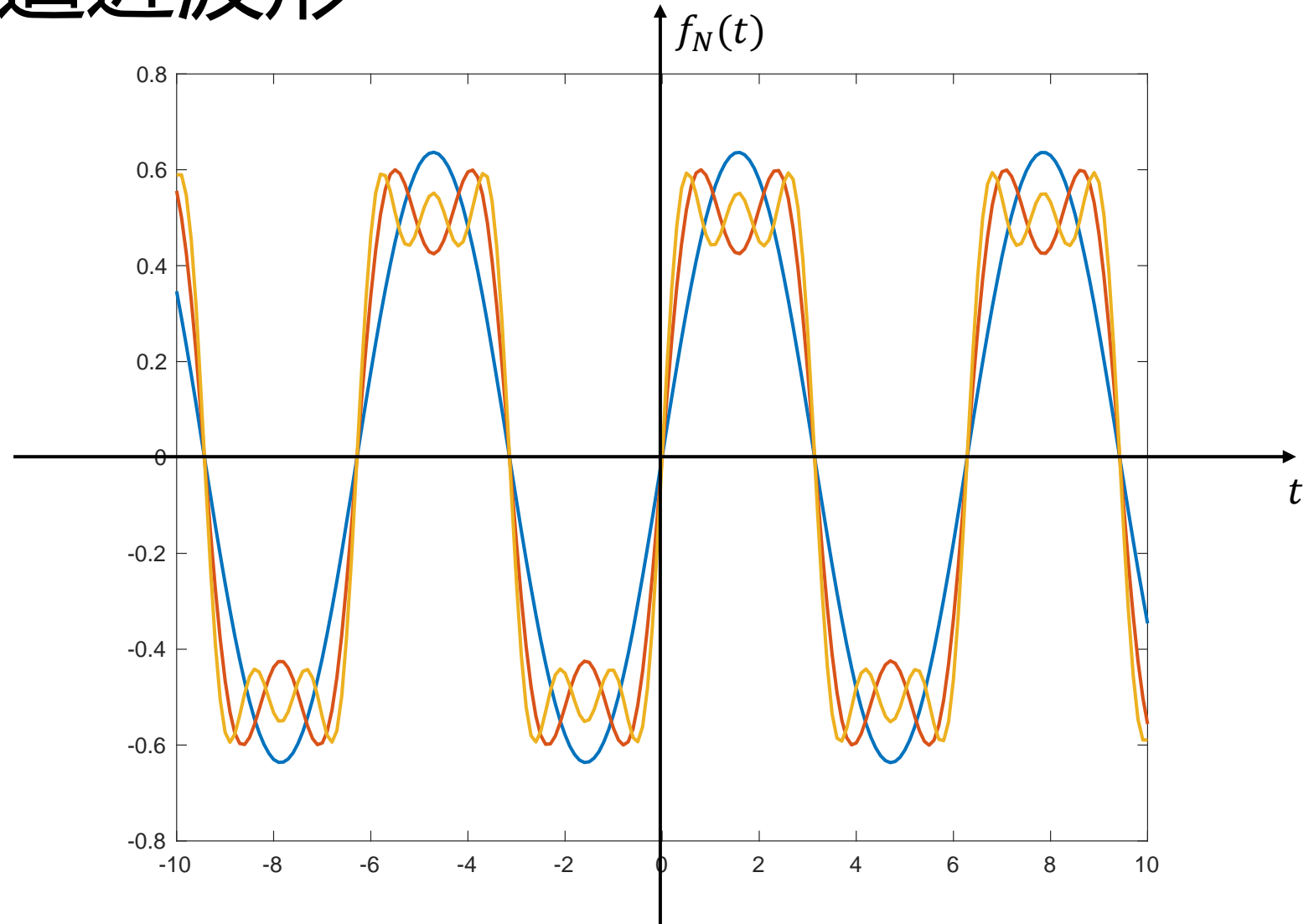
$$\varepsilon_N(t) = f(t) - f_N(t) \quad \text{均方误差} \quad E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varepsilon_N^2(t) dt$$

周期方波信号的逼近波形

均方误差

- $E_1 \approx 0.05E^2$
- $E_3 \approx 0.02E^2$
- $E_5 \approx 0.015E^2$

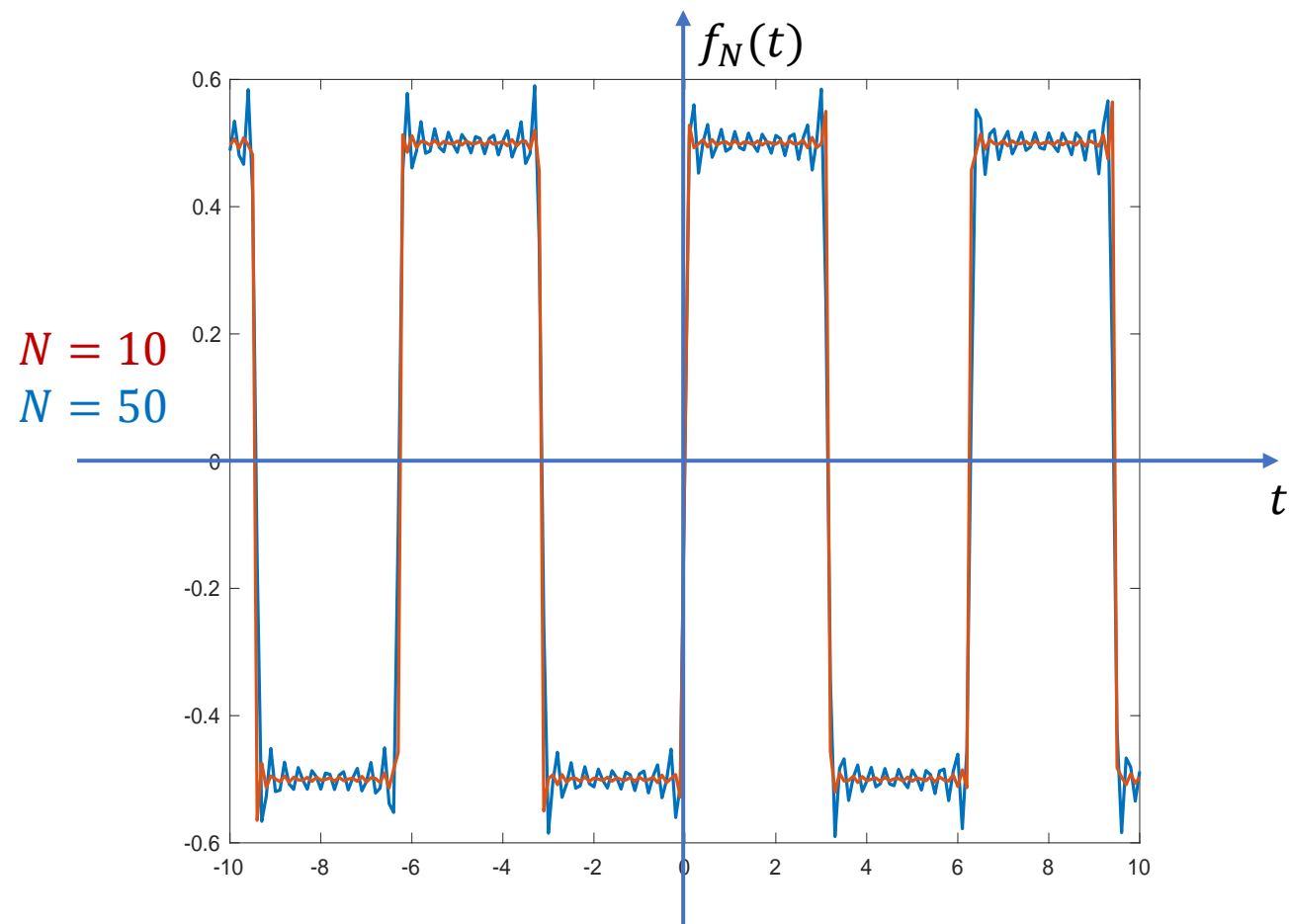
傅里叶级数项数越多，
近似（均方）误差越小
当 $N \rightarrow \infty$, $f_N(t) \rightarrow f(t)$



周期方波信号的逼近波形

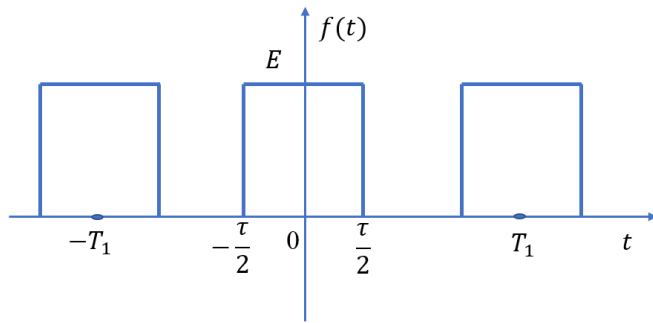
吉布斯现象

- 傅里叶有限级数的项数越多，所合成波形中出现的峰起越靠近 $f(t)$ 的不连续点
- 当所取项数 N 很大时，该峰起值趋于一个常数，大约等于总跳变值的9%，并不连续点开始以起伏振荡形式逐渐衰减下去，这种现象称为吉布斯现象



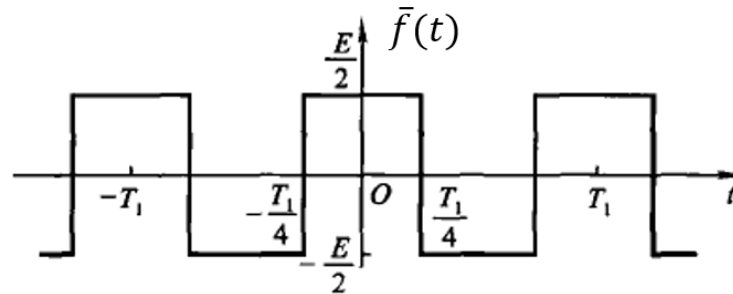
典型周期信号的傅里叶级数

- 以傅里叶级数展开形式研究典型周期信号的频谱



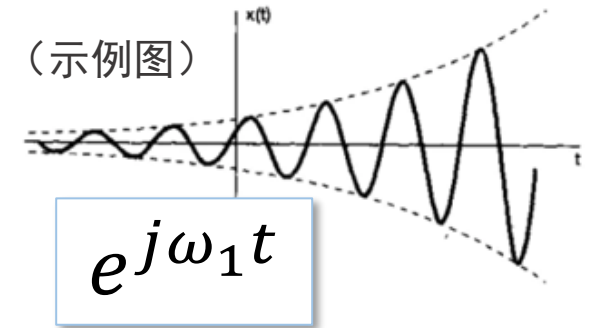
周期矩形脉冲信号

$$F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$



对称方波信号

$$F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

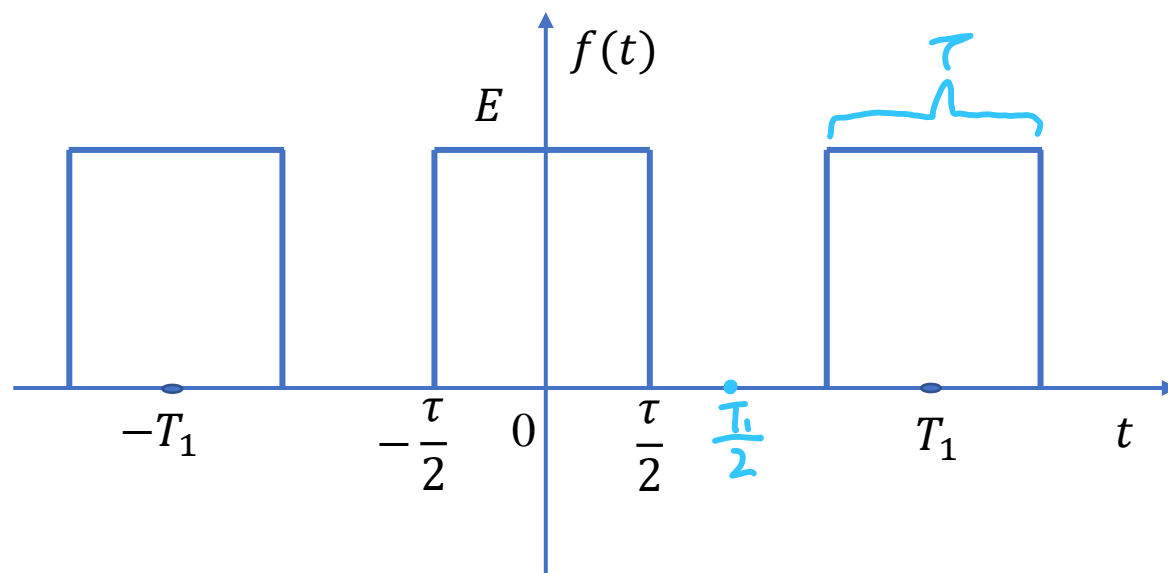


复指数信号

$$e^{j\omega_1 t}: F(n\omega_1) = F_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

周期矩形脉冲信号

- 周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲宽度 τ ，脉冲幅度 E ，重复周期 T_1



$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right], t \in \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right], \tau \in (0, T_1)$$

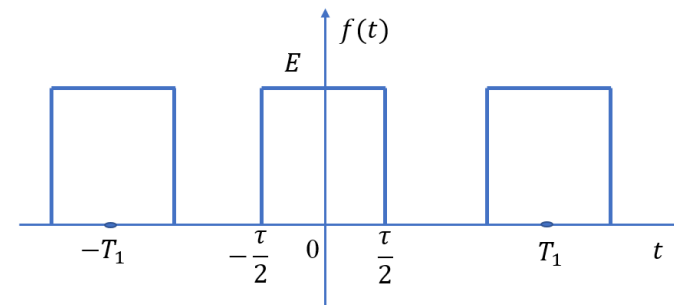
↑ 单位阶跃
为了保证不重叠

求解周期矩形脉冲信号的傅里叶系数

三角形式

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$



$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right], t \in \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]$$

• 偶函数! (利用对称性质)

• $b_n = 0, c_n = a_n, a_0 = \frac{E\tau}{T_1}$

指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

偶 ← 此在 $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ 为常数

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \cos\left(n \frac{2\pi}{T_1} t\right) dt$$

$$= \frac{4E}{T_1} \cdot \frac{T_1}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T_1} t\right) \Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\tau}{2}} = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$$

$$= \frac{2E\tau}{T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T_1}} = \frac{2E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{E\tau\omega_1}{\pi} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

周期矩形脉冲信号的傅里叶级数

三角形式

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

- $a_0 = \frac{E\tau}{T_1}$, $a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{2E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$
- $b_n = 0$, $c_n = a_n$

指数形式

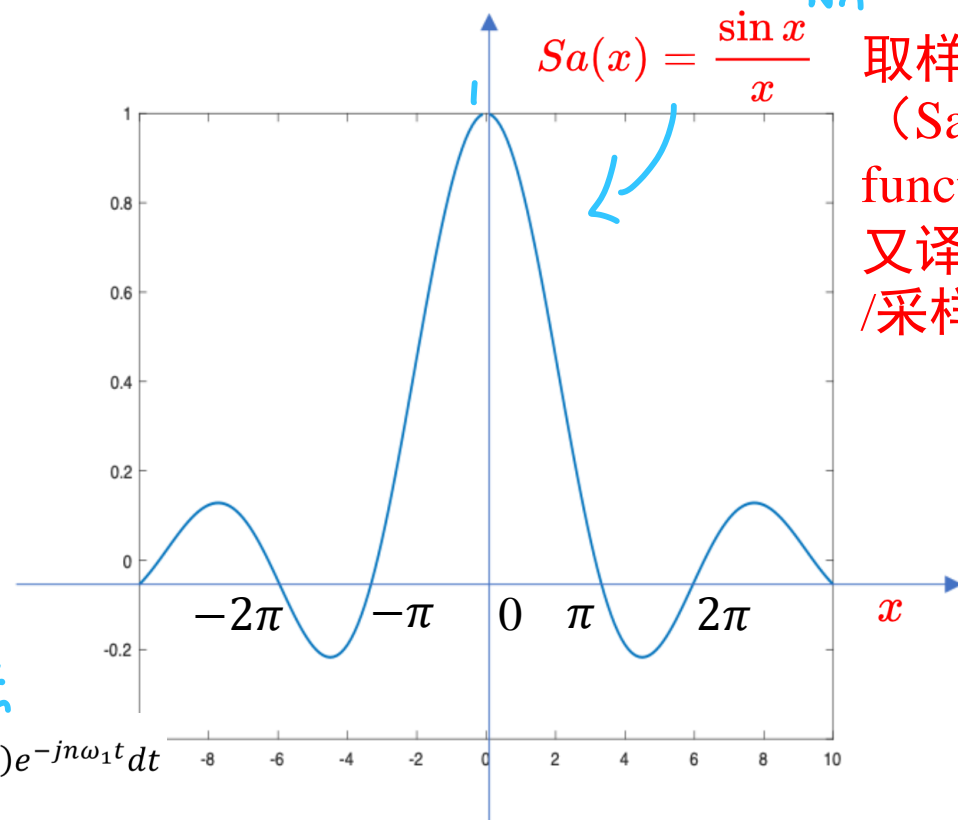
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ 由于 $b_n = 0$, $F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$ 求法 = 定义法 $F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$

$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(x) dx = \pi$

$\int_{-\infty}^0 Sa(x) dx = \frac{\pi}{2}$

当 $x = 0$ 时, $Sa(0) = 1$ (求极限可得)



取样函数
(Sampling function,
又译为抽样/采样函数)

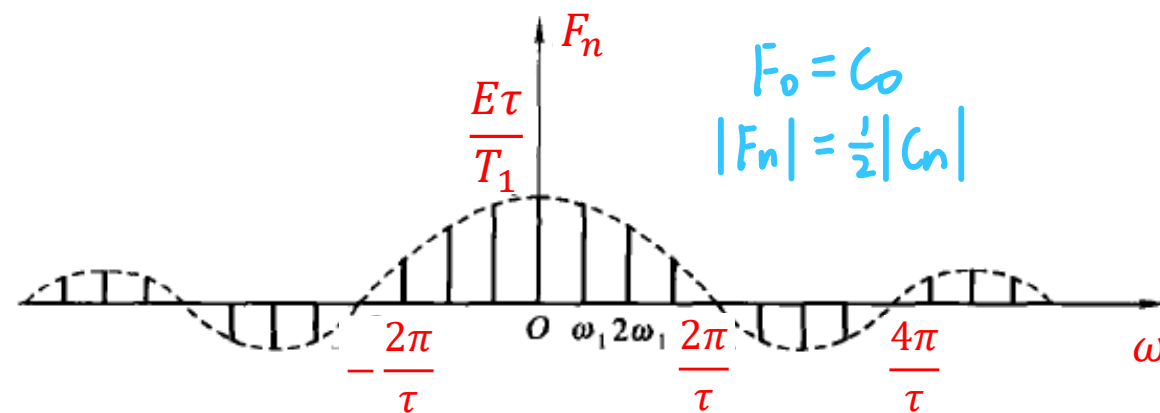
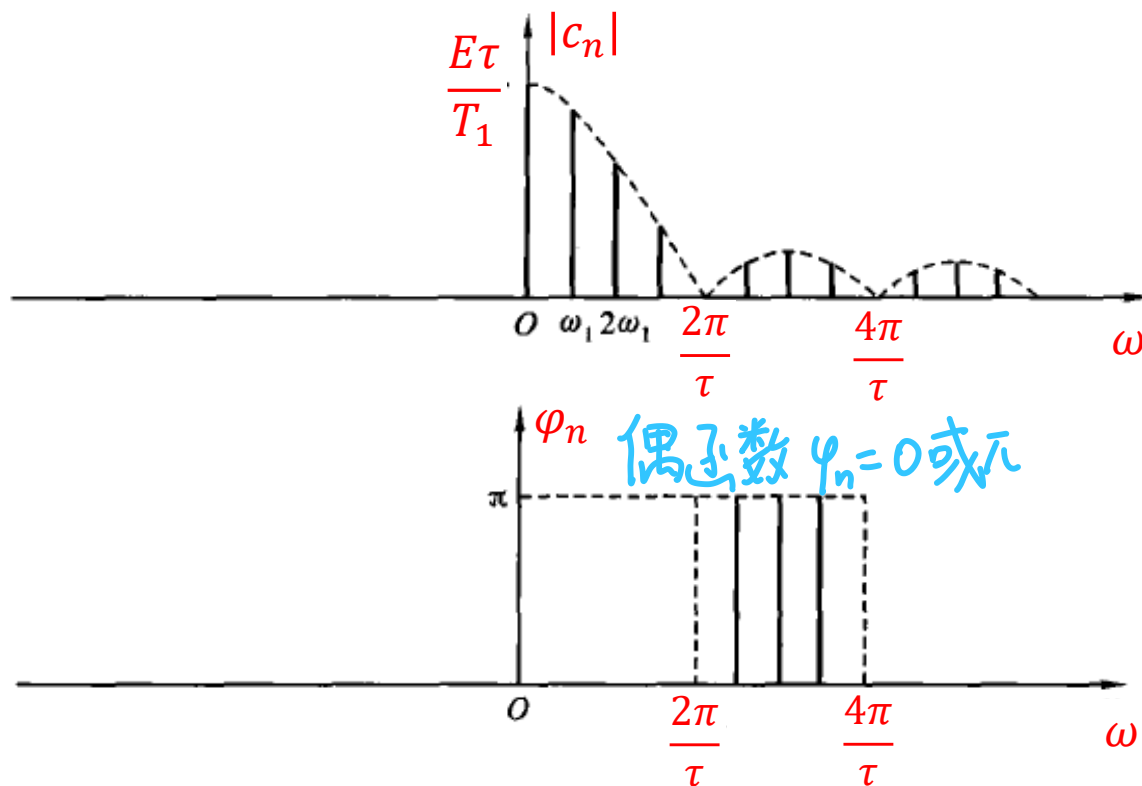
周期矩形脉冲信号的频谱

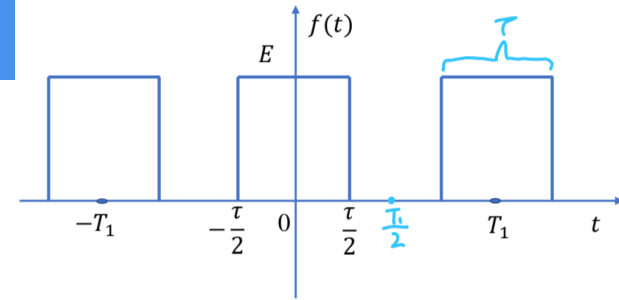
$$a_0 = \frac{E\tau}{T_1}, \quad a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$$

$$F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

三角形形式 $f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) \cos n\omega_1 t = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{E\tau\omega_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cos n\omega_1 t$

指数形式 $f(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$

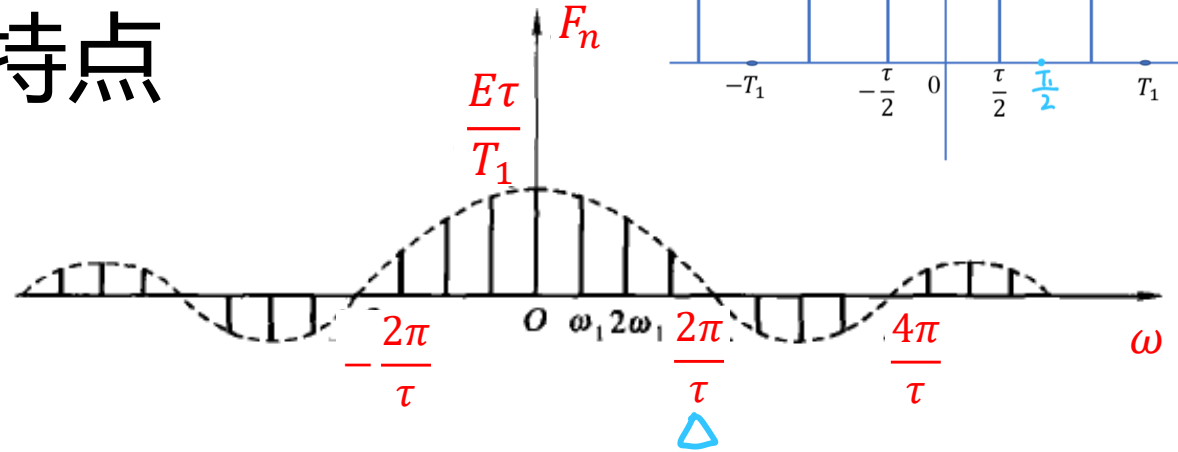




周期矩形脉冲信号的频谱特点

- $F_n = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$

- 特征

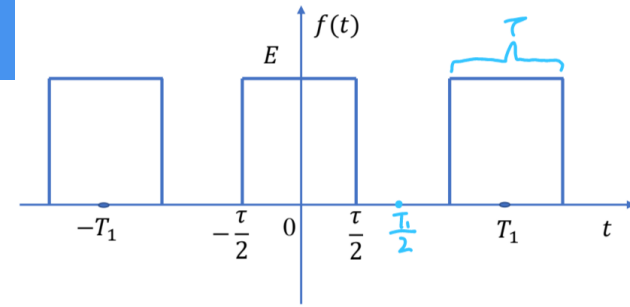


1. 谱线是**离散**的，间隔为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ ω_1 rad/s $T_1 \cdot s$ $f_1: s^{-1}, Hz$
2. 直流分量、基波及各谐波分量的大小正比于脉冲幅度 E 和脉宽 τ ，反比于周期 T_1 ；直流分量**峰值** $\frac{E\tau}{T_1} = F_0 = C_0 = a_0$

3. 各谱线的幅度按 $Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ($\omega = n\omega_1$) 包络线的规律而变化，当 $\omega = \frac{2m\pi}{\tau}$

($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时，谱线的包络线过零点，第一个过零点频率为 $\frac{2\pi}{\tau}$

$$Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = Sa\left(\frac{2m\pi\tau}{2\tau}\right) = Sa(m\pi) = 0$$



周期矩形脉冲信号的频谱特点

- $F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$

- 特征（续）

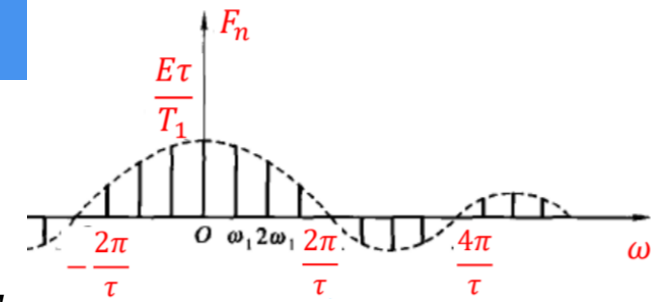
（信号的主要能量）

4. 谱线整体上具有减小的趋势，较高幅值的谱线都集中在第一个过零点 $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 内

5. 矩形信号的频带宽度（带宽）： $B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 或 $B_f = \frac{1}{\tau}$ ，只与脉宽 τ 有关，成反比关系

6. 在允许一定失真的条件下，可以要求一个通信系统只把 $\omega \leq \frac{2\pi}{\tau}$ 频率范围内的各个频谱分量传送过去，而舍弃 $\omega > \frac{2\pi}{\tau}$ 的分量

例1-5: 求周期矩形脉冲信号的幅度频谱。

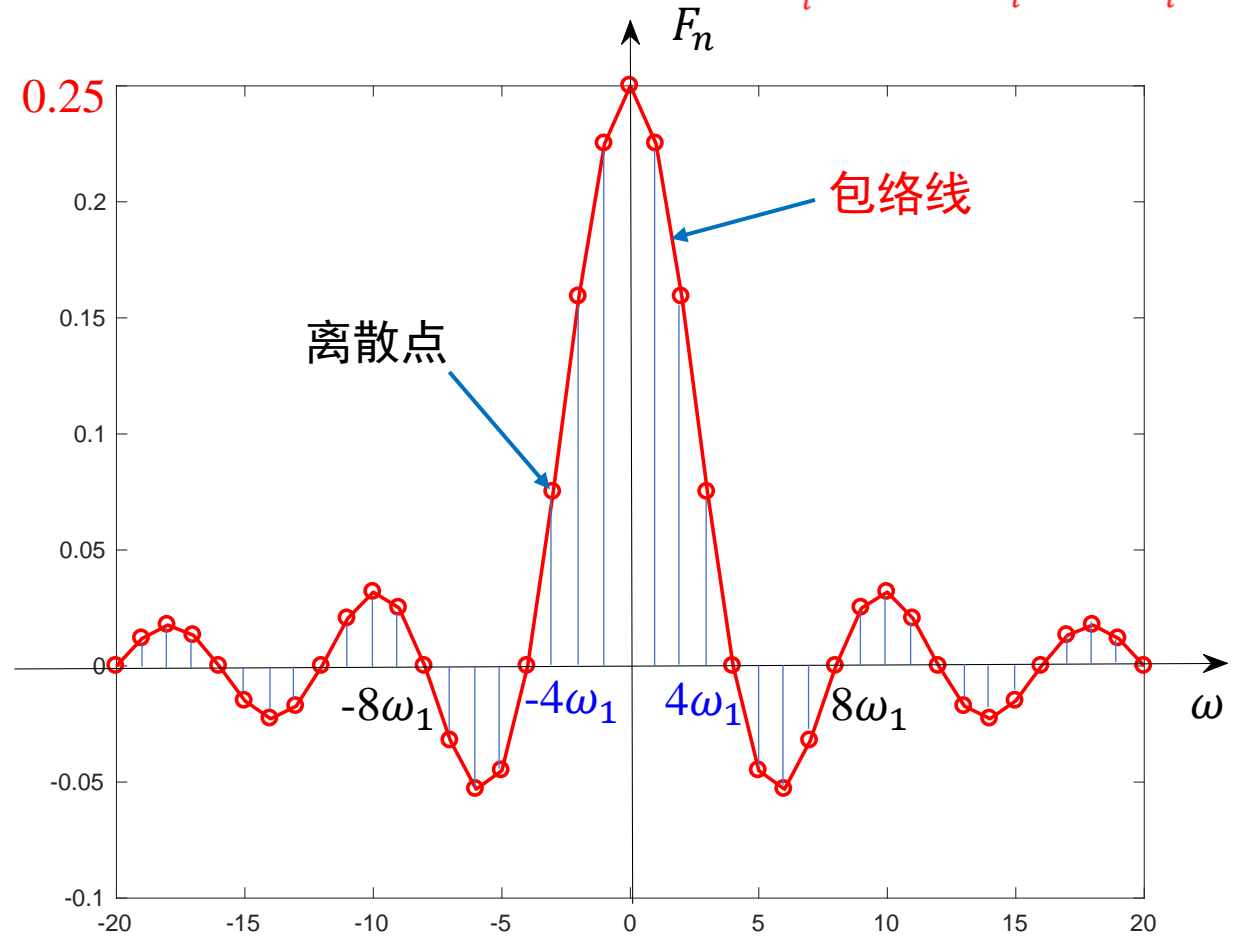


- $E = 1, T_1 = 4\tau, \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{2\tau}$

