2024年秋季学期

# 信号分析与处理

## 第二章 离散信号的分析

授课教师：谢晓晨

哈尔滨工业大学深圳校区

机电工程与自动化学院

# 课程内容

2.1 信号的采样和恢复

2.2 离散信号的时域描述和运算

2.3 离散信号的频域分析

2.4 快速傅里叶变换及应用

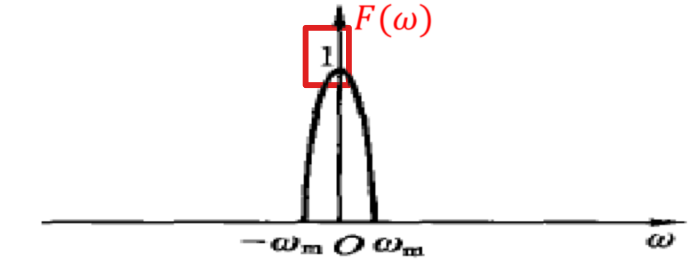
2.5 离散信号的Z域分析

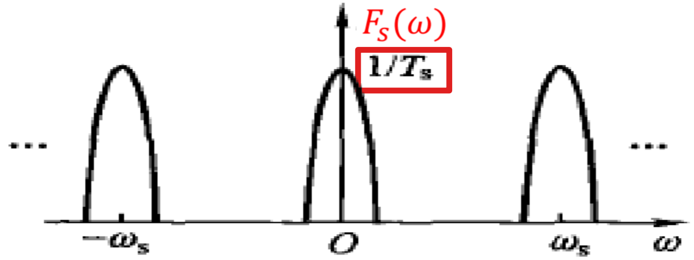
## 时域采样

冲激采样之后的频谱变化

$p(t)=\delta_T(t)$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$




## 频域采样

对$F(\omega)$在频域上以$\omega_0$为间隔进行采样，得到$F_p(\omega)$

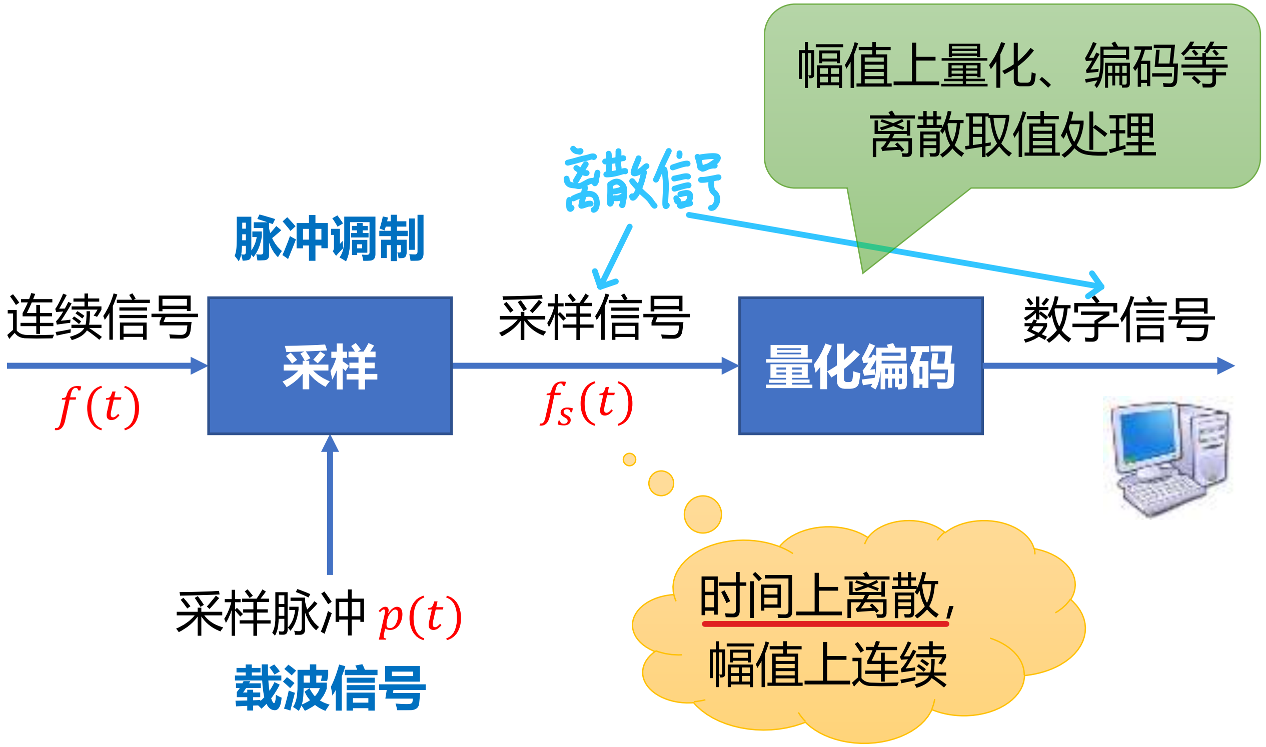
$$f_p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(t-kT_0)$$ 利用 $\mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)]=\frac{1}{\omega_0}\delta_T(t)$

# 离散信号 vs 采样信号 这两者在幅值上都可以是连续的

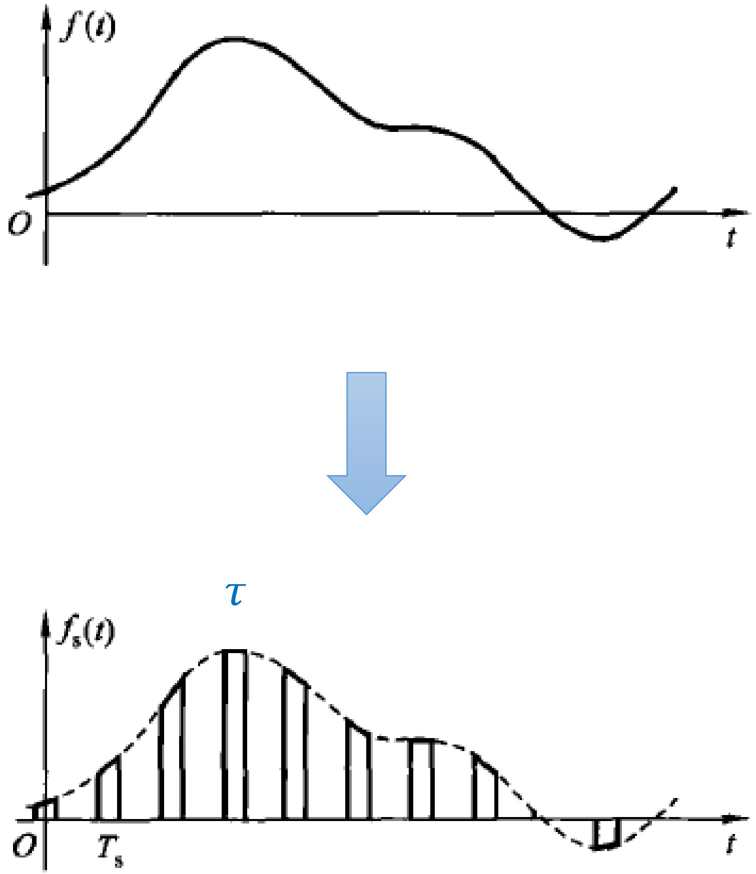
- 离散信号
  - 在时间上是离散的，只在某些不连续的规定时刻给出信号的瞬时值
  - 产生方式：连续时间信号的采样或者本身就是离散信号
  - 适用于计算机处理
- 采样信号 ← 离散信号的一种
  - 利用采样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“抽取”一系列的离散样值
  - 通常用 $f_s(t)$ 表示（下标 s 对应 sampling，即“采样/抽样”）

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$$

# 采样过程

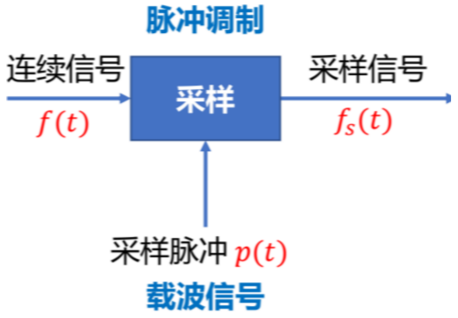



$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$$



$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$ $\quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega - n\omega_1)$

# 时域采样




$f_s(t) = f(t)\cdot p(t)$

- 采样周期 $T_s$，采样角频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$
- $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$
- $P(\omega) = \mathcal{F}[p(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi P_n\,\delta(\omega - n\omega_s)$ p(t)为周期为$T_s$的函数 $P_n$为其傅里叶系数
- $F_s(\omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$
- 由频域卷积定理，$\boxed{\text{结论}}$: ①求$P_n$ ②求$F_s(\omega)$ 性质: $F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) = F(\omega - n\omega_s)$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{\cancel{2\pi}}F(\omega) * \cancel{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n\,\delta(\omega - n\omega_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s)$$

其中$P_n$为傅里叶系数，即

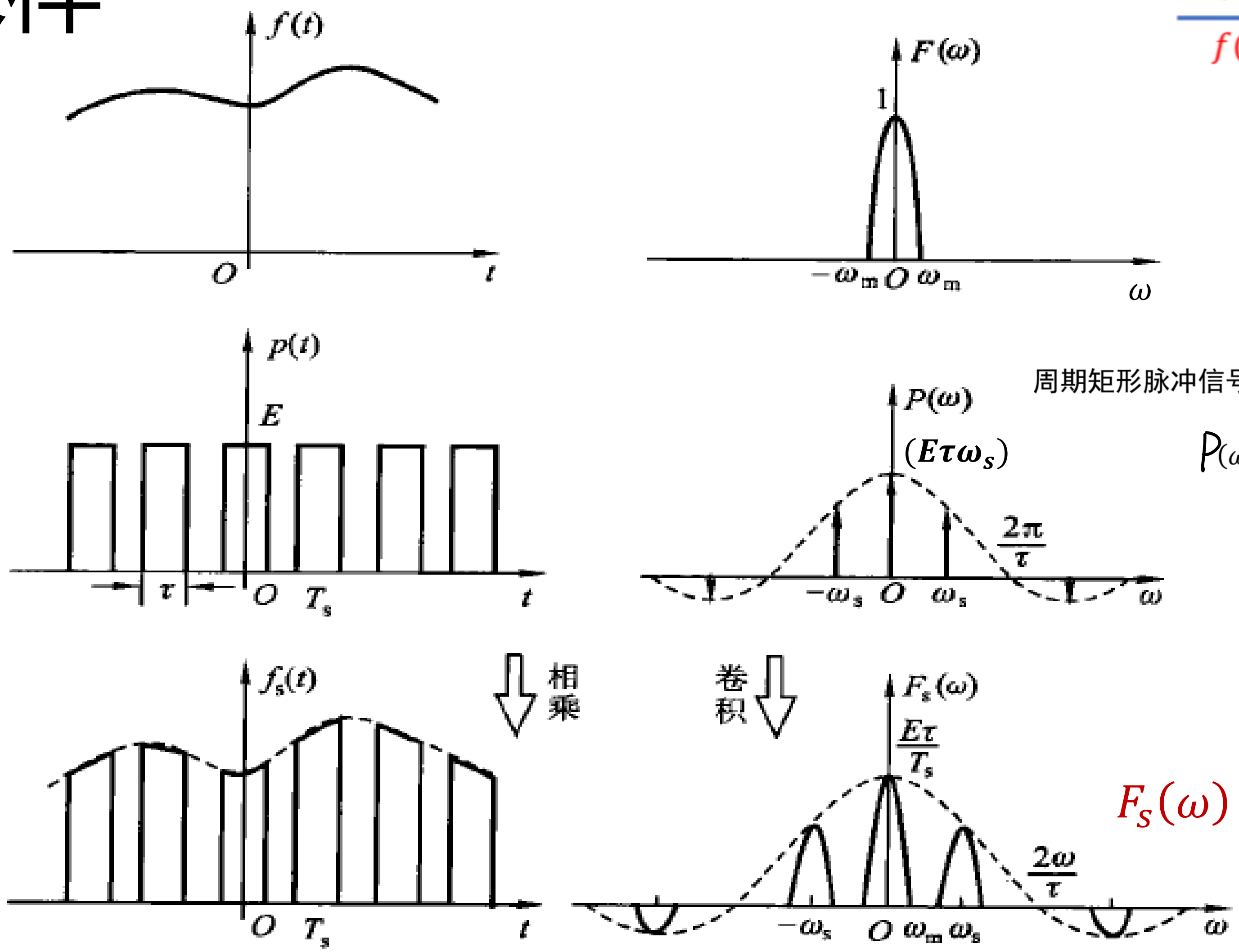
采样脉冲p(t)的

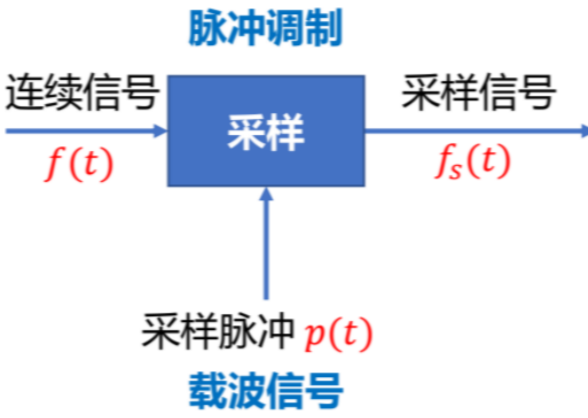
$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t)e^{-jn\omega_s t}dt$$

在频域上以$\omega_s$为周期进行周期延拓

不等幅

# 矩形脉冲采样




脉冲幅度$E$
脉宽$\tau \ll T_s$

周期矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_1} E\tau Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\omega_1)$$

此处$T_1$为$T_s$，$\omega_1$为$\omega_s$

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$　　$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega - n\omega_1)$

# 矩形脉冲采样

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s)$$

①先求$P_n$
②代入,得到$F_s(\omega)$

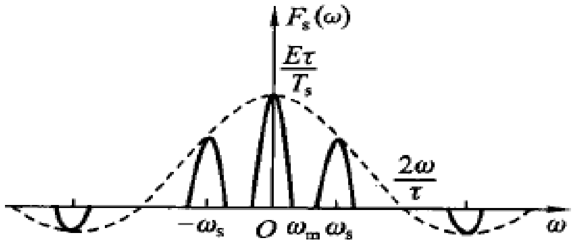
周期矩形脉冲信号的

**傅里叶级数系数**

采样脉冲

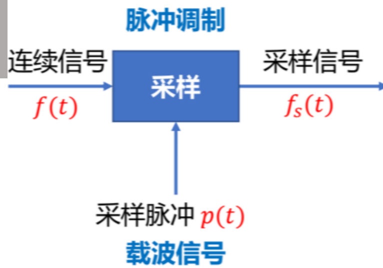
求法一: $P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t)e^{-jn\omega_s t}\,dt = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_s t}dt = \frac{E\tau}{T_s} Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$

求法二 单矩形脉冲信号$f_0(t)$, $F_0(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, $P_n = \frac{1}{T_s}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_s} = \frac{E\tau}{T_s}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$




$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

$F(\omega)$在以$\omega_s$为周期的延拓过程中，幅度以$Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$作为包络函数的规律变化




# 冲激采样（理想采样）

$P(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$

周期单位冲激序列

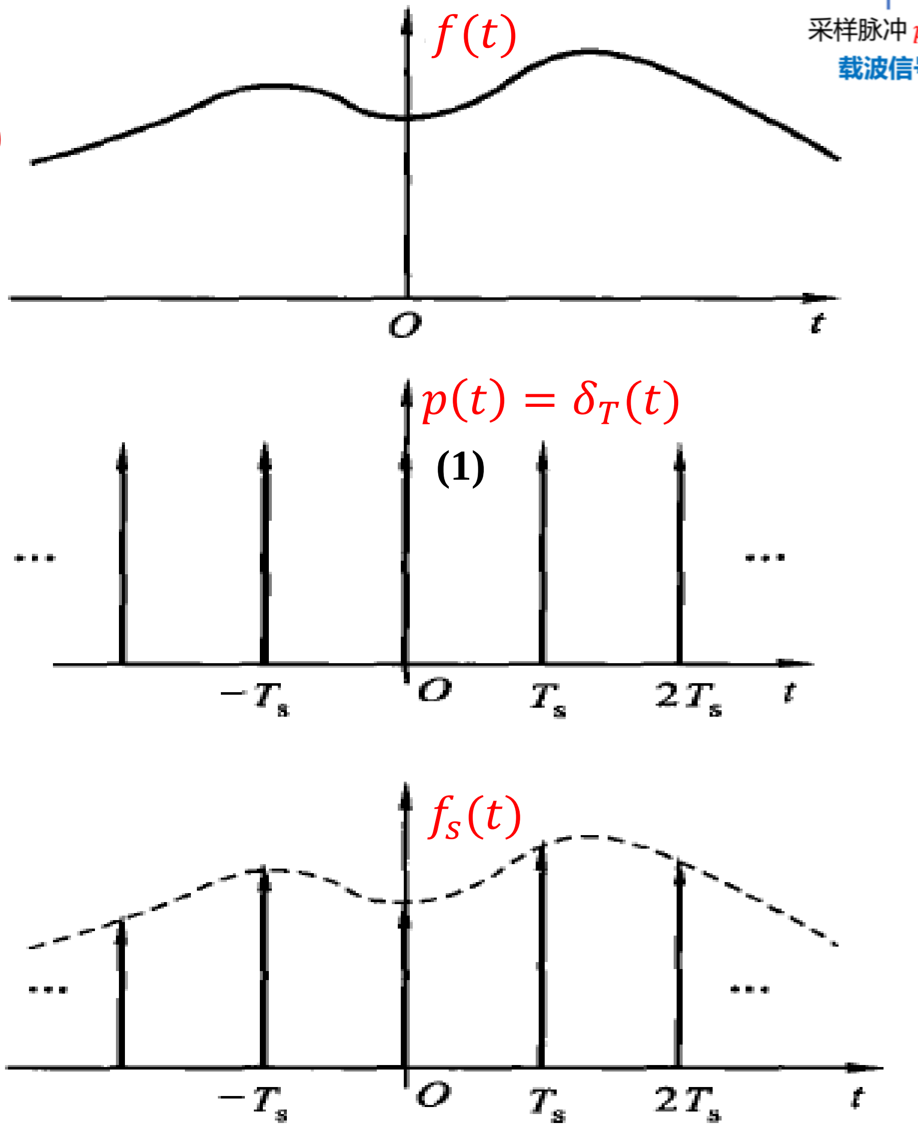
又称“Dirac comb function” $\delta_T(t)$

$$f_s(t)=f(t)\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)}$$

$P(t)$
采样脉冲

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$f_s(t)=f(t)\delta_T(t)$$



$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega = n\omega_1} \qquad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega - n\omega_1)$$



# 冲激采样

周期单位冲激序列的复傅里叶系数

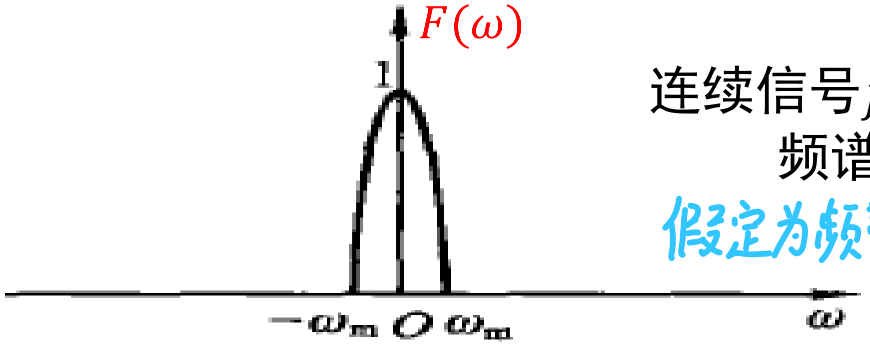
$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_s}$$

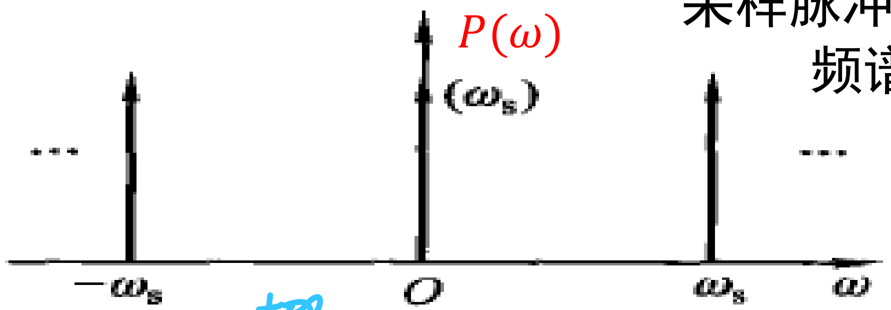
求法二、由于 $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$

故 $P_n = \frac{1}{T_s} 1\Big|_{w=nw_s} = \frac{1}{T_s}$ 大小与 $n$ 无关




连续信号$f(t)$的频谱

假定为频带受限




采样脉冲$p(t)$的频谱

$$P(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi P_n \delta(w - nw_s) = w_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(w - nw_s)$$