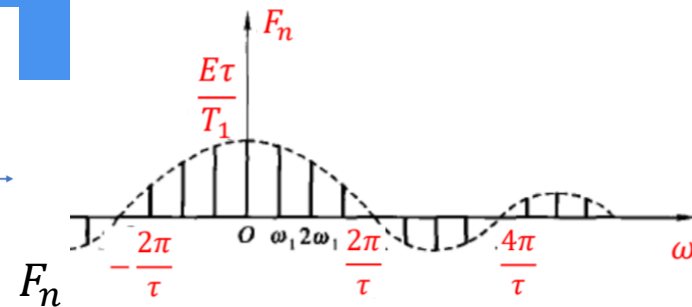
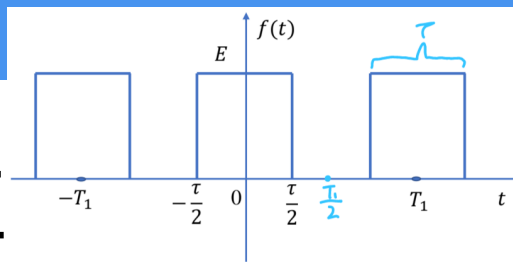
- $$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}} = \frac{1}{4} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

带宽
第一个过零点: $\frac{2\pi}{\tau} = 4 \cdot \frac{\pi}{2\tau} = 4\omega_1$



周期矩形脉冲信号的谐波性

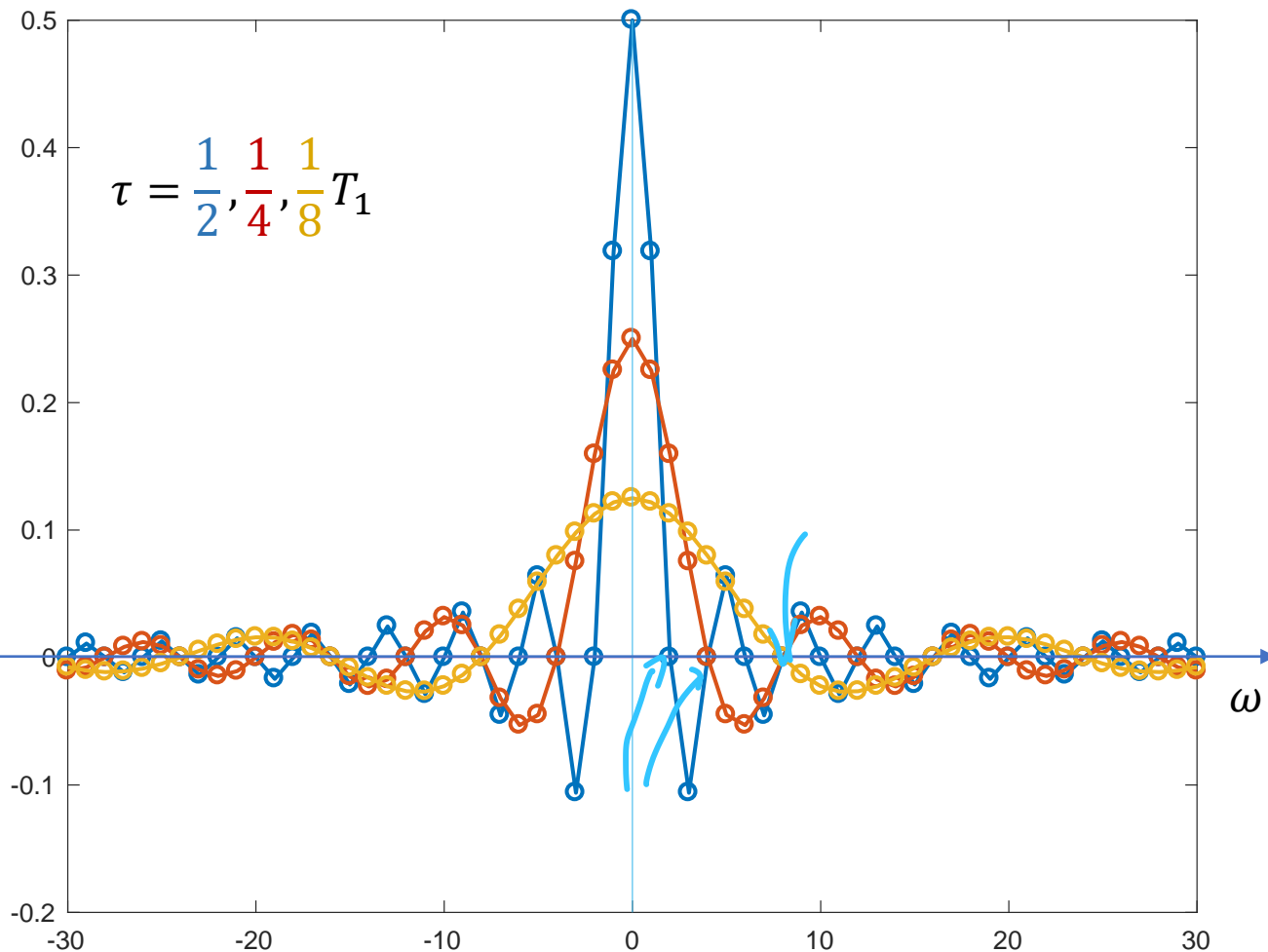


- $F_n = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$ ↑ 脉冲宽度

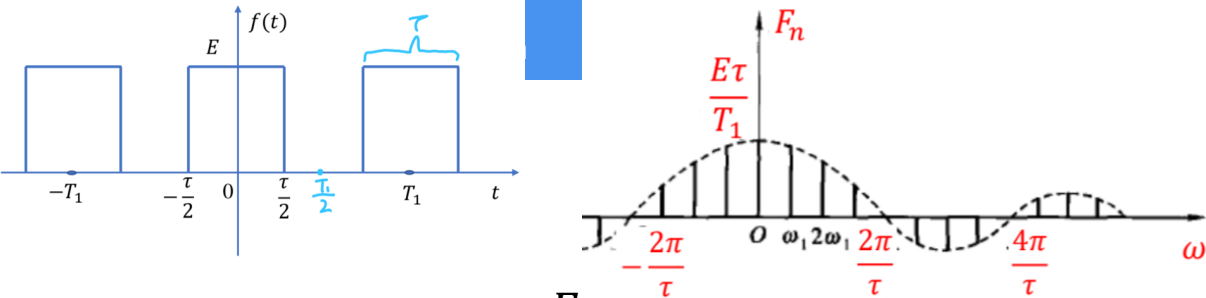
- T_1 不变, τ 变小, **第一个过零点频率增大, 谱线幅值减小**

过零点频率 $\frac{2m\pi}{\tau}$

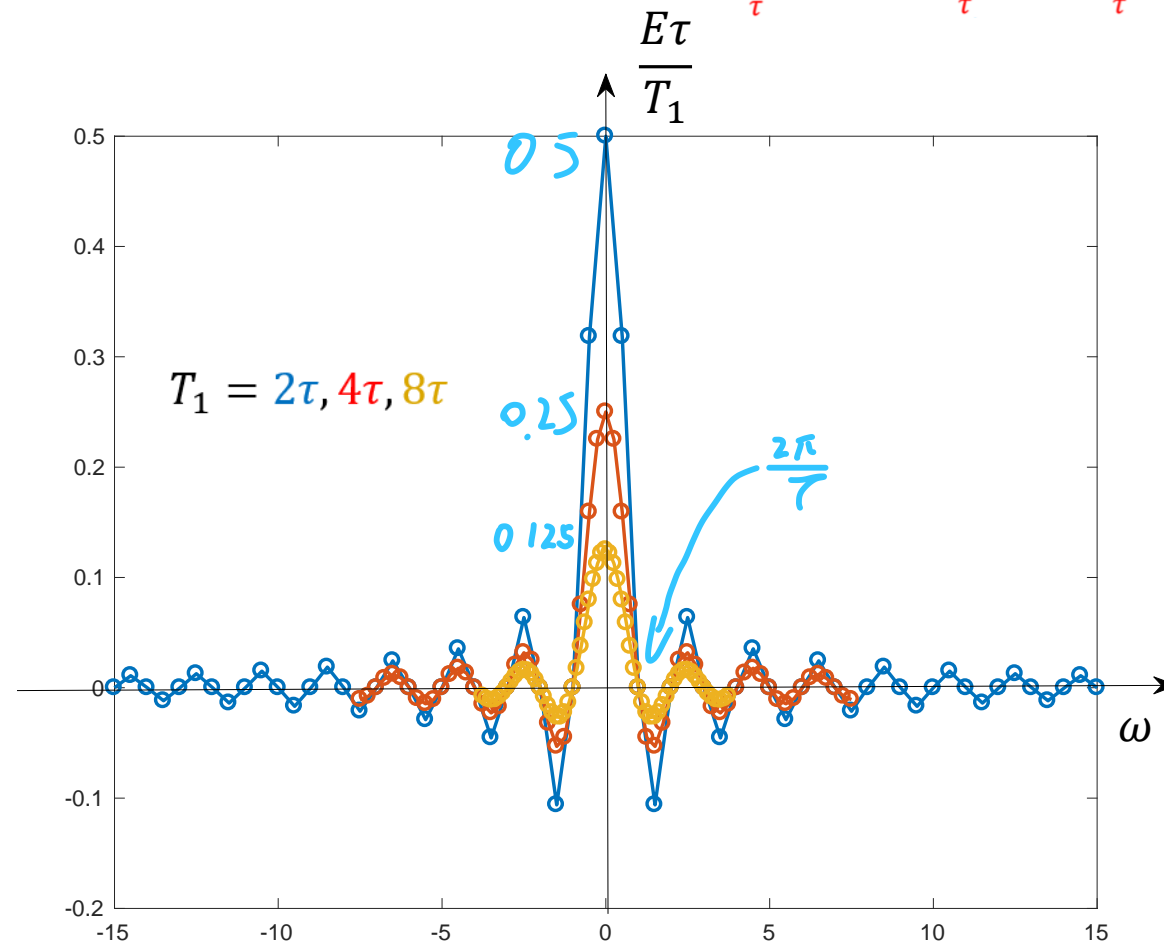
思考: 类似规律如出现在滤波器中, 则针对高频分量的滤波效果越差



周期矩形脉冲信号的谐波性



- $F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$
- τ 不变, T_1 增大, ω_1 减小, 过零点频率不变, 振幅变小, 谱线则变得越来越密集 谱线间隔为 ω_1
- $T_1 \rightarrow \infty$, $\omega_1 \rightarrow 0$, 矩形信号变成非周期信号, 谱线间隔 $\rightarrow 0$ (连续频谱)



对称方波信号 $f(t)$

- $\tau = \frac{T_1}{2}$ (脉宽等于周期的一半)

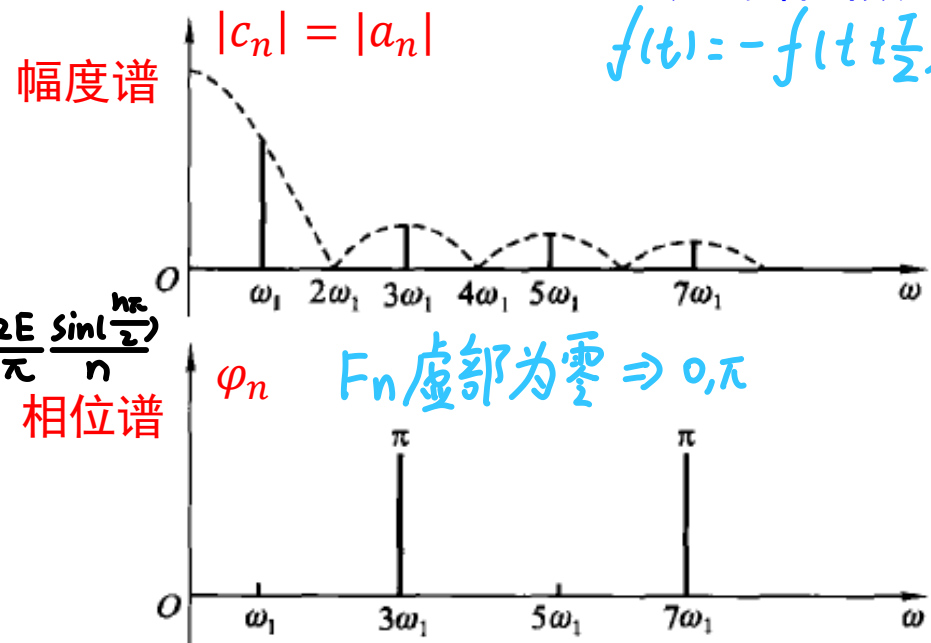
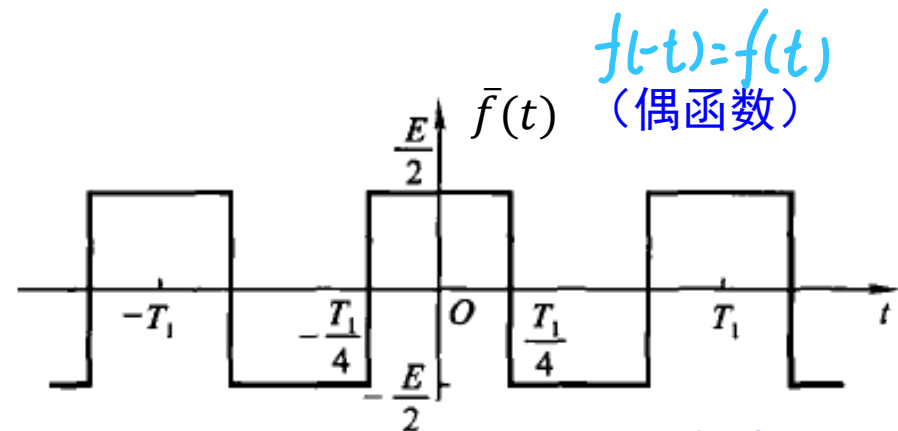
- $\bar{f}(t) = f(t) - \frac{E}{2}$ (周期矩形脉冲向下平移 $\frac{E}{2}$)

- $a_0 = \frac{E\tau}{T_1} - \frac{E}{2} = 0, b_n = 0$
奇谐 偶

- $a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{2E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \stackrel{\text{代入 } \tau = \frac{T_1}{2}}{=} ESa\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2E}{\pi} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}$

周期矩形脉冲信号的表达式

- $\bar{f}(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$



对称方波信号的复傅里叶系数

信号上下平移不改变
复系数 F_n

$f(-t) = f(t)$
(偶函数)

$$\bar{f}(t) = f(t) - \frac{E}{2}, \quad \bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \bar{f}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \left(f(t) - \frac{E}{2} \right) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt - \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{E}{2} e^{-jn\omega_1 t} dt$$

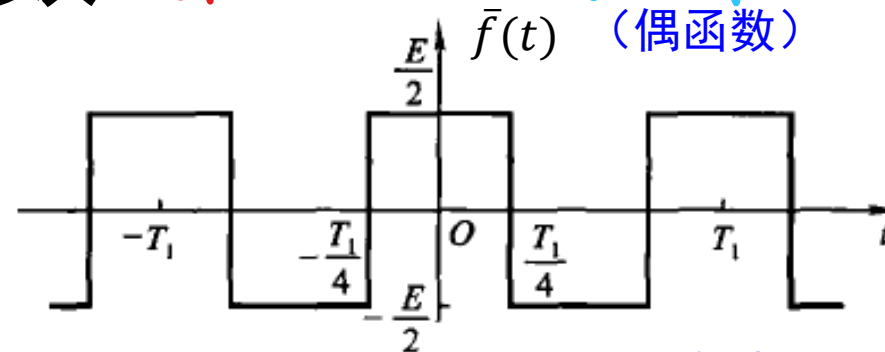
$$= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

$$= F_n$$

(周期矩形脉冲信号的复傅里叶系数)

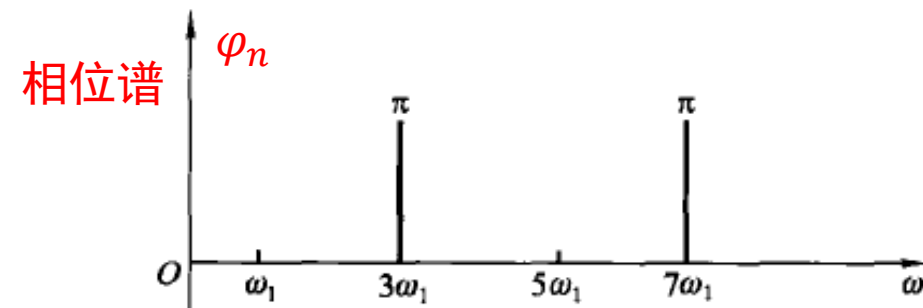
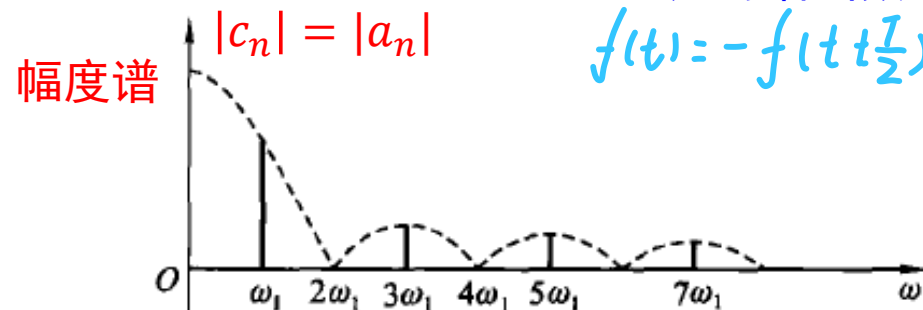
$$\frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{E}{2} e^{-jn\omega_1 t} dt = 0$$

$\{e^{-jn\omega_1 t}\}$ 完备正交函数集



(也是奇谐函数)

$f(t) = -f(t + \frac{T_1}{2})$



对称方波信号是周期矩形脉冲信号的一类特殊情况!

复指数信号 $e^{j\omega_1 t} \Rightarrow F_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$

- $e^{j\omega_1 t}$ 的复傅里叶系数: $F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{j\omega_1 t} e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{j(1-n)\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1 j(1-n)\omega_1} e^{j(1-n)\omega_1 t} \Bigg|_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi j(1-n)} [e^{j(1-n)\pi} - e^{-j(1-n)\pi}]$$

欧拉公式
 $\sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

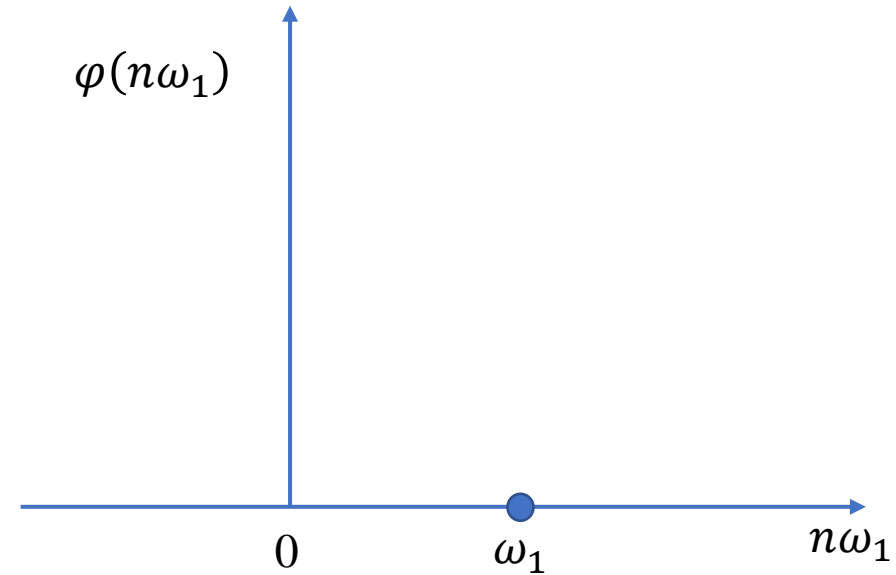
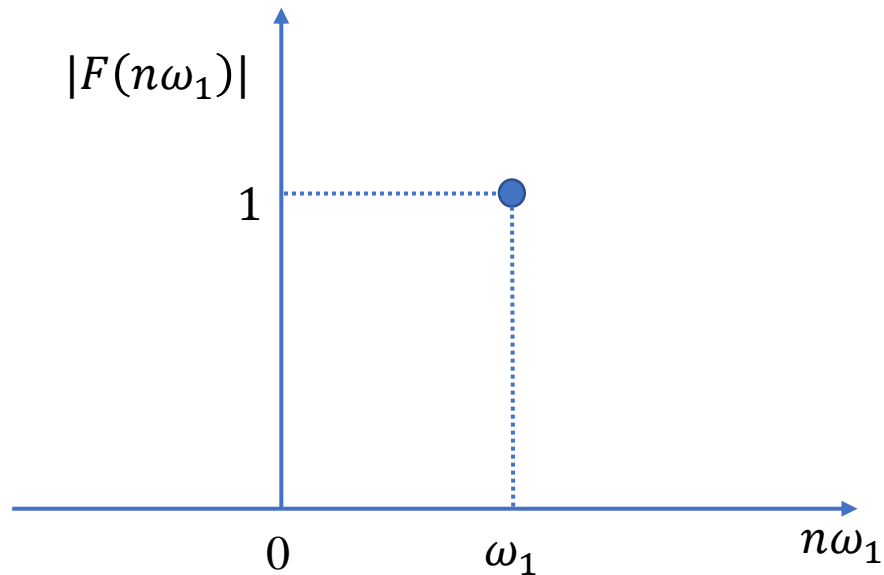
$$= \frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\pi} = \text{Sa}((1-n)\pi)$$

$$= \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$F(n\omega_1) = F(\omega_1)$

复指数信号的频谱

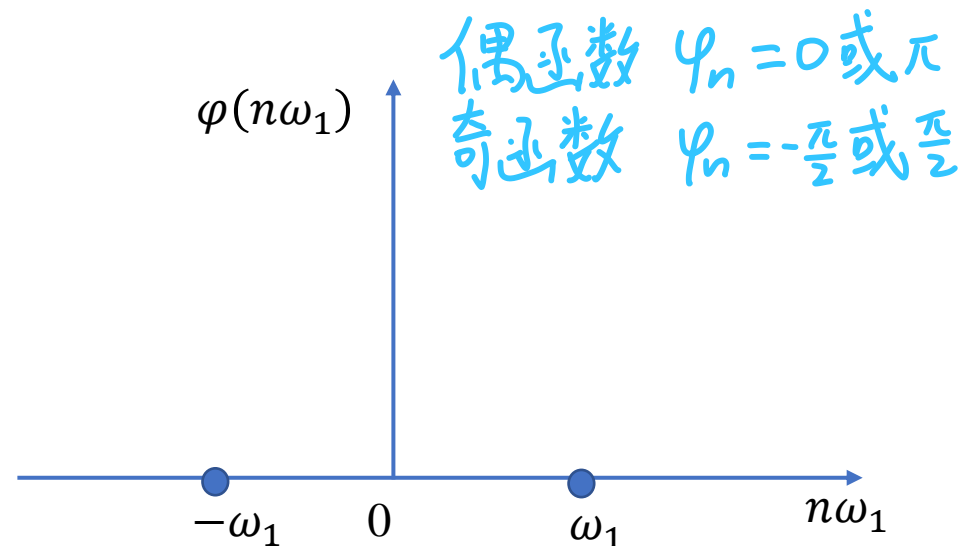
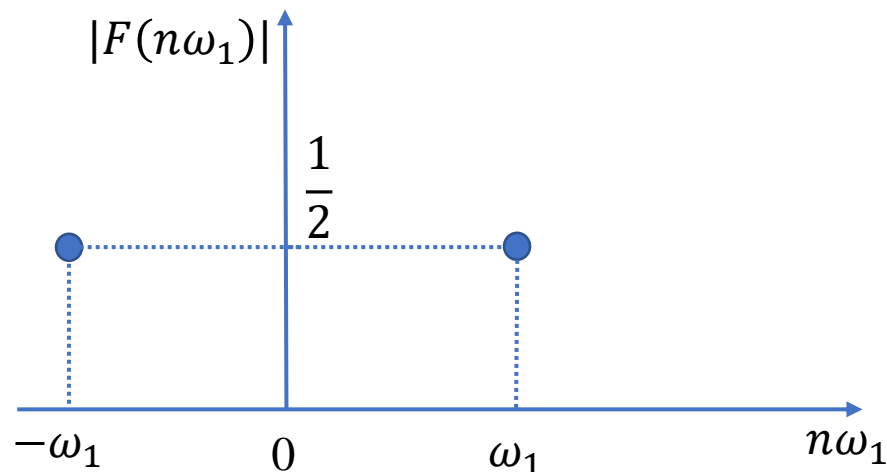
- $e^{j\omega_1 t}$: $F(n\omega_1) = F_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$ $F_n = |F_n|e^{j\varphi_n} = 1 \cdot e^{j\varphi_n} = 1, \varphi_n = 0$
- 仅在 ω_1 处有幅度为1的分量（复指数信号是正弦信号的一种表现形式）



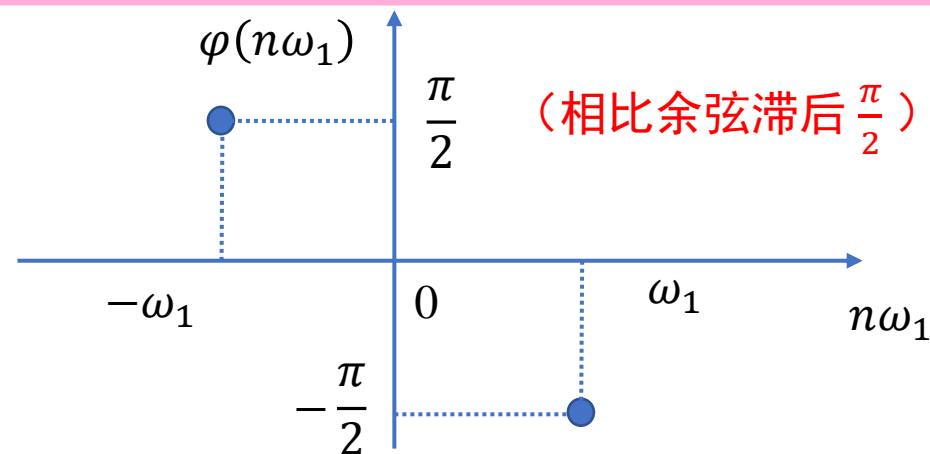
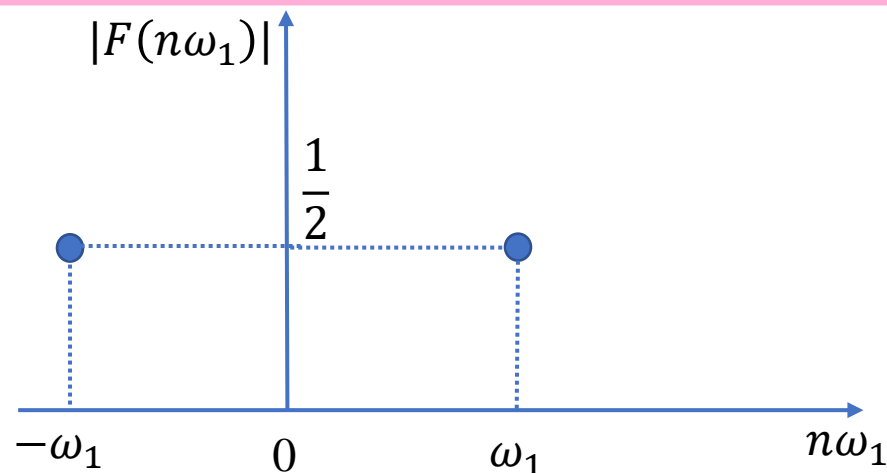
正弦信号的频谱 (含正弦、余弦函数形式)

• 在 $\pm\omega_1$ 处

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 t \\ = \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \omega_1 t \\ = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}) \end{aligned}$$



傅里叶变换对 $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

CTFT

$f(t)$: 连续时间函数

$F(\omega)$: 频率的连续函数

- 傅里叶正变换:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- 傅里叶反变换 (逆变换):

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

课程内容

矩形脉冲 $F(\omega) = ET \text{Sa}(\frac{\omega T}{2})$

三角形脉冲 $F(\omega) = \frac{ET}{2} \text{Sa}^2(\frac{\omega T}{4})$

1.1 连续信号的时域描述和分析

1.2 连续信号的频域分析

1.2.1 周期信号的傅里叶级数

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换

1.2.3 傅里叶变换的性质

1.2.4 周期信号的傅里叶变换

时域信号	连续时间傅里叶变换 CTFT
非周期	非周期、连续频谱密度函数
周期	非周期、离散频谱函数

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$e^{-at} u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega + a}$$

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



单位直流信号	$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$	$f(t) = 1$
符号函数信号	$F(\omega) = \frac{2}{j\omega}$	$f(t) = \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$
单位冲激信号	$F(\omega) = 1$	$f(t) = \delta(t)$
单位阶跃信号	$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	$f(t) = u(t)$

非周期信号的频谱分析

- 非周期可以看作周期无穷大的周期信号 (基波频率无穷小) $\omega_1 \rightarrow 0, T_1 \rightarrow \infty$

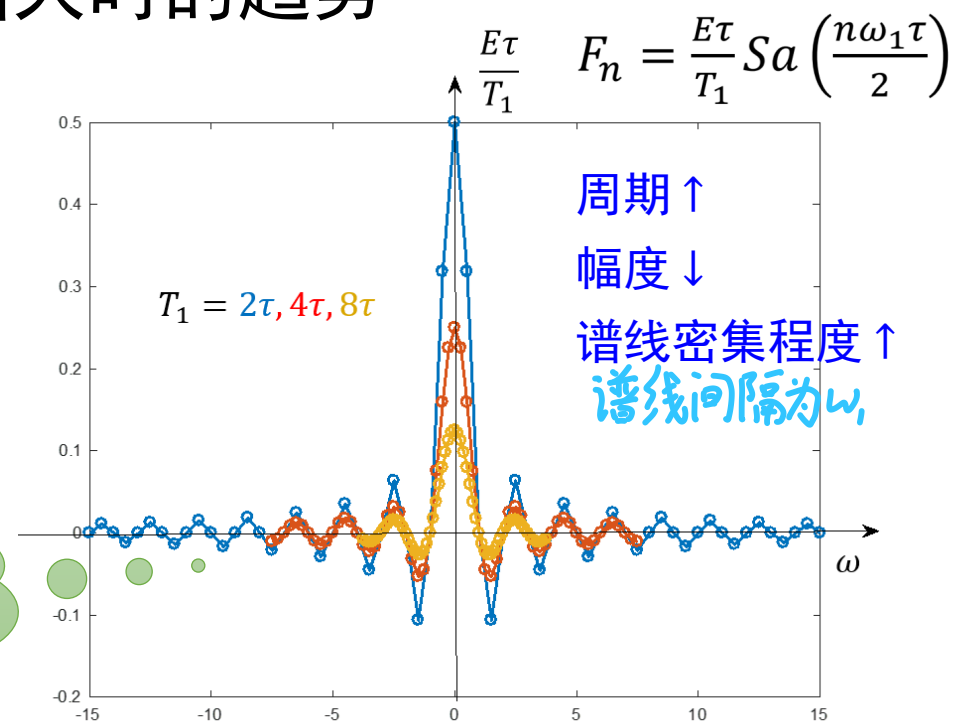
- 根据周期矩形脉冲信号, 可看出当周期增大时的趋势

- $T_1 \rightarrow \infty$ T_1 无穷大时, ① 谱线连续 (无限密集)

② 谱线的幅度将变为无穷小量

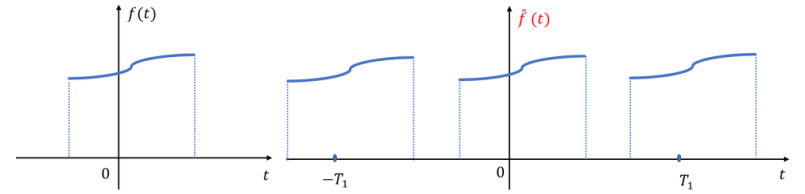
- 如何避免无穷小量?