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

和周期矩形脉冲采样结果的区别？

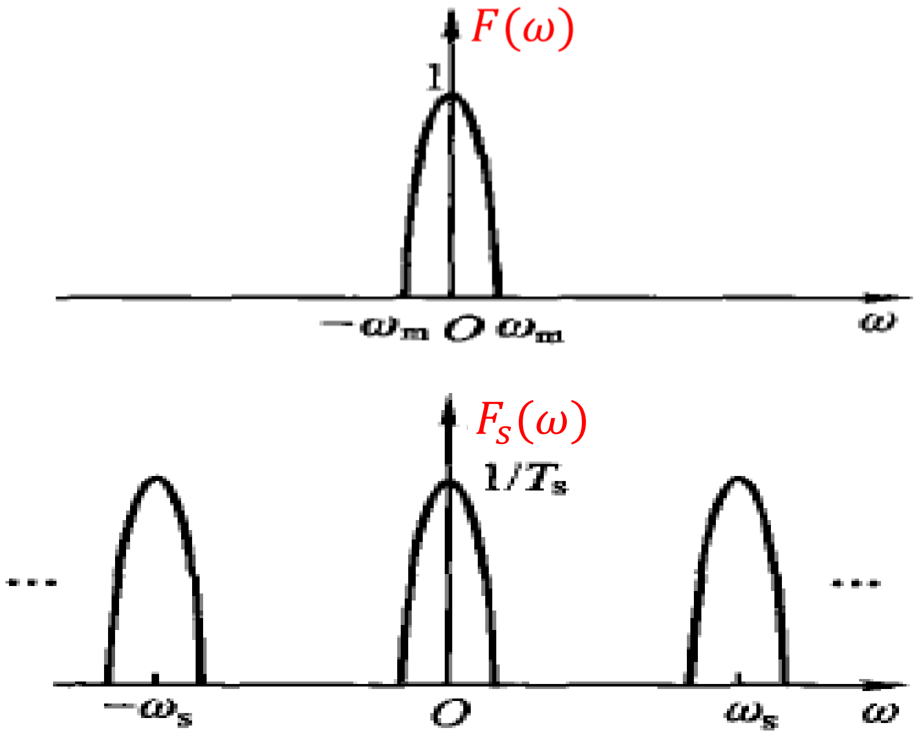
# 冲激采样之后的频谱变化

$p(t)=\delta_T(t)$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

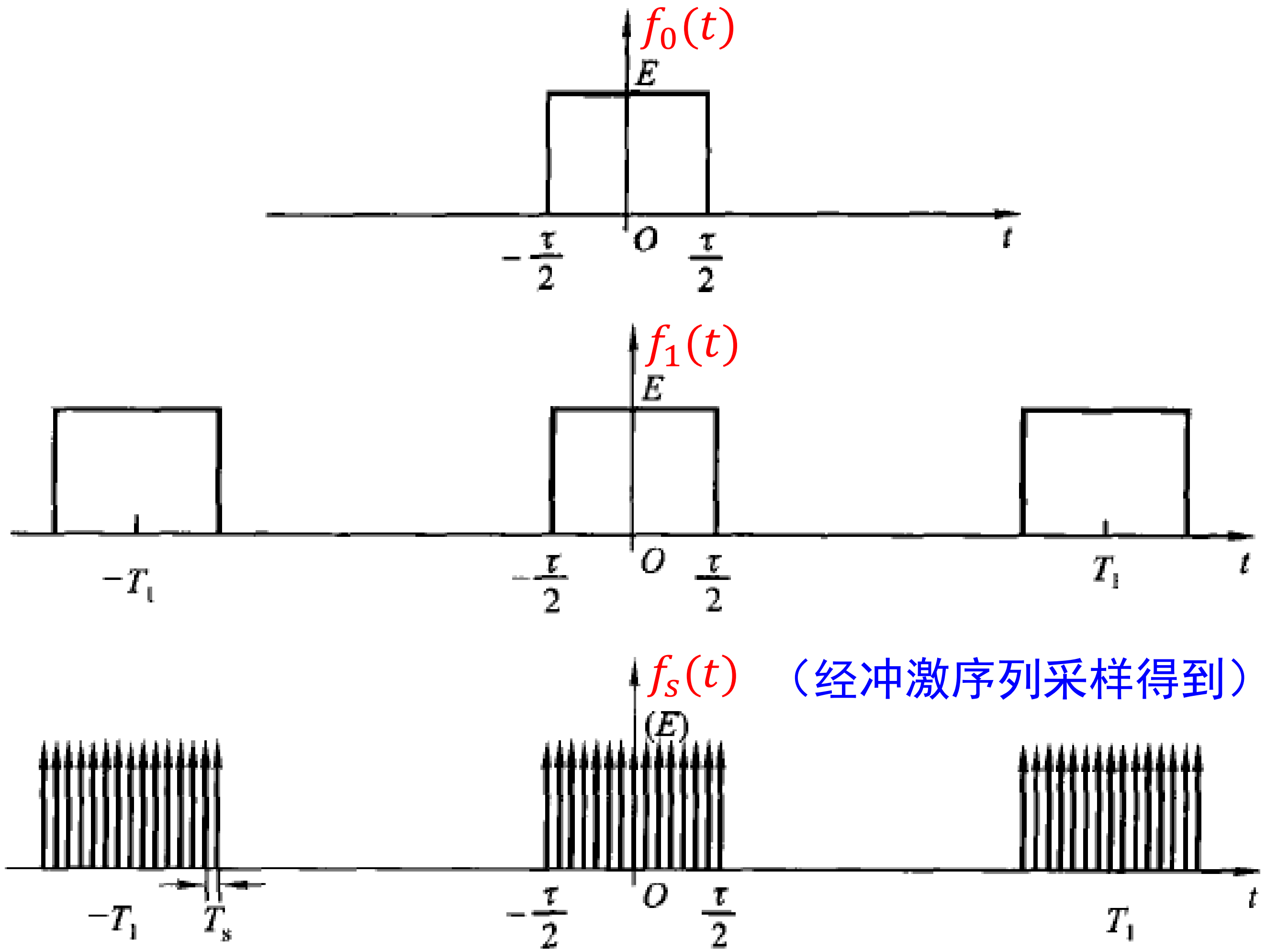
采样角频率

- 原连续信号的频谱$F(\omega)$以$\omega_s$为周期重复（等幅）
- 频谱的幅度乘上了一个常数 $\frac{1}{T_s}$ ←采样周期



$f_1(t)$ $P(t)=\delta_T(t)$

# 例2-1：求周期矩形信号经冲激采样后，所得采样信号的频谱




回顾单矩形脉冲信号的傅里叶变换$F_0(\omega)$（连续谱）

$$F_0(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

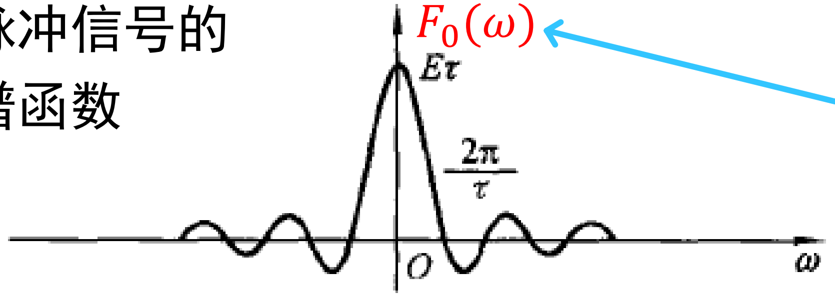
周期重复得到：周期矩形（脉冲）信号，角频率$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(t)\,\delta(t-nT_s)$$

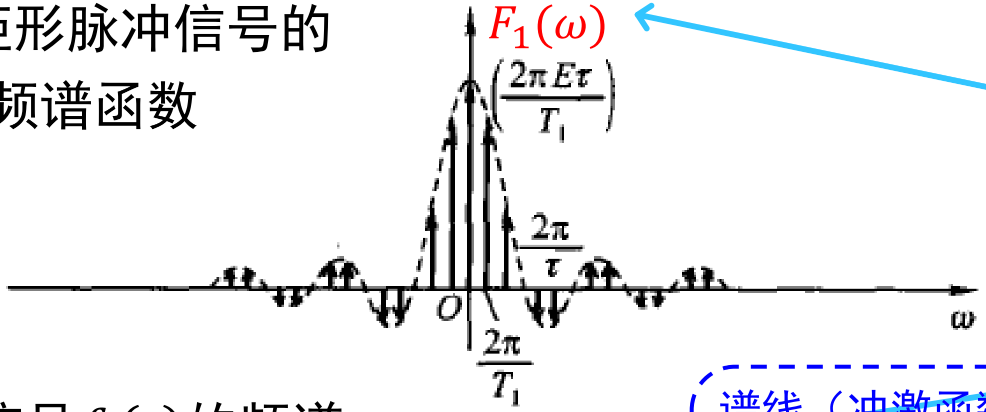
采样周期 $T_s$（采样角频率 $\omega_s$）

$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega = n\omega_1}$ $\quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega - n\omega_1)$

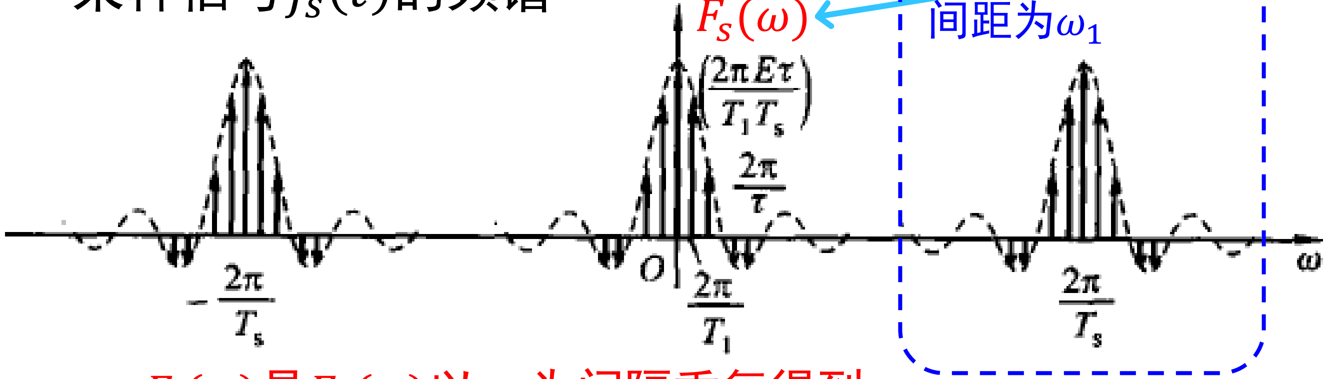
单矩形脉冲信号的频谱函数




周期矩形脉冲信号的频谱函数




采样信号$f_s(t)$的频谱




$F_s(\omega)$是$F_1(\omega)$以$\omega_s$为间隔重复得到

解：周期矩形（脉冲）信号的傅里叶系数可通过单矩形脉冲信号的频谱密度函数计算得到，即

$$F_m = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega = m\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{m\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$F_1(\omega) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \delta(\omega - m\omega_1)$$

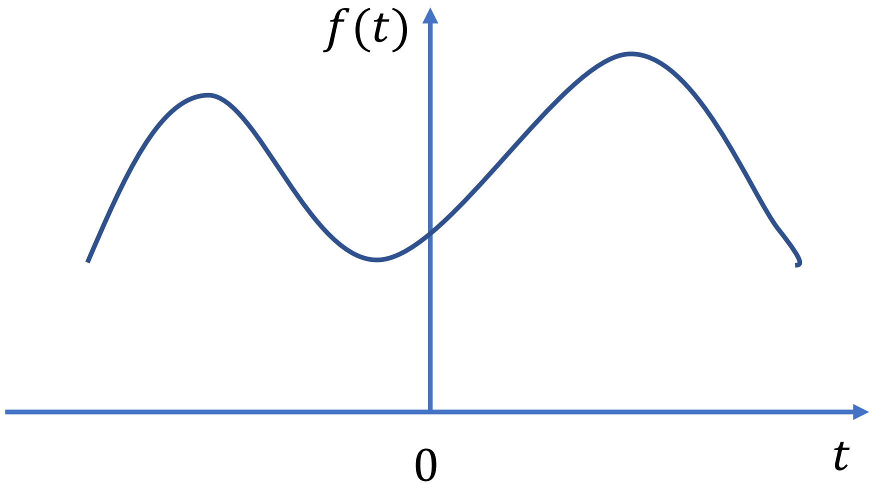
冲激采样之后的频谱

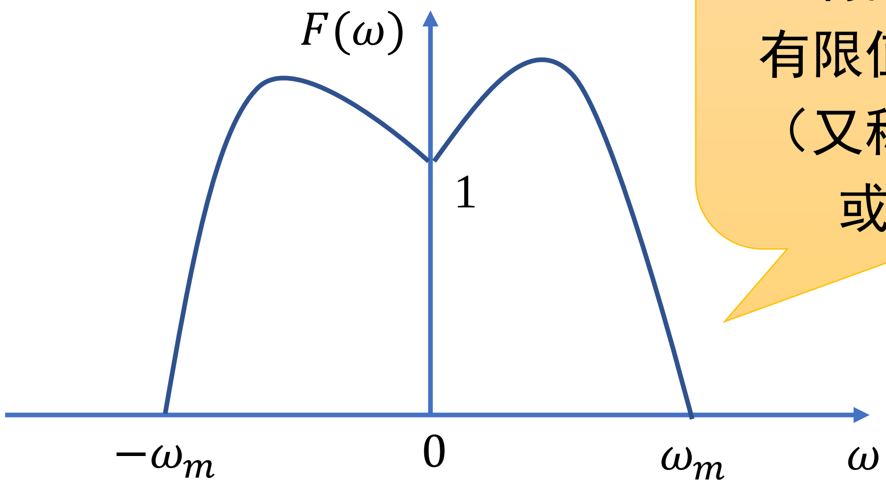
$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1(\omega - n\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \delta(\omega - m\omega_1 - n\omega_s)$$

$$= \frac{E\tau\omega_s}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{m\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - m\omega_1 - n\omega_s)$$

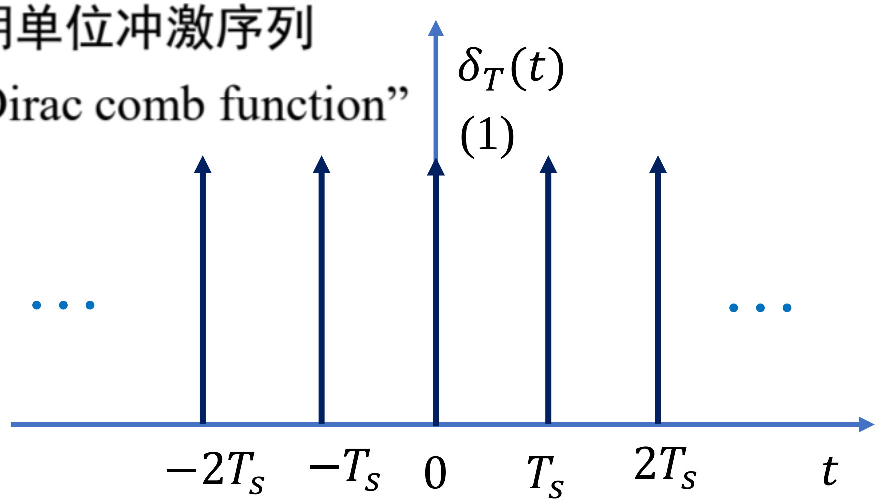
# 信号与冲激信号频谱

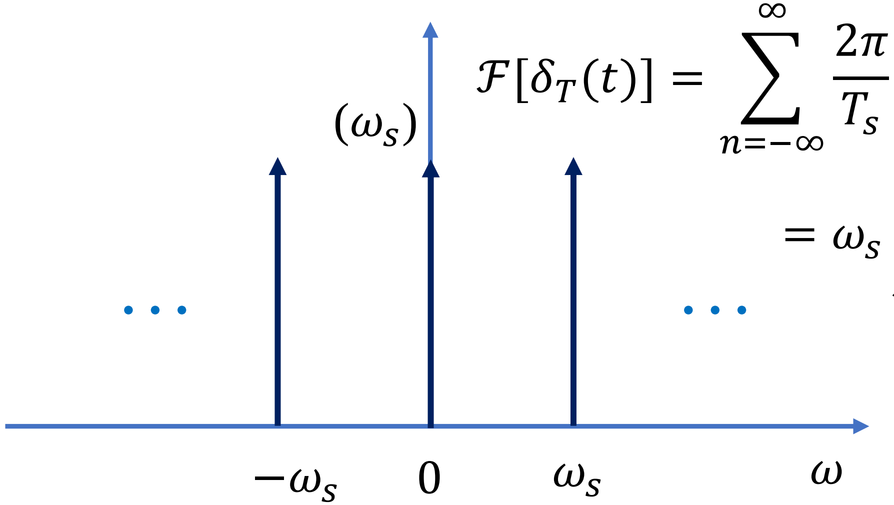



频谱函数只在有限区间具有有限值：**频谱受限**（又称频带受限，或：带限）

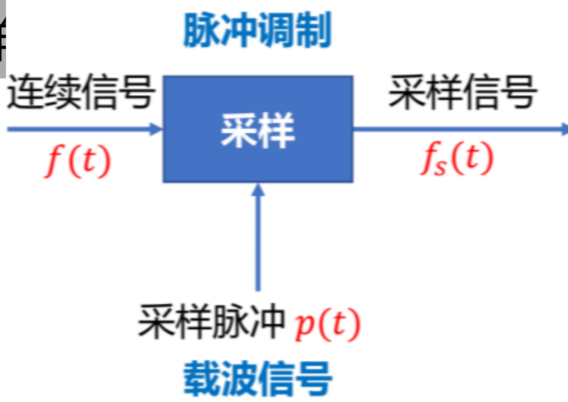
周期单位冲激序列
又称“Dirac comb function”




$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_s}\delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$




# 时域采样定理（香农定理）

- 对于**频谱受限**、频率为$f_m$的信号$f(t)$，如果其频谱只占据$-\omega_m \sim +\omega_m$的范围，则信号$f(t)$可以用等间隔的采样值唯一地表示，而采样间隔必须不大于$\frac{1}{2f_m}$(其中$\omega_m = 2\pi f_m$)，即最低采样频率为$2f_m$（或 $2\omega_m$）。

（注：$f_m$——频率；$\omega_m$——角频率）

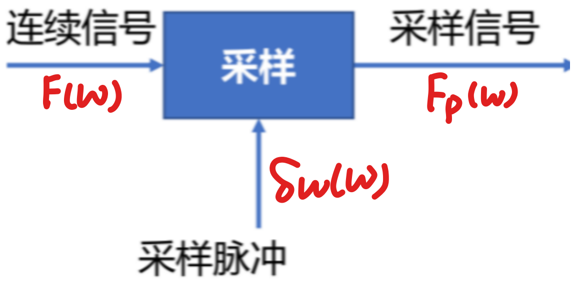
- 最低允许的采样率$\omega_s = 2\omega_m$称为奈奎斯特 (Nyquist) 频率，最大允许的采样间隔$T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$称为奈奎斯特间隔。

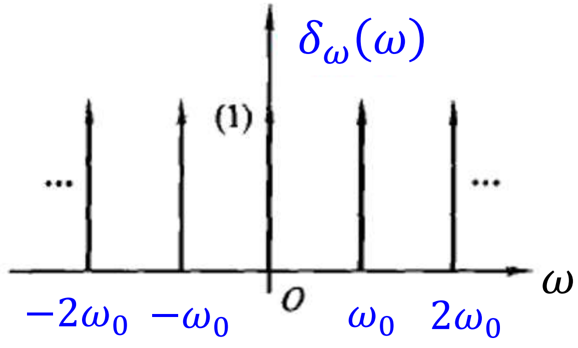
高采样率（频谱不混叠）
低采样率（频谱混叠）

$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$ $\quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1)\delta(\omega - n\omega_1)$

# 频域采样

**以$\omega_0$为采样间隔，对$F(\omega)$进行采样**




- $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$，$f_p(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F_p(\omega)$

  具有连续频谱的信号

- 对$F(\omega)$在频域上以$\omega_0$为间隔进行采样，得到$F_p(\omega)$

  周期冲激序列

- $F_p(\omega) = F(\omega)\cdot\delta_\omega(\omega)$，其中 $\delta_\omega(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0)$

- $\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_0\delta(\omega - k\omega_0) \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0) = \delta_\omega(\omega) = \frac{1}{\omega_0}\mathcal{F}[\delta_T(t)]$

  $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \Rightarrow F_n = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow F(\omega) = 2\pi\sum F_n\delta(\omega - k\omega_0)$

- 因此，$\mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)] = \frac{1}{\omega_0}\delta_T(t)$，由时域卷积定理可得

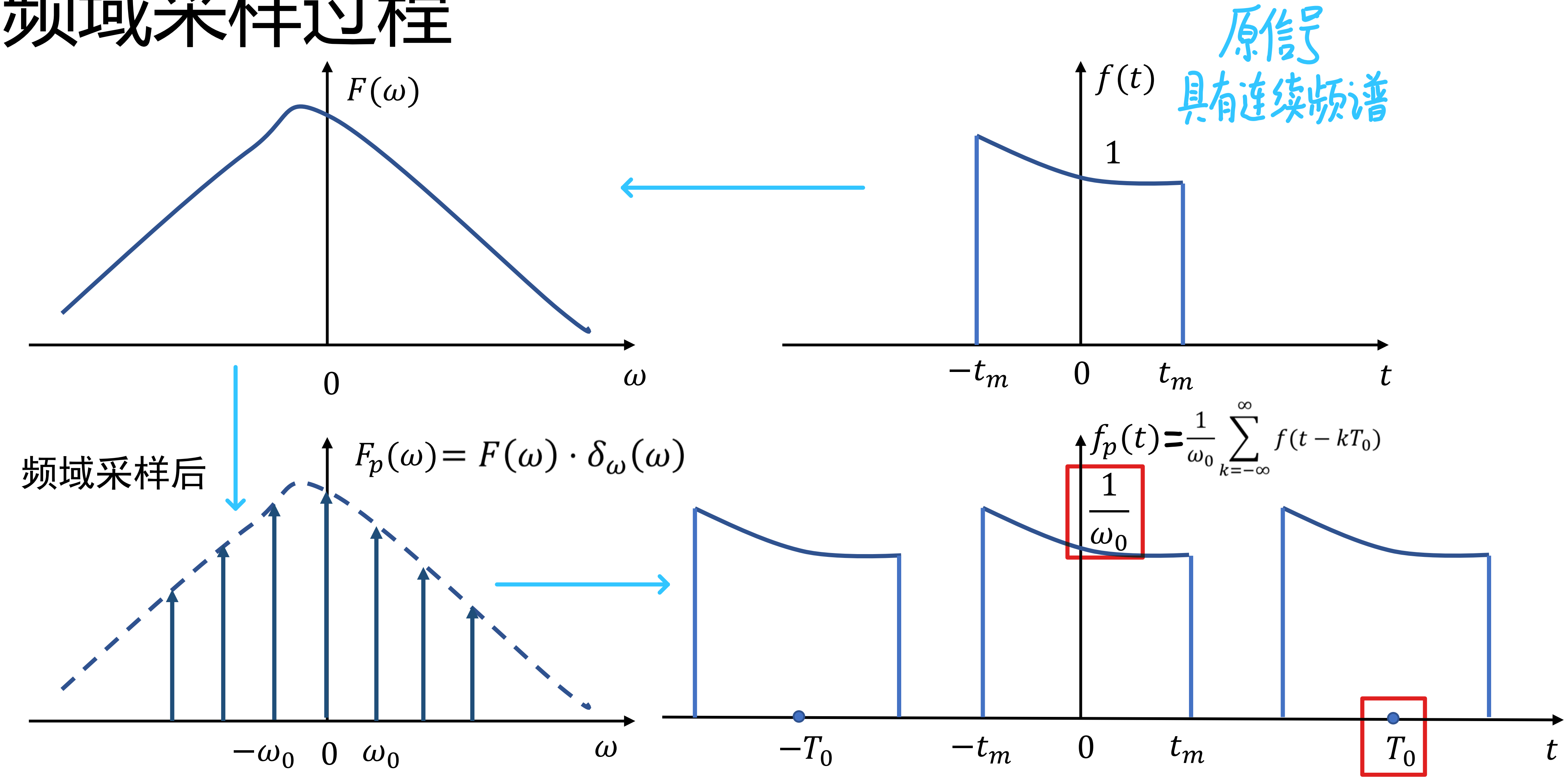
  $f_1(t) * f_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

  时域信号波形的周期重复

- $f_p(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_p(\omega)] = f(t) * \mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)] = f(t) * \frac{1}{\omega_0}\delta_T(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0)$

  $= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)\delta_\omega(\omega)] =$ $\quad = \frac{1}{\omega_0}\sum_k f(t) * \delta(t - kT_0) =$

# 频域采样过程


原信号
具有连续频谱
$F(\omega)$
$f(t)$
1
0
$\omega$
$-t_m$
$t_m$
$t$
频域采样后
$F_p(\omega)= F(\omega)\cdot\delta_\omega(\omega)$
$f_p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT_0)$
$\frac{1}{\omega_0}$
$-\omega_0$
$\omega_0$
$-T_0$
$T_0$

# 频域采样定理

- 当信号频谱$F(\omega)$以$\omega_0$的采样间隔进行采样，它对应的时域信号是以$T_0$为周期对原信号$f(t)$进行周期延拓，信号的幅度$\times \frac{1}{\omega_0}$

- 若信号$f(t)$是时间受限信号，它集中在$-t_m \sim +t_m$的时间范围内，若在频域中以不大于$\frac{1}{2t_m}$的频率间隔对$f(t)$的频谱$F(\omega)$进行采样，则频域采样后的频谱$F_p(\omega)$可以唯一地表示原信号。

$f_s(t)$ $f(t)$

# 从时域采样信号恢复原信号

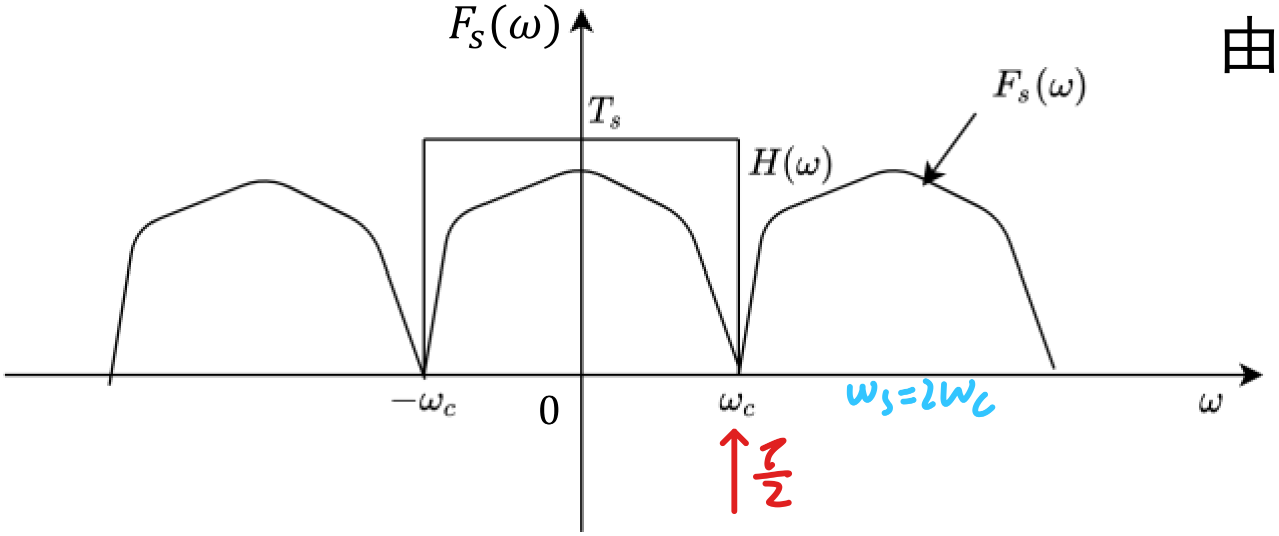
$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_s)$

- 取主频带

窗函数

$$F(\omega)=F_s(\omega)\cdot \boxed{H(\omega)},$$

待求 频域上的窗函数，其时域表达式$h(t)$




单矩形脉冲信号的傅里叶变换$F_0(\omega)$（连续谱）

$F_0(\omega)=E\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

$\omega_c=\omega_m$

↓原采样时的角频率

$\omega_s=2\omega_m$

$$H(\omega)=\begin{cases}T_s & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

其中 $\frac{\tau}{2}=\omega_c=\frac{1}{2}\omega_s$

$\Rightarrow \tau=\omega_s$ $E=T_s$

又 $T_s\omega_s=2\pi$

故 $E\tau=2\pi$

由傅里叶变换的对偶性知

$$h(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}H(\omega)\qquad H(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}2\pi h(-\omega)$$

$$\text{先求}\mathcal{F}[H(t)]=\underline{2\pi}Sa\left(\frac{\omega_s\omega}{2}\right)\text{，因此}$$

$$h(\omega)=Sa\left(\frac{\omega_s\omega}{2}\right),h(t)=Sa\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)$$

由于Sa(·)是(·)的偶函数

# 从时域采样信号恢复原信号

$f_s(t)$ $f(t)$

$$f_1(t) * f_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

频域上的窗函数，其时域表达式$h(t)$已知，由时域卷积定理，得

取样函数

$$f(t) = f_s(t) * h(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)\right) * Sa\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)$$

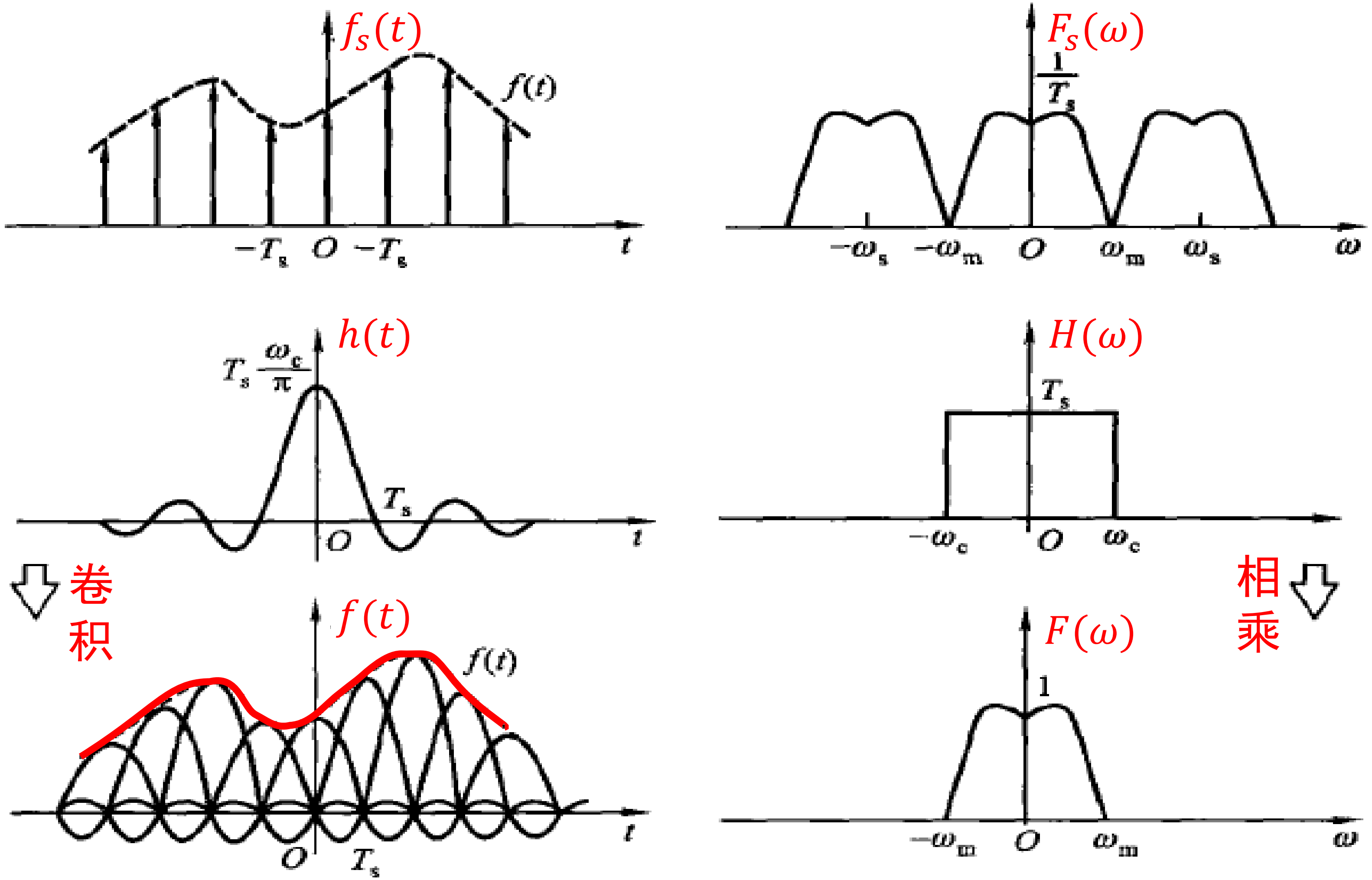
$$f_s(t) = f(t)\,\delta_T(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$$

$t=nT_s$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) Sa\left[\frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)\right]$$

恢复连续时间信号的内插公式

原信号采样时刻对应的函数值




只要$f(t)$是**带限的**，而采样频率满足**香农定理**，可以实现信号的**真正重建**！

# 采样频率的选择

- 为了保留原连续信号某一频率分量的全部信息，至少对该频率分量一个周期采样两次
- 对于快变信号，要提高采样频率
- 采样频率过高会增加计算机内存的占用量，也造成采样过程不稳定
- 对于不是带限的信号，在采样前采用抗混叠滤波器，把不需要或者不重要的高频成分滤除

HIFI（高保真）
数字音响设备
的处理方法

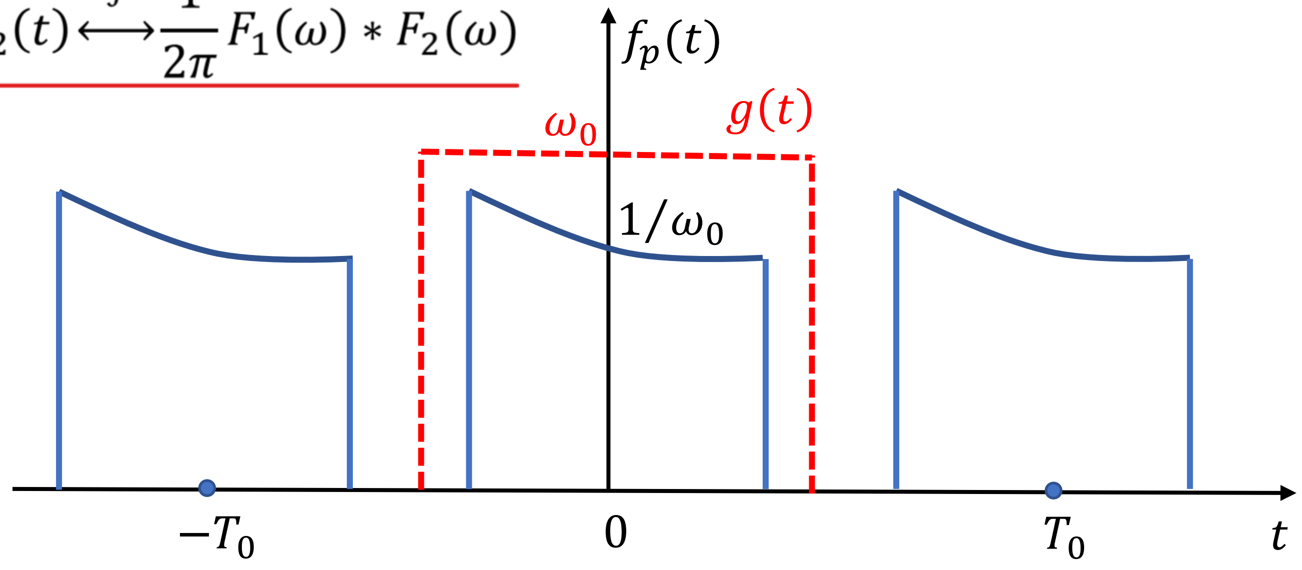
低通滤波器

$F_p(\omega)$ $F(\omega)$

# 从频域采样信号恢复原信号

- 将时域上周期延拓的信号乘以一个幅值为$\omega_0$的时域窗函数，根据傅里叶变换的频域卷积性质，得到频域的内插公式

$$f_1(t)f_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$




$$g(t) = \begin{cases} \omega_0 & |t| \le \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = f_p(t) g(t)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F_p(\omega) * G(\omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) Sa\left[\frac{T_0}{2}(\omega - k\omega_0)\right]$$

频域上的内插公式

每个采样样本能给出准确的频谱值，非样本值的频谱由无限项之和决定

# 课程回顾：时域采样与频域采样

| | 采样 | 另一域 | 加窗重建 |
|---|---|---|---|
| 时域采样（$f(t)$带限） | $f_s(t) = f(t)p(t)$ $= f(t)\delta_T(t)$ （冲激采样） | 频域 $F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * P(\omega)$ $= \frac{1}{2\pi}F(\omega) * \mathcal{F}[\delta_T(t)]$ | 频域加窗 $F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega)$ $f(t) = f_s(t) * h(t)$ |
| 频域采样（$f(t)$时限） 集中在 $-t_m \sim +t_m$ 的时间范围内 | $F_p(\omega) = F(\omega)\delta_\omega(\omega)$ （冲激采样） | 时域 $f_p(t) = f(t) * \mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)]$ $= f(t) * \frac{1}{\omega_0}\delta_T(t)$ | 时域加窗 $f(t) = f_p(t)g(t)$ $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}F_p(\omega) * G(\omega)$ |

# 课程内容

# 离散信号的描述——序列

- 无论是采样得到的离散信号，还是客观事物给出的离散信号，只要给出函数值的离散时刻是等间隔的，都可以用序列 $x(n)$ 来表示

  $x(k)$
- $n$ 是各函数值在序列中出现的序号，对应序号 $n$ 的函数值通常称为在第 $n$ 个点的“样值”
- 通常用 $x(n)$ 定义在整个定义域内的一组有序数列的集合 $\{x(n)\}$ 来表示一个离散信号，$x(n)$ 仅对 $n$ 的整数值才有定义
- 离散信号的能量定义为 $W=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$

将信号 $f(t)$ 施加于1Ω电阻上（$R=1\Omega$），它所消耗瞬时功率为 $|f(t)|^2$，在时间区间 $(-\infty,\infty)$ 的能量和平均功率定义为

（1）信号$f(t)$的能量：$E=\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$

（2）信号$f(t)$的平均功率：$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt$

# 序列的表示方法

- 有序数列的集合

$$\{x(n)\} = \{\cdots,0,1,2,3,4,3,2,1,0,\cdots\}$$

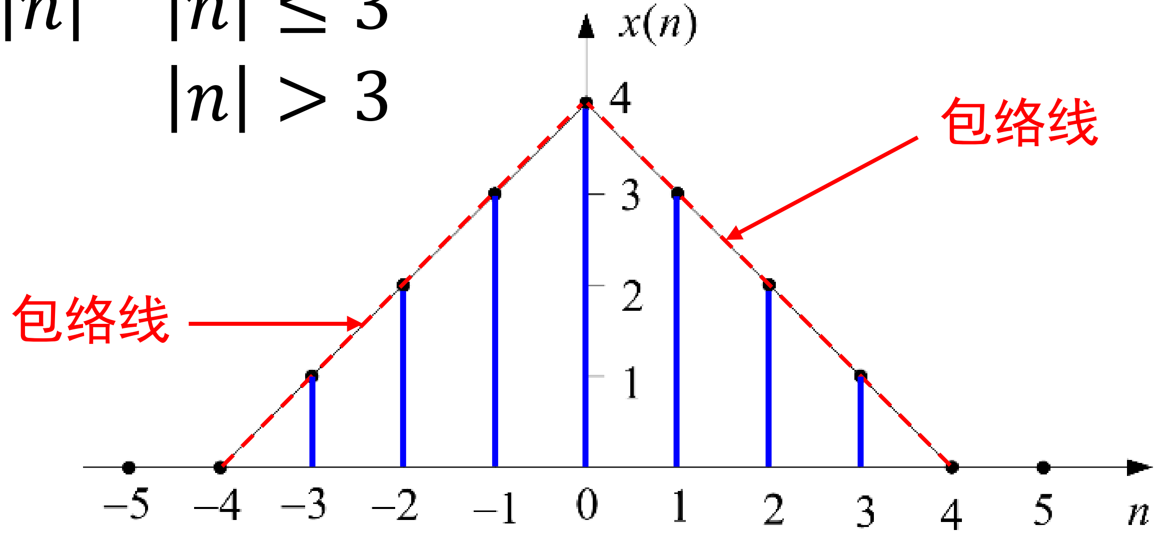
$n = 0$

- 闭式表达式

带上成立的范围

$$x(n) = \begin{cases} 4-|n| & |n| \le 3 \\ 0 & |n| > 3 \end{cases}$$

- 图形表示法

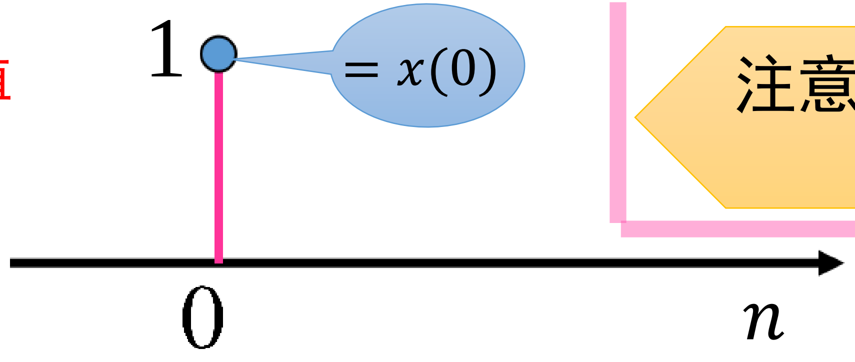


# ① 单位脉冲序列（单位样值信号）

$Z[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n)z^{-n}=1$

- $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$ 有限值

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)=1$




注意与单位冲激信号 $\delta(t)$ 的区别

$$\begin{cases}\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$$

- 取样特性

$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)$$

一个序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(n-n_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n_0)\delta(n-n_0)=x(n_0)$$

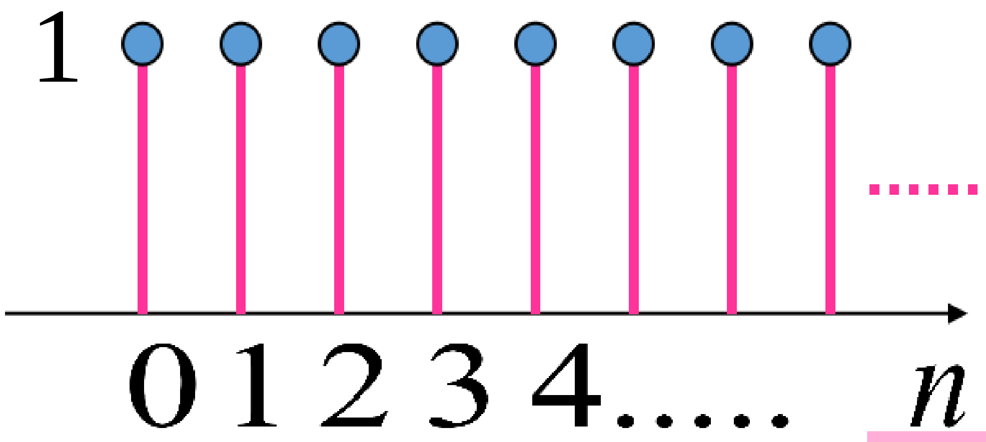
一个数

用单位脉冲序列表示任意序列：$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$

可以将任意序列表示成加权、平移的单位脉冲（样值）信号之和

# ② 单位阶跃序列

- $u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$




在$n=0$点有定义， $u(0)=1$

- $\delta(n)$和$u(n)$之间的关系

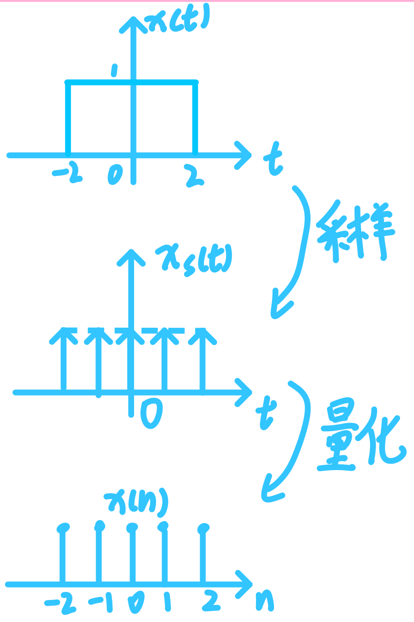
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