包含了从0到无限的所有频率分量



$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

从傅里叶级数到傅里叶变换



① 对延拓得到的周期信号 $\hat{f}(t)$ 进行傅里叶级数展开: $\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n e^{jn\omega_1 t}$

$\hat{f}(t)$ 的复傅里叶系数 $\hat{F}_n = \hat{F}(n\omega_1)$

$$\hat{F}_n = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} \hat{f}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$, 则 \hat{F}_n 无穷小 (信号强度 $\rightarrow 0$)
同时 $\hat{f}(t) \rightarrow f(t)$, $\hat{F}(n\omega_1) \rightarrow F(n\omega_1)$

F_n 的计算式

为避免无穷小量, 定义 $F(\omega) = T_1 F(n\omega_1)$, 则

由于 T_1 因子的存在, 克服了 T_1 对 $|F_n|$ 的影响

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

$\leftarrow [-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}]$ 内 $\hat{f}(t) = f(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$, 则 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow 0$ (谱线间隔 $\rightarrow 0$)

从求积分的角度把它写作 $\omega_1 \rightarrow d\omega$, 则 $n\omega_1 \rightarrow \omega$

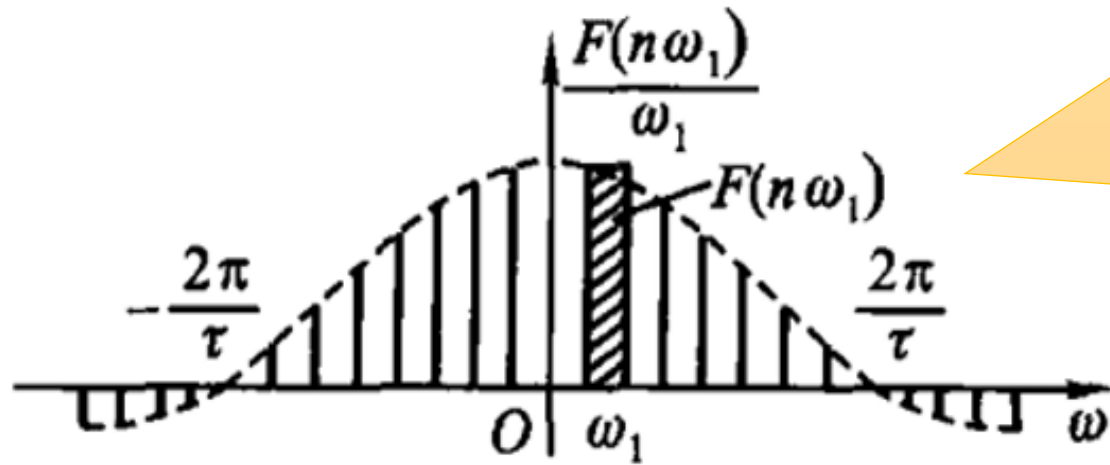
由于 $T_1 F(n\omega_1) = \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}$, 即 $T_1 F(n\omega_1)$ 含有单位角频率所具有的复频谱的物理意义故称为 **频谱密度函数** 简称为 **频谱**

对比: $F(\omega) = T_1 F(n\omega_1)$
 $X(\Omega) = N X(k\Omega_0)$

频谱密度函数 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

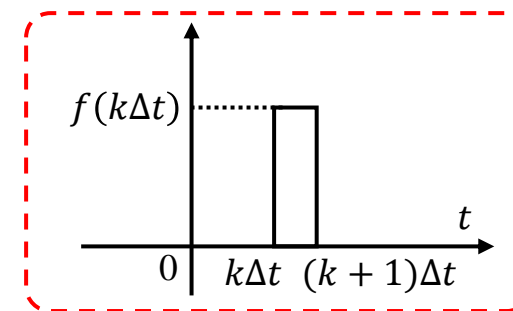
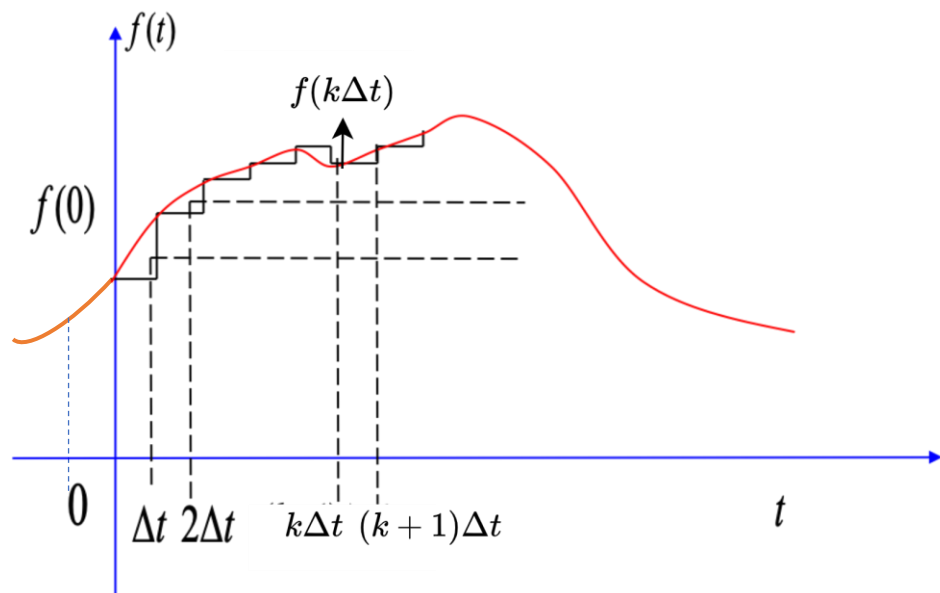
- 也被简称为“频谱函数”
- 频谱密度： $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 表示单位频带的频谱值
 $F(n\omega_1)$ 为无穷小量, $F(\omega) = T_1 F(n\omega_1)$

回顾：信号分解为冲激函数之和，思路很像！



- 小矩形的面积等于 $\omega = n\omega_1$ 频率处的频谱值 $F(n\omega_1)$
- 注：周期信号的频谱密度函数在 $n\omega_1$ 频率处聚集成冲激函数
 (详见：周期信号的傅里叶变换)

回顾：信号分解成冲激函数之和



考虑函数 $f(t)$

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \{u(t - k\Delta t) - u[t - (k + 1)\Delta t]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \{u(t - k\Delta t) - u[t - (k + 1)\Delta t]\} \cdot \Delta t$$

$\Delta t \rightarrow 0, \delta(t - k\Delta t)$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 有 $\Delta t \rightarrow d\tau$, $k\Delta t \rightarrow \tau$, 可知

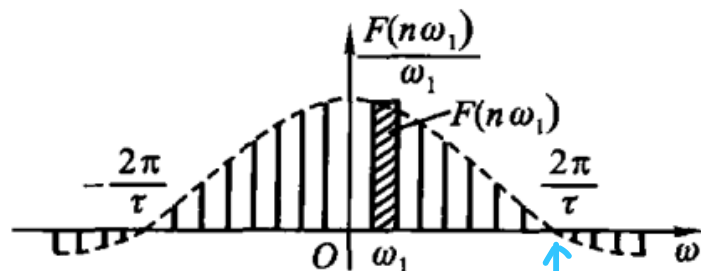
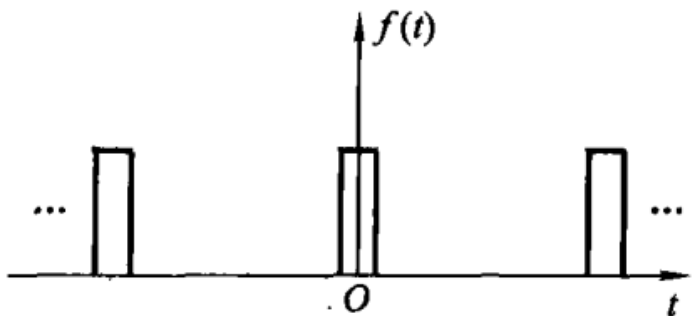
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \{u(t - k\Delta t) - u[t - (k + 1)\Delta t]\} = \delta(t - \tau)$$

$f(t)$ 可用经平移的无穷多个 $\delta(t)$ 加权后的连续和（积分）表示

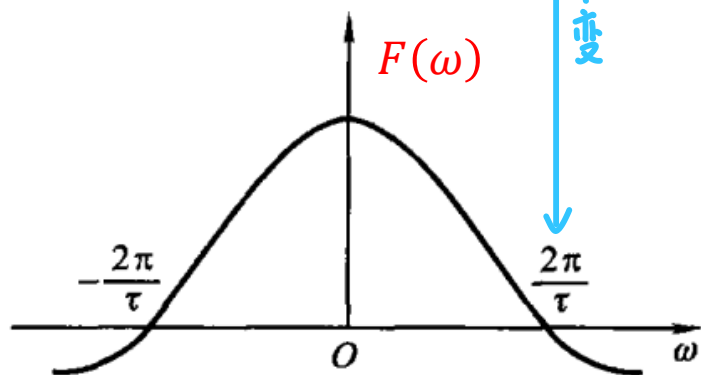
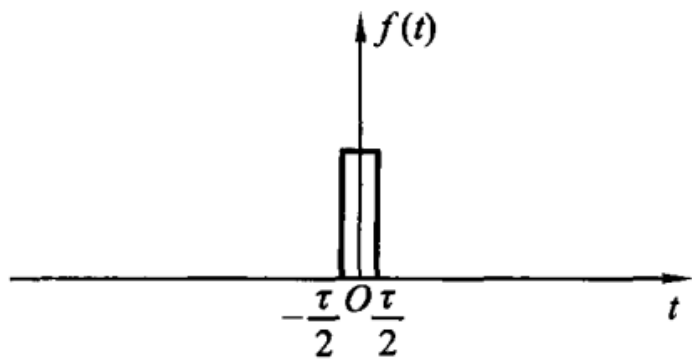
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) * \delta(t) \quad \text{和前面给出的一致!}$$

任意信号可以分解为一系列具有不同强度的冲激函数

频谱密度函数 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$



从周期信号的离散频谱推广至频谱密度函数



非周期信号及其连续频谱示意图

$\tau_1 \rightarrow \tau$ 不变

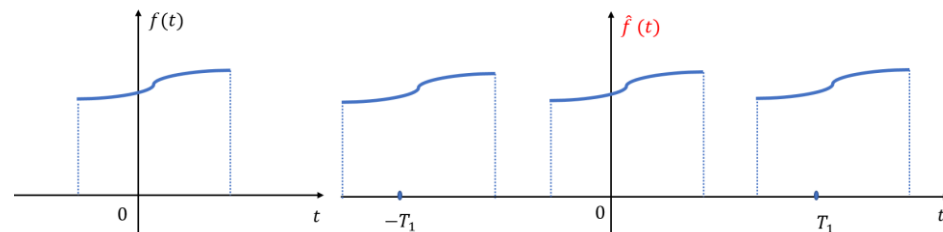
当 ω_1 取到很小时，即 $\omega_1 \rightarrow 0$ ，就得到连续的结果，对应非周期信号的频谱

离散频谱
(包络线的采样)



连续频谱

从傅里叶级数到傅里叶变换



基于频谱密度函数 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$, 有:

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \hat{f}(t) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_1 \hat{F}_n e^{jn\omega_1 t} \cdot \frac{1}{T_1}$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$, $T_1 \hat{F}_n \rightarrow T_1 F_n = F(\omega)$
同时 $\omega_1 \rightarrow d\omega$, $n\omega_1 \rightarrow \omega$

为避免无穷小量而定义的
 $F(\omega) = T_1 F(n\omega_1)$

$$= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{jn\omega_1 t} \cdot \frac{\omega_1}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

非周期函数 $f(t)$ 与其频谱密度函数 $F(\omega)$ 的关系!

傅里叶变换对 $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

CTFT

$f(t)$ 连续时间函数

- 傅里叶正变换： $F(\omega)$ 频率的连续函数

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- 傅里叶反变换（逆变换）：

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (f(t) \text{ 为实函数})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t dt + j \int_{-\infty}^{\infty} (-f(t)\sin \omega t) dt$$

$$= R(\omega) + jX(\omega)$$

其中 $R(\omega) = R(-\omega)$
 $X(\omega) = -X(-\omega)$

频谱密度函数 $F(\omega)$, 简称频谱, 复函数
 ω 为实数, $F(\omega)$ 为复数

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

- 幅度频谱 $|F(\omega)|$ —— 偶函数 (若 $f(t)$ 为实函数) $|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$
- 相位频谱 $\varphi(\omega)$ —— 奇函数 (若 $f(t)$ 为实函数) $\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$

注意：此处的“幅频”和“相频”
都是对**频谱密度**而言！

- 当 $f(t)$ 为实函数时, 有 $F(\omega) = F^*(-\omega)$
- 当 $f(t)$ 为实函数时, $|F(\omega)|$ 是 ω 的偶函数, $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数
- 当 $f(t)$ 为实偶函数时, $F(\omega)$ 是 ω 的实偶函数
- 当 $f(t)$ 为实奇函数时, $F(\omega)$ 是 ω 的虚奇函数

狄里赫利条件

思考: $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
不满足绝对可积

• 任意非周期信号 $f(t)$ 存在傅里叶变换 $F(\omega)$ 的条件

• $f(t)$ 在无限区间内是绝对可积的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

最难满足!

• 在任意有限区间内, $f(t)$ 只有有限个不连续点, 在这些点上函数取有限值

• 在任意有限区间内, $f(t)$ 只有有限个极大值和极小值

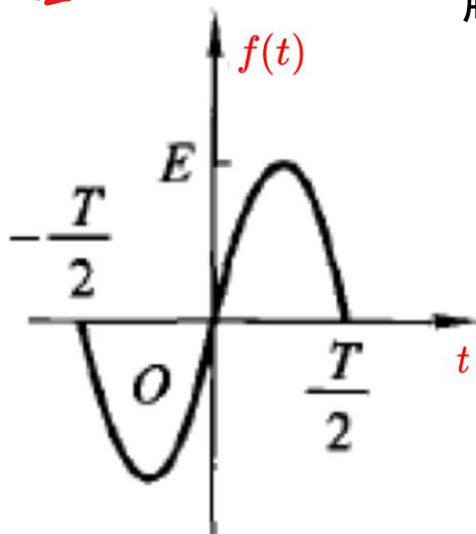
充分条件!

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

定义法:

★例1-6: 求单周正弦脉冲的傅里叶变换 (郑君里版教材题3-16(d))

后面: 窗函数法



解: $f(t)$ 是正弦信号 $E\sin(\omega_1 t)$ 在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 区间上的一个周期, 其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$,

根据定义, 其傅里叶变换为 $\sin \omega_1 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t})$

$$F(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \sin(\omega_1 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{2j} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [e^{j(\omega_1 - \omega)t} - e^{-j(\omega_1 + \omega)t}] dt \quad \textcircled{1}$$

$$= \frac{E}{2j} \left[\frac{e^{j(\omega_1 - \omega)t}}{j(\omega_1 - \omega)} + \frac{e^{-j(\omega_1 + \omega)t}}{j(\omega_1 + \omega)} \right] \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

提示: 欧拉公式、 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{E}{2j} \left[\frac{2j \sin\left(\pi - \frac{\omega T}{2}\right)}{j(\omega_1 - \omega)} - \frac{2j \sin\left(\pi + \frac{\omega T}{2}\right)}{j(\omega_1 + \omega)} \right]$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \pi) &= \sin(-\theta) \\ &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{j} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega_1 - \omega} + \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega_1 + \omega} \right] = j \frac{2E\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

基于傅里叶变换
定义的求解方法

例1-6: 求单周正弦脉冲的傅里叶变换 (郑君里版教材题3-16(d))

$$f(t) = E \sin(\omega_1 t), t \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$$

解(续): 因此, 根据定义求解 $f(t)$ 的傅里叶变换, 经整理得

$$F(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \sin(\omega_1 t) e^{-j\omega t} dt = j \frac{2E\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

需单独讨论

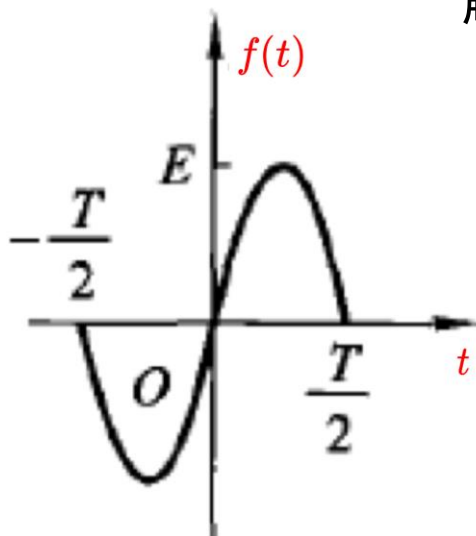
其中 $\omega = \omega_1$ 是上述变换式的无定义点, 由 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, 此时有 **将 $\omega = \omega_1$ 代入式①**

$$F(\omega_1) = \frac{E}{2j} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1 - e^{-j\frac{4\pi}{T}t}) dt = \frac{ET}{2j}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} F(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} j \frac{2E\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} 2E\omega_1 j \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2 - \omega_1^2} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} 2E\omega_1 j \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot \frac{T}{2}}{2\omega} = \frac{-2E\omega_1 j \frac{T}{2}}{2\omega_1} \\ &= -\frac{jET\pi}{\omega_1} = -\frac{j}{2} ET = F(\omega_1) \end{aligned}$$

同样可验证 $F(\omega)$ 在 $\omega \rightarrow \omega_1$ 时的极限就是 $F(\omega_1)$ 。

注: 对实际信号, 没有特别说明的情况下, 一般只需要考虑正频率,
因此没有讨论 $\omega = -\omega_1$



典型非周期信号的频谱（傅里叶变换）

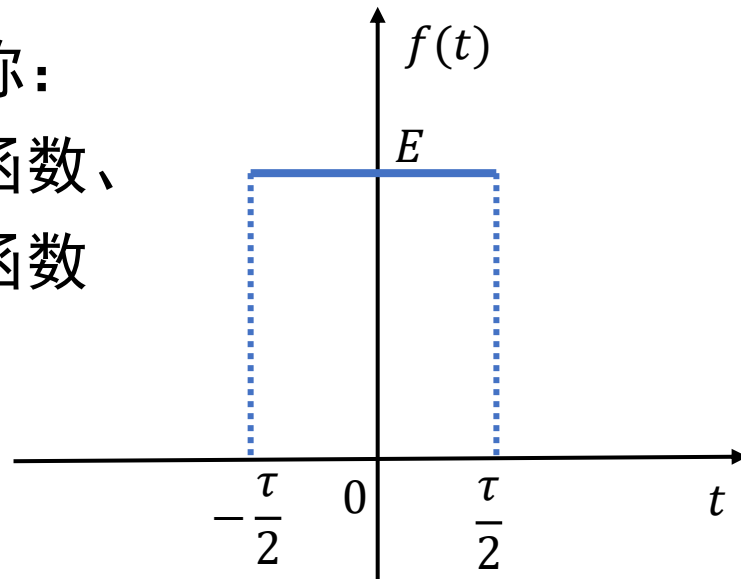
- ① 矩形脉冲信号
- ② 单边指数信号
- ③ 双边指数信号
- ④ 单位直流信号
- ⑤ 双边奇指数信号
- ⑥ 符号函数信号

注意：狄里赫利条件只是充分条件，不是必要条件。

如果在变换中可以引入冲激函数或极限处理，那么一个在无限区间内不绝对可积的信号，也可以被认为具有傅里叶变换。

① 矩形脉冲信号 (单矩形脉冲)

又称：
窗函数、
门函数



$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$f(t) = \begin{cases} E & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

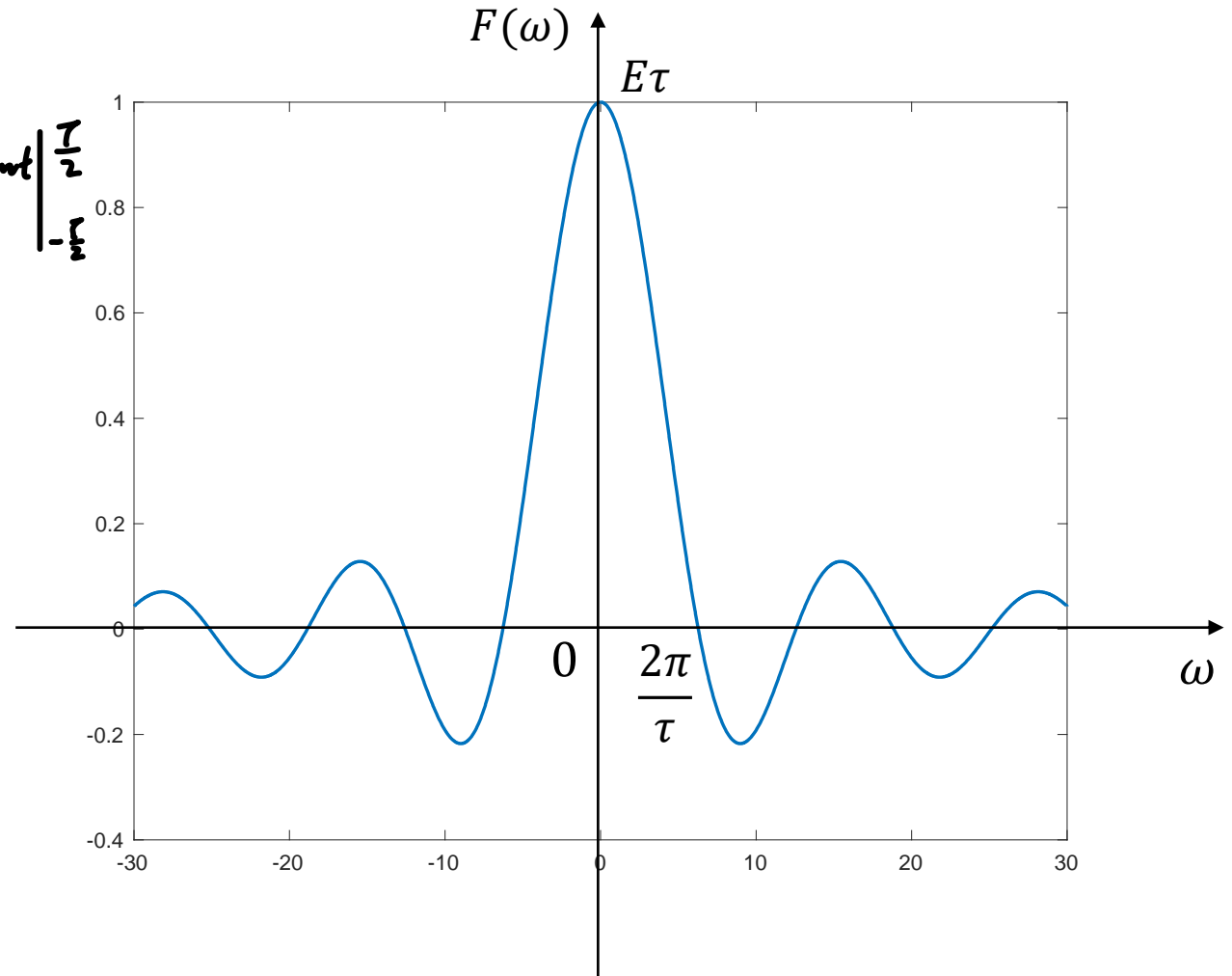
满足狄里赫利条件

矩形脉冲信号的频谱密度函数 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

$$F(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{E}{j\omega} [e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}] = \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



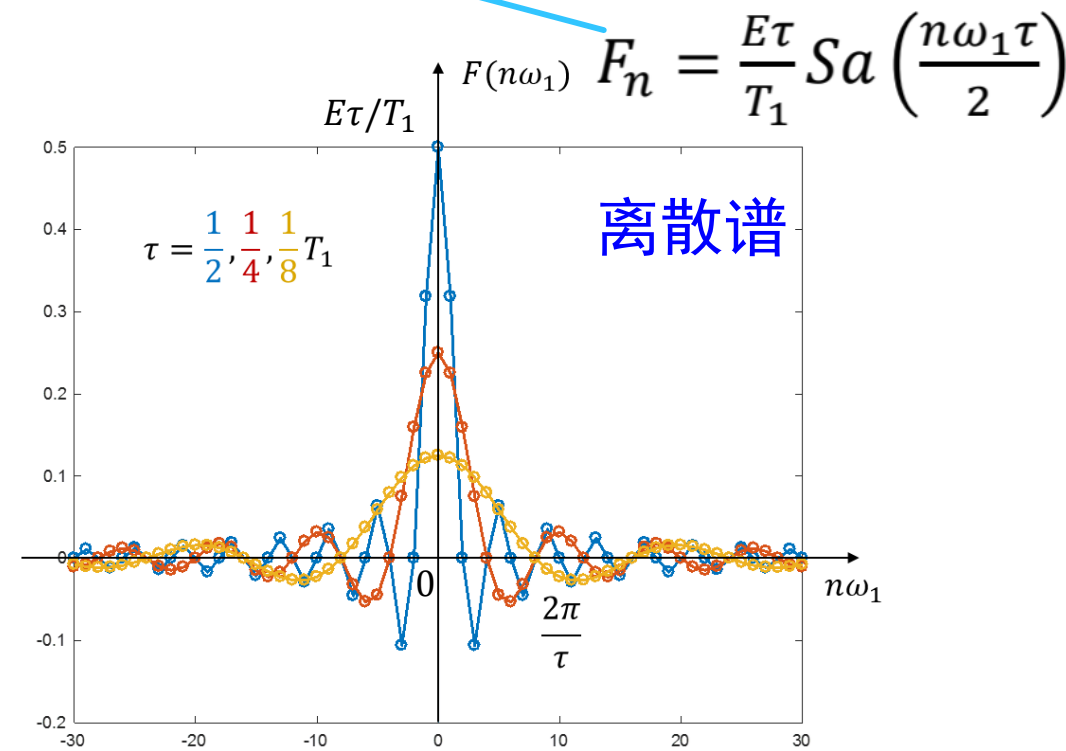
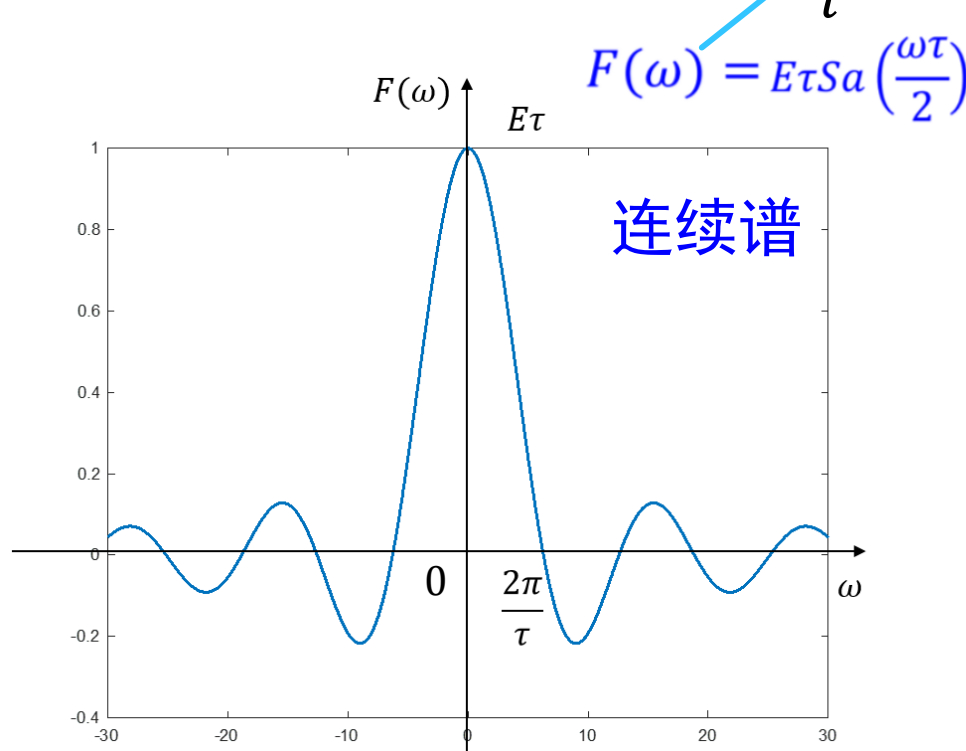
$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