注意和$u(t)$的区别！

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

$\delta(t)=u'(t)$

$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$

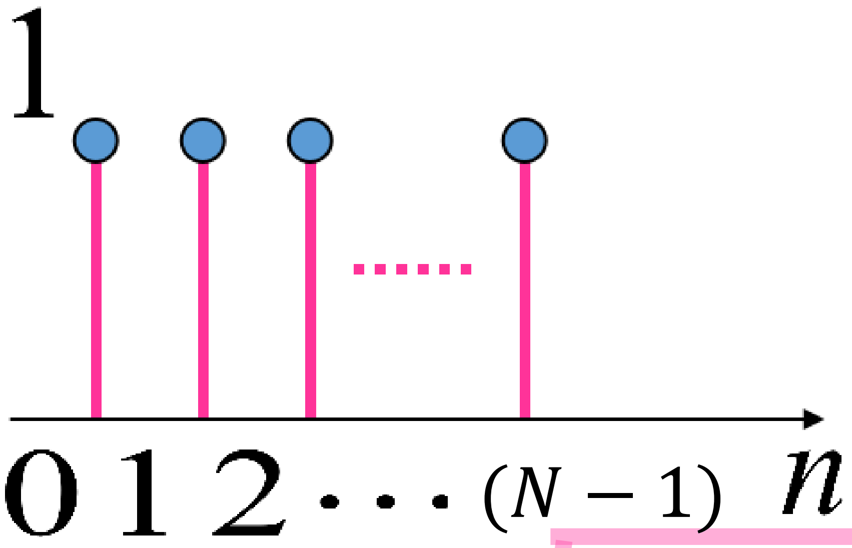


# ③ 矩形序列

N代表矩形序列的长度

- $R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

记忆: $DFT[R_N(n)]=N\delta(k)$



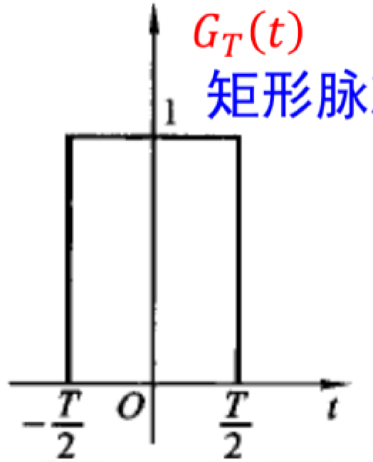

- $R_N(n)$和$u(n)$、 $\delta(n)$之间的关系

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta(n-(N-1))$$

类比

矩形脉冲



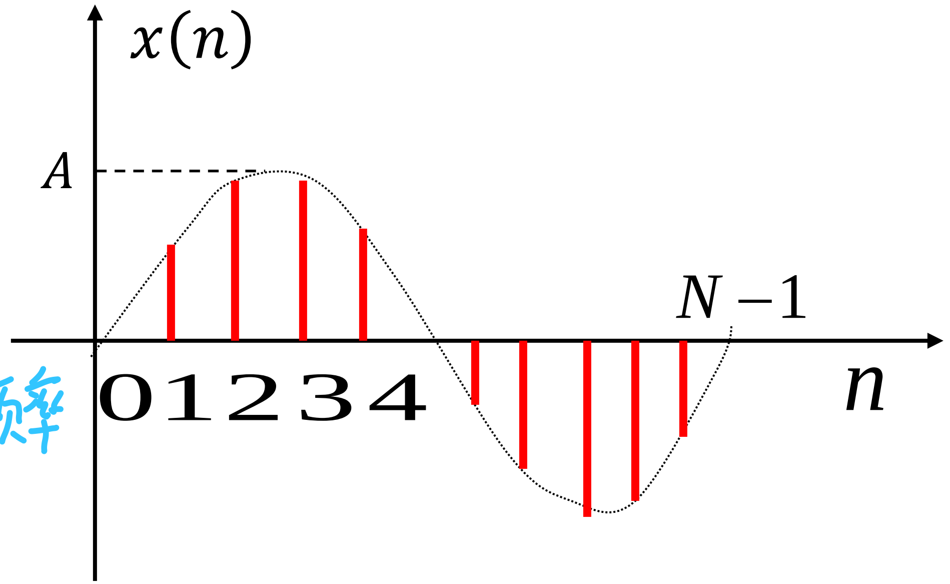

$$G_T(t)=u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

# ⑥ 正弦型序列

回顾：连续时间正弦信号$A\sin(\omega_0 t+\varphi)$

- 可以理解为从连续时间正弦信号经采样得到

$$x(n)=A\sin(n\Omega_0+\phi)$$




- △ $\Omega_0$ 表示数字角频率，单位为弧度（rad）
- $\phi$为正弦序列的初始相角

$T_s$为采样周期，$\omega_0$为模拟角频率

如果 $x(n)$通过采样得到，$\Omega_0=\omega_0 T_s=\dfrac{\omega_0}{f_s}$

$$x(t)=A\sin\omega_0 t \xrightarrow[\text{采样}]{t=nT_s} x(n)=x(nT_s)=A\sin(n\omega_0 T_s)=A\sin(n\Omega_0)$$

# 连续时间正弦信号 vs 离散时间正弦序列

## （1） 在时移与相移上的区别

- $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ 连续时间：时移、相移一一对应

$$t \pm t_0 \Leftrightarrow \varphi \pm \varphi_0$$

- $x(n) = A\sin(\Omega_0 n + \phi)$ 离散时间：时移对应相移，反之不一定成立

$$n \pm n_0 \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} \phi \pm \phi_0$$ 只有当$\phi_0$是$\Omega_0$的整数倍时反向才成立

前提：$n \in Z$

# 连续时间正弦信号 vs 离散时间正弦序列

$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ $x(n) = A\sin(\Omega_0 n + \phi)$

（2）关于周期性的区别：离散时间正弦序列不一定是周期序列

周期序列的特征：$x(n+N) = x(n)$

$$x(n) = A\sin(n\Omega_0 + \phi + N\Omega_0)$$

$$N\Omega_0 = 2k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

周期 $N = \dfrac{2k\pi}{\Omega_0}$

N务必为正整数

$k$的取值使得$N$为最小正整数

$\Omega_0$为n前的系数

若$\frac{2\pi}{\Omega_0}$为无理数，则正弦序列不是周期序列！（但包络线仍是具有周期性的正弦信号）

$\Omega_0 = \omega_0 T_s$，$t = nT_s$

# 示例1 对正弦信号进行采样，$t = nT_s$， $T_s = 1\text{s}$

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

周期 $T = 12\text{s}$，$\omega_0 = \frac{2\pi}{12}$

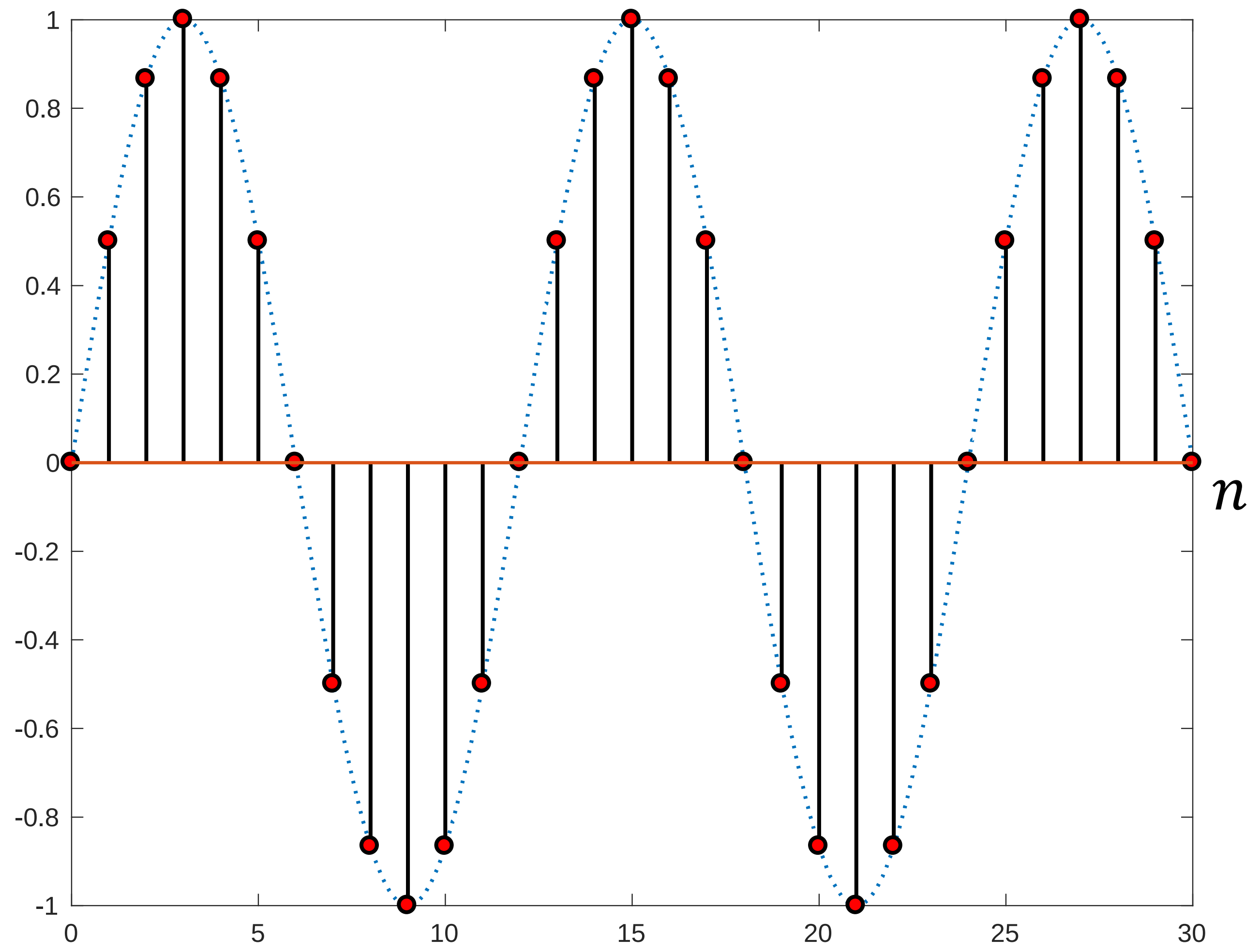
$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi n}{12}\right)$$

周期 $N = 12$，$\Omega_0 = \omega_0 T_s = \frac{\pi}{6}$

此时$k = 1$

得到周期正弦序列

$\frac{2\pi}{\Omega_0} = 12$ 有理数



# 示例2 对正弦信号进行采样，$t = nT_s$， $T_s = 1\text{s}$

周期变长了！

$$x(t) = \sin\left(\frac{8\pi t}{31}\right)$$

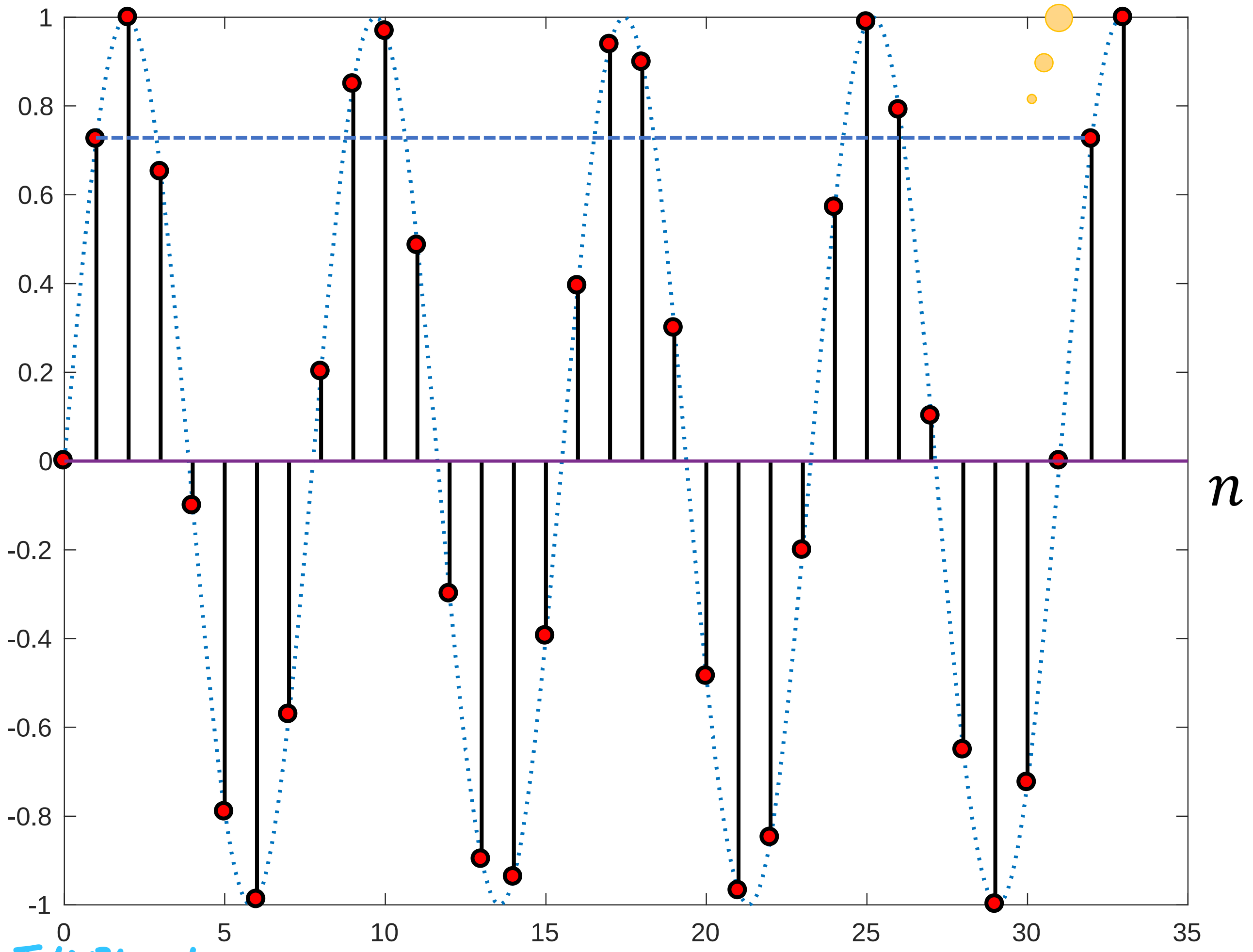
周期 $T = \dfrac{31}{4}\text{s}$, $\omega_0 = \dfrac{8\pi}{31}$

$$x(n) = \sin\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$$

周期 $N = 31$, $\Omega_0 = \omega_0 T_s = \dfrac{8\pi}{31}$

$k = 4$才能使$N$有取值 $\dfrac{2\pi}{\Omega_0} = \dfrac{31}{4}$

（序列经过$4T$对应的时间才开始重复）




$N=31$, $k=4$ 说明在$8\pi$范围内选了31个点，相当于在原信号的一个周期里选了$\frac{31}{4}$个点，$\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{8\pi}{31}$

# 示例3 对正弦信号进行采样，$t = nT_s$， $T_s = 1\text{s}$

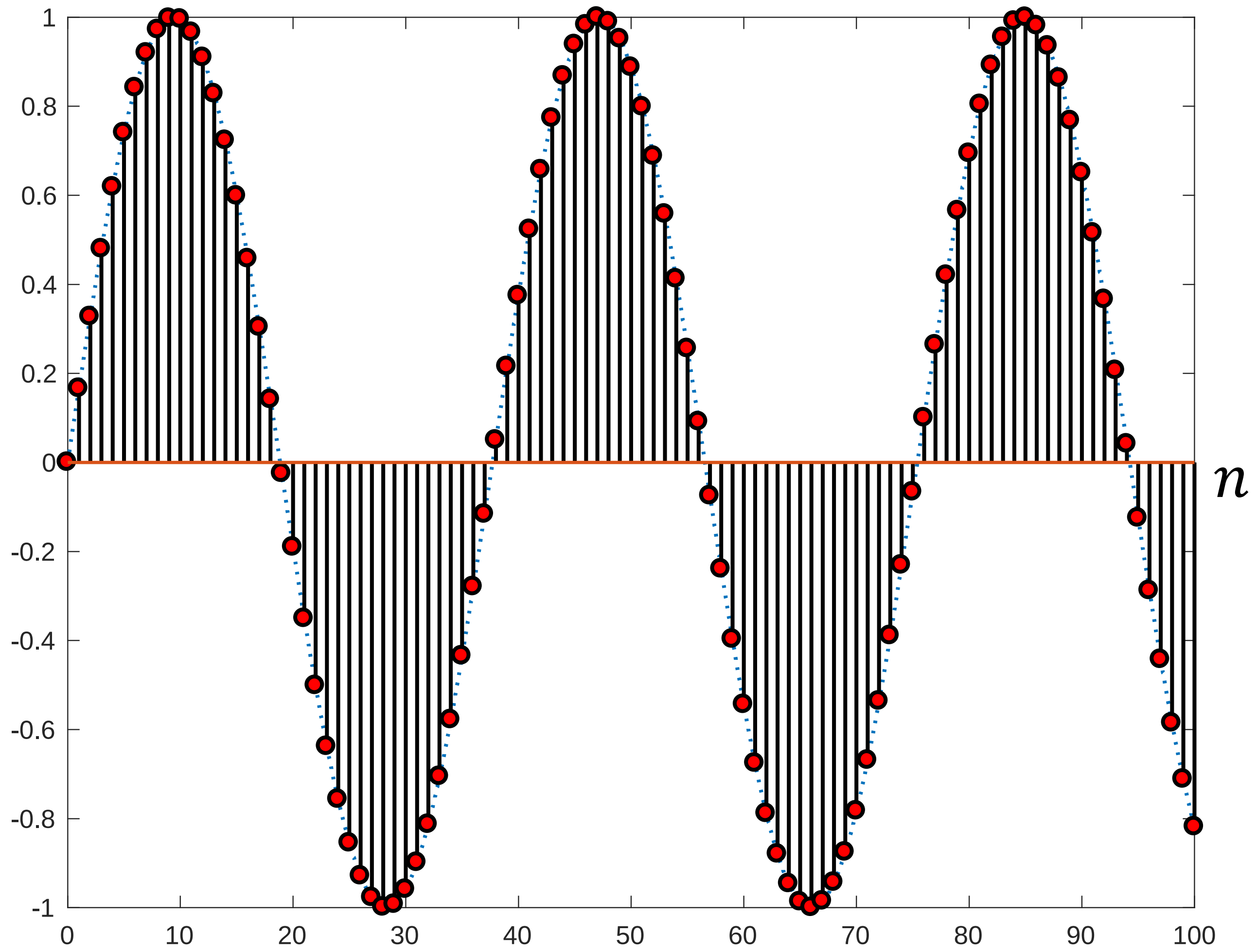
$$x(t) = \sin\left(\frac{t}{6}\right)$$

$T = 12\pi$ s  $w_0 = \frac{1}{6}$

$$x(n) = \sin\left(\frac{n}{6}\right)$$ $\Omega_0 = w_0 T_s = \frac{1}{6}$

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \times 6 = 12\pi \text{（无理数）}$$

不是周期序列！



# 连续时间正弦信号 vs 离散时间正弦序列

作为$\Omega$的函数
周期为$2\pi$

(3) 数字频率上可能存在的区别

$t=nT_s$
$\Omega_0=\omega_0 T_s$

连续时间信号 $x_1(t)=A\sin(\omega_1 t+\varphi)$，$x_2(t)=A\sin(\omega_2 t+\varphi)$

$$\omega_1 \neq \omega_2 \implies x_1(t)\neq x_2(t)$$

离散时间序列 $x_1(n)=A\sin(\Omega_1 n+\phi)$，$x_2(n)=A\sin(\Omega_2 n+\phi)$

$$\Omega_1=\Omega_2+2\pi \implies x_1(n)=x_2(n)$$

两个相同的离散时间信号，其数字频率有可能是不同的

也可能是相差$2\pi$的整数倍

# ⑦ 复指数序列

- $x(n) = e^{(\sigma + j\Omega_0)n} = e^{\sigma n}(\cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n)$ ⇒ 作为$\Omega_0$的函数,周期为$2\pi$
- 最常见的复序列，具有实部和虚部，也可以用极坐标表示

$$x(n) = e^{j\Omega_0 n} = \cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n$$

$$x(n) = |x(n)|e^{j\arg[x(n)]}$$

- 性质可以仿照正弦序列讨论

$$e^{j(\Omega \pm 2k\pi)n} = e^{j\Omega n}\, e^{\pm j2kn\pi} = e^{j\Omega n}$$ （$k$为正整数）

# 离散信号的时域运算

- 平移、翻转
- 和、积 ⇐是逐项的计算
- 累加
- 差分运算
- 序列的时间尺度（比例）变换
- 卷积和

# 平移和翻转

- 设某一序列为$x(n)$
  - 当$m$为正时，则$x(n-m)$是指序列$x(n)$逐项依次延时（右移）$m$位而给出的一个新序列，而$x(n+m)$则指依次超前（左移）$m$位（注意：$n$、$m$都是整数）
  - $m$为负时，则相反