比较 $F(\omega)$ 和 $F(n\omega_1)$

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

- 包络线相似，带宽相同 ($\frac{2\pi}{\tau}$)；幅度不同，一个连续一个离散



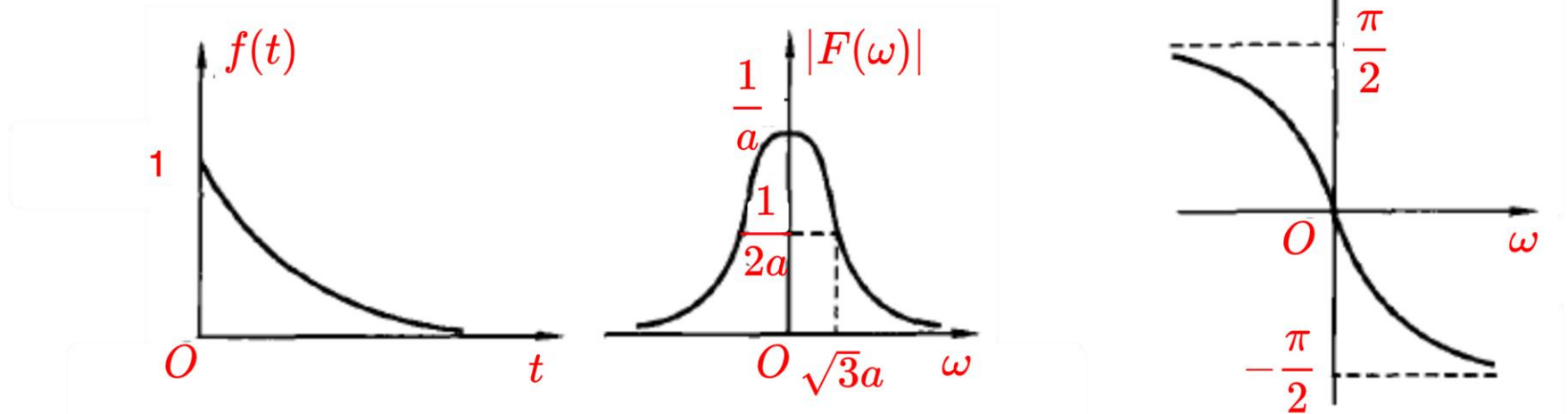
矩形脉冲信号频谱密度 $F(\omega)$ 傅里叶变换 周期矩形脉冲信号频谱 $F(n\omega_1)$ 傅里叶级数

② 单边指数信号

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0, a > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{满足狄里赫利条件}$$

$$\bullet F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\bullet |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



③ 双边指数信号

$f(t)$ 实偶函数 $\Rightarrow F(\omega)$ 实偶函数

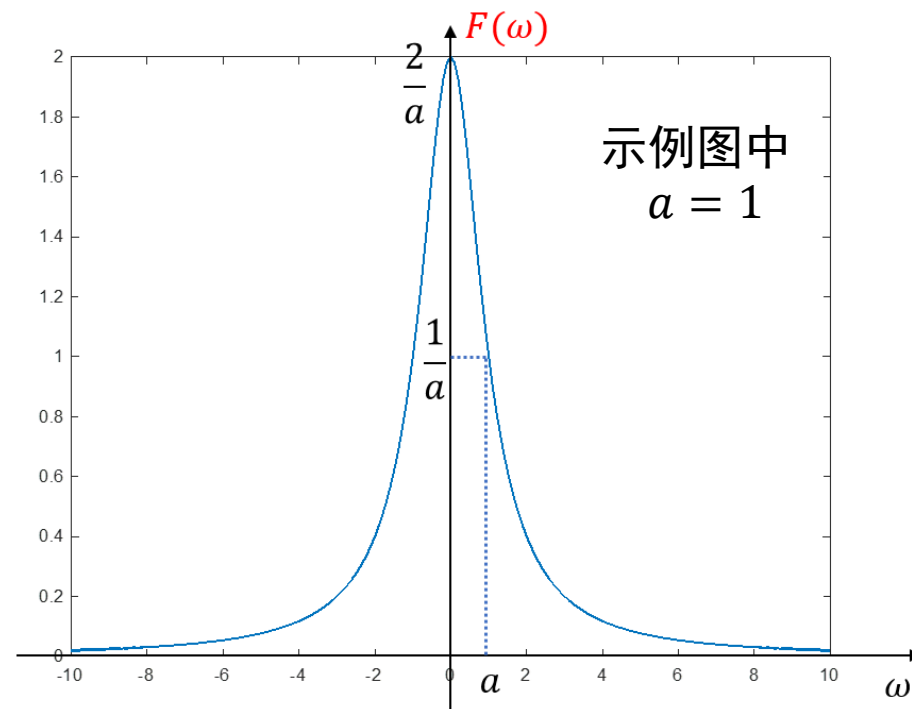
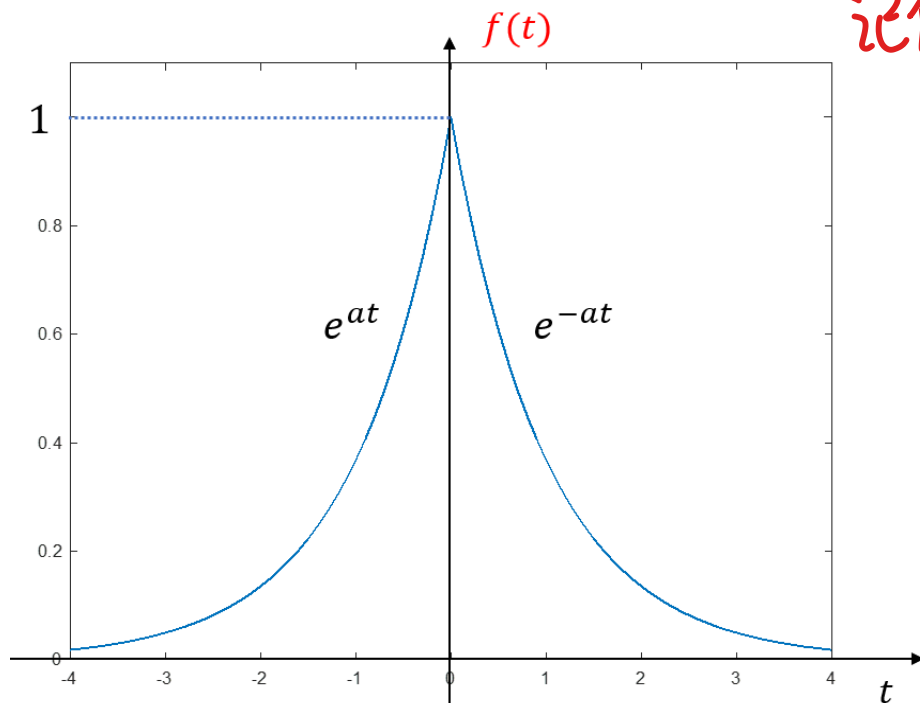
$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = e^{-a|t|}, a > 0$$

满足狄里赫利条件

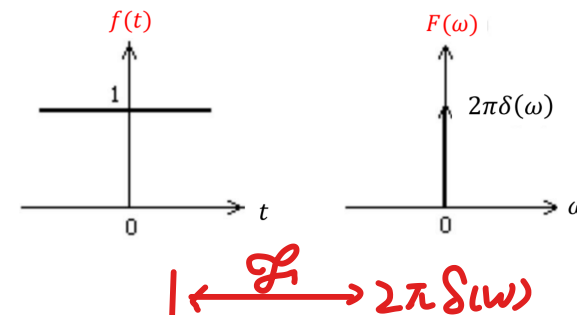
$$F(\omega) = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, |F(\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \varphi(\omega) = 0$$

记住



④ 单位直流信号

$$f(t) = 1, -\infty < t < \infty$$



- 不满足狄里赫利条件

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-a|t|} = f(t) = 1$$

- $F(\omega)$ 可通过双边指数信号 $e^{-a|t|}$ ($a > 0$) 频谱的极限求得

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases} \quad (\text{冲激函数})$$

当 $\omega = 0$ 时, $F(\omega)$ 的强度为:

提示: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2}{a}}{1 + (\frac{\omega}{a})^2} d\omega = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + (\frac{\omega}{a})^2} d\left(\frac{\omega}{a}\right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2 \arctan \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi$$

$$\longleftarrow \mathcal{F} \longrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

⑤ 双边奇指数信号

$$f(t) = \begin{cases} -e^{at} & t < 0, a > 0 \\ e^{-at} & t > 0, a > 0 \end{cases}$$

实奇函数

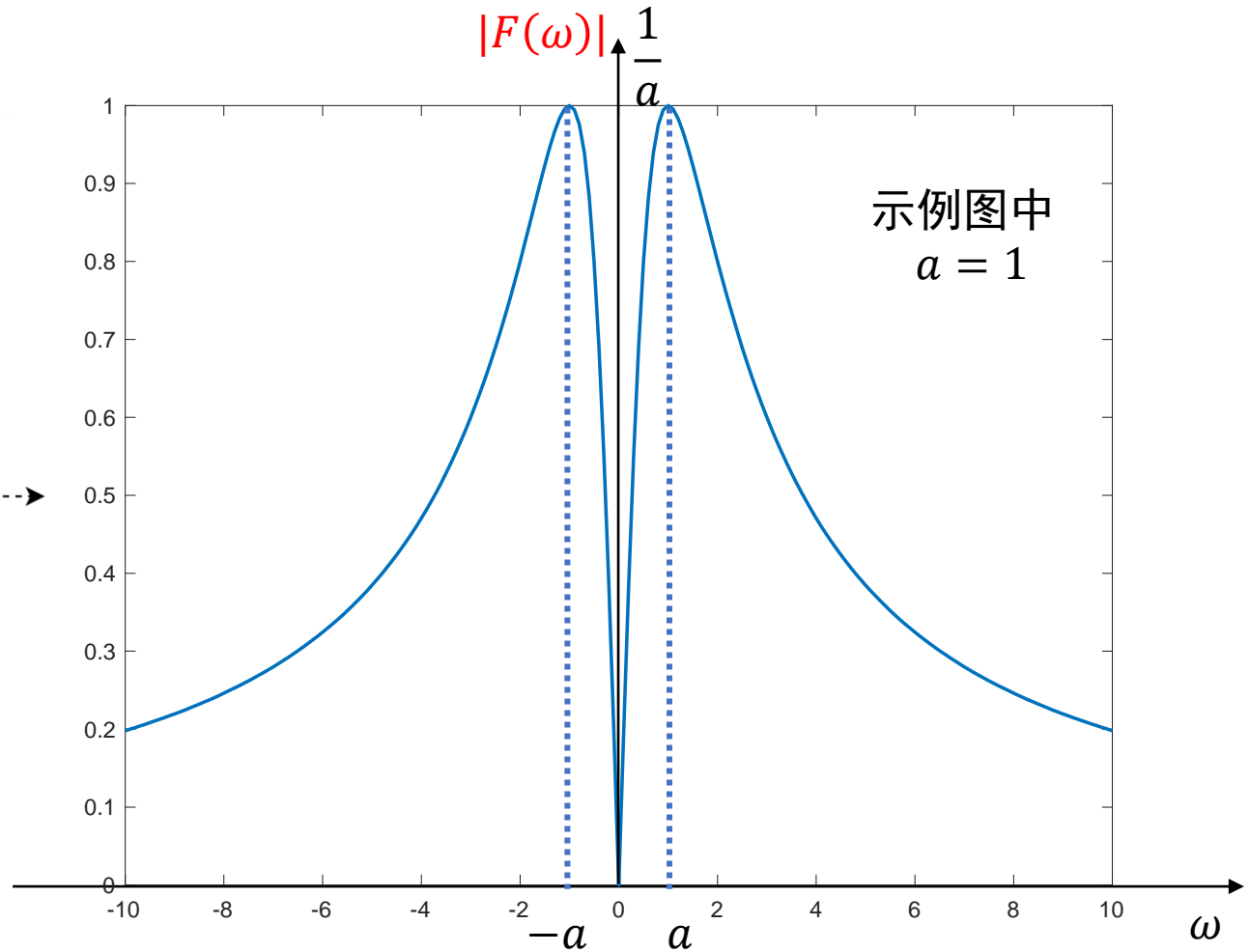
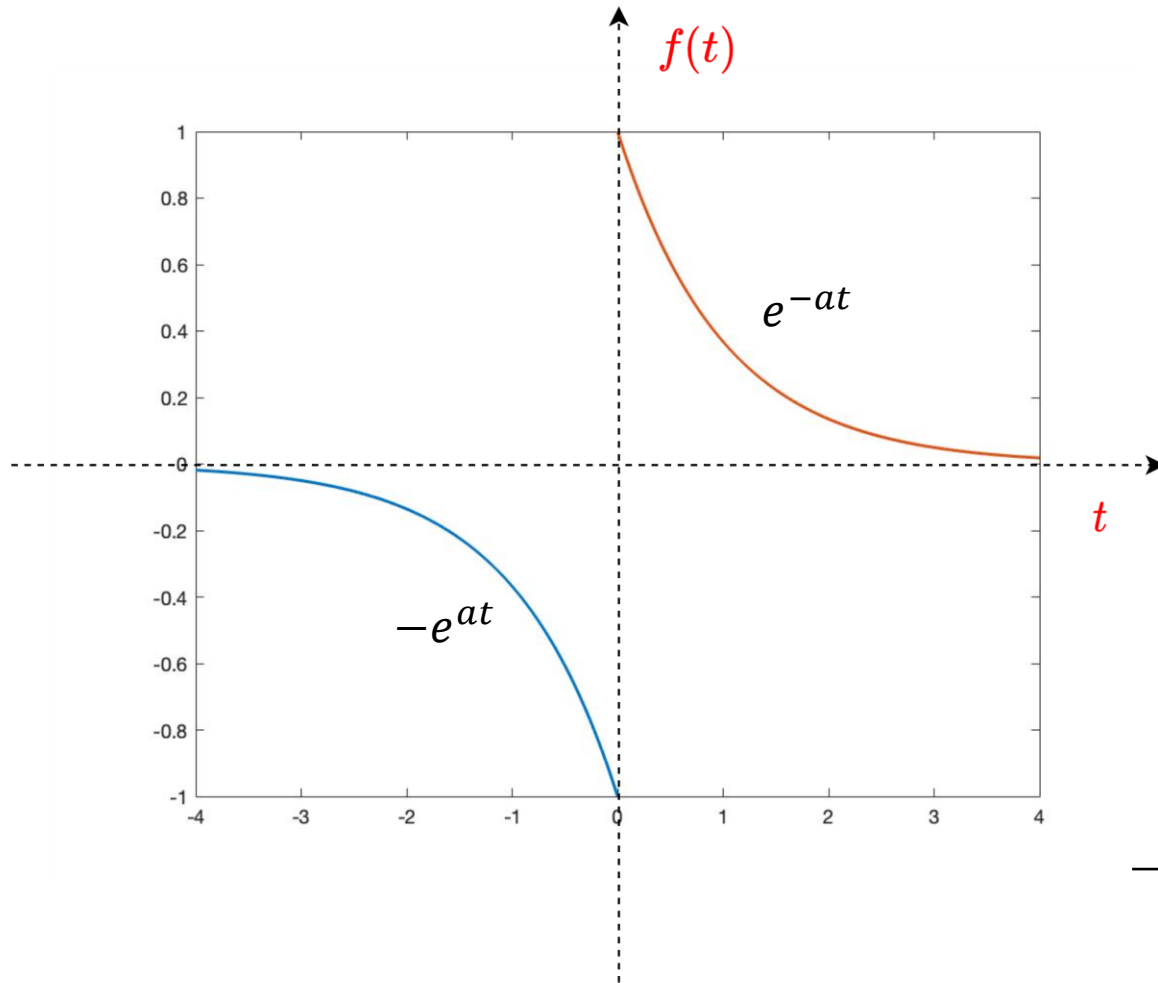


虚奇函数

$$F(\omega) = -\frac{j2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$|F(\omega)| = \frac{2|\omega|}{a^2 + \omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}$$

⑤ 双边奇指数信号 $(a > 0)$



⑥ 符号函数信号

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- 不满足狄里赫利条件中绝对值可积的条件
- 符号函数信号 = $\lim_{a \rightarrow 0^+}$ 双边奇指数信号

$$F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} -\frac{j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

⑥ 符号函数信号

双边奇指数信号

求极限

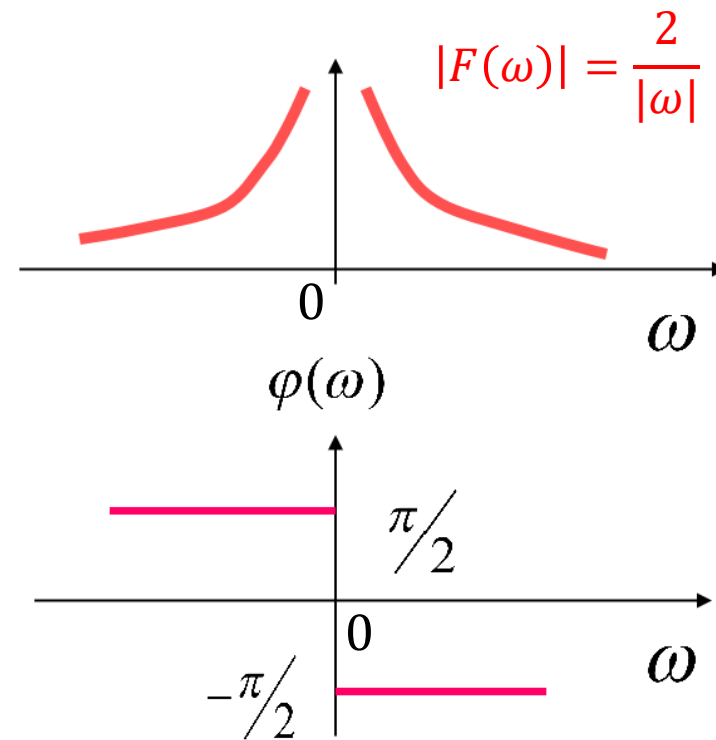
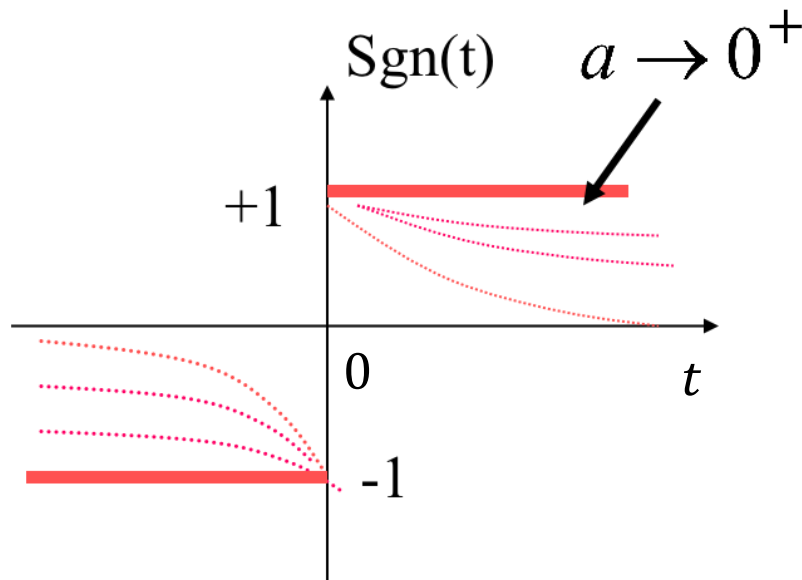
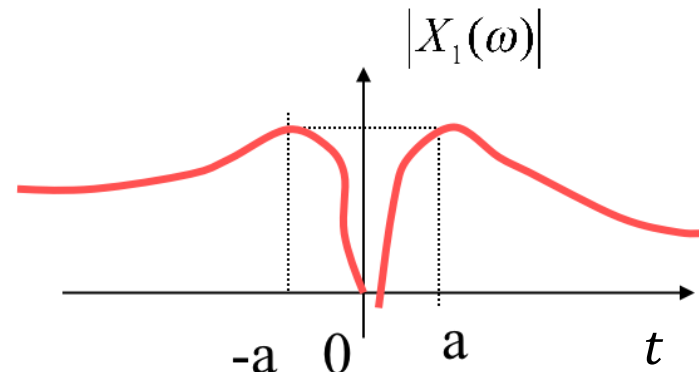
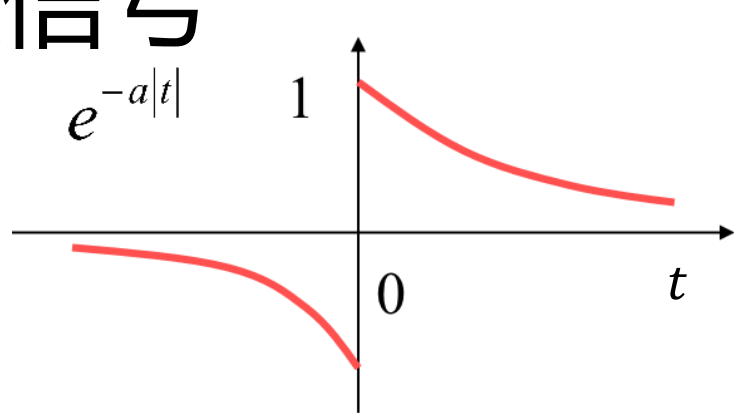


符号函数信号

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



阶跃信号



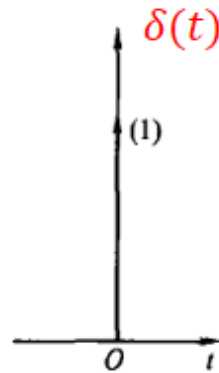
常见奇异信号的频谱

- 单位冲激信号的频谱
- 单位阶跃信号的频谱

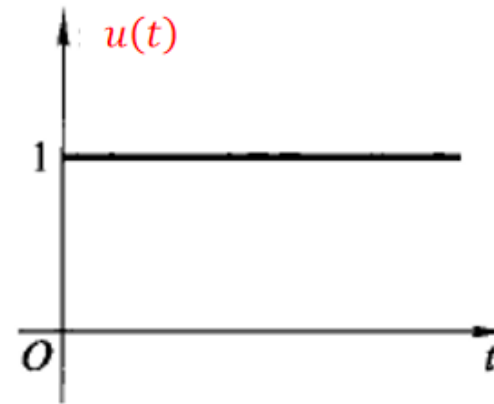
已知. $1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$

$\text{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$

$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$



$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$



典型非周期信号

频谱密度函数

时域表达式

矩形脉冲信号

$$F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

单边指数信号

$$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$f(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

双边指数信号

$$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t), \quad a > 0$$

双边奇指数信号

$$F(\omega) = -\frac{j2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a > 0$$

单位直流信号

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$f(t) = 1$$

符号函数信号

$$F(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$f(t) = \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

单位冲激信号

$$F(\omega) = 1$$

$$f(t) = \delta(t)$$

单位阶跃信号

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$f(t) = u(t)$$



课程内容

1.1 连续信号的时域描述和分析

1.2 连续信号的频域分析

1.2.1 周期信号的傅里叶级数

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

1.2.3 傅里叶变换的性质

1.2.4 周期信号的傅里叶变换

1.3 连续信号的复频域分析

傅里叶变换的性质 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

- ① 线性
- ② 奇偶虚实性
- ③ 对偶性 $F(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} F(t)$
- ④ 尺度变换特性
- ⑤ 时移特性 $f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- ⑥ 频移特性 \Rightarrow 实现频谱搬移
- ⑦ 微分特性
- ⑧ 积分特性
- ⑨ 帕斯瓦尔定理 (略)
- ⑩ 卷积定理

★ $S_a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} \pi |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$

★ $f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) F_2(\omega)$
 $f_1(t) f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

① 线性

• 若

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$$

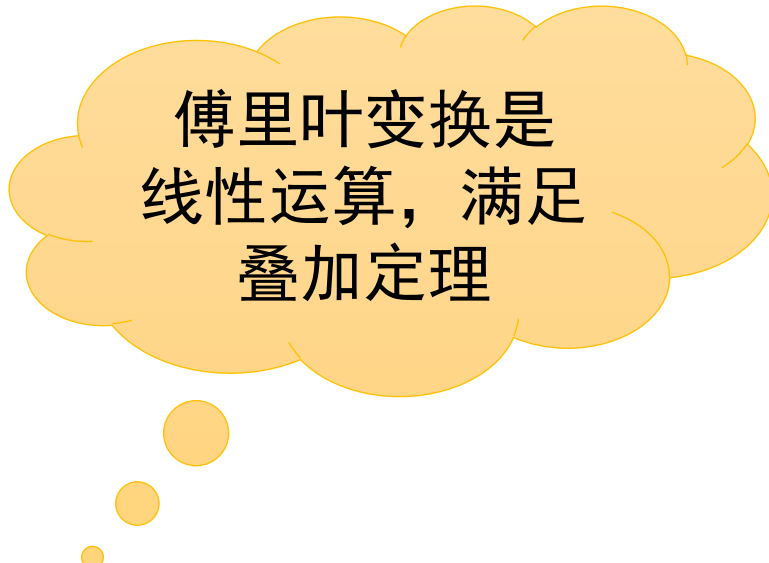
$$f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$$

则

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

a_1, a_2 为任意常数

例: $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$, $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[1] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{j\omega} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$



傅里叶变换是
线性运算, 满足
叠加定理

② 奇偶虚实性

• 若

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

则

$$\underline{f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(-\omega)}$$

- 当 $f(t)$ 为实函数时, 有 $F(\omega) = F^*(-\omega)$
- 当 $f(t)$ 为实函数时, $|F(\omega)|$ 是 ω 的偶函数, $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数
- 当 $f(t)$ 为实偶函数时, $F(\omega)$ 是 ω 的实偶函数
- 当 $f(t)$ 为实奇函数时, $F(\omega)$ 是 ω 的虚奇函数

推导· 设 $f(t)$ 为实函数

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} [-f(t)\sin\omega t] dt \\ &\quad R(\omega) \qquad \qquad \qquad X(\omega) \end{aligned}$$

其中 $R(\omega) = R(-\omega)$, $X(\omega) = -X(-\omega)$

$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$ 为 ω 的偶

$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$ 为 ω 的奇

• 当 $f(t)$ 为实偶: $X(\omega) = 0 \Rightarrow \varphi(\omega) = 0$

• 当 $f(t)$ 为实奇: $R(\omega) = 0 \Rightarrow F(\omega) = jX(\omega)$

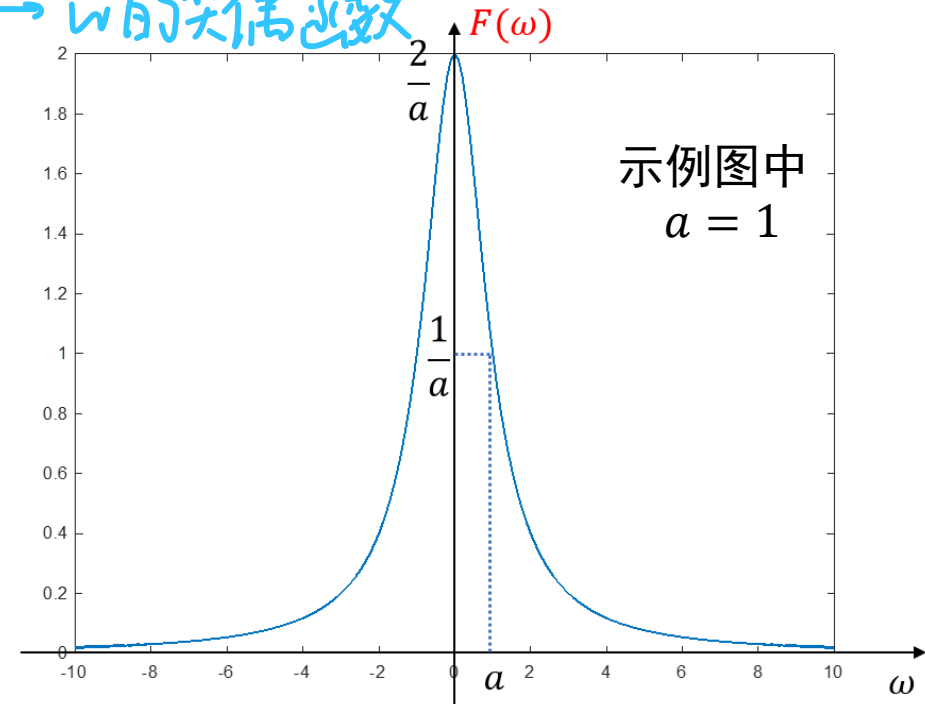
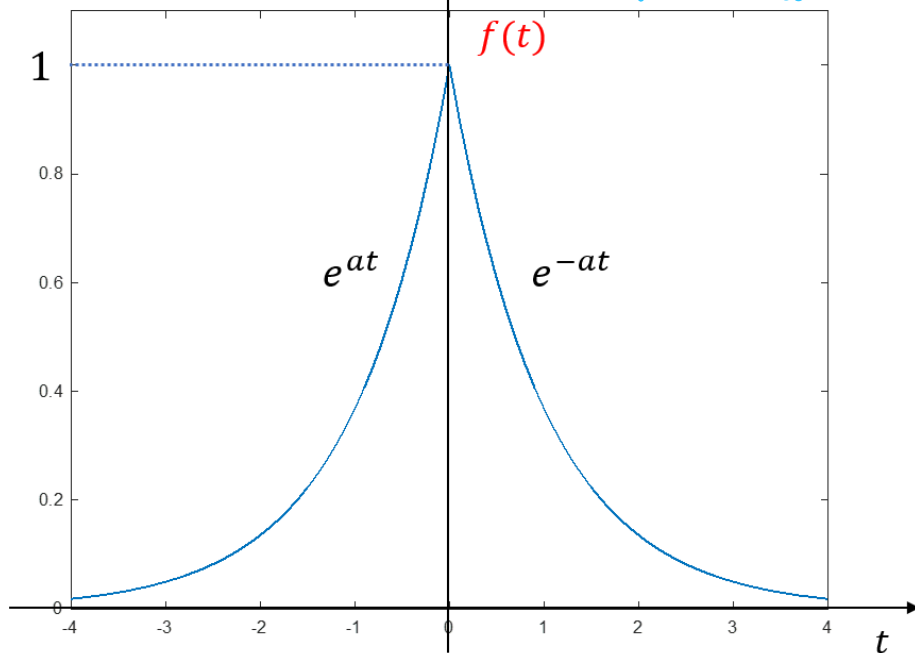
实偶函数示例：双边指数函数