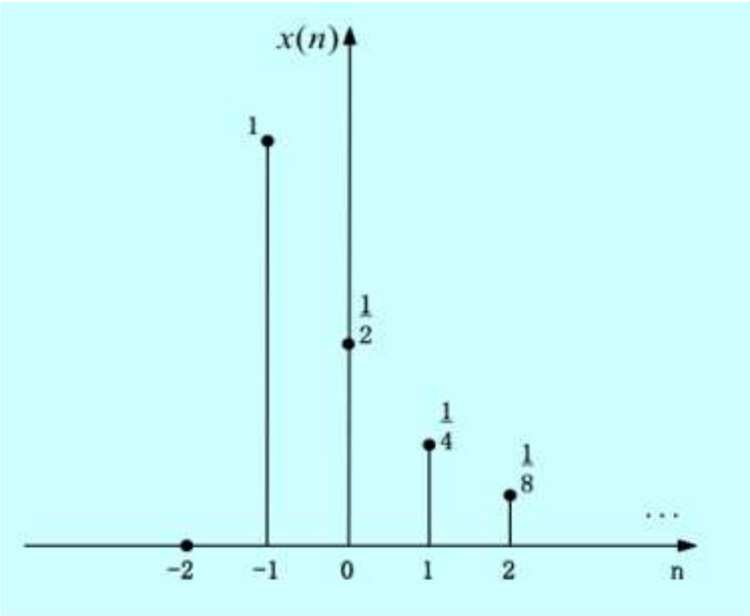
- 如果序列为$x(-n)$，则是以$n=0$的纵轴为对称轴将序列$x(n)$加以翻转

例2-2：已知序列 $x(n)$，求$x(n+1)$, $x(-n)$。⇒数值上范围上出现的n同时改变

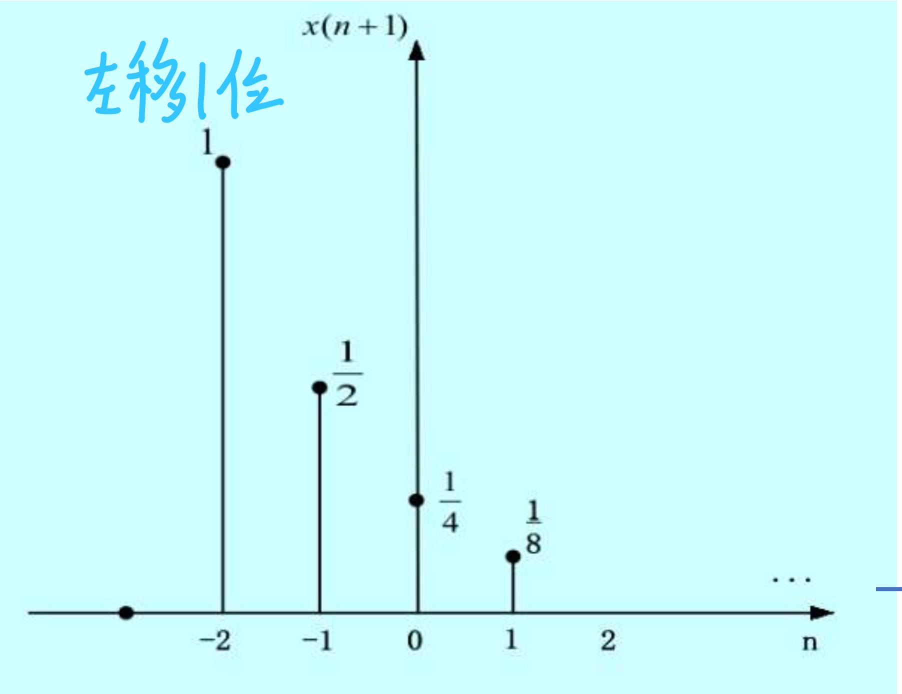
$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n, & n\ge -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

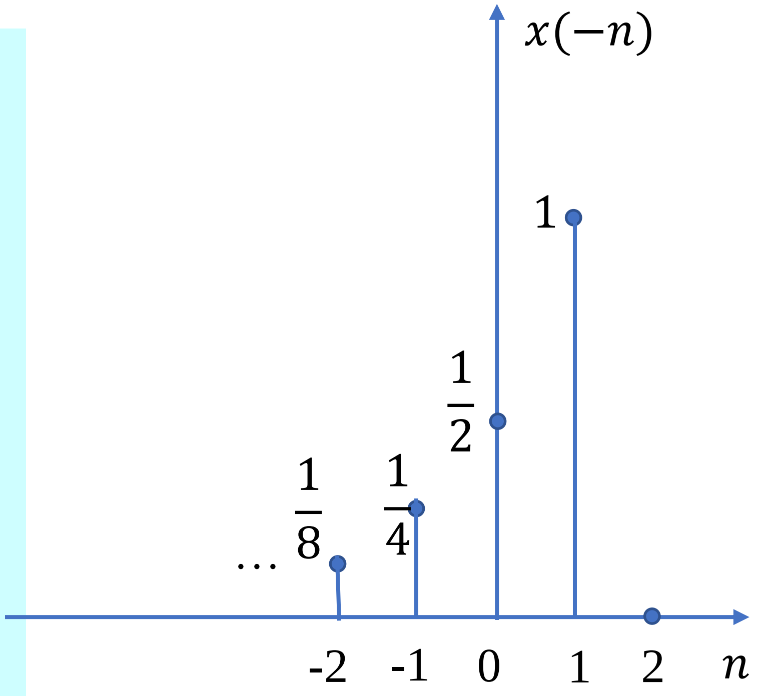
$$x(n+1)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n+1}, & n+1\ge -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$

$$x(-n)=\begin{cases}2^{n-1} & n\le 1\\ 0 & n>1\end{cases}$$




左移1位



# 和、积

- 两序列的和（积）是指同序号（$n$）的序列值逐项对应相加（相乘）而构成一个新的序列，表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

# 累加

类比 积分运算 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

如果有序列$x(n)$，则$x(n)$的累加序列$y(n)$为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

若考虑某一时刻$n_0$，该序列表示$y(n)$在$n_0$上的值等于$n_0$上以及$n_0$以前所有$x(n)$值之和。$y(n_0)=y(n)\big|_{n=n_0}=\sum_{k=-\infty}^{n_0}x(k)$

# 差分运算

- 前向差分

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

- 后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

# 序列的时间尺度（比例）变换

- 对某序列$x(n)$，其时间尺度变换序列为$x(mn)$或$x(n/m)$，其中$m$为正整数
- 设$m=2$,
  - $x(2n)$，不是像连续信号那样将$x(n)$序列简单地在时间轴上按比例地压缩为原来的一半，而是采样频率降低为原来的一半，即从$x(n)$中每隔2点取1点。若

$$x(n)=x(t)\Big|_{t=nT_s}$$

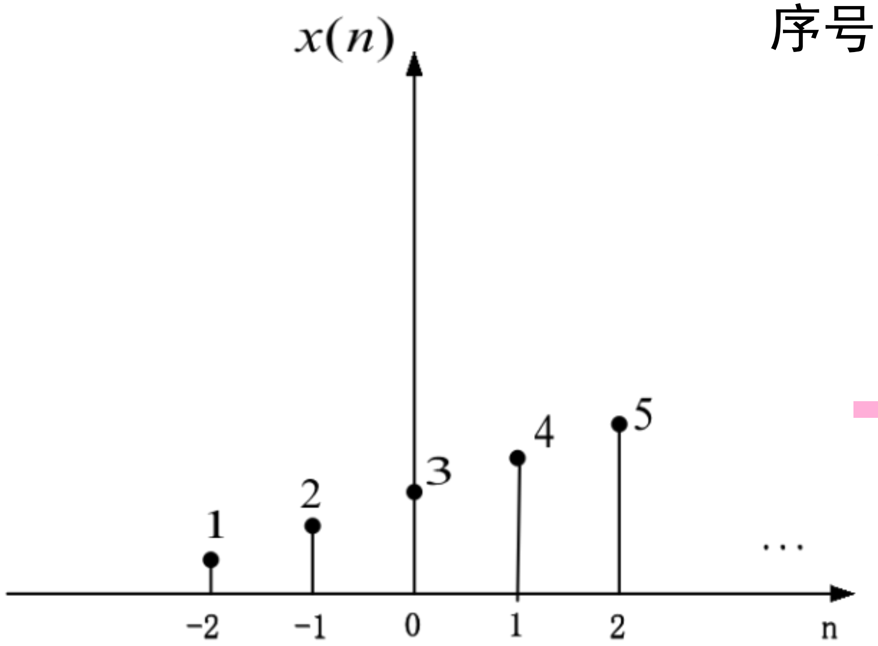
则

$$x(2n)=x(t)\Big|_{t=2nT_s}$$

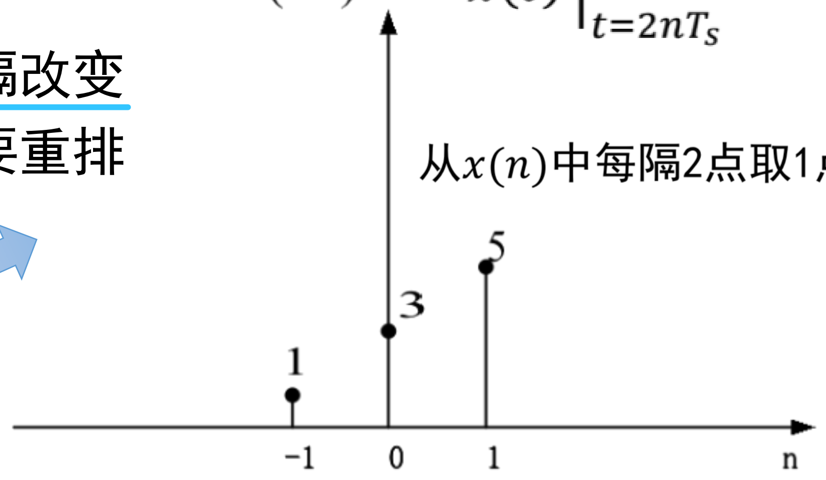
  - $x\left(\frac{n}{2}\right)$表示采样间隔由$T$变成了$\frac{T}{2}$，也可将$x\left(\frac{n}{2}\right)$称为是$x(n)$的插值序列

采样间隔改变

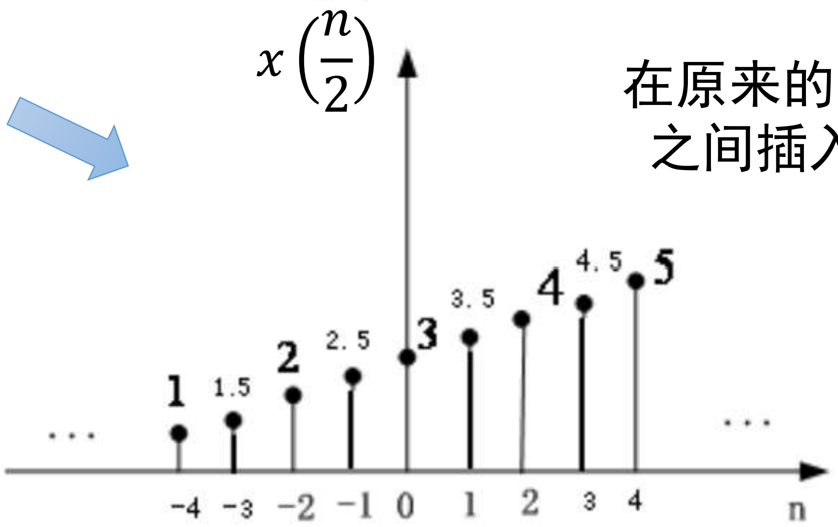
序号需要重排




$$x(2n) = x(t)\big|_{t=2nT_s}$$




从$x(n)$中每隔2点取1点




在原来的两个相邻样点之间插入一个新样点

可将$x\left(\frac{n}{2}\right)$称为是$x(n)$的插值序列

# 单位脉冲序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$ 有限值

## 卷积和(线性卷积) 有限长序列

- 对于两序列$x(n), h(n)$，其卷积和定义为：对比：圆周卷积：$x(n) ⊛ h(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N\right]R_N(n)$

$N_1$ $N_2$

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

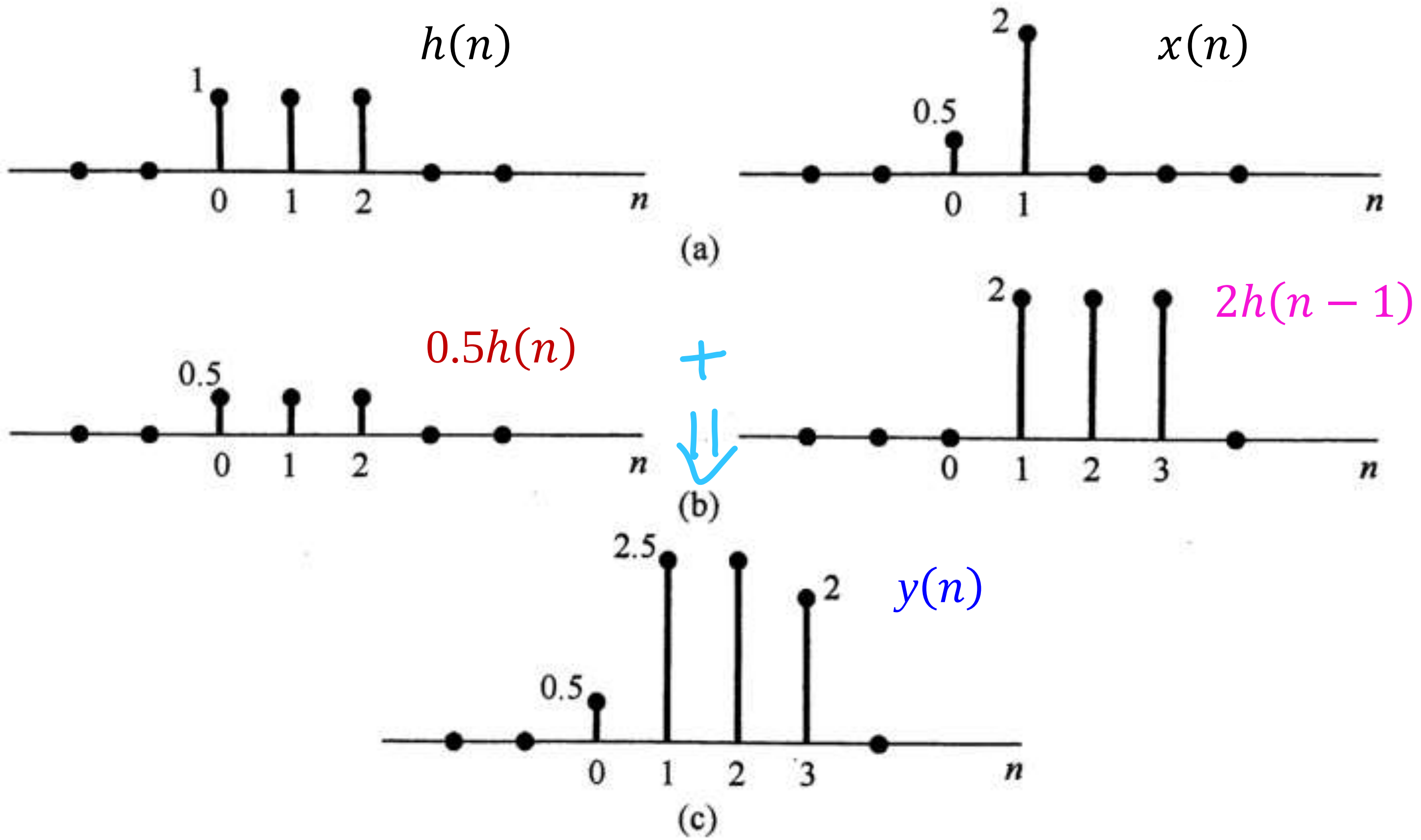
⇒长度为 $N_1+N_2-1$

其中$x(n)$可用任意离散序列表示为 $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$ 即 $x(n)=x(n)*\delta(n)$


一个线性时不变（LTI）系统对任意输入的响应可以用系统对单位脉冲的响应来表示——LTI系统的单位脉冲响应完全刻画了系统特征！

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

例2-4：考虑一个LTI系统，其单位脉冲响应为$h(n)$，输入为$x(n)$（如图(a)所示），求输出$y(n)$。$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

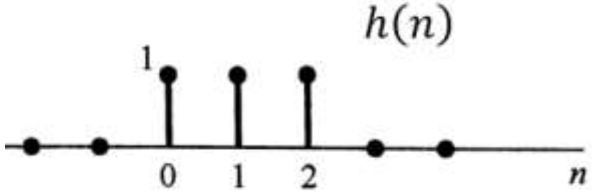


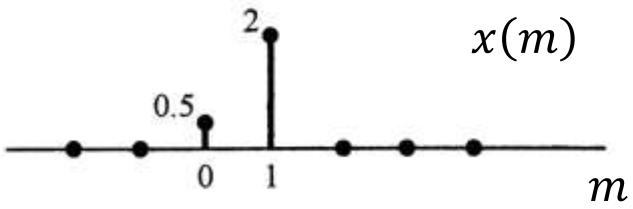

解：因为仅有$x(0)$和$x(1)$为非零，得

$$
\begin{aligned}
y(n) &= x(0)h(n-0)+x(1)h(n-1)\\
&= x(0)h(n)+x(1)h(n-1)\\
&= 0.5h(n)+2h(n-1)
\end{aligned}
$$

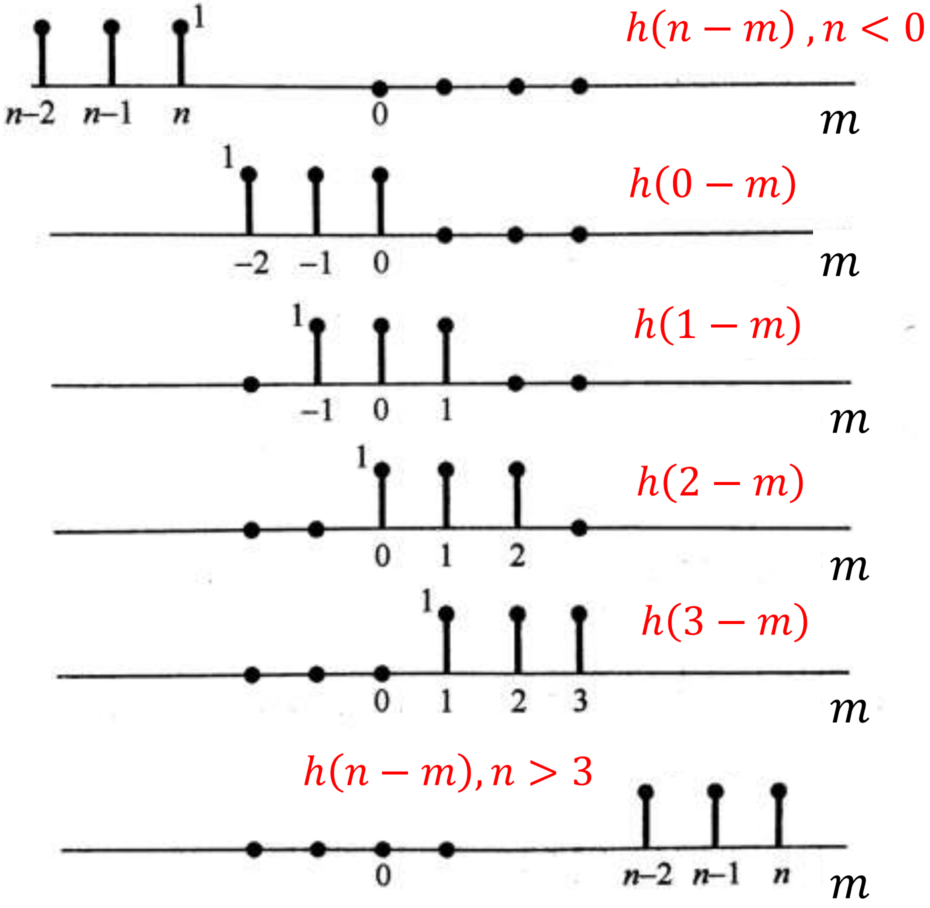
$0.5h(n)$和$2h(n-1)$如图(b)所示，叠加即得到输出序列$y(n)$，见图(c)。