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

ω 的实偶函数

$$F(\omega) = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad |F(\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad \varphi(\omega) = 0$$

t 的实偶函数 \longrightarrow ω 的实偶函数

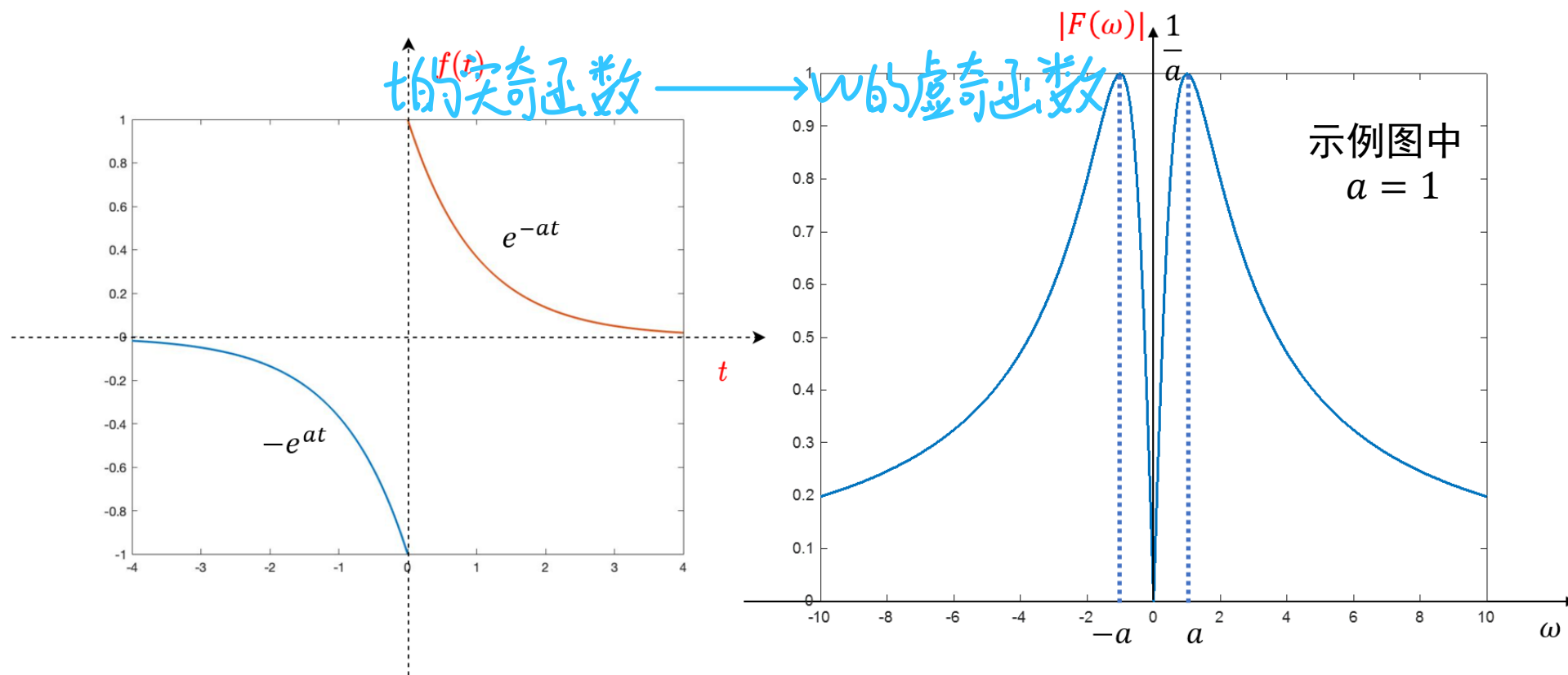


实奇函数示例：双边奇指数函数

$$f(t) = \begin{cases} -e^{at} & t < 0, a > 0 \\ e^{-at} & t > 0, a > 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = -\frac{j2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

ω 的虚奇函数



★ ③ 对偶性 $F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$

- 若 多数情况下, $f(t)$ 为 t 的偶函数, 则 $f(-\omega) = f(\omega)$

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

则

$$\underline{F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)}$$

- 单位冲激信号和单位直流信号

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

δ 为偶函数

证明: 由傅里叶反变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将 t 和 ω 互换, 得

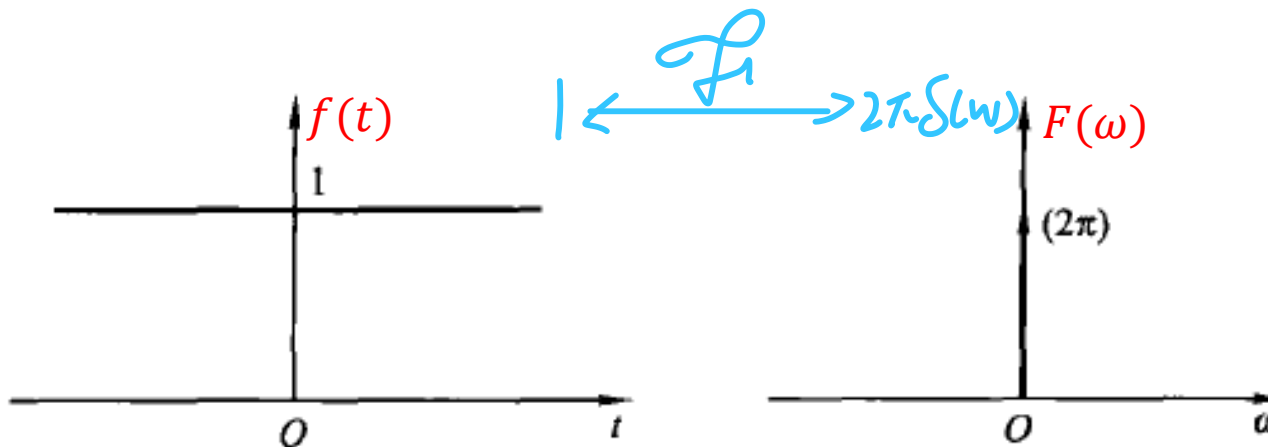
$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[F(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi f(-\omega)$$

单位直流信号与单位冲激信号的对偶性

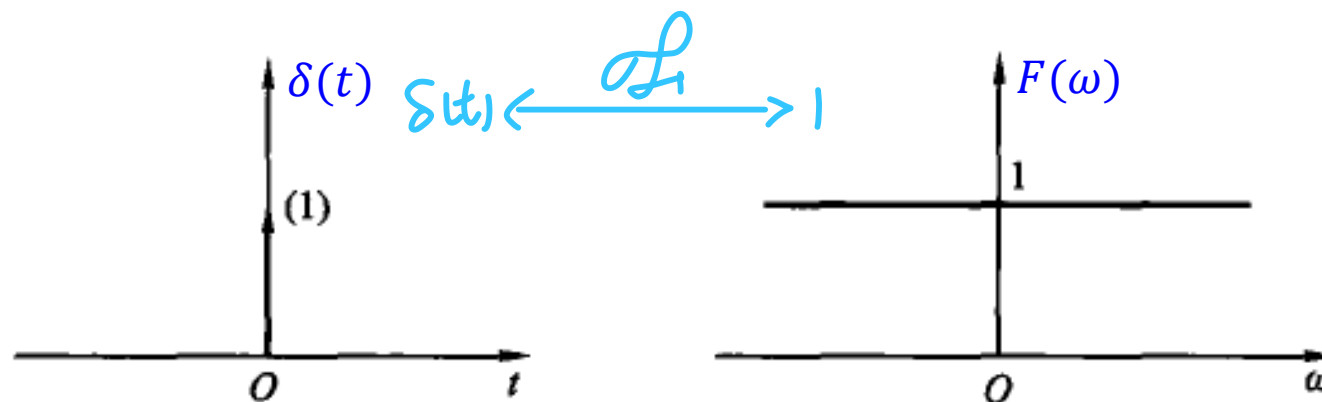
$$\underline{F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)}$$

时域
单位直流信号
(幅度1)



频域
冲激信号
(强度 2π)

时域
单位冲激信号
(强度1)

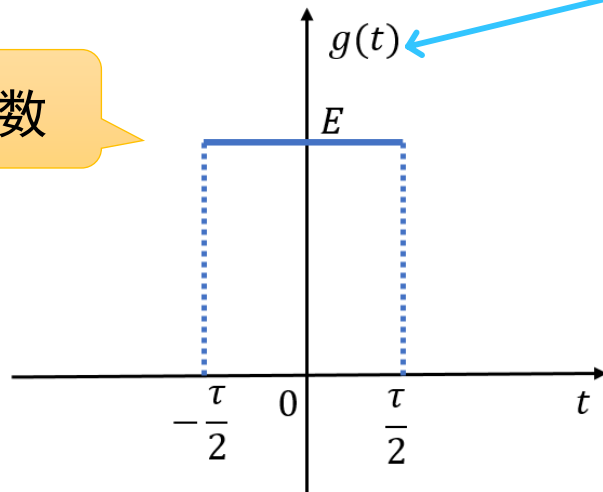


频域
单位直流信号
(幅度1)

例1-7: 求取样函数 $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的傅里叶变换。

解: 对比之前的窗函数, $\mathcal{F}[g(t)] = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 令 $E = \frac{1}{2}, \tau = 2$

偶函数



$$\mathcal{F}[g(t)] = Sa(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$$

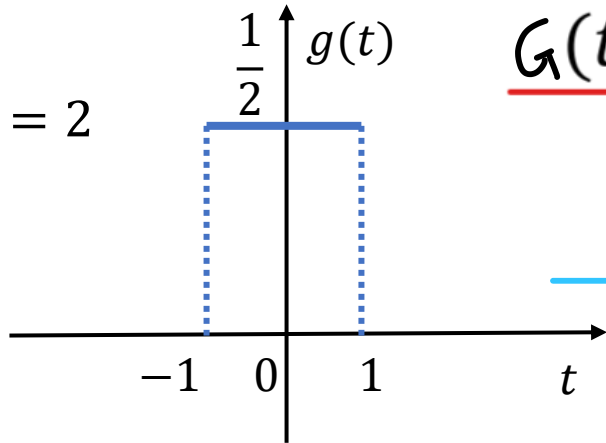
窗函数 $g(\cdot)$ 已知, 且 $E = \frac{1}{2}, \tau = 2$

由对偶性得 $\mathcal{F}[Sa(t)] = 2\pi g(-\omega) = 2\pi g(\omega) = \begin{cases} \pi & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$

$$\underline{G(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi g(-\omega)}$$

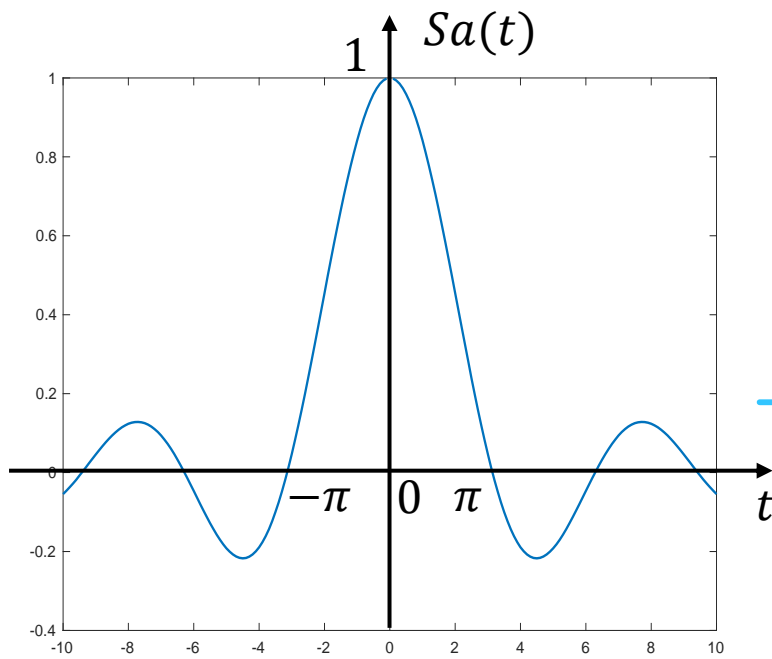
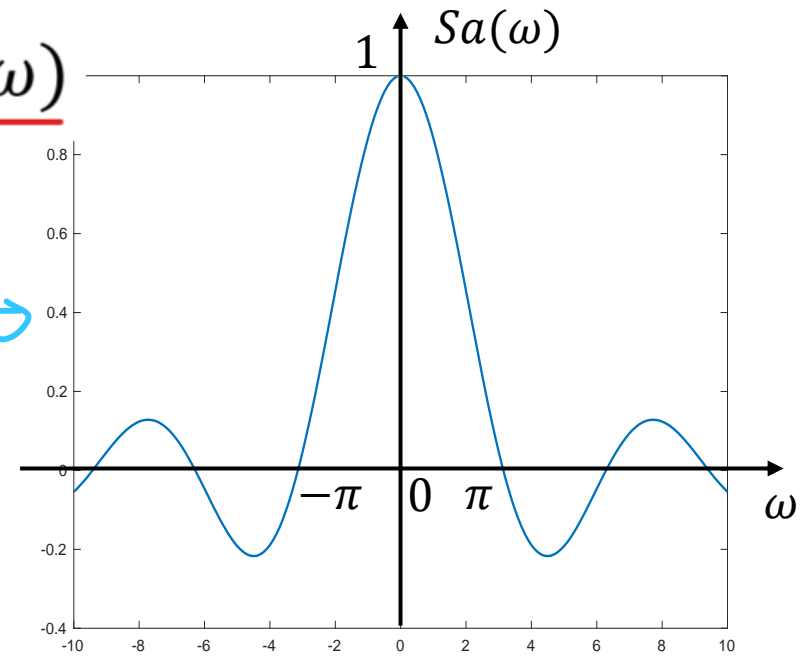
记忆!

$$E = \frac{1}{2}, \tau = 2$$

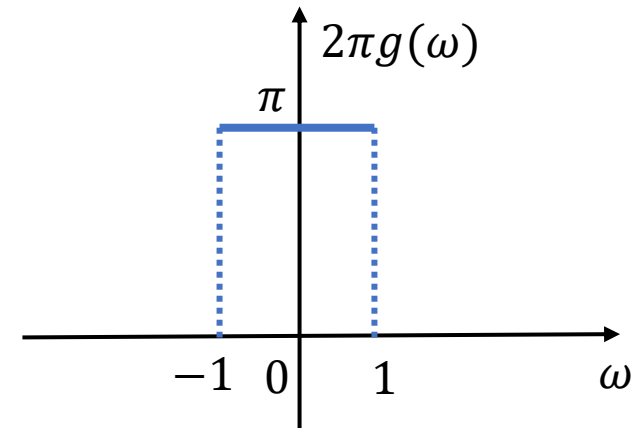


$$\underline{G(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi g(-\omega)}$$

\mathcal{F}



\mathcal{F}

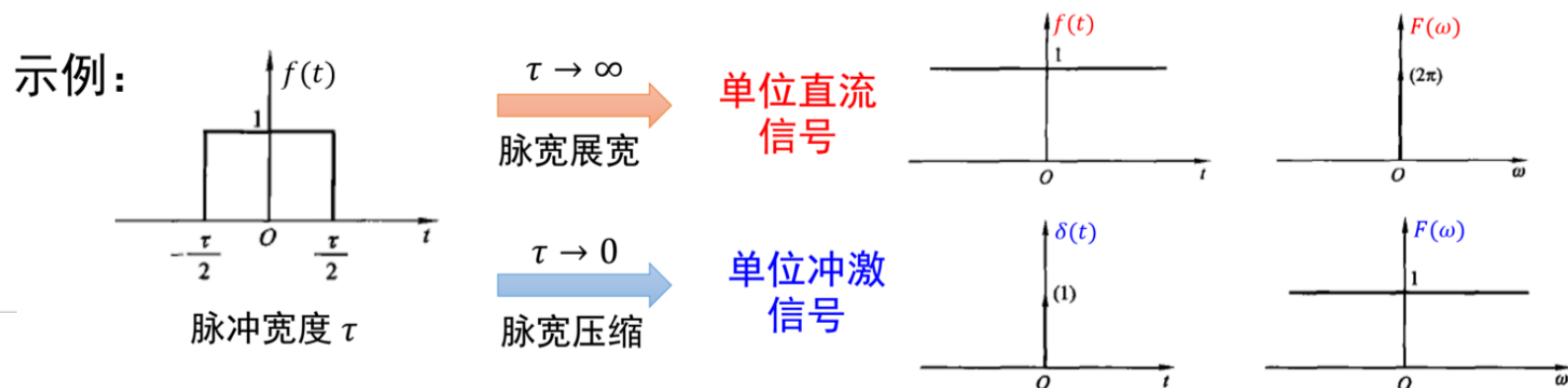


④ 尺度变换特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \Rightarrow \star f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

实常数 a

- 信号波形在时域的压缩，意味着频域中信号频带的展宽
- 信号波形在时域的扩展，意味着频域中信号频带的压缩

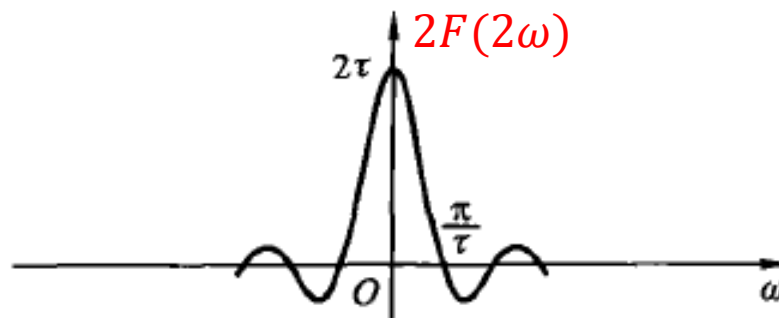
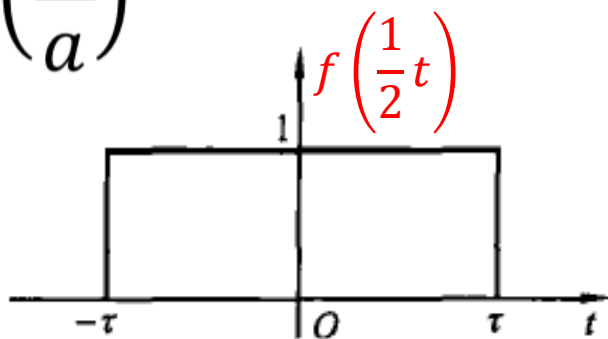


- 特别地, $a = -1$

$$f(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(-\omega)$$

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

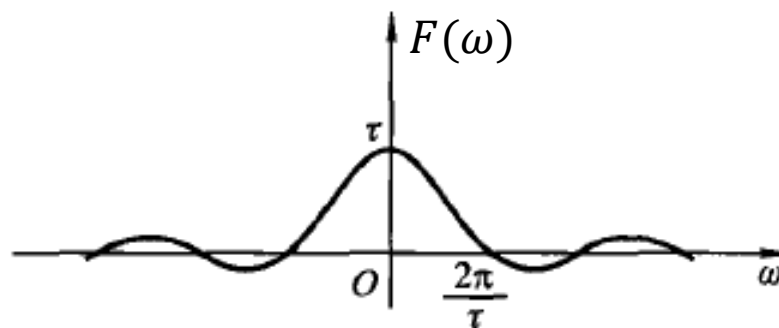
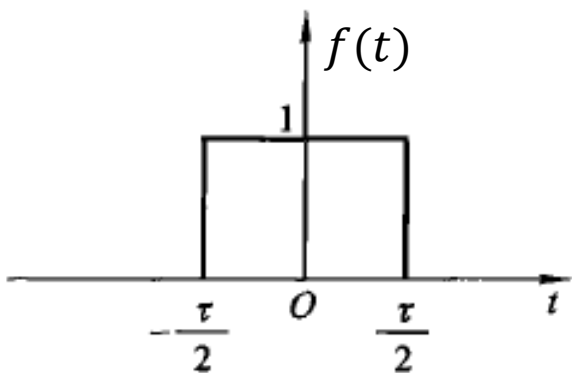
时域上扩展



频带压缩
带宽减小
幅度变大

$a = 0.5$

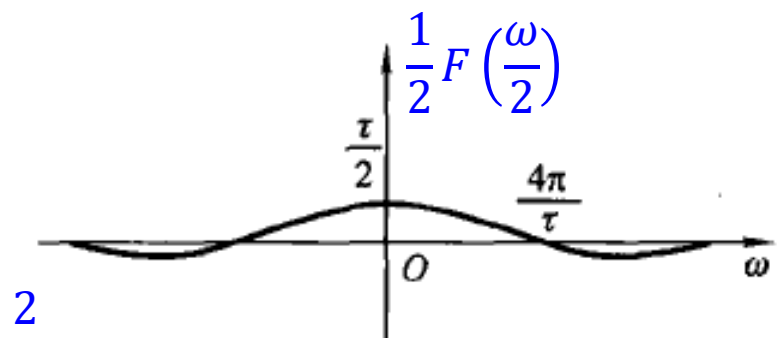
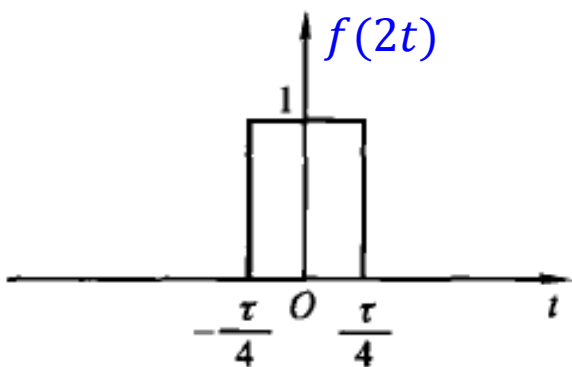
原信号



原信号频谱
频谱能量
守恒

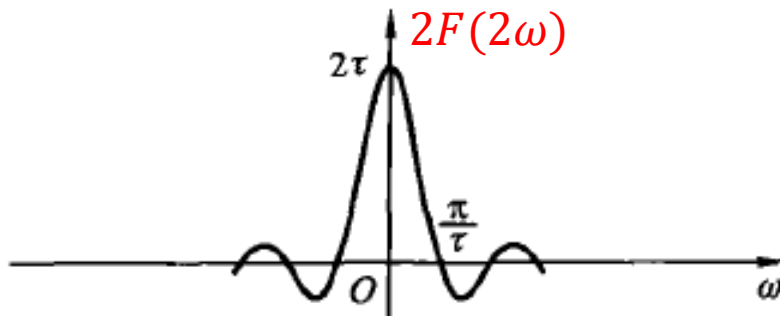
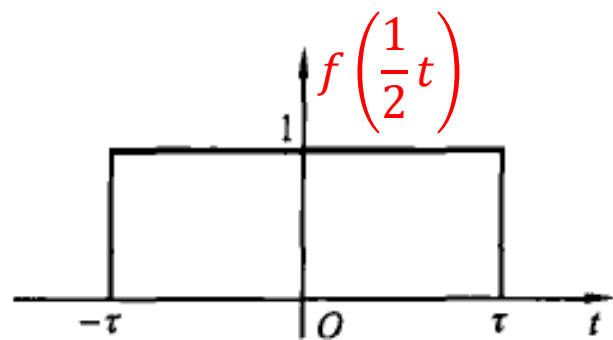
$a = 1$

时域上压缩



频带展宽
带宽增大
幅度变小

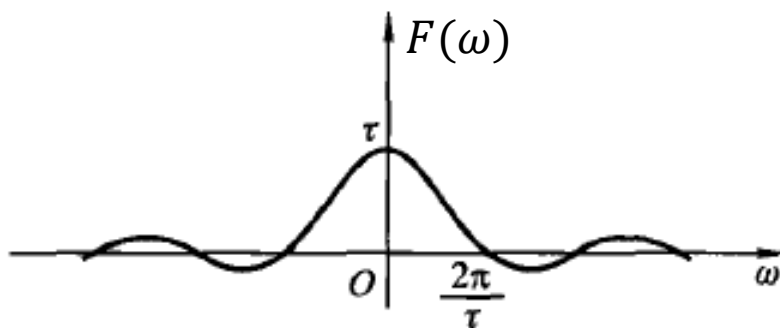
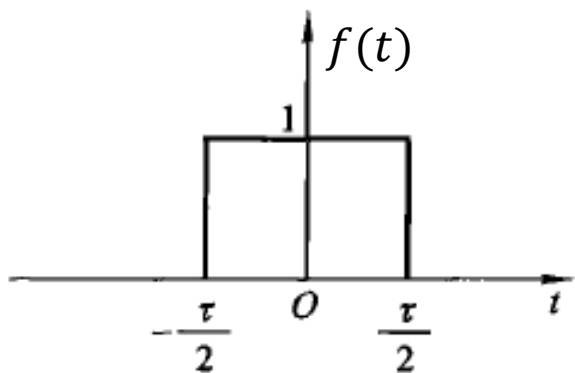
$a = 2$



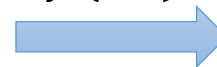
时域上扩展

0.5倍速慢放：声音变得低沉
(相当于过滤留下了低频)

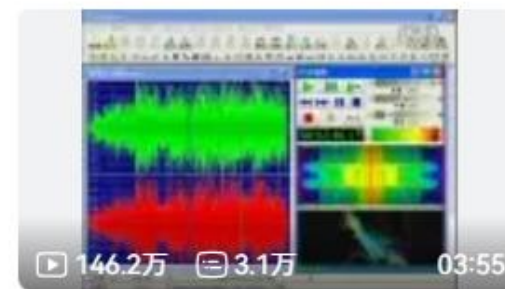
$a = 0.5$



$f(-t)$



相位
改变

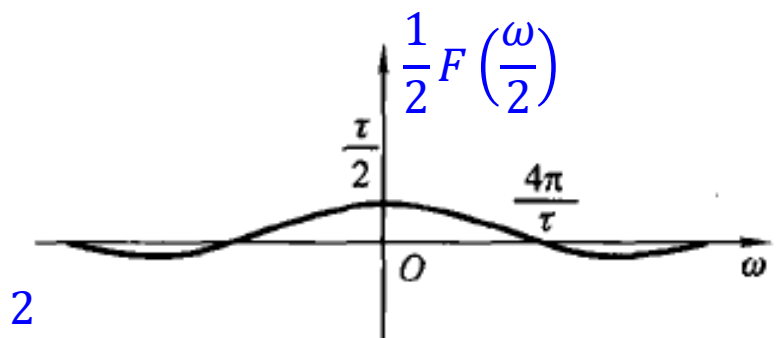
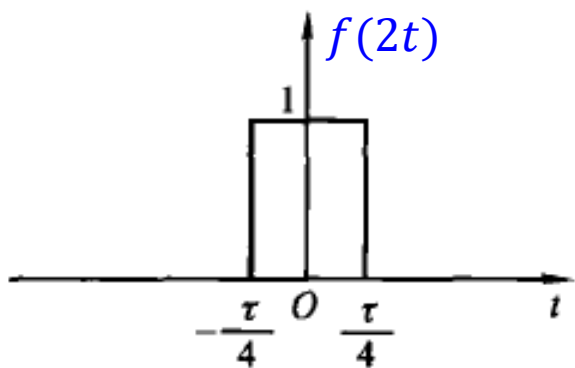


周杰伦的《稻香》倒着放，就成了印度神曲

UP 奇妙小毛 · 2014-4-23



$a = 1$



时域上压缩

2倍速快放：声音变得刺耳
(低频高频都可通过)

$a = 2$

⑤ 时移特性

• 若

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

则

$$\star \underline{f(t \pm t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{\pm j\omega t_0} F(\omega)}$$

信号 $f(t)$ 在时域中沿时间轴右移（或左移） t_0 ，即延时（或超前） t_0

在频域中，信号的幅度频谱不变，相位频谱产生 $-\omega t_0$ （或 $+\omega t_0$ ）的变化

$$\text{尺度变换} \quad \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \xrightarrow{\text{时移}} \mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

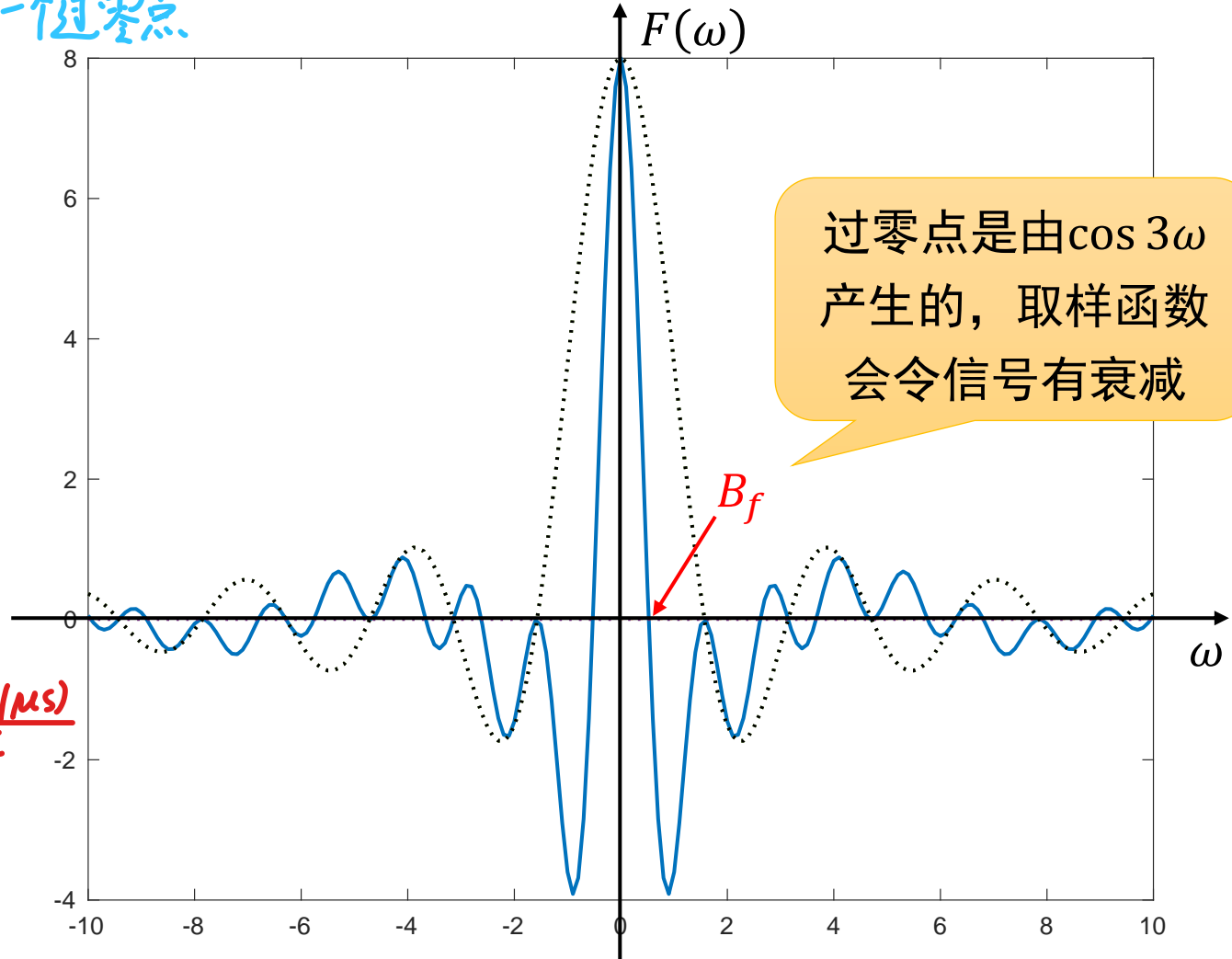
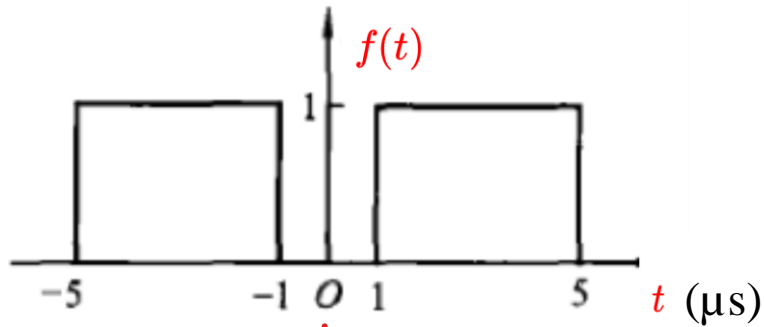
右移了 $\frac{t_0}{a}$

证明：令 $\lambda = t \pm t_0$ ，则 $t = \lambda \mp t_0$ ， $dt = d\lambda$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t \pm t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-j\omega(\lambda \mp t_0)} d\lambda \\ &= e^{\pm j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \\ &= e^{\pm j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

例1-8：求 $f(t)$ 频谱的带宽 B_f （郑版教材题3-17(b)）

即找 $F(\omega)$ 的第一个过零点



答案：

$$F(\omega) = 8Sa(2\omega) \cdot \cos 3\omega$$

$$B_f = \frac{\pi}{6} \text{ rad}/\mu\text{s} \quad B_f(\text{MHz}) = \frac{B_f(\text{rad}/\mu\text{s})}{2\pi}$$

换算单位后： $B_f = \frac{1}{12} \text{ MHz}$

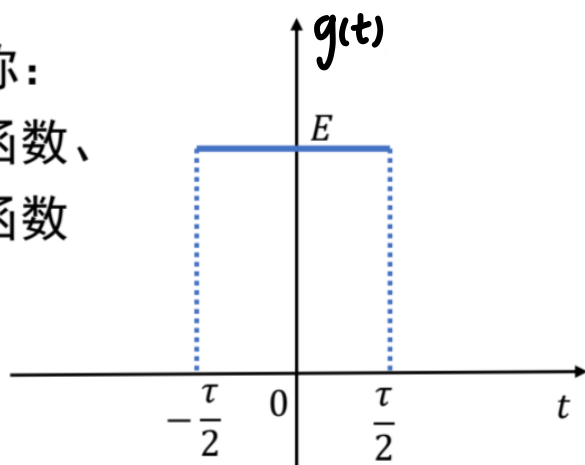
例1-8：求 $f(t)$ 频谱的带宽 B_f （郑版教材题3-17(b)）

解： $f(t)$ 是宽为 $\tau = 4$ 的 ^{$E=1$} 单位矩形脉冲 $g(t)$ 复制两份后分别左右平移 $\frac{3\tau}{4} = 3$ 后相加得到，即

$$f(t) = g\left(t + \frac{3\tau}{4}\right) + g\left(t - \frac{3\tau}{4}\right)$$

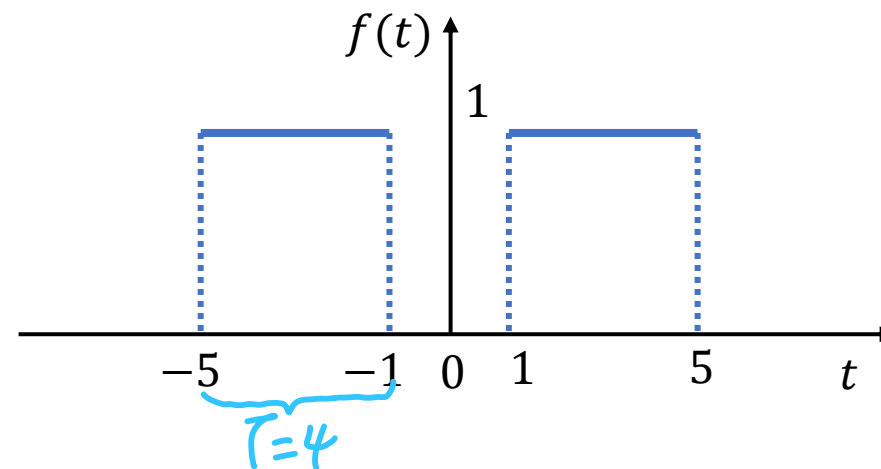
其中 $g(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ ，已知 $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 。

又称：
窗函数、
门函数



$E = 1$
 $\tau = 4$

复制两份
分别左右平移



$$g(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$G(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

例1-8：求 $f(t)$ 频谱的带宽 B_f （郑版教材题3-17(b)）

解： $f(t)$ 是宽为 $\tau = 4$ 的单位矩形脉冲 $g(t)$ 复制两份后分别左右平移 $\frac{3\tau}{4} = 3$ 后相加得到，即

$$f(t) = g\left(t + \frac{3\tau}{4}\right) + g\left(t - \frac{3\tau}{4}\right)$$

其中 $g(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ ，已知 $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 。根据傅里叶变换的时域移位性质，以及 $E = 1$ 、 $\tau = 4$ ，有

(提示：欧拉公式)

$$F(\omega) = G(\omega)\left(e^{j\omega\frac{3\tau}{4}} + e^{-j\omega\frac{3\tau}{4}}\right) = 2E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{3\omega\tau}{4}\right) = 8Sa(2\omega) \cdot \cos 3\omega$$

权重 等幅

所以信号 $f(t)$ 的带宽是 $Sa(2\omega)$ 和 $\cos(3\omega)$ 各自的第一个过零点中的较小值，即

$$B_f = \min\left(\frac{2\pi}{\tau}, \frac{2\pi}{3\tau}\right) = \frac{2\pi}{3\tau} = \frac{\pi}{6} \text{ (rad/}\mu\text{s)}$$

$B_f(\text{MHz}) = \frac{B_f(\text{rad/}\mu\text{s})}{2\pi}$

角频率 ↗ 频率

换算单位后，带宽为 $B_f = \frac{1}{12} \text{ MHz}$

例1-9：求如图所示三脉冲信号的频谱。

解：令 $f_0(t)$ 表示矩形单脉冲信号，即

$$f_0(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$f_0(t)$ 的频谱函数为 $F_0(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

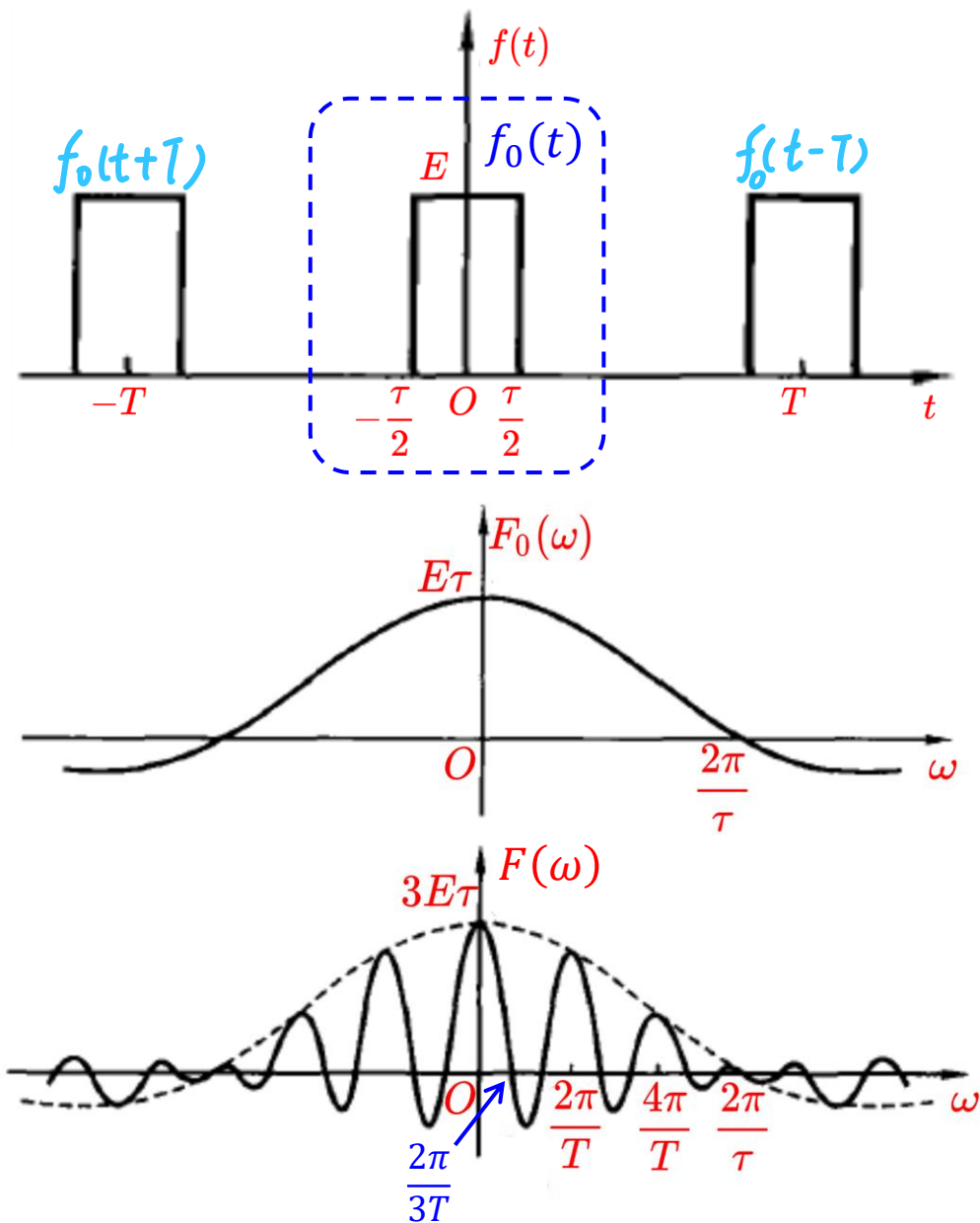
因为 $f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$

由时移特性可知 $e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$

$$F(\omega) = F_0(\omega) + e^{j\omega T} F_0(\omega) + e^{-j\omega T} F_0(\omega)$$

$$= F_0(\omega) [1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}]$$

$$= E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) [1 + 2\cos(\omega T)]$$



例1-9：求如图所示三脉冲信号的频谱。

解： $F(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) [1 + 2\cos(\omega T)]$

当 $\omega = 0$ 时， $F(\omega) = E\tau \cdot 1 \cdot [1 + 2 \cdot 1] = 3E\tau$

当 $F(\omega) = 0$ 时，可求出频谱过零点处的频率为

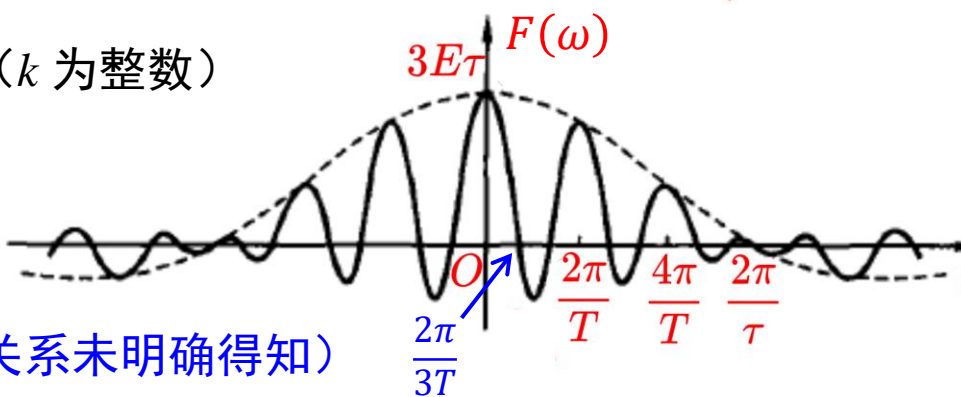
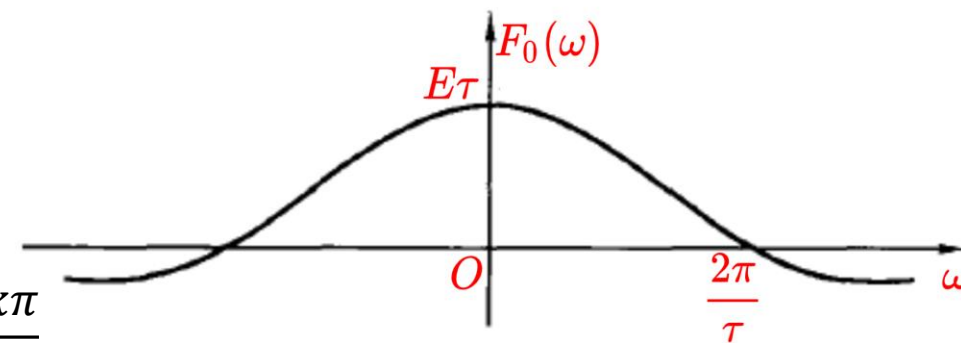
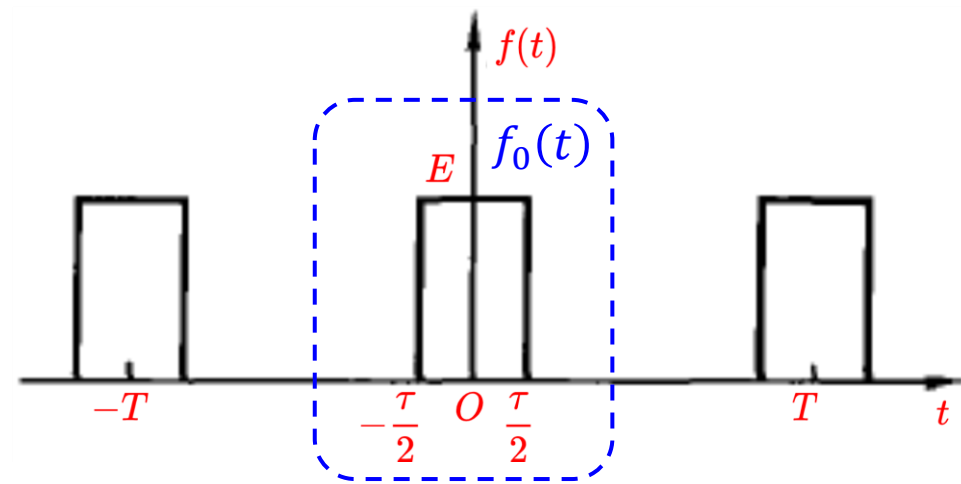
$$1 + 2\cos(\omega T) = 0 \Rightarrow \cos(\omega T) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega T = \frac{2\pi + 2k\pi}{3}, \frac{4\pi + 2k\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi + 2k\pi}{3T}, \frac{4\pi + 2k\pi}{3T}$$

因此， $F(\omega)$ 频谱是以 $Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 为包络线，按余弦函数规律振荡衰减的曲线。

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

(示意图，因为本题中 τ 和 T 的数值关系未明确得知)



例1-10: 已知 $\omega_c > 0$, $\tau > 0$, 求双取样信号 (双Sa信号)

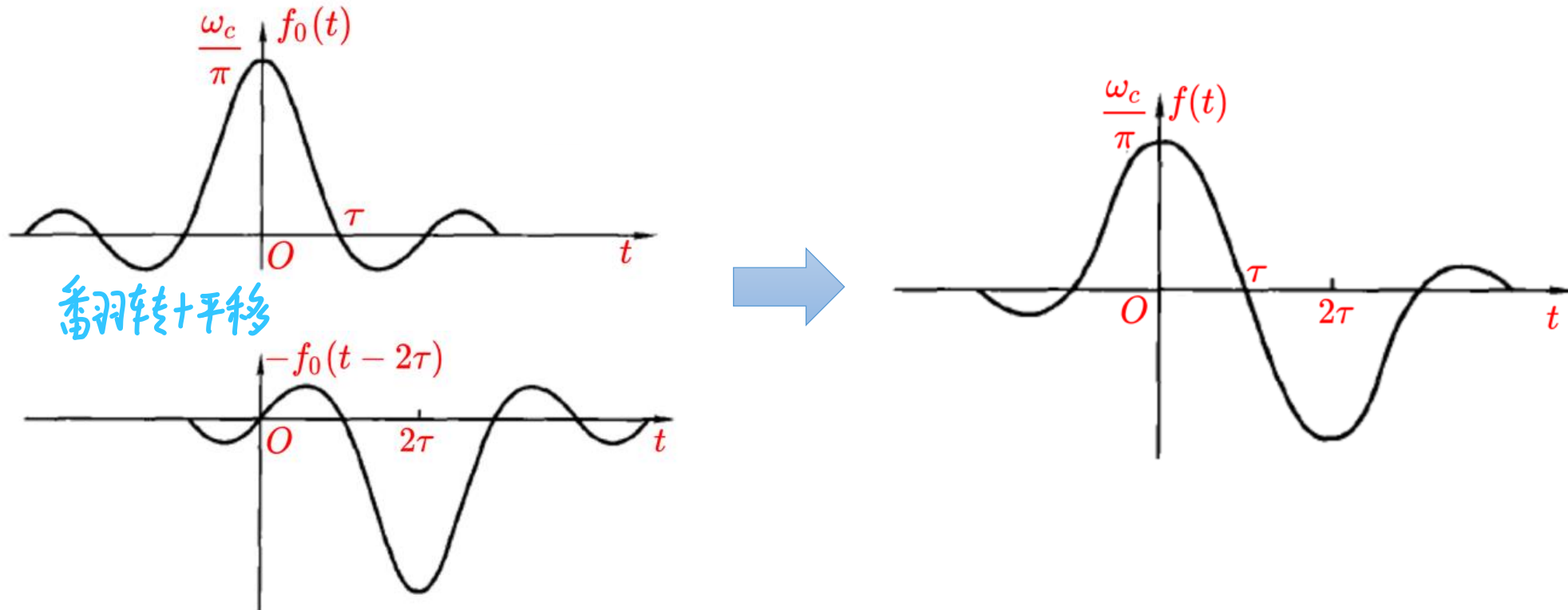
$$f(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \{ \text{Sa}(\omega_c t) - \text{Sa}(\omega_c(t - 2\tau)) \}$$

的频谱。

$f_0(t)$

通过 $f_0(t)$ 翻转、平移得到

解:

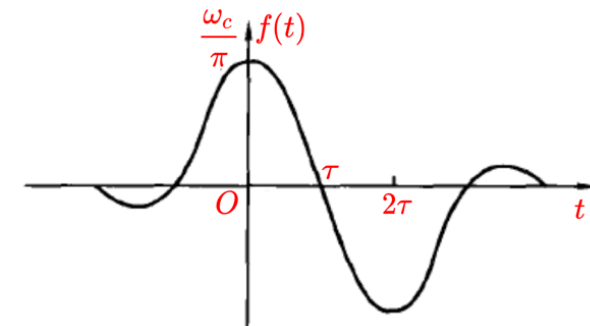


$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

例1-10: 已知 $\omega_c > 0$, $\tau > 0$, 求双取样信号 (双Sa信号)

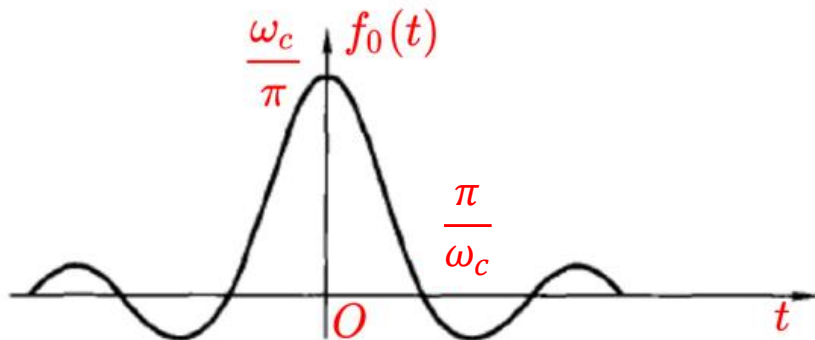
$$f(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \{ Sa(\omega_c t) - Sa(\omega_c(t - 2\tau)) \}$$

$f_0(t)$



的频谱。

解:



$$f_0(t) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \quad t = 0 \text{ 时, } f_0(0) = \frac{\omega_c}{\pi}$$

当 $\sin \omega_c t = 0$ 且 $t \neq 0$ 时, 得 $\omega_c t = \pi$, $t = \frac{\pi}{\omega_c}$ (此处只计算了一个点)

令 $\mathcal{F}[Sa(t)] = F_s(\omega)$, 已知 $F_s(\omega) = \begin{cases} \pi & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$

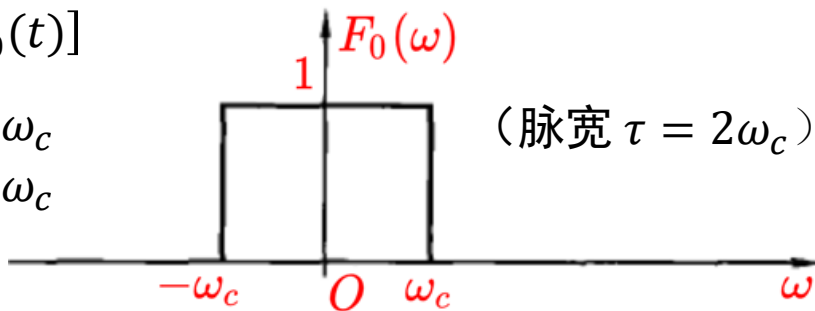
由傅里叶变换的线性及尺度变换特性, 得

不影响w f(at) -> 1/|a| F(w/a)

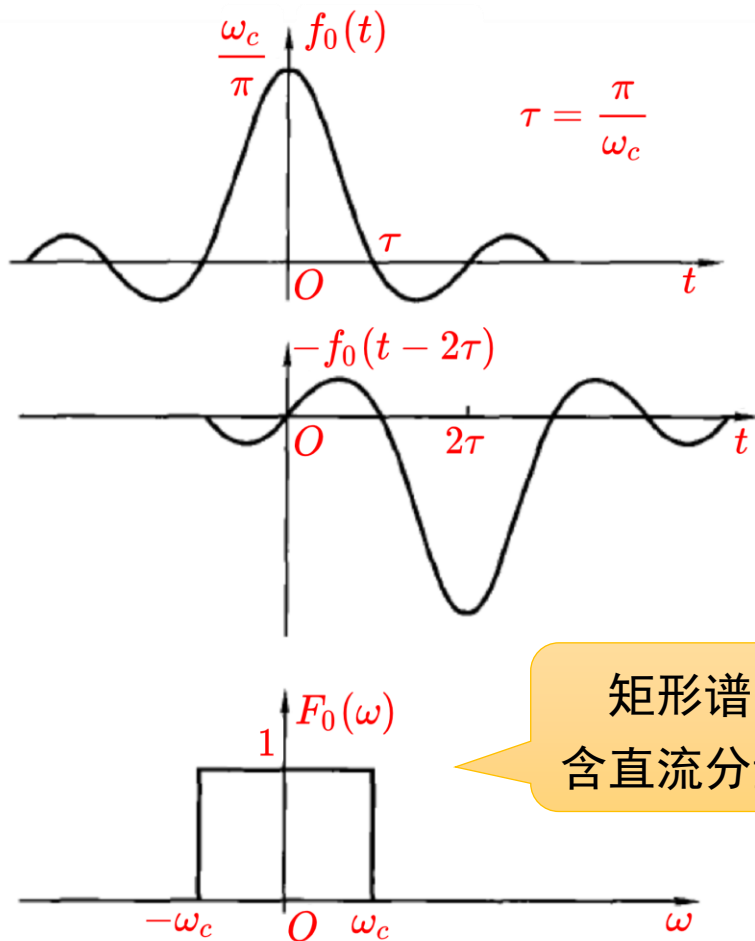
$$\mathcal{F}[f_0(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t)\right] = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{1}{|\omega_c|} F_s\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \pi & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$F_0(\omega) = \mathcal{F}[f_0(t)]$$

$$= \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



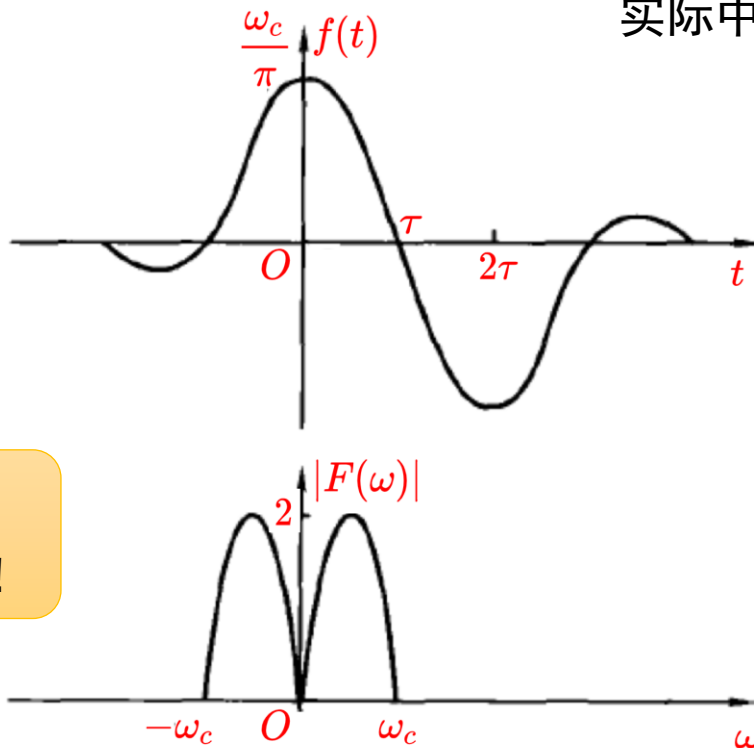
已知 $F_0(\omega) = \mathcal{F}[f_0(t)] = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$ 由时移特性, $F(\omega) = \mathcal{F}[f_0(t)] - \mathcal{F}[f_0(t - 2\tau)] = \begin{cases} 1 - e^{-j2\omega\tau} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$



矩形谱, 含直流分量!