# 卷积和求解思路



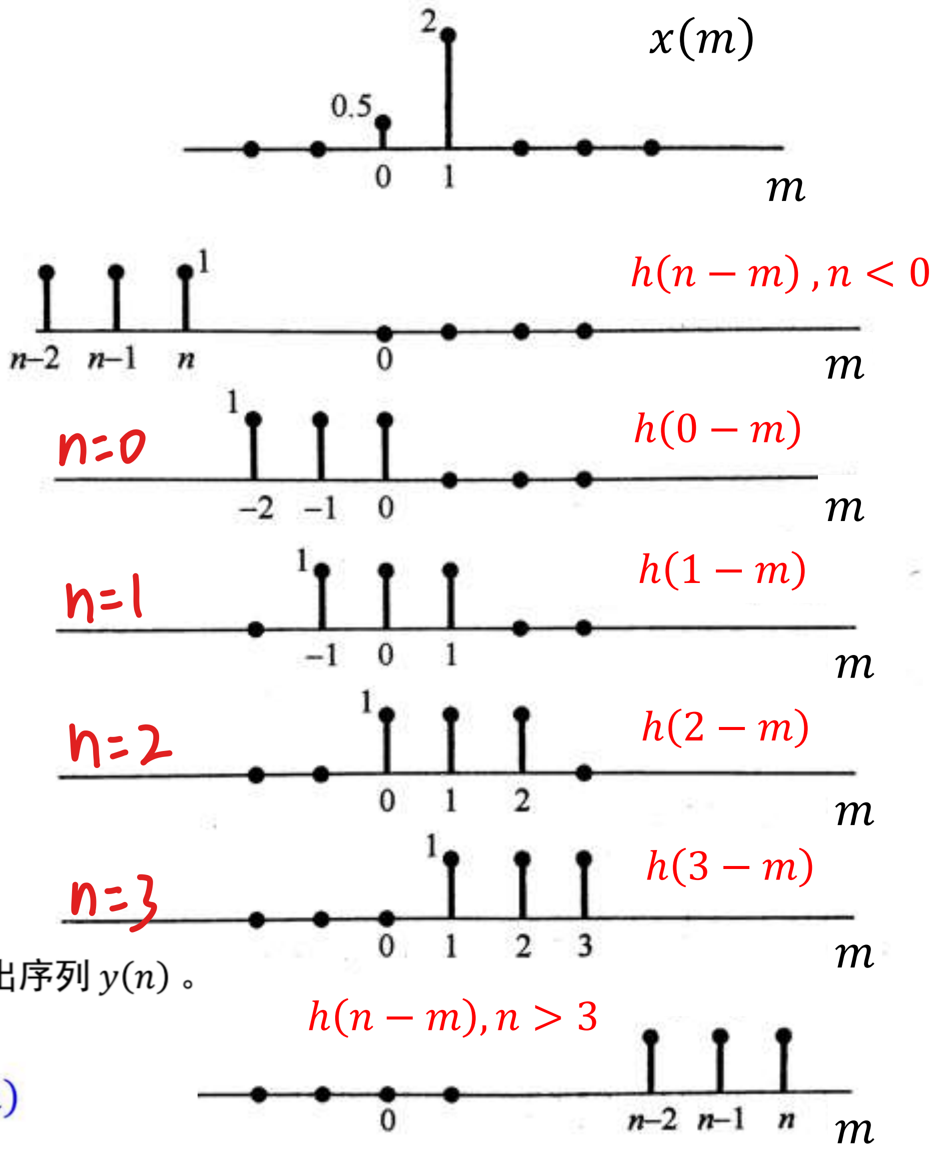



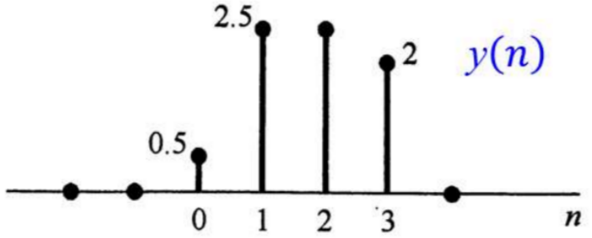

- 把序列$h(n-m)$看成固定$n$时，$m$的函数
- 对不同的$n$值（例如 $n=0,1,2,3$），画出相应的序列 $h(n-m)$
- 此时 $h(n-m)$ 是$h(n)$的时间反转和移位
- $x(m)$和$h(n-m)$相乘并在全部值上相加：
  - $n<0$，非零值都不重合，$x(m)h(n-m)=0$，则 $y(n)=0$
  - $n>3$，$x(m)h(n-m)=0$，此时 $y(n)=0$



# 卷积和求解思路

- $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 相乘并在全部值上相加：
  - $n=0$时，序列乘积只含一个非零样本，即
    $$y(0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(0-m)=0.5\times 1=0.5$$
  - $n=1$时，序列乘积有两个非零样本，即
    $$y(1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(1-m)=0.5+2=2.5$$
  - $n=2$时，序列乘积有两个非零样本，即
    $$y(2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(2-m)=0.5+2=2.5$$
  - $n=3$时，序列乘积只含一个非零样本，即
    $$y(3)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(3-m)=2\times 1=2$$ 由此，就得到了例2-4中得到的输出序列 $y(n)$ 。



# 卷积和的计算步骤

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

| | | |
|---|---|---|
| 1） | 换坐标 | 将原坐标$n$换成$m$坐标，把$n$视为$m$坐标中的参变量 |
| 2） | 翻转 | 将 $h(m)$ 以$m = 0$的垂直轴为对称轴翻转成$h(-m)$ |
| 3） | 平移 | 取某一定值$n$，将 $h(-m)$平移$n$， 得到 $h(n-m)$ |
| 4） | 相乘 | 将 $h(n-m)$ 和 $x(m)$的相同$m$值的对应点值相乘 |
| 5） | 累加 | 把以上所有对应点的乘积累加起来，即得 $y(n)$ 值 |

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

# 例2-5：$h(n)=\{-1,2,4,0,5\}$，$x(n)=\{1,3,6,1,-1,4\}$

求 $y(n)=h(n)*x(n)$ $y(n)$是一个长度为10的序列

len[y(n)] = len[x(n)]+len[h(n)]-1

| | | | | | | $m=0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | . . | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h(m) | | | | | | -1 | 2 | 4 | 0 | 5 | | | | | | |
| x(n-m). | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | | | | | | | | $n=0$ |
| | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | | | | | | | $n=1$ |
| | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | | | | | | $n=2$ |
| | | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | | | | | $n=3$ |
| | | | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | | | | $n=4$ |
| | | | | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | | | $n=5$ |
| | | | | | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | | $n=6$ |
| | | | | | | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | | $n=7$ |
| | | | | | | | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | | $n=8$ |
| | | | | | | | | | | 4 | -1 | 1 | 6 | 3 | 1 | $n=9$ |
| y(n). | | | | | | -1 | -1 | 4 | 23 | 32 | 13 | 34 | 21 | -5 | 20 | |

$$y(n)=\{-1,-1,4,23,32,13,34,21,-5,20\}$$

# 卷积和的性质

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- 交换律

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

- 分配律

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

- 结合律

$$x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$$

- 与单位脉冲的卷积

$$x(n-m)*\delta(n-k)=x(n-m-k)$$

证明：

$$x(n-m)*\delta(n-k)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r-m)\delta(n-r-k)=x(n-m-k)$$

$r=n-k$使得$\delta(n-r-k)$有意义

$h(n)=\{-1,2,4,0,5\}$, $x(n)=\{1,3,6,1,-1,4\}$ $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -1 | 2 | 4 | 0 | 5 | | | | | | 对应$h(n)$中单位脉冲的系数 |
| | 1 | 3 | 6 | 1 | -1 | 4 | | | | | 对应$x(n)$中单位脉冲的系数 |
| | -1 | 2 | 4 | 0 | 5 | | | | | | |
| | | -3 | 6 | 12 | 0 | 15 | | | | | |
| | | | -6 | 12 | 24 | 0 | 30 | | | | |
| | | | | -1 | 2 | 4 | 0 | 5 | | | |
| | | | | | 1 | -2 | -4 | 0 | -5 | | |
| | | | | | | -4 | 8 | 16 | 0 | 20 | |
| $y(n)=\{$ | **-1** | **-1** | **4** | **23** | **32** | **13** | **34** | **21** | **-5** | **20** | $\}$ $h(n)*x(n)$ |
| | $y(0)$ | $y(1)$ | … | | | | | | | | |

卷积和分配律
+与单位脉冲
的卷积性质

任意离散序列

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

$N(h)=5$, $N(x)=6$, $N(y)=N(h)+N(x)-1=10$

# 离散信号的时域描述和运算总结

① 单位脉冲序列 $\delta(n)$ $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}$ 有限值

② 单位阶跃序列 $u(n)$ $u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\0 & n<0\end{cases}$

③ 矩形序列

④ 斜变序列

⑤ 实指数序列

⑥ 正弦型序列
- 时移、相移的区别
- 不一定是周期序列
- 数字角频率的区别

⑦ 复指数序列

⑧ 任意离散序列 $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$

- 平移、翻转
- 和、积
- 累加，差分（前向、后向）
- 序列的时间尺度（比例）变换
  - 改变了采样点的密集程度
- 卷积和 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$
  - 对应LTI系统的响应✓
  - 用卷积和的性质简化卷积和运算✓

# ☆课程内容

2.1 信号的采样和恢复

2.2 离散信号的时域描述和运算

## 2.3 离散信号的频域分析

### 2.3.1 离散傅里叶级数 DFS $X(k\Omega_0)$

DTFT $X(\Omega)$

### 2.3.2 从离散傅里叶级数到离散时间傅里叶变换

### 2.3.3 傅里叶变换的离散性和周期性

DTF $X(k)$

### 2.3.4 离散傅里叶变换及其性质

CFS: $F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

离散傅里叶级数变换对 $x(n)\overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow}X(k\Omega_0)$

- 正变换：周期序列$x(n)\longrightarrow$ DFS系数$X(k\Omega_0)$（离散频谱函数）

$$\text{DFS}[x(n)]=X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

计算上：先对n展开化简 再对k分类讨论

$k=0,\cdots,N-1$

- 反变换：DFS系数$X(k\Omega_0)\longrightarrow$ 周期序列$x(n)$（时间函数）

$$\text{IDFS}[X(k\Omega_0)]=x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

离散时间傅里叶变换对 $x(n)\overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow}X(\Omega)$

针对离散非周期序列$x(n)$

- 正变换：序列$x(n)\longrightarrow$ 频谱密度函数$X(\Omega)$，或用$X(e^{j\Omega})$表示

$$\text{DTFT}[x(n)]=X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

- 反变换：频谱（密度函数）$X(\Omega)\longrightarrow$ 序列$x(n)$ （若是无限长序列，需考虑求和的收敛问题）

$$\text{IDTFT}[X(\Omega)]=x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\ k=0,1,\ldots,N-1,\ W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$x(n)=\text{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},\ n=0,1,\ldots,N-1$$

$W_4=-j$

$\text{DFT}[R_N(n)]=\begin{cases}N, & k=0\\ 0, & 其它\end{cases}=N\delta(k)$

圆周位移.

$\text{DFT}[e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}]=N\delta(k-k_0)$

$\text{DFT}[e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}]=N\delta(k+k_0)$

# 离散信号的频域分析概述

第一章
- 连续傅里叶级数（Continuous Fourier Series, CFS）针对连续时间周期信号
- 连续时间傅里叶变换（Continuous-time Fourier Transform, CTFT）连续时间非周期信号
- 拉普拉斯变换（Laplace Transform）

第二章
- 离散傅里叶级数（Discrete Fourier Series，DFS）针对离散周期序列x(n)
- 离散时间傅里叶变换（Discrete-time Fourier Transform, DTFT）针对离散非周期序列x(n)
- 离散傅里叶变换（Discrete Fourier Transform, DFT）
- 快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform, FFT）
- Z 变换（Z-Transform）

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, k = 0,1,\ldots,N-1, W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

CFS: $F(n\omega_1) = F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

DFS: $X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}, k=0,1,\cdots,N-1$

CTFT: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

DTFT: $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$

# 周期信号的频域分析

CFS

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \quad F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt$$

DFS $\cdot$ $X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$

- 离散傅里叶级数（DFS，有限项级数）
  - 从连续傅里叶级数（CFS，无穷级数）的复指数形式推导得到
  - 连续时间复指数信号 $e^{j\omega t}$，其频率 $\omega\in(-\infty,\infty)$

    $t=nT_s$，$\Omega=\omega T_s$

    $\Omega$·数字角频率 $\omega$ 模拟角频率
  - 离散时间复指数序列 $e^{j(\Omega\pm 2k\pi)n}=e^{j\Omega n}\,e^{\pm j2kn\pi}=e^{j\Omega n}$（$k$为正整数），其作为 $\Omega$ 的函数，周期为$2\pi$，即连续信号采样离散化后，无限频率范围映射到离散信号的有限频率范围为$2\pi$，通常取 $\Omega\in[0,2\pi)$ 或 $\Omega\in[-\pi,\pi)$
- 离散傅里叶级数（DFS）的性质

# 离散傅里叶级数的推导

$\{e^{jn\omega_1 t}\},\ n=0,\pm1,\pm2,\dots,\ t\in\left(t_0,t_0+\frac{2\pi}{\omega_1}\right),\forall t_0$

在一个周期上构成完备正交函数集

CFS

- 连续周期信号傅里叶级数的复指数形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}\qquad F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt$$

- 接下来，为了便于推导离散傅里叶级数，将上式改变符号如下

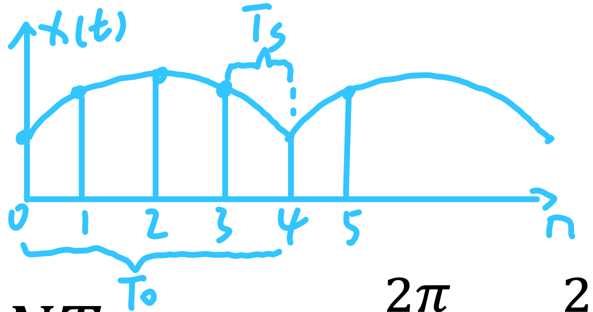
DFS

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

x(t)周期为 $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$

其中，傅里叶系数 $X_k=X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt,\qquad k=0,1,2,\dots$

# 离散傅里叶级数的推导




eg N=4 4点采样
n=0 1 2 3

连续周期信号x(t)的周期为$T_0$

对一个周期$T_0$进行$N$点采样，即$T_0=NT_s$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{NT_s}$

采样周期 $T_s$

注意此处N的定义

离散周期序列　$x(n)=x(n+N)=x(n+mN)$

X(n)周期为$N$

即数字角频率　$w_0$ 模拟角频率

$\Omega_0$——信号在离散域的基本数字频率，$\Omega_0=\omega_0 T_s=\frac{2\pi}{NT_s}T_s=\frac{2\pi}{N}$（单位为rad）

$k\Omega_0$——$k$次谐波数字频率，$k=1,2,\ldots,N$　（有限个谐波分量）

采样后，$t=nT_s$，$dt=T_s$，在一个周期内的积分变为在一个周期内的累加：

傅里叶系数变为

$$X\left(k\frac{\Omega_0}{T_s}\right)=\frac{1}{NT_s}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_s)e^{-jk\frac{2\pi}{NT_s}nT_s}\cdot T_s=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_s)e^{-jk\Omega_0 n},\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$X_k=X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

通过频谱系数$X(k\Omega_0)$表示$x(n)$的频谱

DFS系数

$$X_k = X(k\Omega_0) = \frac{< \boldsymbol{x}(n), e^{jk\Omega_0 n}|_{n=0}^{N-1} >}{< e^{jk\Omega_0 n}|_{n=0}^{N-1}, e^{jk\Omega_0 n}|_{n=0}^{N-1} >} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

- $X_k$是傅里叶级数展开式的系数，也称为$x(n)$的频谱系数，
- 周期序列 $x(n)$ 可以分解成**N个成谐波关系**的复指数信号之和
- $X[(k+N)\Omega_0] = X(k\Omega_0)$，取任一周期即可

$N\Omega_0 = 2\pi$

离散傅里叶级数变换对 $x(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0)$

时域离散化，频域周期化

时域周期化，频域离散化

$$x(n) = \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \qquad X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

通过频谱系数$X(k\Omega_0)$表示$x(n)$的频谱

# 离散傅里叶级数变换对 $x(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0)$

对比：复傅里叶系数. $F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

- 正变换：周期序列$x(n) \longrightarrow$ DFS系数$X(k\Omega_0)$（离散频谱函数）

$$\text{DFS}[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

计算上：先对n展开化简
再对k分类讨论
$k=0,\cdots,N-1$

- 反变换：DFS系数$X(k\Omega_0) \longrightarrow$ 周期序列$x(n)$(时间函数)

$$\text{IDFS}[X(k\Omega_0)] = x(n) = \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

这个例子的$|X(k\Omega_0)|$相当于$|X(k\omega_0)|$做了周期延拓，并且频率上乘以$T_s$做线性变换

满足采样定理的条件下，$X(k\Omega_0)$可以看成$X(k\omega_0)$的周期重复，重复周期为 $\begin{cases} \omega_s \text{（模拟频率）} \\ 2\pi \text{（数字频率）} \end{cases}$

**例2-6：** 已知离散正弦信号$x(n) = \cos \alpha n$，分别求出当$\alpha = \sqrt{2}\pi$及$\alpha = \pi/3$时的傅里叶级数表示式并画出相应的频谱图。

解：序列$x(n)$是周期序列 $\Leftarrow N = \frac{2m\pi}{\Omega_0} = \frac{2m\pi}{\alpha}$是正整数，其中$m$是正整数，$\frac{2\pi}{\alpha}$是有理数 $\frac{2\pi}{\Omega_0}$

1）当 $\alpha = \sqrt{2}\pi$ 时，非周期序列，不能展开为傅里叶级数

x(n)的周期

2）当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时，取$m = 1$即可得到$N = 6$，$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \pi/3$，则

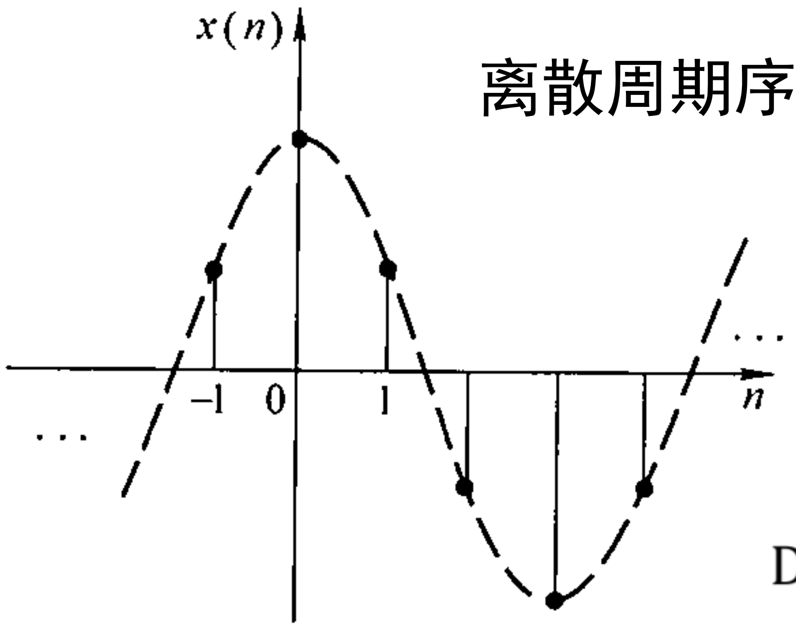
$$\mathrm{DFS}[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)e^{-jk\frac{\pi}{3}n}, \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$= \frac{1}{6}\left[\underbrace{1}_{n=0} + \overbrace{\frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{3}}}^{n=1} - \underbrace{\frac{1}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{3}}}_{n=2} - e^{-jk\pi} - \frac{1}{2}e^{-jk\frac{4\pi}{3}} + \frac{1}{2}e^{-jk\frac{5\pi}{3}}\right]$$

计算上：先对n展开化简 再对k分类讨论

周期性+欧拉公式

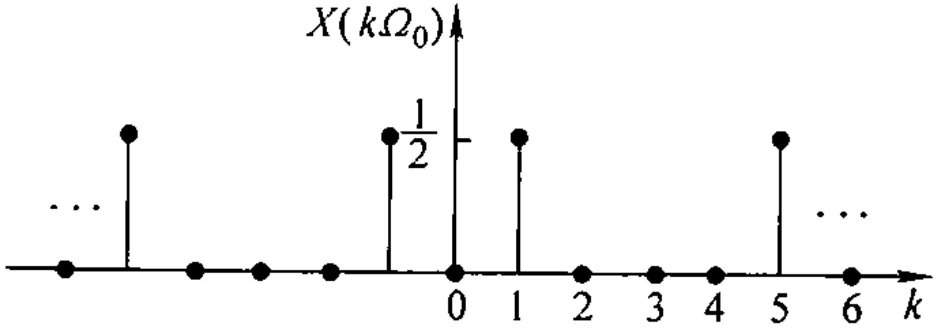
$$= \frac{1}{6}\left[1 + \cos\frac{k\pi}{3} - \cos\frac{2k\pi}{3} - \cos k\pi\right] = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 1,5 \\ 0 & k = 0,2,3,4 \end{cases}$$




离散周期序列

根据 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 对应的离散周期序列可知，此时得到的频谱是以6为周期的离散频谱：

$$\mathrm{DFS}[x(n)]=X(k\Omega_0)=\begin{cases}\frac{1}{2} & k=\pm1,\pm5\\ 0 & k=0,\pm2,\pm3,\pm4\end{cases}$$




通过频谱系数 $X(k\Omega_0)$ 表示 $x(n)$ 的频谱

$\omega_0=\pi$

**例2-7：** 连续周期信号$x(t)=6\cos\pi t$，现以采样间隔$T_s=0.25s$对它进行采样，求采样后周期序列的幅度频谱并与原始信号$x(t)$的幅度频谱进行比较。

解：由已知的采样间隔，得 $x(n)=x(t)\big|_{t=0.25n}=6\cos(\pi 0.25n)=6\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

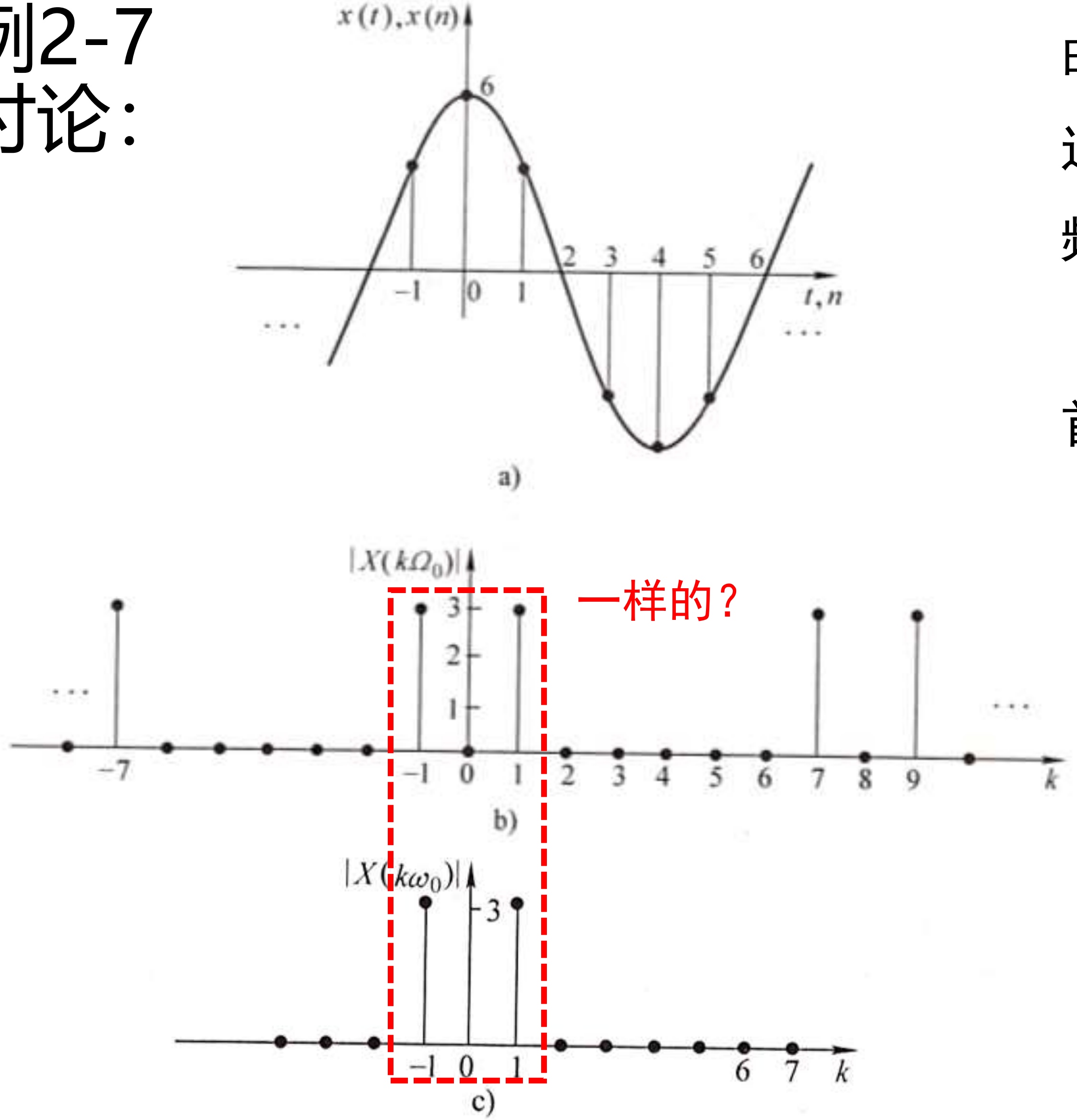
$\leftarrow\Omega_0$

采样角频率 $\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}=8\pi$，　数字角频率 $\Omega_0=\frac{\pi}{4}$，　N点采样 $N=\frac{2\pi}{\Omega_0}=8$

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$|X(k\Omega_0)|=\begin{cases}3 & k=\pm1,\pm7\\ 0 & k=0,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\end{cases}$$

# 例2-7 讨论：




由 $x(t)=6\cos\pi t=3\left(e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}\right)$，可以通过连续时间周期信号的傅里叶级数求得相应的频谱（离散谱），幅度频谱用$|X(k\omega_0)|$表示。

首先，以 $k$ 为横坐标，比较$x(t)$和$x(n)$的频谱：

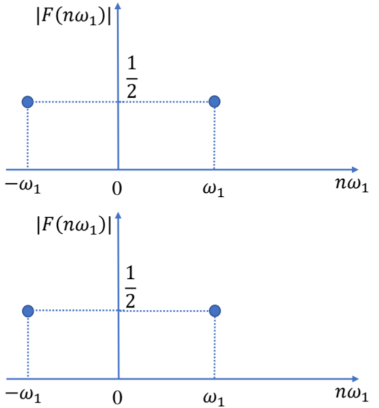
$$|X(k\Omega_0)|=\begin{cases}3 & k=\pm1,\pm7\\ 0 & k=0,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\end{cases}$$

$$|X(k\omega_0)|=\begin{cases}3 & k=\pm1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

- 在$\pm\omega_1$处

$\cos\omega_1 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t}\right)$

$\sin\omega_1 t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t}\right)$



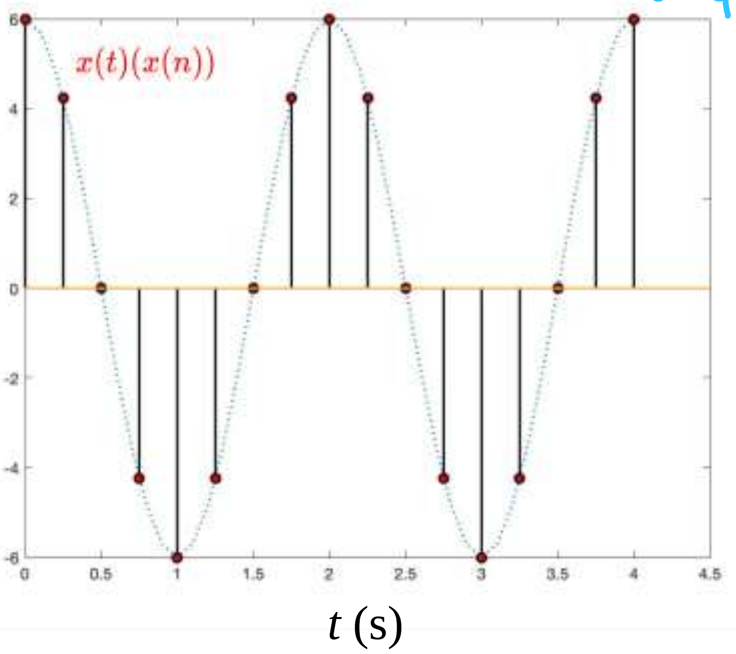
## 例2-7 讨论：

$\omega_0=\pi$

$$x(t)=6\cos\pi t=3(e^{j\pi t}+e^{-j\pi t})$$

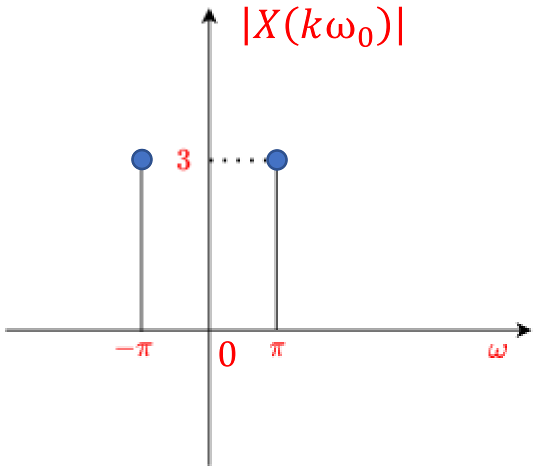
$$x(n)=6\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right),\quad T_s=0.25s,\quad \omega_s=8\pi$$

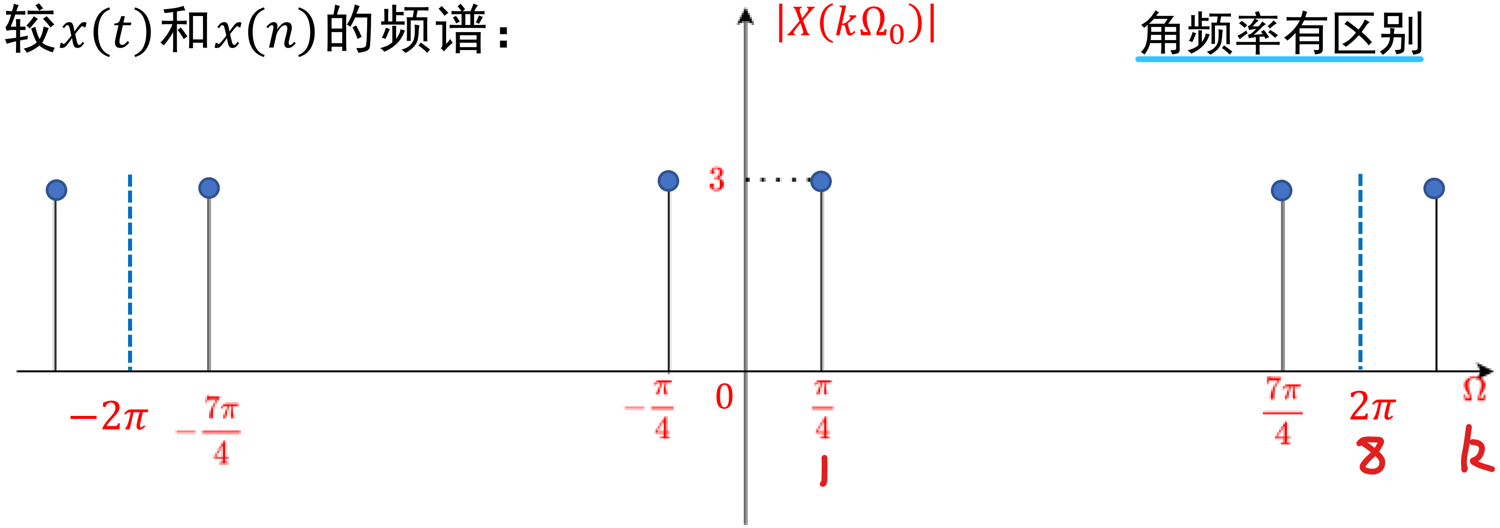
$\Omega_0=\frac{\pi}{4}$




用角频率作为横坐标，

比较$x(t)$和$x(n)$的频谱：




在一个周期内，连续（模拟）和离散（数字）情况下各自得到的幅频数值相等，角频率有区别

这个例子的$|X(k\Omega_0)|$相当于$|X(k\omega_0)|$做了周期延拓，并且频率上乘以$T_s$做线性变换

$X_k$ $F_n$

满足采样定理的条件下，$X(k\Omega_0)$可以看成$X(k\omega_0)$的周期重复，重复周期为 $\begin{cases}\omega_s & \text{（模拟频率）}\\ 2\pi & \text{（数字频率）}\end{cases}$

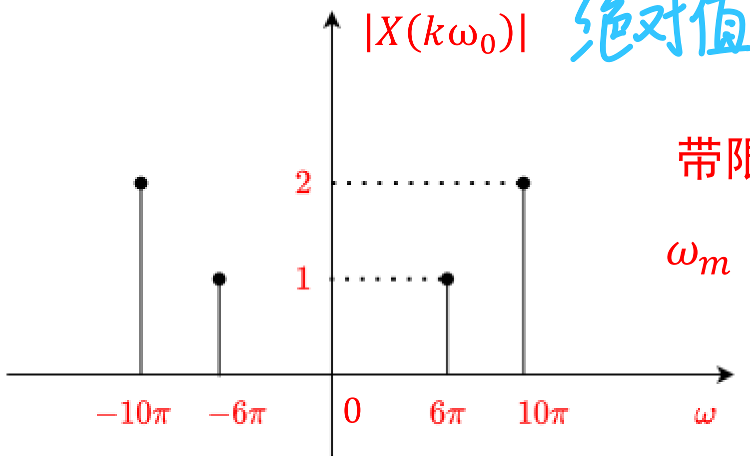
**例2-8：** 连续周期信号$x(t) = 2\cos 6\pi t + 4\sin 10\pi t$，现以16样点/周期和8样点/周期对它进行采样，求采样后周期序列的幅度频谱并与原始信号 $x(t)$ 的幅频比较。

$T_1=\frac{1}{3}$　$T_2=\frac{1}{5}$　$N_1=16$　$N_2=8$

$T_1$和$T_2$的最小公倍数为$T_0=1$

解：$T_0 = 1$，　$x(t) = e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t} + \frac{2e^{j10\pi t}}{j} - \frac{2e^{-j10\pi t}}{j}$

欧拉公式




绝对值

带限信号

$\omega_m = 10\pi$

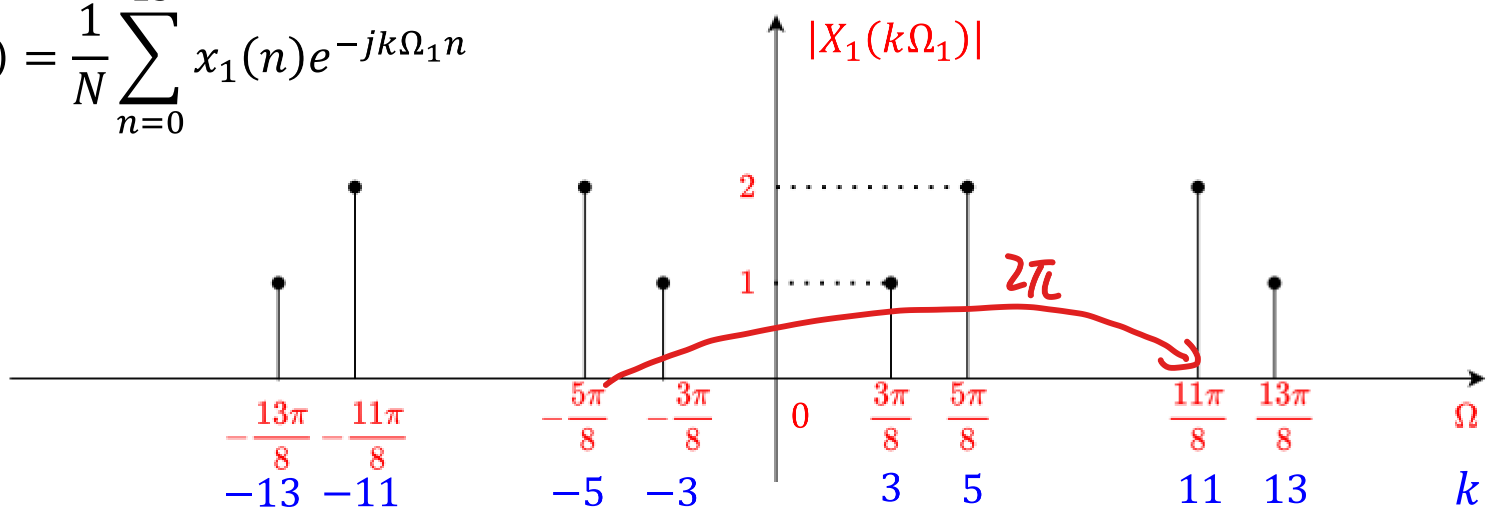
首先，考虑 16 样点/周期的情况：

采样周期　$T_{s1} = \frac{1}{16}$，　$N_1 = 16$，　$\Omega_1 = \frac{\pi}{8}$，

采样角频率　$\omega_{s1} = 32\pi > 2\omega_m$　$20\pi$

$x_1(n) = 2\cos\frac{3\pi}{8}n + 4\sin\frac{5\pi}{8}n$，　$X_1(k\Omega_1) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{15} x_1(n)e^{-jk\Omega_1 n}$

$$|X_1(k\Omega_1)| = \begin{cases} 1 & k = \pm 3, \pm 13 \\ 2 & k = \pm 5, \pm 11 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$




采样频率满足采样定理，无频谱混叠

其次，考虑 8样点/周期的情况：

采样周期

$T_{s2}=\frac{1}{8},\quad N_2=8,\quad \Omega_2=\frac{\pi}{4},$ 采样角频率 $\omega_{s2}=16\pi<2\omega_m$ $20\pi$

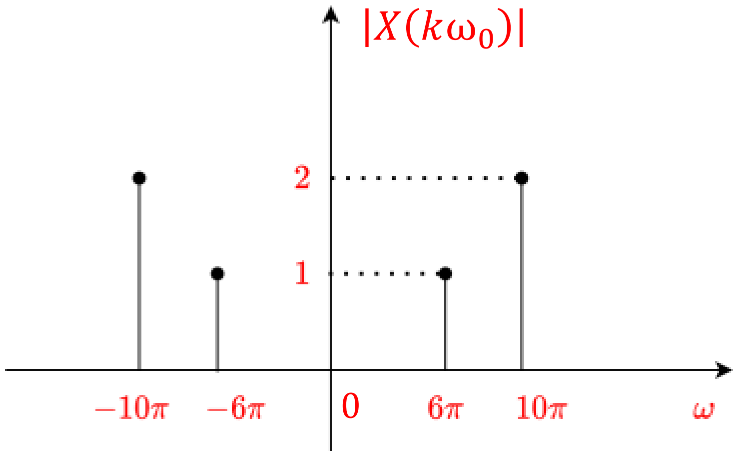
$$x_2(n)=2\cos\frac{3\pi}{4}n+4\sin\frac{5\pi}{4}n$$

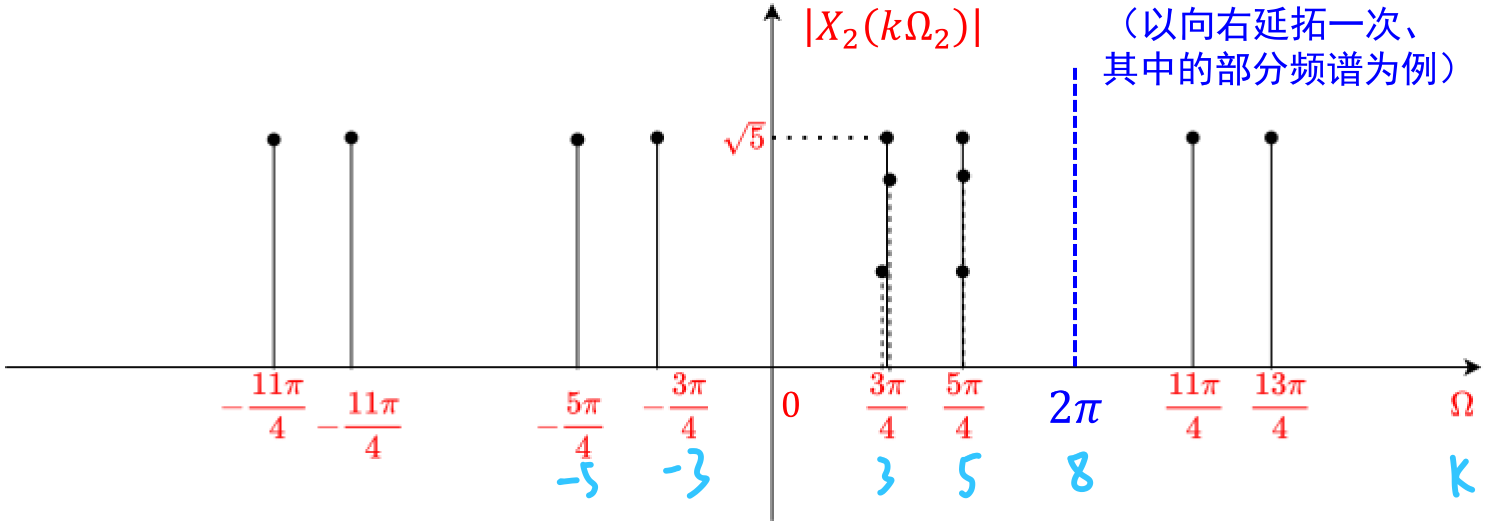
$$X_2(k\Omega_2)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{7}x_2(n)e^{-jk\Omega_2 n}$$

$$|X_2(k\Omega_2)|=\begin{cases}\sqrt{5} & k=\pm3,\pm5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

采样频率不满足采样定理

发生了频谱混叠



# 离散周期信号的频谱

- 结论

$X((k+N)\Omega_0) = X(k\Omega_0)$

DFS系数 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$ 周期为N

  - 离散时间周期信号的频谱$X(k\Omega_0)$是具有谐波性的离散周期序列

复傅里叶系数

  - 连续时间周期信号的频谱$X(k\omega_0)$是具有谐波性的离散非周期序列

$F_n$ $\omega_0$

$X_k$ $F_n$

  - $X(k\Omega_0)$可以看作是$X(k\omega_0)$的近似式，近似程度与采样周期有关

$X_k$ $F_n$

    - 在满足采样定理条件下，可以通过截取任一个周期的样点$x(n) \to X(k\Omega_0) \to X(k\omega_0)$
    - 在不满足采样定理条件下，$X(k\Omega_0)$出现频谱混叠，不能准确表示$X(k\omega_0)$；在误差允许的情况下，可以利用一个周期的$X(k\Omega_0)$近似$X(k\omega_0)$

# 离散傅里叶级数（DFS）的主要性质

① 线性性质

△② 周期卷积定理

③ 复共轭

△④ 位移性质

⑤ 帕斯瓦尔定理

$$\mathrm{DFS}[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

## ① 线性性质

若$x(n) \overset{\mathrm{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0)$，$y(n) \overset{\mathrm{DFS}}{\longleftrightarrow} Y(k\Omega_0)$，则

$$ax(n) + by(n) \overset{\mathrm{DFS}}{\longleftrightarrow} aX(k\Omega_0) + bY(k\Omega_0)$$

## ③ 复共轭

若$x(n) \overset{\mathrm{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0)$，则

$$x^*(-n) \overset{\mathrm{DFS}}{\longleftrightarrow} X^*(k\Omega_0)$$

式中，上标“$*$”表示复共轭。

# ② 周期卷积定理

若$x(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0)$， $h(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} H(k\Omega_0)$，则

$$x(n) \circledast h(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} NX(k\Omega_0)H(k\Omega_0)$$

$$x(n)h(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0) \circledast H(k\Omega_0)$$

$\circledast$为周期卷积的符号，两周期序列$x(n)$和$h(n)$的周期卷积定义为：

之后 圆为圆周卷积的符号

将线性卷积的长度限制在一个周期内

$$x(n) \circledast h(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)$$

限制了卷积的长度

证明周期卷积：$x(n)$和$h(n)$周期都为$N$，因此$y(n)=x(n)\circledast h(n)$的周期也为$N$

$$\text{DFS系数}\ Y(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}y(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h(n-m)e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h(n-m)e^{-jk\Omega_0 m}\cdot e^{-jk\Omega_0(n-m)}$$

$$=X(k\Omega_0)\cdot N\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}h(n-m)e^{-jk\Omega_0(n-m)}=NX(k\Omega_0)\cdot H(k\Omega_0)$$