因此, 从中可以得到幅度谱为 $|F(\omega)| = \begin{cases} 2|\sin(\omega\tau)| & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$

实际中往往选 $\tau = \frac{\pi}{\omega_c}$, 则幅度谱变为



$$|F(\omega)| = \begin{cases} 2 \left| \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_c}\right) \right| & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

单Sa信号的频谱最为集中(矩形谱), 但是含有直流分量, 使得它在实际传输过程中带来不便; 而双Sa信号的频谱仍然限制在 $|\omega| < \omega_c$ 范围内, 却消去了直流分量。指 $\omega=0$ 时 $|F(\omega)|=0$

⑥ 频移特性 \Rightarrow 实现频谱搬移

• 若

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

则

$$\underline{f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega \mp \omega_0)}$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \mathcal{F}[f(t)e^{\pm j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt \\ &= F(\omega \mp \omega_0) \end{aligned}$$

通信工程中
常用的调制
技术

信号在时域中将信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ (或 $e^{-j\omega_0 t}$)，对应于频域中，将原信号的频谱右移 (或左移) ω_0 ，即往高频段 (或低频段) 平移 ω_0 ，实现 频谱的搬移

注意：频移和时移的方向对应 $e^{j\omega_0 t}$ 上标正/负号的方向是不同的！

调幅信号的频谱

频谱搬移的实现原理：将原信号 $f(t)$ 乘以载频（载波）信号 $\cos \omega_0 t$
或 $\sin \omega_0 t$

$f(t) \cos \omega_0 t$ 和 $f(t) \sin \omega_0 t$ 的频谱：

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} \overset{\text{频谱右移}}{F(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{2} \overset{\text{频谱左移}}{F(\omega + \omega_0)}$$

$$\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{j}{2} F(\omega + \omega_0) - \frac{j}{2} F(\omega - \omega_0)$$

⑦ 微分特性

• 若

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

则

$$\underline{\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(\omega)}$$

例: $\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = j\omega\pi\delta(\omega) + 1 = 1$$

($\omega = 0$ 时才有意义)

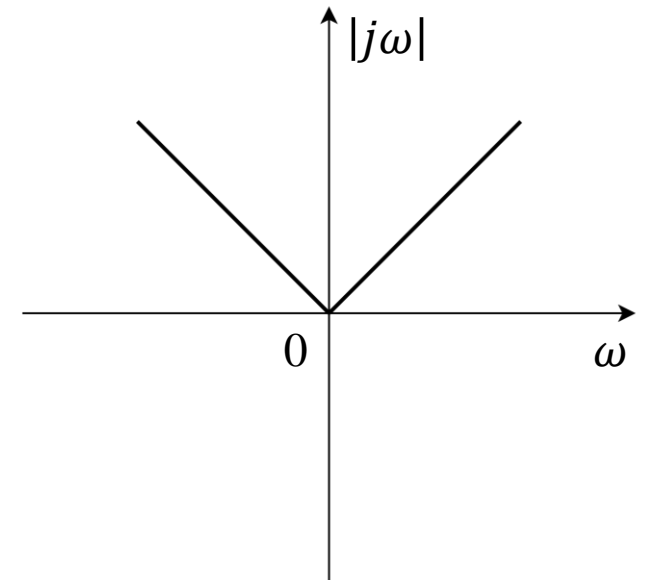
时域的微分运算对应于频域乘以 $j\omega$ 因子，相应地增强了高频成分，有助于突出信号的变化

证明：傅里叶反变换式两边对 t 求导，得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$



⑧ 积分特性

• 若

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

则

$$\star \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

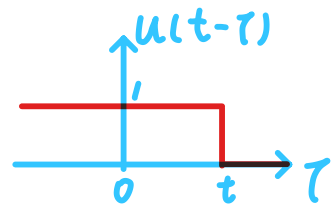
若 $F(\omega)|_{\omega=0} = 0$ ，则有

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

时域的积分运算对应于
频域乘以 $\frac{1}{j\omega}$ 因子，弱化
高频成分，有助于平滑
信号的变化

积分特性的证明

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

(构造延时阶跃信号, 改写积分上限)

交换积分次序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

$$\mathcal{F}[u(t - \tau)] = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \pi\delta(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega} d\tau$$

$\omega = 0$ 时才有意义

$$= \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega) \xrightarrow{F(0) = 0} \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

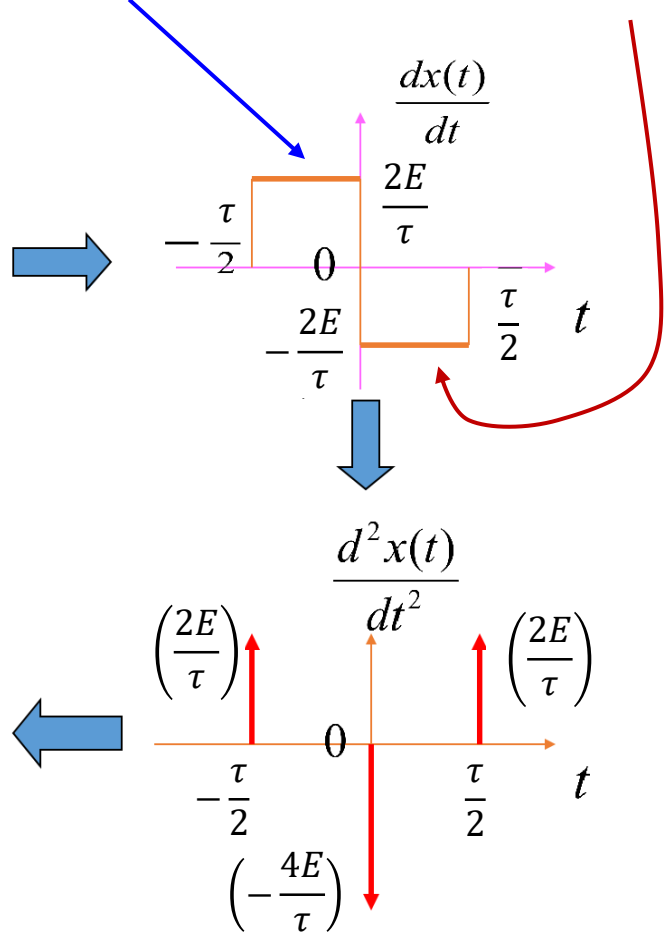
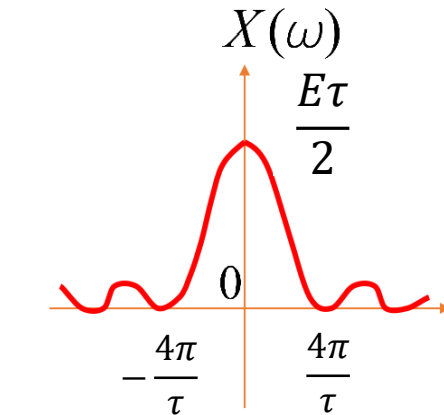
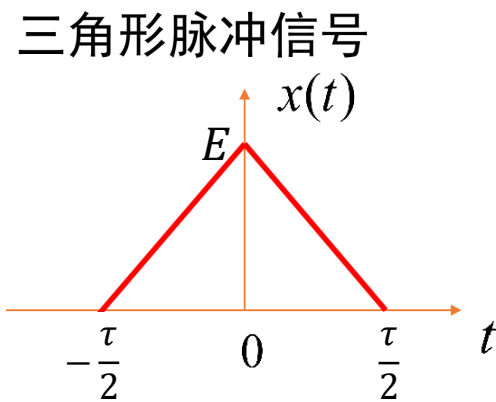
$$X(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

例1-11: 求三角形脉冲信号 $x(t)$ 的频谱。

$$\frac{2E}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) \right] \quad -\frac{2E}{\tau} \left[u(t) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \\ x'(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \\ x''(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2}{\tau}|t|\right) & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



解: $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{2E}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2u(t) + u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{2E}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

平移特性 + $\delta(\omega) \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \mathcal{F} \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right] = \frac{2E}{\tau} \left[e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - 2 + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right] \\ &= \frac{2E}{\tau} \left[2 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - 2 \right] \end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

例1-11：求三角形脉冲信号 $x(t)$ 的频谱。

提示：半角公式 $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

解（续）：

$$X_2(\omega) = \frac{2E}{\tau} \left[2 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - 2 \right] = -\frac{8E}{\tau} \cdot \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]$$

$$= -\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \quad X_2(0) = 0 \quad \text{初值恰好是0}$$

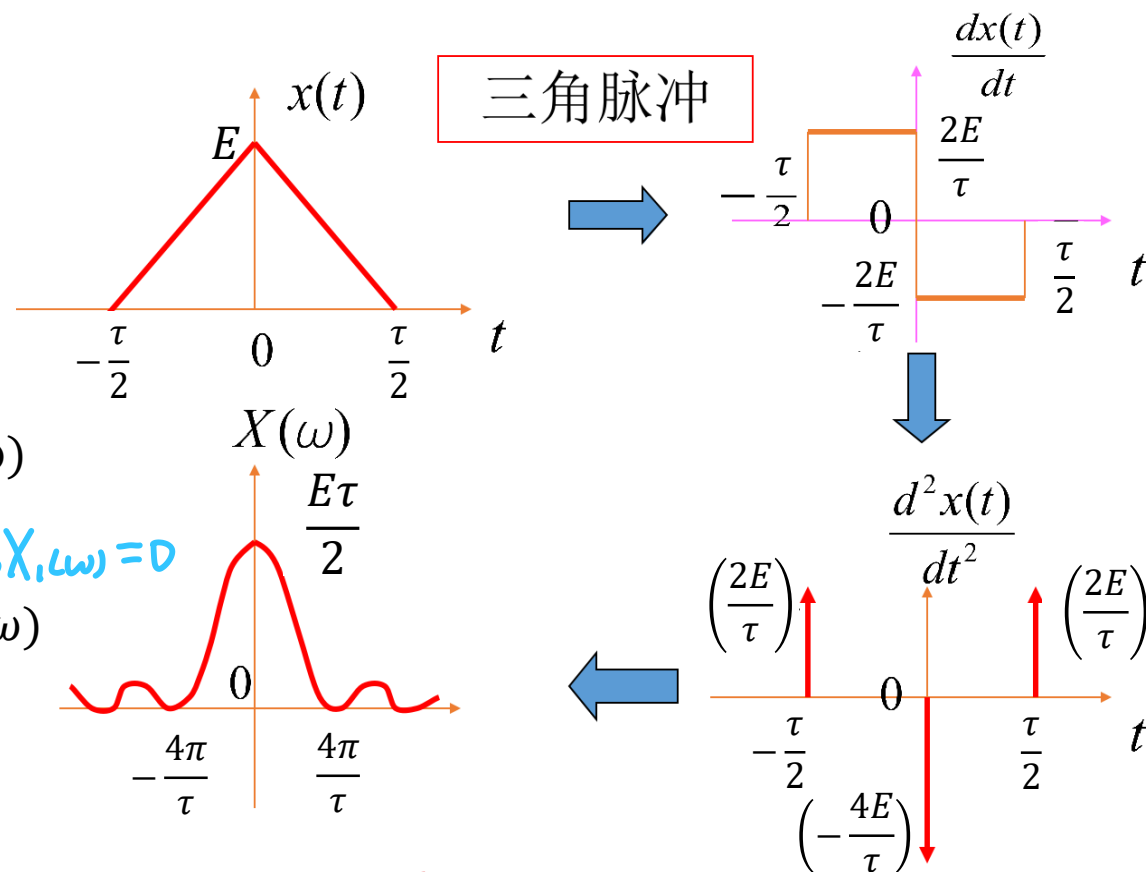
$$X_1(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = \frac{1}{j\omega} \left[-\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right] + \pi X_2(0) \delta(\omega)$$

$$= -\frac{E\omega\tau}{2j} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} X_1(\omega) = 0$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{(j\omega)^2} \left[-\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right] + \pi X_1(0) \delta(\omega)$$

$$= \frac{8E}{\omega^2\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{8E}{\omega^2\tau} \cdot \frac{\omega^2\tau^2}{16} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \quad \leftarrow \text{背下来}$$



注意：积分特性涉及初值，需要层层求解！

解: 求 $x(t) = \begin{cases} E(1 - \frac{2}{\tau}|t|), & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 的 $X(\omega)$, 定义法

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (1 + \frac{2}{\tau}t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (1 - \frac{2}{\tau}t)e^{-j\omega t} dt$$

$$= E \left[\underbrace{\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt}_A + \frac{2}{\tau} \left(\underbrace{\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 t e^{-j\omega t} dt}_B + \int_0^{\frac{\tau}{2}} t e^{-j\omega t} dt \right) \right]$$

$$A = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{j\omega} [e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}] = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

$$\text{而 } \int t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} [t e^{-j\omega t} + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}] = -\frac{t}{j\omega} e^{-j\omega t} + \frac{1}{\omega^2} e^{-j\omega t} + C$$

$$t=0 \Rightarrow \frac{1}{\omega^2} + C, \quad t=\frac{\tau}{2} \Rightarrow \frac{2+j\tau\omega}{2\omega^2} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} + C, \quad t=-\frac{\tau}{2} \Rightarrow \frac{2-j\tau\omega}{2\omega^2} e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + C$$

$$\text{故 } B = \frac{2}{\tau} \left[\frac{2}{\omega^2} - \frac{2+j\tau\omega}{2\omega^2} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - \frac{2-j\tau\omega}{2\omega^2} e^{j\omega\frac{\tau}{2}} \right] = \frac{2}{\tau} \left[\frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - \frac{\tau}{\omega} \sin\frac{\omega\tau}{2} \right] = \frac{4}{\tau\omega^2} [1 - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)] - \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\text{从而 } X(\omega) = E(A+B) = \frac{4E}{\tau\omega^2} [1 - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)] = \frac{8E}{\tau\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

★时域卷积定理

若 $f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$, $f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$, 则

$$\underline{f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)}$$

证明: $\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$

交换积分次序 = $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$

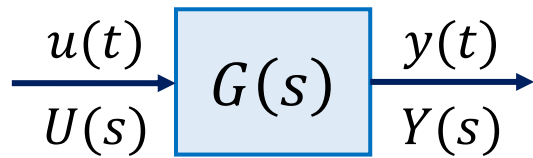
即 $\mathcal{F}[f_2(t - \tau)]$
(应用时移特性)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} F_2(\omega) d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] \cdot F_2(\omega)$$

$$= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

时域卷积定理在 LTI 系统分析中的应用

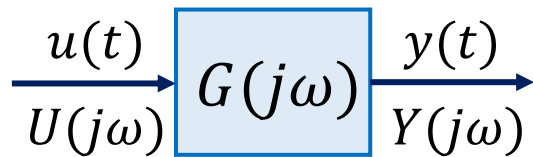
- 对于一个线性时不变系统（linear time-invariant system，即LTI系统，又称线性定常系统），其传递函数为 $G(s)$ ，频率响应为 $G(j\omega)$ ，有



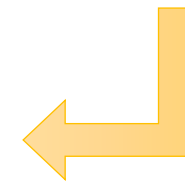
$$\underline{Y(s) = U(s)G(s)}$$

$g(t)$ 为LTI系统 $G(s)$ 的单位脉冲响应

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t - \tau) d\tau = u(t) * g(t)$$



$$\underline{Y(j\omega) = U(j\omega)G(j\omega)}$$

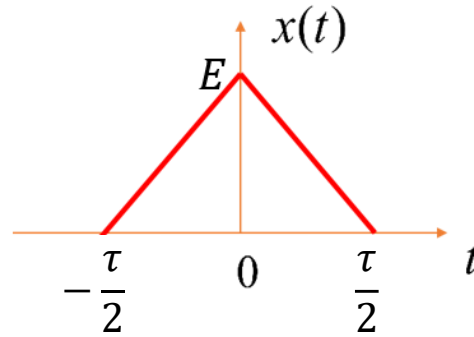


时域卷积定理

写法 $X(j\omega) = X(e^{j\omega})$

回顾例1-11：求三角形脉冲信号 $x(t)$ 的频谱。（简单求解方法）

$$x(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2}{\tau} |t| \right) & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



时域卷积定理

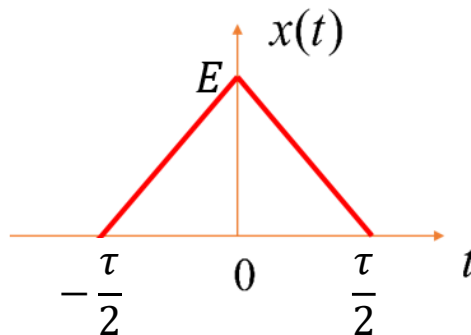
解：用单位斜坡信号 $r(t)$ 表示三角形脉冲信号 $x(t)$ ，得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2E}{\tau} \left\{ r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - r(t) - \left[r(t) - r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{2E}{\tau} \left[r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2r(t) + r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

相当于两个单矩形脉冲的卷积

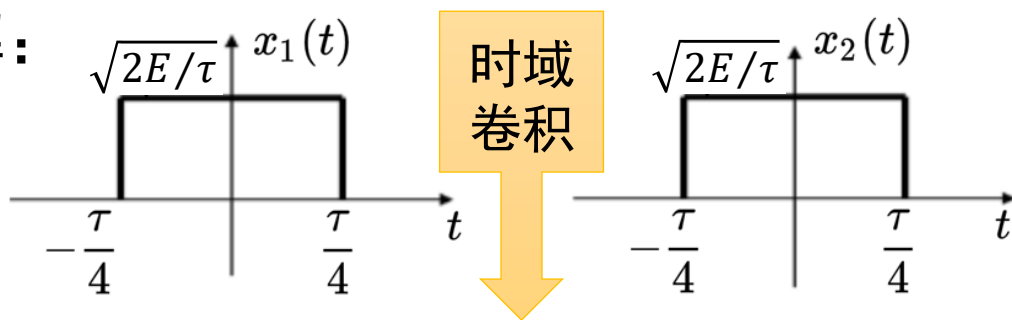
回顾例1-11：求三角形脉冲信号 $x(t)$ 的频谱。（简单求解方法）

$$x(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2}{\tau} |t| \right) & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

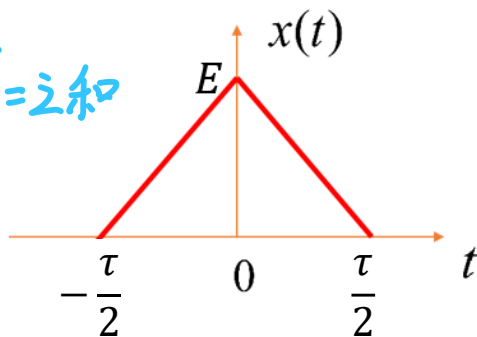


↑
时域卷积定理

解：



幅值·斜率的平方根
脉宽·结果的脉宽=之和



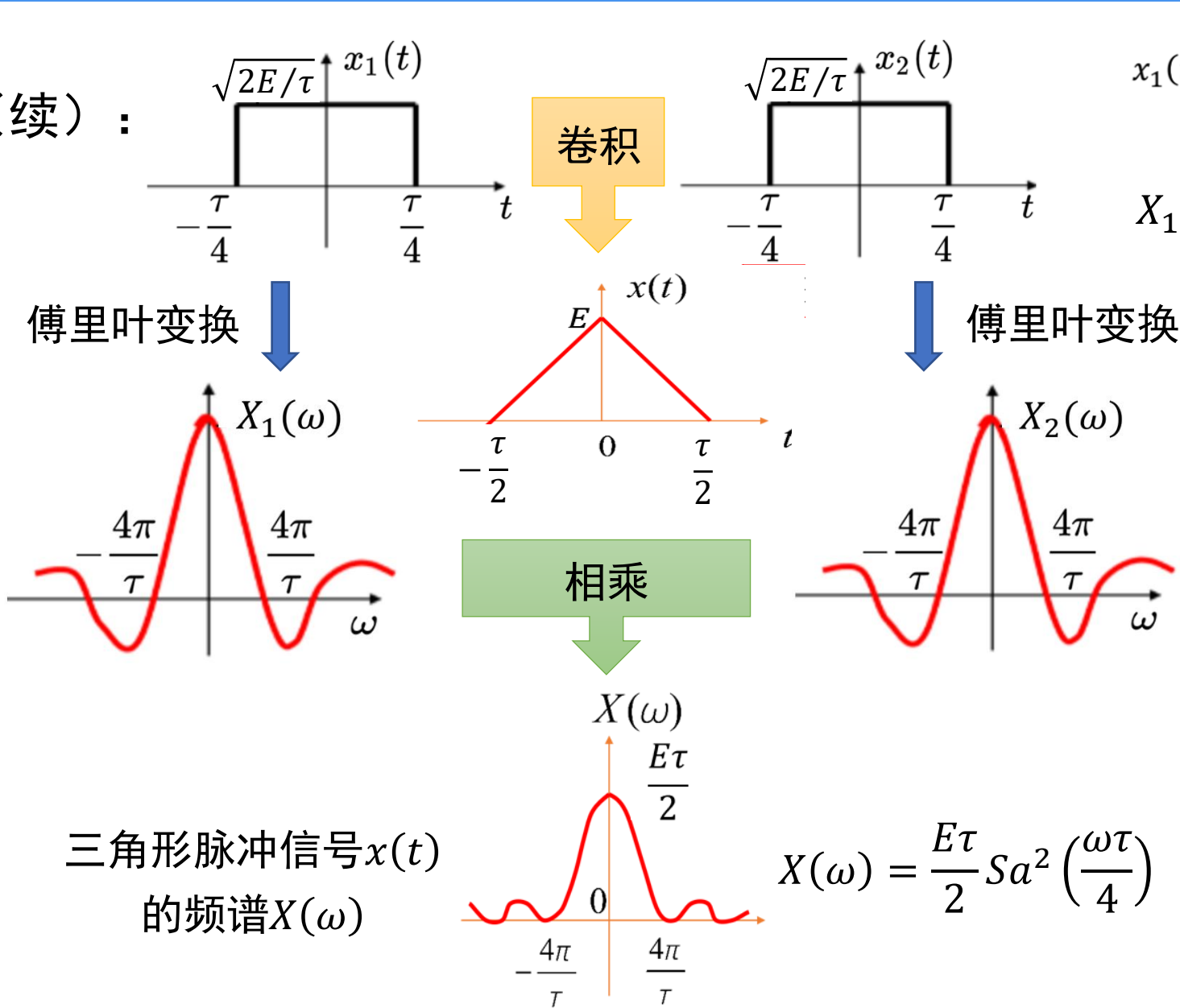
已知 $x_1(t) = x_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \left[u\left(t + \frac{\tau}{4}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{4}\right) \right]$

$$x_1(t) * x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} * \left[\int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{4}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{4}\right) \right] * \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \left[r\left(t + \frac{\tau}{4}\right) - r\left(t - \frac{\tau}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{2E}{\tau} \left[r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2r(t) + r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = x(t)$$

解 (续) :



$$x_1(t) = x_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \left[u\left(t + \frac{\tau}{4}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{4}\right) \right]$$

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \cdot \frac{\tau}{2} Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

已有 $x_1(t) * x_2(t) = x(t)$
由时域卷积定理, 得

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \\ &= \frac{2E}{\tau} \cdot \frac{\tau^2}{4} Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \\ &= \frac{E\tau}{2} Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \end{aligned}$$

$$X(\omega) = \frac{E\tau}{2} Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

频域卷积定理

用处 ①用加窗法求时限函数的傅氏变换

②时域采样的推导过程: $f_s(t) = f(t)p(t) \Rightarrow F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$

若 $f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega), f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$, 则

$$\underline{f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)}$$

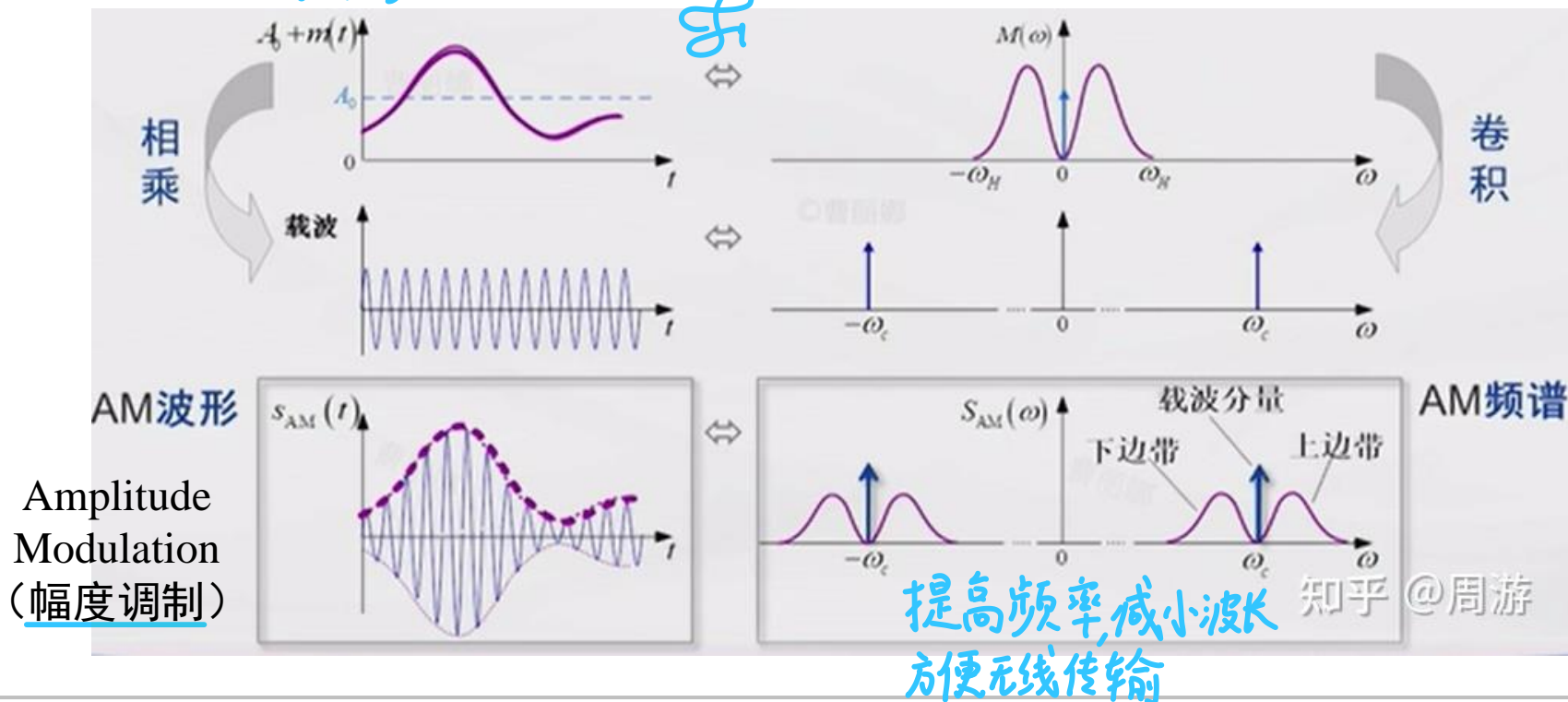
证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)]f_2(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)e^{j\lambda t} d\lambda \right] f_2(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{傅里叶反变换式}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda \quad (\text{交换积分次序+频移特性}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)F_2(\omega - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \end{aligned}$$

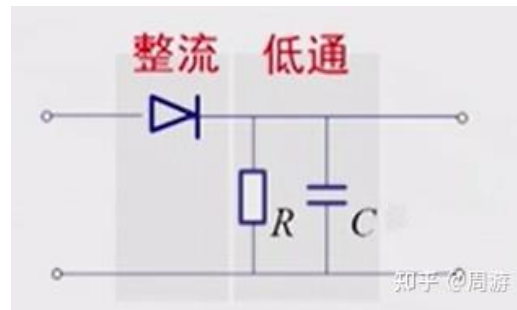
频域卷积定理的应用：通信系统中的调制与解调

- 信息本身有带宽（例如声音信号带宽22KHz左右），但无法被无线传输
- 载波：纯净（单频、带宽为0）无法携带大量信息，但高频方便无线传输

正弦信号



解调时，通过低通滤波器检出信号包络，恢复原信号



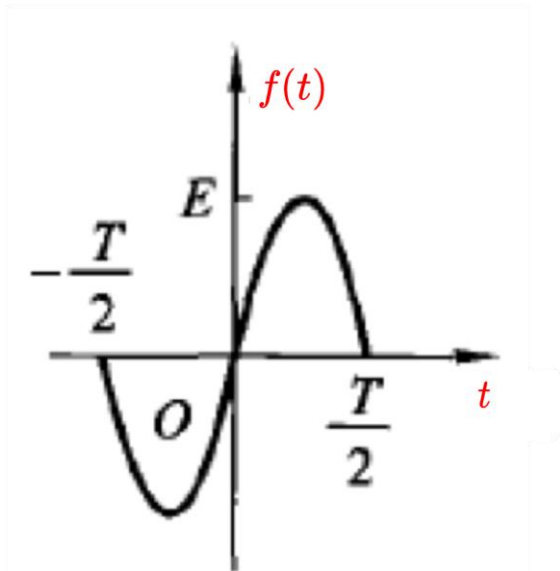
★ 窗函数法

非周期信号

回顾例1-6：求单周正弦脉冲的傅里叶变换。

$$f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

(频域卷积定理方法) **加窗法**



解：该信号可以写为 $f(t) = \overbrace{E \sin \omega_1 t}^{\text{幅值}} \cdot \overbrace{\left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]}^{\text{窗函数}}$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

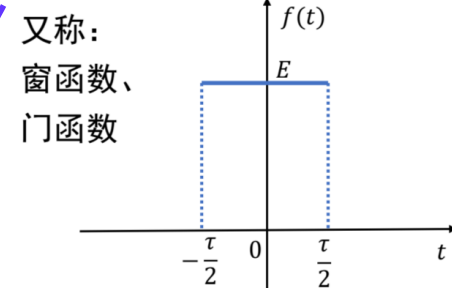
(相当于用一个单矩形脉冲取出了 $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 的正弦信号 $E \sin \omega_1 t$)

窗函数

由频域卷积定理和正弦信号的傅里叶变换，得

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot E \cdot \mathcal{F}[\sin \omega_1 t] * \mathcal{F}\left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{E}{2\pi} \cdot j\pi[\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)] * TSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



又称：窗函数、门函数

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$F(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

其中 $E = 1, \tau = T$ **要注意**

特殊点 (只讨论正频率)

当 $\omega = \omega_1$ 时，由 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ，有

$$F(\omega_1) = \frac{ET}{2j} [Sa(0) - Sa(2\pi)]$$

$$= \frac{ET}{2j} (1 - 0) = \frac{ET}{2j}$$

$$= \frac{ET}{2j} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)] * Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$= \frac{ET}{2j} \left[Sa\left(\frac{(\omega - \omega_1)T}{2}\right) - Sa\left(\frac{(\omega + \omega_1)T}{2}\right) \right]$$

$$= j \frac{2E\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

性质：卷了也是白卷
注意到 $\omega_1 T = 2\pi$ ，继续化简

课程内容

1.1 连续信号的时域描述和分析

1.2 连续信号的频域分析

1.2.1 周期信号的傅里叶级数

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换

1.2.3 傅里叶变换的性质

1.2.4 周期信号的傅里叶变换

1.3 连续信号的复频域分析

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$1 \xleftrightarrow{f_1} 2\pi \delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{f_1} 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\sin \omega_0 t \xleftrightarrow{\frac{f_1}{f_1^{-1}}} j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\frac{f_1}{f_1^{-1}}} \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

周期信号的傅里叶变换 \Rightarrow 非周期离散的频谱函数

级数展开

- 一个周期内绝对可积的周期信号可以用傅里叶级数表示
- 在无限区间内绝对可积的非周期信号可以用傅里叶变换表示
- 周期信号的频谱是离散谱，非周期信号的频谱是连续谱
- 通过引入冲激函数 δ ，可以得出周期信号的傅里叶变换
- 把周期信号与非周期信号的频域分析统一起来，给分析带来便利

我们首先讨论复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 、正弦信号 $\sin\omega_0 t$ 和余弦信号 $\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换，然后讨论一般周期信号的傅里叶变换。

复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{f} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

直接求很困难,

- 考虑 $f(t)e^{j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

设 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

- 直接用**频移性质**, 令 $f(t) = 1$, 则 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$\underline{\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

正弦信号 $\sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换 $\sin \omega_0 t \xrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \frac{1}{2j} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

余弦信号 $\cos \omega_0 t$ 的傅里叶变换 $\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \frac{1}{2} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

一般周期信号的傅里叶变换

- 一般周期信号 (傅里叶级数) 展开成无穷多项复指数函数的线性组合

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

组合系数 复指数函数

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



$$\mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_1)$$

对展开后的每一项分别求傅氏变换
由于傅氏变换的线性性, $F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}]$

傅里叶变换为

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

其中 $F(n\omega_1) = F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$

冲激位于信号的谐频 $n\omega_1$ (0, $\pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \dots$) 处, 强度等于 $f(t)$ 傅里叶级数系数 F_n 的 2π 倍

- 周期信号的傅里叶变换 (频谱密度函数) 由 **无穷多个冲激函数** 组成 周期冲激序列

周期信号傅里叶级数与单脉冲傅里叶变换的关系

周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

单脉冲信号（非周期信号）的傅里叶变换为:

$$F_0(\omega) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

(满足傅里叶变换的性质)

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

周期信号的复傅里叶系数

利用单脉冲的傅里叶变换式
可以很方便地求出周期脉冲
序列的傅里叶系数!

例：周期矩形脉冲信号的傅里叶变换

- 前面求出周期矩形脉冲信号的傅里叶级数系数为

$$F(n\omega_1) = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

单矩形脉冲信号的
傅里叶变换 $F_0(\omega)$

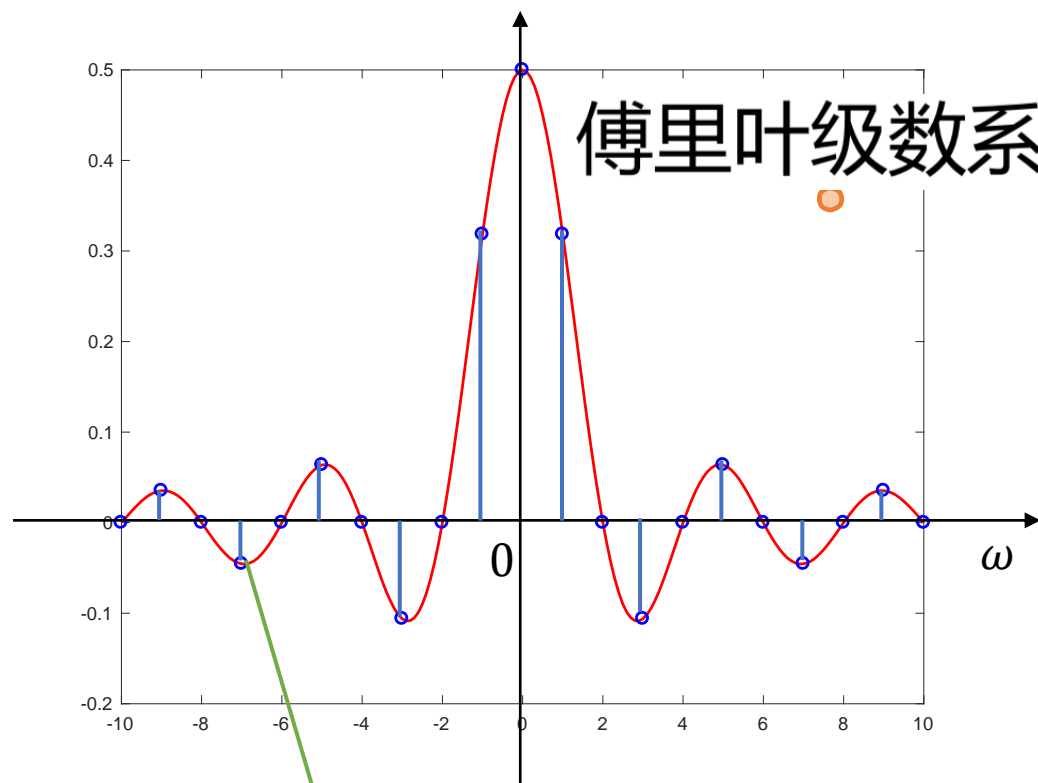
$$F_0(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

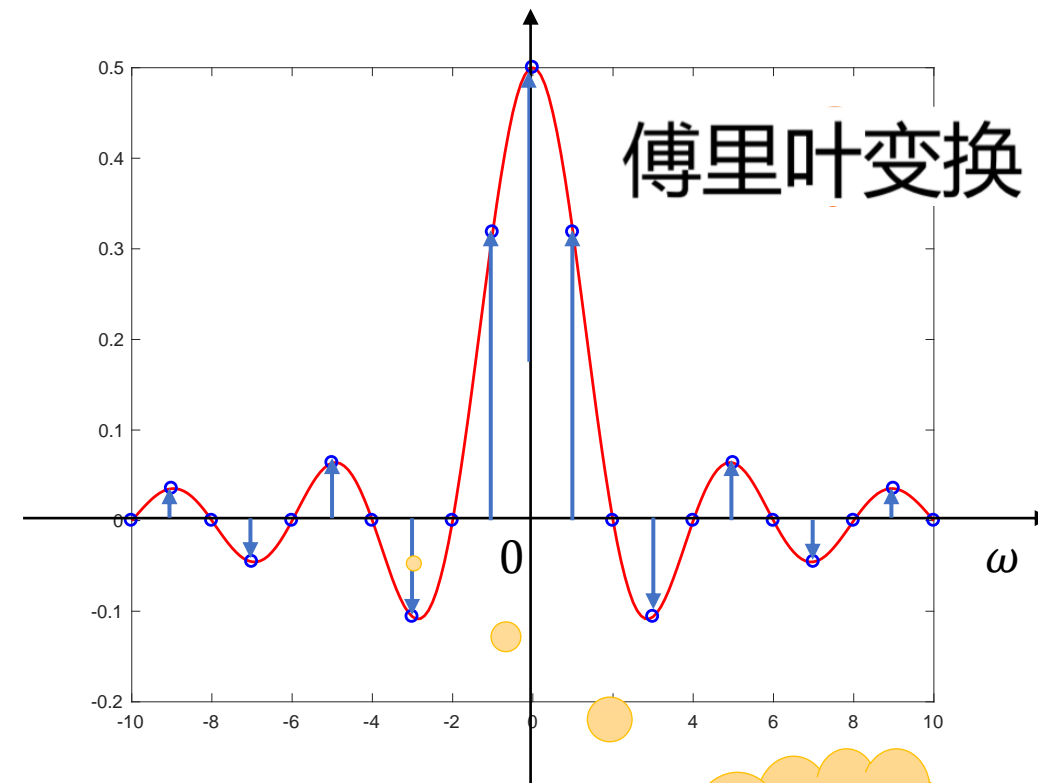
因此，周期矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1) \\
 &= E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1) \quad (\text{即：只在 } \omega = n\omega_1 \text{ 时有意义})
 \end{aligned}$$

周期矩形脉冲信号的傅里叶级数系数 vs 傅里叶变换



离散函数



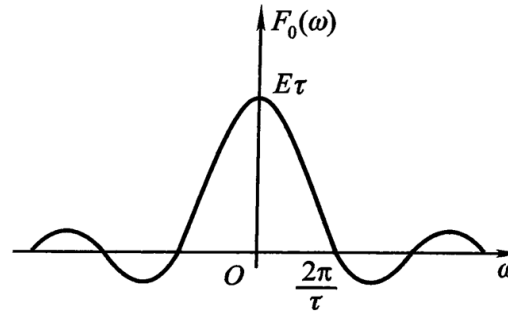
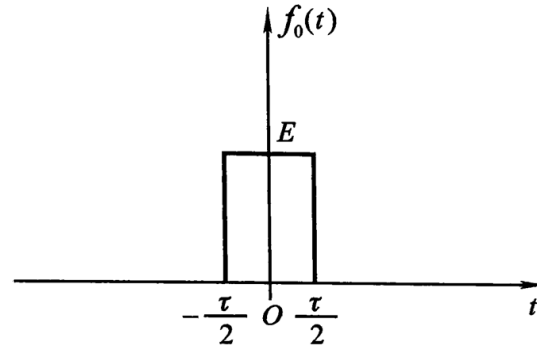
冲激序列

相同的包络线，都是离散的

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

周期矩形脉冲信号的傅里叶级数系数 vs 傅里叶变换

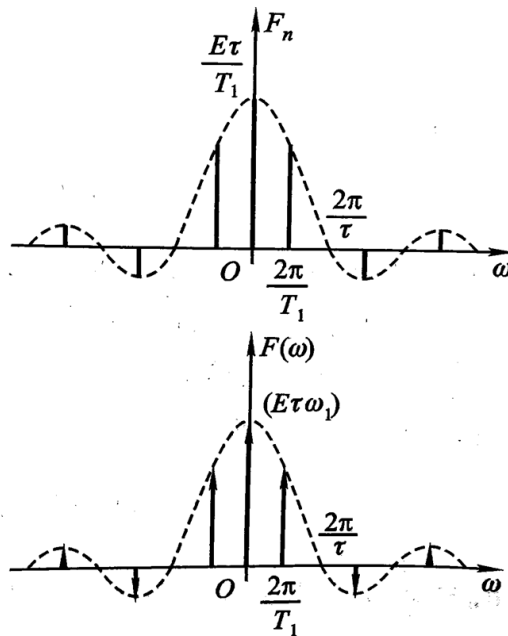
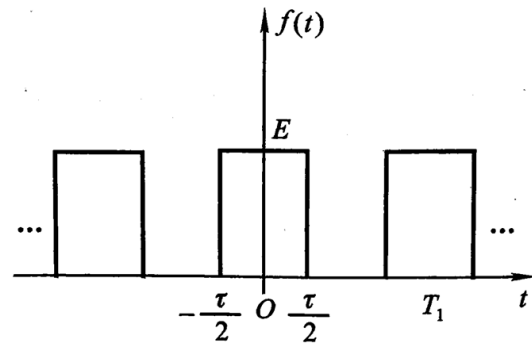
单矩形脉冲
信号 $f_0(t)$



单矩形脉冲信号的
傅里叶变换 $F_0(\omega)$
(连续谱)

$$F_0(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

周期矩形脉冲
信号 $f(t)$



周期矩形脉冲信号的
傅里叶级数系数 F_n

$$F(n\omega_1) = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

周期矩形脉冲信号的
傅里叶变换 $F(\omega)$

$$E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

时域信号

连续时间傅里叶变换 CTFT

非周期

非周期、连续频谱密度函数

周期

非周期、离散频谱函数

周期矩形脉冲信号的傅里叶变换

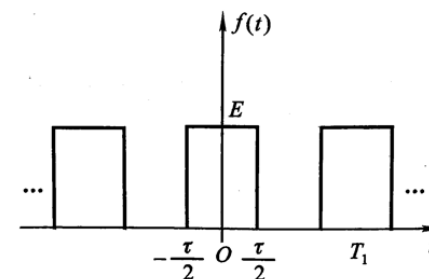
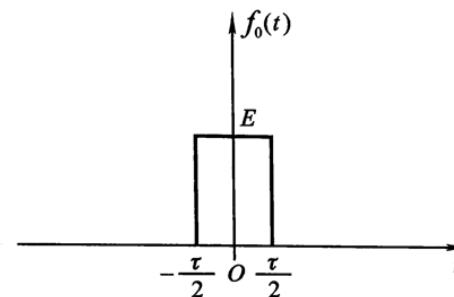
从单矩形脉冲信号 $f_0(t)$ 出发，其傅里叶变换为

$$F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

则周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的傅里叶级数为

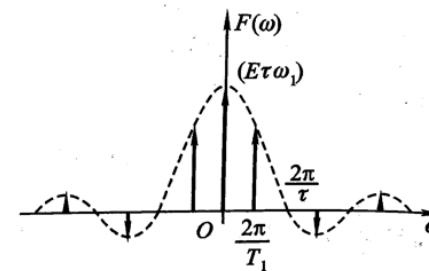
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} E\tau \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

复傅里叶系数



则周期矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_1} E\tau \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

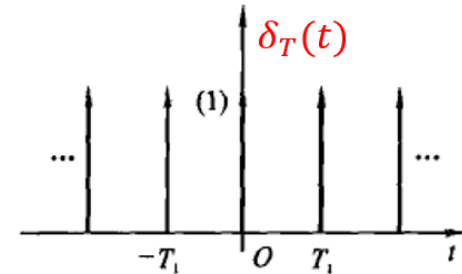


$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

例：周期单位冲激序列的傅里叶级数与傅里叶变换

周期单位冲激序列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$



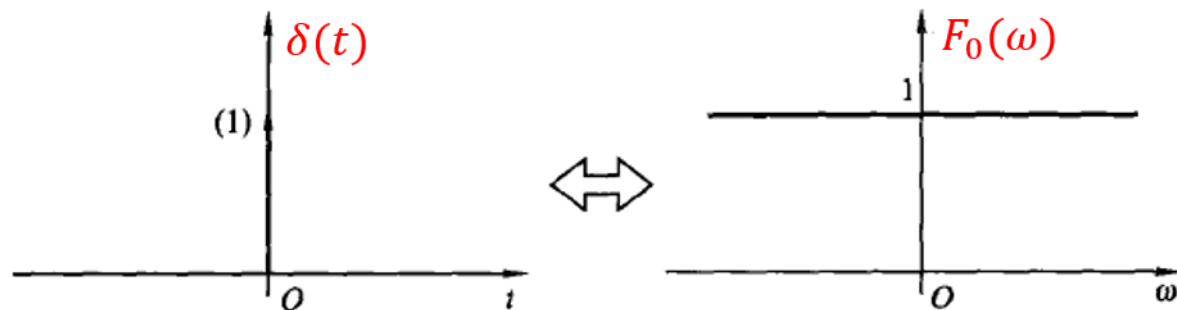
$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad \rightarrow \quad F_n = \frac{1}{T_1} \mathcal{F}[\delta(t)] \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T_1} \quad \rightarrow \quad \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1 t}$$

傅里叶级数

傅里叶变换 $\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_1} \delta(\omega - n\omega_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \delta(\omega - n\omega_1)$

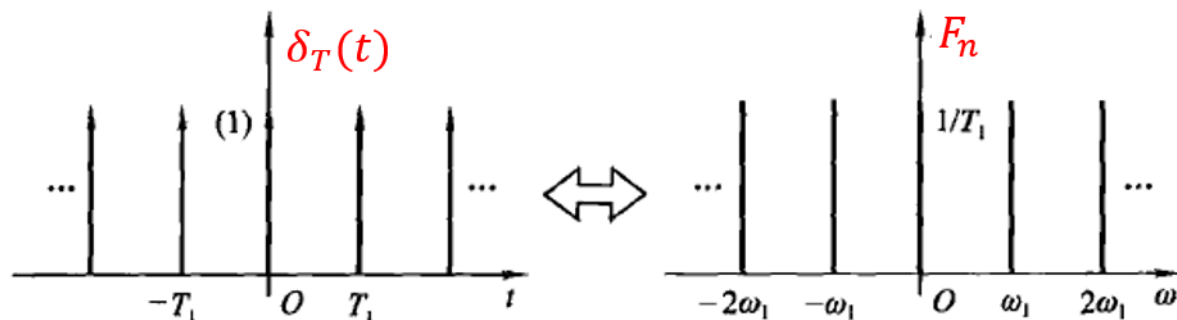
周期单位冲激序列的傅里叶级数系数 vs 傅里叶变换

单位冲激信号
 $\delta(t)$

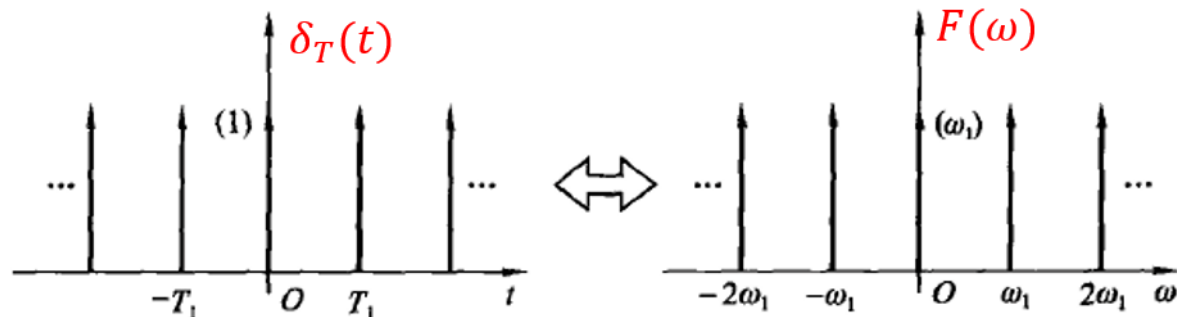


单位冲激信号的
傅里叶变换 $F_0(\omega)$
 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$

周期单位
冲激序列
 $\delta_T(t)$



周期单位冲激序列的
傅里叶级数系数 F_n
 $F_n = \frac{1}{T_1} \mathcal{F}[\delta(t)] \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T_1}$



周期单位冲激序列的
傅里叶变换 $F(\omega)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \delta(\omega - n\omega_1)$$

课程内容

1.1 连续信号的时域描述和分析

1.2 连续信号的频域分析

1.2.1 周期信号的傅里叶级数

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换

1.2.3 傅里叶变换的性质

1.2.4 周期信号的傅里叶变换

1.3 连续信号的复频域分析

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 傅里叶变换（傅氏变换，Fourier Transform）

时域（或空间域）

变换

频域

要求信号满足狄里赫利条件！

- 直流信号、周期信号等：不满足狄里赫利条件，引入冲激函数或极限来求解傅里叶变换
- 功率型非周期信号、指数增长型信号 e^{at} ($a > 0$) 等：难以求解傅里叶变换

- 拉普拉斯变换（拉氏变换，Laplace Transform）

频域

推广

复频域

克服傅里叶变换的局限性，扩大频谱分析的范围

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

• 傅里叶变换对
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- 对于不满足绝对可积的信号，例如 e^{at} ($a > 0$)，不能直接求傅里叶变换，而是乘以一个随时间衰减的因子 $e^{-\sigma t}$ ： σ 为实数

$$\mathcal{F}[e^{at} \cdot e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt, \quad \sigma > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{at}| e^{-\sigma t} = 0$$

满足绝对可积条件

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 令 $F_b(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[e^{at} \cdot e^{-\sigma t}]$, $f(t) = e^{at}$, 则

$$F_b(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \xrightarrow[\sigma \in \mathbb{R}]{s = \sigma + j\omega} F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- 同理，由傅里叶反变换式，考虑衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 得

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

左右同乘 $e^{\sigma t}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st} ds$$

$s = \sigma + j\omega$
 $\sigma \in \mathbb{R}, ds = j d\omega$
 $\omega \rightarrow \pm\infty, s \rightarrow \sigma \pm j\infty$

定积分换元
 ① 换变量
 ② 换微分
 ③ 换上下限

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 双边拉普拉斯变换对 $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_b(s)$

$$\begin{cases} F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st} ds & \text{反变换} \end{cases}$$

积分上下限包括了时域的正、负区间

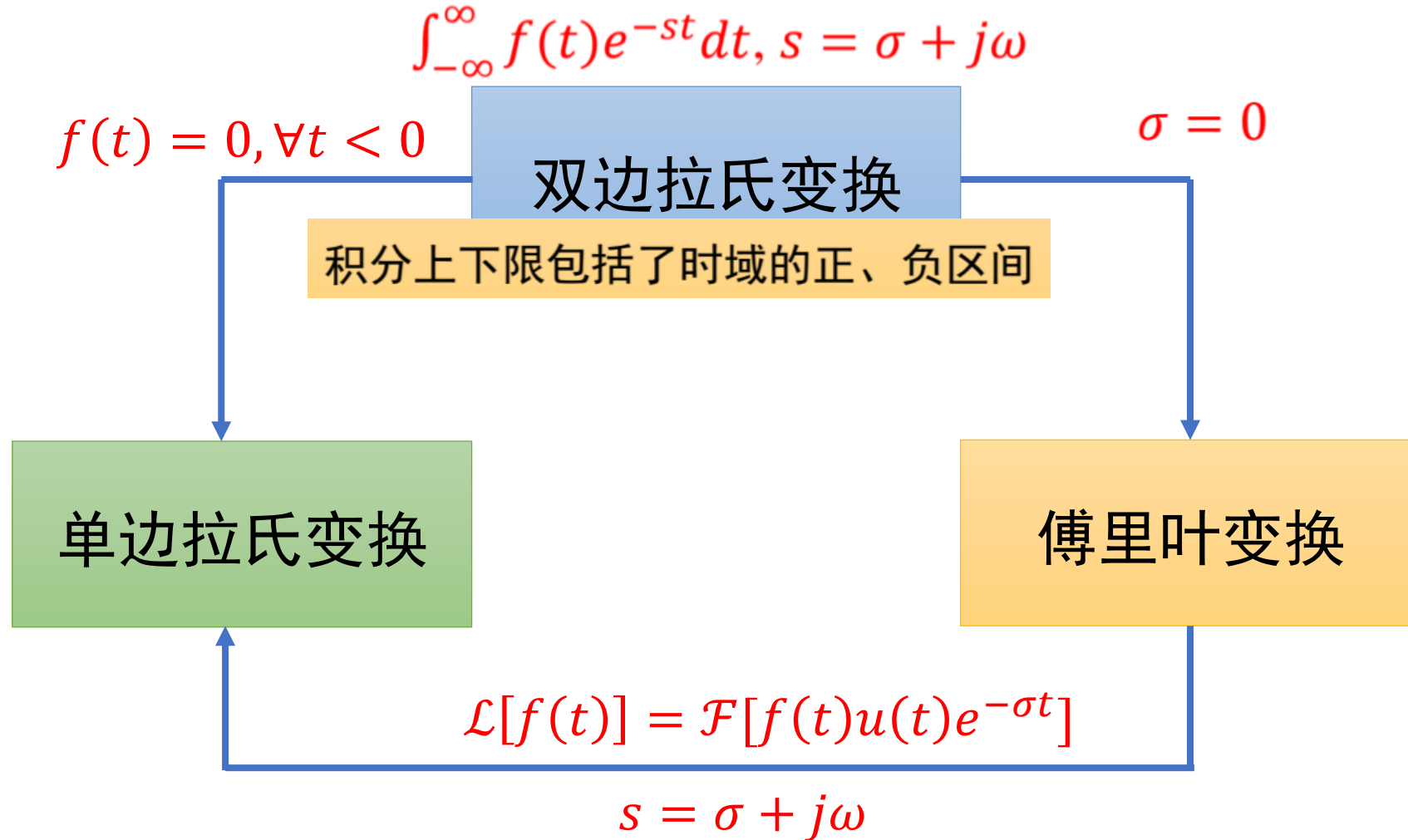
- 表明信号 $f(t)$ 是复指数信号 e^{st} ($s = \sigma + j\omega$) 的线性组合，一般有
 - 当 $\sigma \neq 0$ ，增幅振荡 ($\sigma > 0$) 或减幅振荡 ($\sigma < 0$)
 - 当 $\sigma = 0$ ，双边拉普拉斯变换式退化为傅里叶变换式，即

$$F_b(s) = F_b(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$$

拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

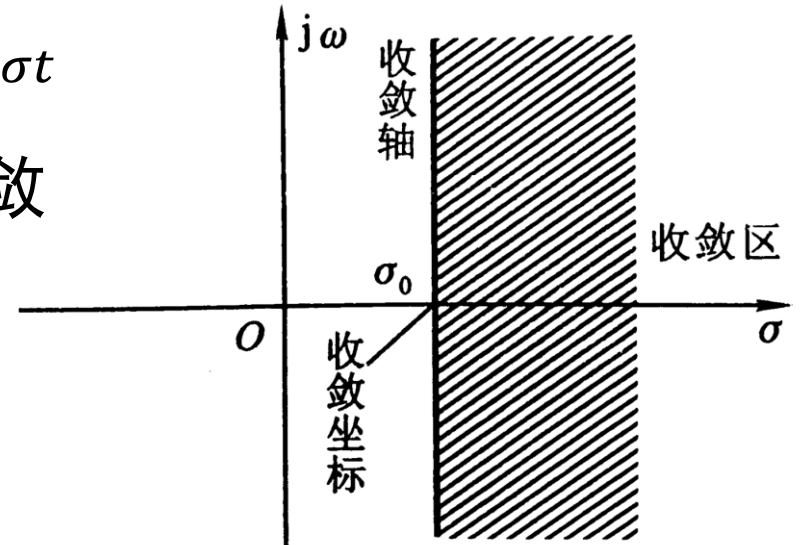
其中式(1-118)为双边拉普拉斯变换式, $X_b(s)$ 称为 $x(t)$ 的双边拉普拉斯变换, 它是复频率 $s = \sigma + j\omega$ 的函数。式(1-119)为双边拉普拉斯反变换, 表明信号 $x(t)$ 是复指数信号 $e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ 的线性组合。针对一般的信号 $x(t)$, 由于 σ 可正、可负也可为零, 复指数信号 e^{st} 可能是由增幅振荡信号或减幅振荡信号, 或等幅振荡信号组成。如果 $\sigma = 0$, 则完全与傅里叶变换一致, 信号 $x(t)$ 可视为由一系列频率无限密集, 幅度为无限小的无限多个等幅振荡的复指数信号 $e^{j\omega t}$ 线性组合而成; 当 $\sigma \neq 0$ 时, $x(t)$ 则可视为由一系列频率无限密集、幅度为无限小的无限多个变幅振荡的复指数信号 $e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ 线性组合而成, $X_b(s)$ 表示的是单位复频率带宽内变振幅振荡的复指数信号的合成振幅, 具有密度性质。因此, $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_b(s)$ 与傅里叶变换 $X(\omega)$ 类似, 也反映了信号的基本特征, 而且正因为拉普拉斯变换把信号 $x(t)$ 分解为一系列变振幅的复指数信号, 它比傅里叶变换更具有普遍意义, 对信号 $x(t)$ 的限制约束更少, 从这一角度来看, 可以认为拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广, 而傅里叶变换是拉普拉斯变换当 $\sigma = 0$ 时的特殊情况。

拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系



拉普拉斯变换的收敛域

- 为使 $f(t) = e^{at}$ 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 后收敛, $e^{-\sigma t}$ 必满足 $\sigma > a$, 否则 $e^{at} \cdot e^{-\sigma t}$ 在 $t \rightarrow \infty$ 仍不收敛
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$
- 此时 $f(t)e^{-\sigma t}$ 在 $\sigma > \sigma_0$ 的全部范围是收敛的, 其积分存在, 可以进行拉普拉斯变换
- σ_0 与函数 $f(t)$ 的性质有关, 指出了收敛条件, 根据 σ_0 的数值 (收敛坐标) 在 s 平面划分收敛区域
- 拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广



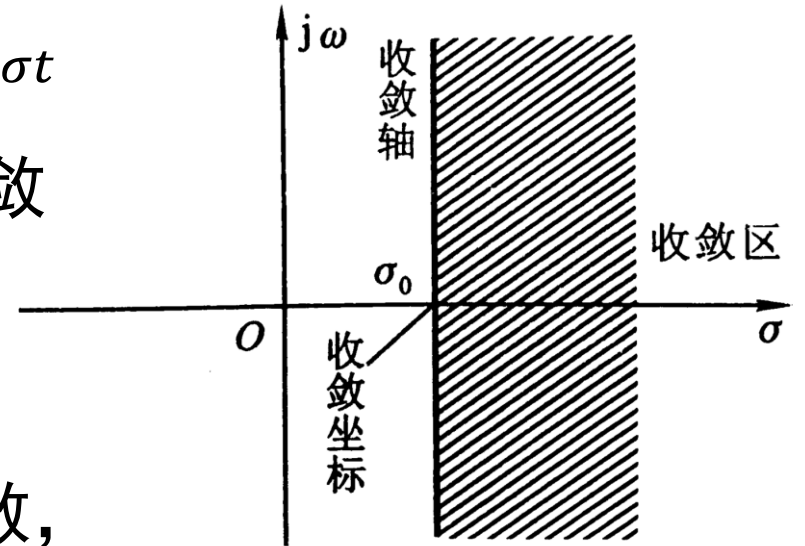
拉普拉斯变换的收敛域

- 为使 $f(t) = e^{at}$ 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 后收敛, $e^{-\sigma t}$ 必满足 $\sigma > a$, 否则 $e^{at} \cdot e^{-\sigma t}$ 在 $t \rightarrow \infty$ 仍不收敛

- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$

- 满足上式的函数称为“指数阶函数”, 如发散, 可以借助于指数函数的衰减变为收敛函数

- 存在傅里叶变换的信号一般也存在拉普拉斯变换 (个别信号除外, 如单位直流信号 $f(t) = 1$, $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, 但不存在拉氏变换)
- 存在拉普拉斯变换的信号, 其傅里叶变换不一定存在



拉普拉斯变换的收敛域

不存在。这进一步表明了尽管由于衰减因子的引入使拉普拉斯变换具有比傅里叶变换更强的收敛性，但其收敛性仍是有限的。换言之，并不是任何信号的拉普拉斯变换都存在，也不是 s 平面上的任何复数都能使拉普拉斯变换收敛。

综合上面的讨论，我们可以为各种信号拉普拉斯变换的收敛域归纳出如下基本特点：

1) 连续信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_b(s)$ 的收敛域的边界是 s 平面上平行于 $j\omega$ 轴的直线。

这是因为决定 $x(t)e^{-\sigma t}$ 是否绝对可积的只是 s 的实部，而与虚部无关。

2) 右边信号 $x(t)u(t-t_0)$ 的拉普拉斯变换如果存在，则它的收敛域具有 $\sigma > \sigma_0$ 形式，即收敛域具有左边界 σ_0 。

3) 左边信号 $x(t)u(-t+t_0)$ 的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域具有右边界 σ_0 ，说明同上。

4) 双边信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域必为 s 平面上具有左边界和右边界的带状区域。

一个双边信号是指对于 $t > 0$ 和 $t < 0$ 都具有无限范围的信号，对此，可以选取一个合适的时间 t_0 ，将它分为右边信号 $x_1(t)$ 和左边信号 $x_2(t)$ ，由上讨论，右边信号拉普拉斯变换 $X_{b1}(s)$ 的收敛域为 $\sigma > \sigma_1$ ，左边信号拉普拉斯变换 $X_{b2}(s)$ 的收敛域为 $\sigma < \sigma_2$ 。由于 $x(t)$ 的拉普拉斯变换存在，所以其收敛域必为上述 $X_{b1}(s)$ 和 $X_{b2}(s)$ 收敛域的公共部分，即 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ，且 $\sigma_1 < \sigma_2$ ，它是 s 平面上以 σ_1 为左边界、 σ_2 为右边界的带状区域。如果 $\sigma_1 > \sigma_2$ ， $X_{b1}(s)$ 和 $X_{b2}(s)$ 的收敛域无公共部分， $x(t)$ 的拉普拉斯变换也就不存在了。

5) 如果时限信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_b(s)$ 存在，则其收敛域必为整个 s 平面。

右边信号 $x(t)u(t-t_0)$