△只需有N项累加，从什么开始都行

周期卷积 VS 线性卷积：周期卷积仅在单个周期内求和，而线性卷积考虑整数 $m\in(-\infty,\infty)$

# ④ 位移性质

回顾：连续时间傅里叶变换的时移性质

$$\mathcal{F}[x(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} X(\omega)$$

若$x(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0)$，则

$$x(n-m) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} e^{-jk\Omega_0 m} X(k\Omega_0)$$

DTFT的性质

已知

$$x(n) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$$

$$y(n) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} Y(\Omega)$$

| | | |
|---|---|---|
| 线性 | $ax(n)+by(n)$ | $aX(\Omega)+bY(\Omega)$ |
| ☆时域平移 | $x(n-n_0)$ | $e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$ |
| 时间翻转 | $x(-n)$ | $X(-\Omega)$ |
| ☆频域平移 | $e^{j\Omega_0 n} x(n)$ | $X(\Omega-\Omega_0)$ |
| 时域卷积 | $x(n) * y(n)$ | $X(\Omega)Y(\Omega)$ |

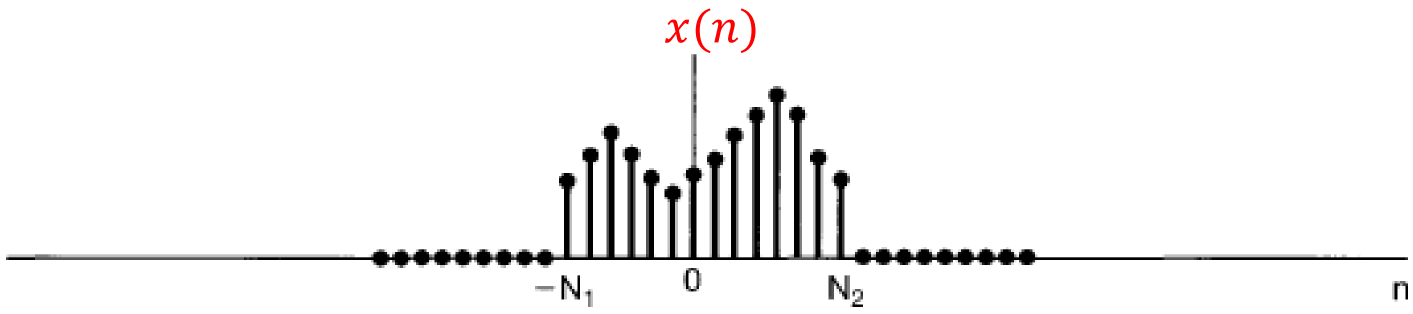
# 课程内容

（Discrete Fourier Series，DFS）（Discrete-time Fourier Transform, DTFT）

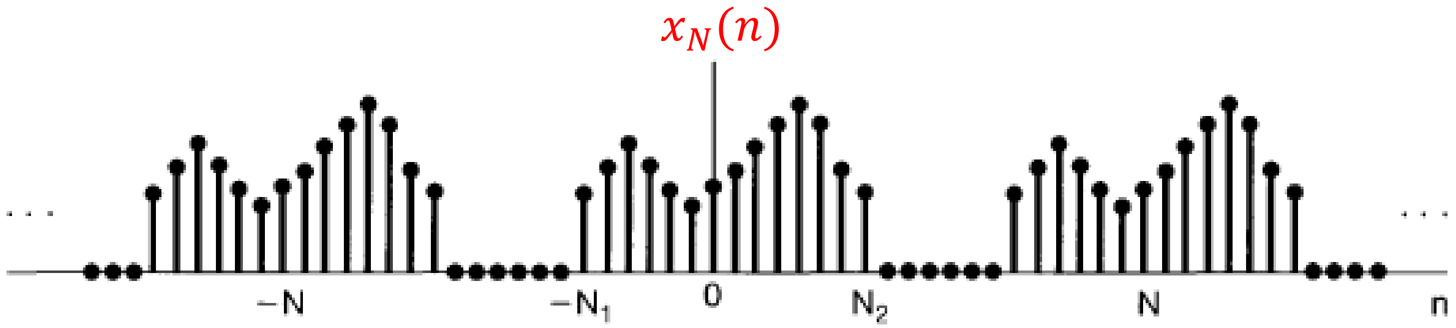
# 从离散傅里叶级数到离散时间傅里叶变换

针对离散周期序列x(n)　　针对离散非周期序列x(n)

对于长度有限的非周期信号$x(n)$，以$N$为周期，将$x(n)$延拓为周期信号$x_N(n)$




非周期序列$x(n)$可看作周期无穷大的周期序列




$x_N(n)$是$x(n)$的周期重复

要求$N$大于$x(n)$的长度

$N_1, N_2, N$为正整数

$N > N_1 + N_2$

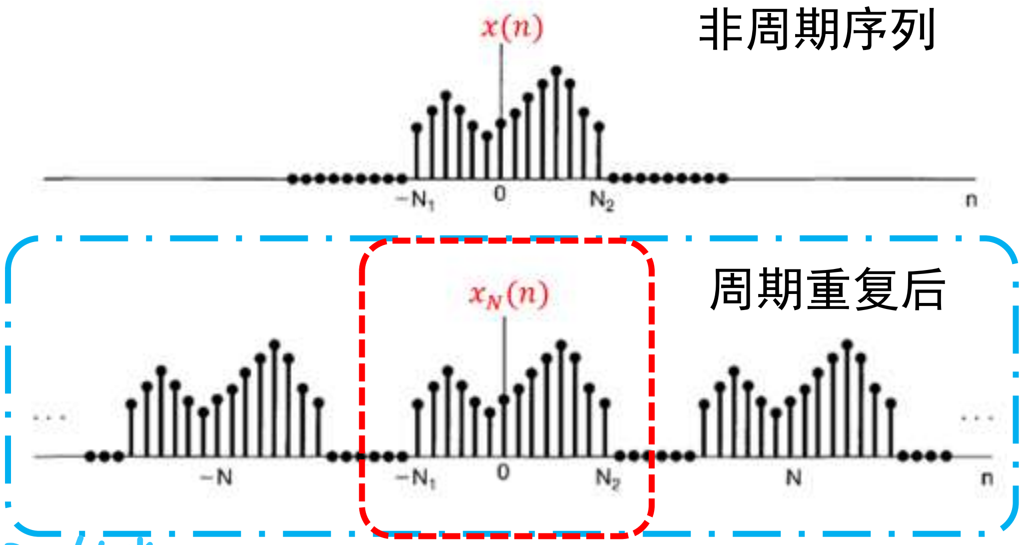
$$x_N(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-mN)$$ 是周期信号（周期为$N$），DFS变换对如下：

$$\mathrm{IDFS}[X(k\Omega_0)]=x_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\mathrm{DFS}[x_N(n)]=X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_N(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

只需$x_N(n)$在一个周期上的数

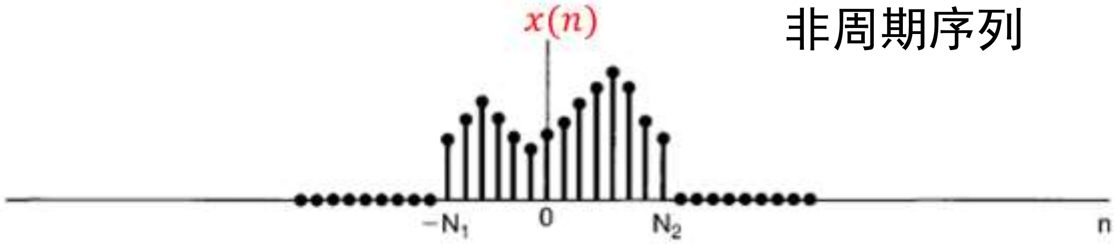
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$




接下来，类似于连续傅里叶变换的推导，考虑$x_N(n)$的周期$N$趋向无穷大的情形

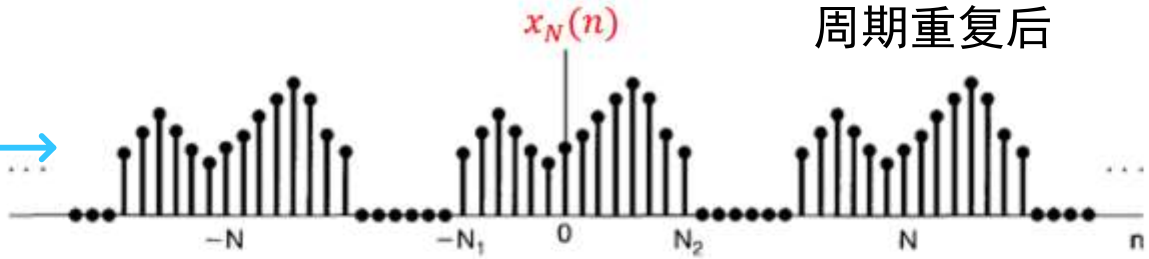
# 从离散傅里叶级数到离散时间傅里叶变换

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x_N(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$




非周期序列

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

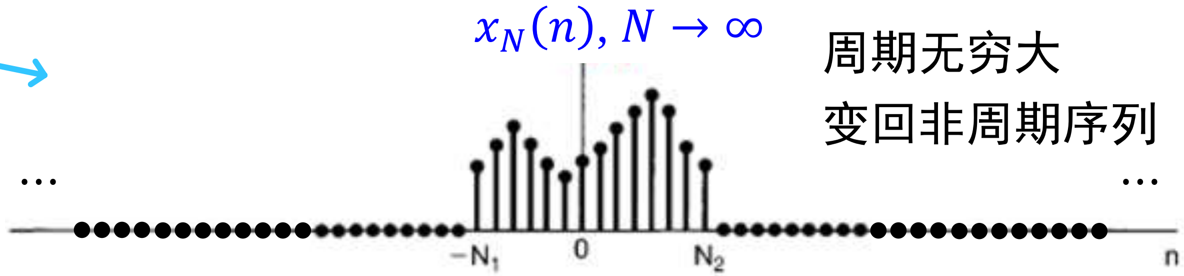



周期重复后

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$N\rightarrow\infty$

分母上的$N$
导致无穷小量




周期无穷大
变回非周期序列

# 从离散傅里叶级数到离散时间傅里叶变换

定义频谱密度函数，描述非周期序列频谱的分布规律：

$$X(\Omega)=X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

频谱密度
$X(\Omega)$ 的周期？

$2\pi$

$$X(\Omega+2\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\Omega+2\pi)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}\underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1}=X(\Omega)$$

可见此时的DFS系数$X(k\Omega_0)$正比于频谱密度函数$X(\Omega)$的各样本值，即

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}X\left(e^{jk\Omega_0}\right)=\frac{1}{N}X(\Omega)$$

# 从离散傅里叶级数到离散时间傅里叶变换

$$N \to \infty, \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \to d\Omega, \qquad k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{N} \to \Omega, \qquad X(k\Omega_0) \to 0$$

$$x(n) = \lim_{N\to\infty} x_N(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=\langle N\rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(\Omega) e^{jk\Omega_0 n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{\Omega_0}{2\pi} X(\Omega) e^{jk\Omega_0 n}$$

$$x(n) \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

整理得到 $x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$

# 离散时间傅里叶变换对 $x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega)$

针对离散非周期序列x(n)

X(Ω)的周期为2π

- 正变换：序列$x(n) \longrightarrow$ 频谱密度函数$X(\Omega)$，或用$X(e^{j\Omega})$表示

对比CTFT

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

- 反变换：频谱（密度函数）$X(\Omega) \longrightarrow$ 序列$x(n)$

（若是无限长序列，需考虑求和的收敛问题）

$$\text{IDTFT}[X(\Omega)] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

# 离散时间傅里叶变换（DTFT）的存在条件 了解

当$x(n)$为无限长序列时，为了保证和式收敛，要求$x(n)$是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

或该序列的能量有限，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

那么DTFT的式子 $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ 就一定收敛。

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

例2-9：求序列$x_1(n) = a^n u(n), |a| < 1$，以及序列$x_2(n) = -a^n u(-n-1), |a| > 1$的DTFT。

离散时间傅里叶变换

单位阶跃序列 $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$u(-n-1) = \begin{cases} 1 & n \leq -1 \\ 0 & n > -1 \end{cases}$

解：

$$X_1(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

↑由于有u(n)

（利用几何级数求和公式，回想：等比数列）

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1 & (a=1) \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & (a \neq 1) \end{cases}$$

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n e^{-j\Omega n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} e^{j\Omega n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}e^{j\Omega}\right)^n + 1$$

因为对于$x_2(n)$有$|a| > 1$，得

$$X_2(\Omega) = -\frac{1}{1 - a^{-1}e^{j\Omega}} + 1 = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

# 例2-9 讨论:

$x_1(n) = a^n u(n), |a| < 1$

DTFT

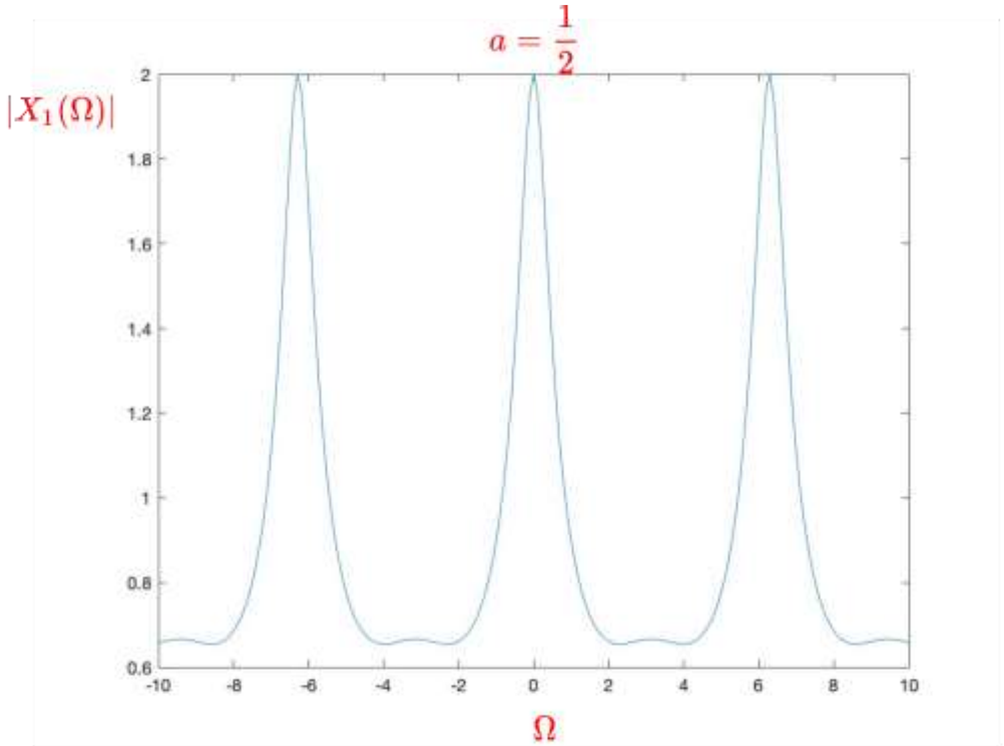
$$X_1(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

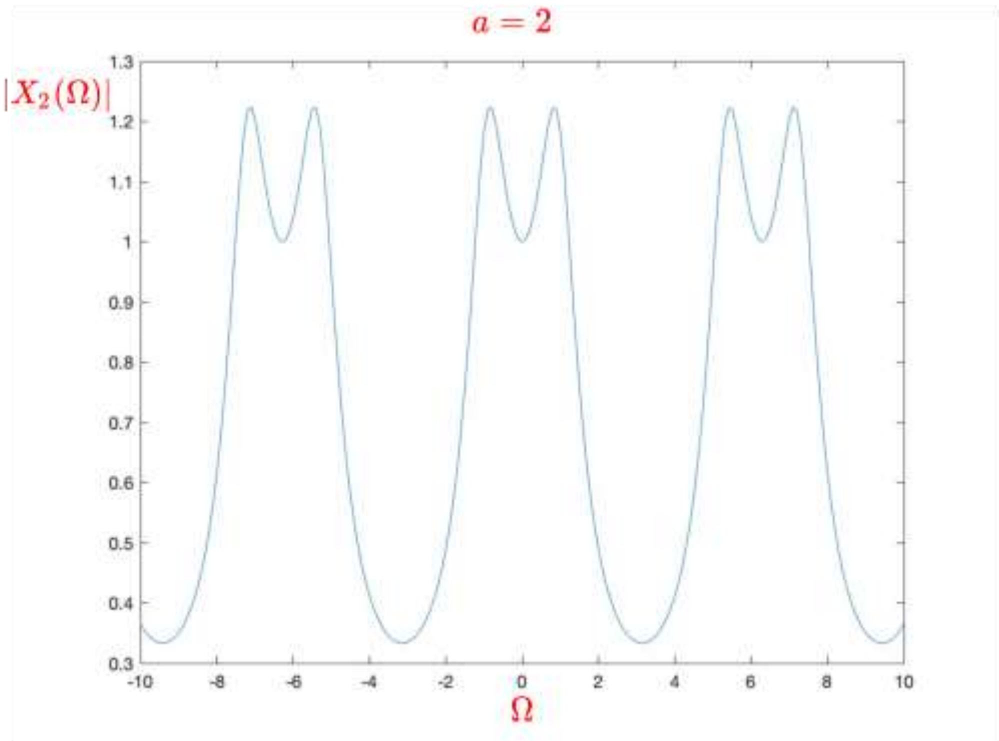
两个非常有用的DTFT对!

$x_2(n) = -a^n u(-n-1), |a| > 1$

DTFT

$$X_2(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$



离散非周期

# 例2-10：求有限长序列$x(n)$的频谱：即求DTFT

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

矩形序列

$$x(n) = \begin{cases} 1 & -2 \le n \le 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

解：

$$X(\Omega) = \sum_{n=-2}^{2} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-2}^{2} e^{-j\Omega n} \overset{①}{=} \frac{\sin\left(2+\frac{1}{2}\right)\Omega}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

频谱为连续的

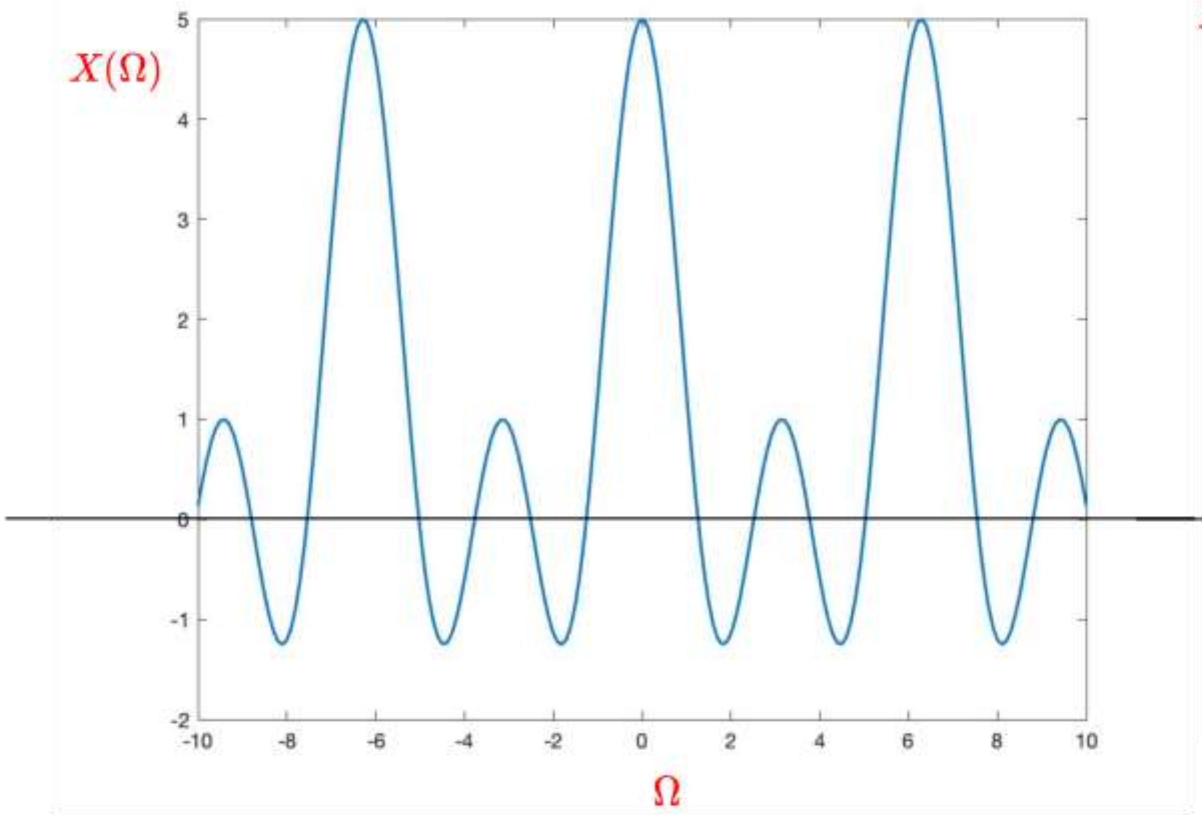
$$|X(\Omega)| = \left|\frac{\sin\left(2+\frac{1}{2}\right)\Omega}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right|, \qquad \varphi(\Omega) = \begin{cases} 0 & X(\Omega) > 0 \\ \pm\pi & X(\Omega) < 0 \end{cases}$$

$$① \sum_{n=-2}^{2} e^{-j\Omega n} = \frac{e^{j2\Omega} - e^{-j3\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{j\frac{5}{2}\Omega} - e^{-j\frac{5}{2}\Omega}}{e^{j\frac{1}{2}\Omega} - e^{-j\frac{1}{2}\Omega}} = \frac{\sin\frac{5}{2}\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

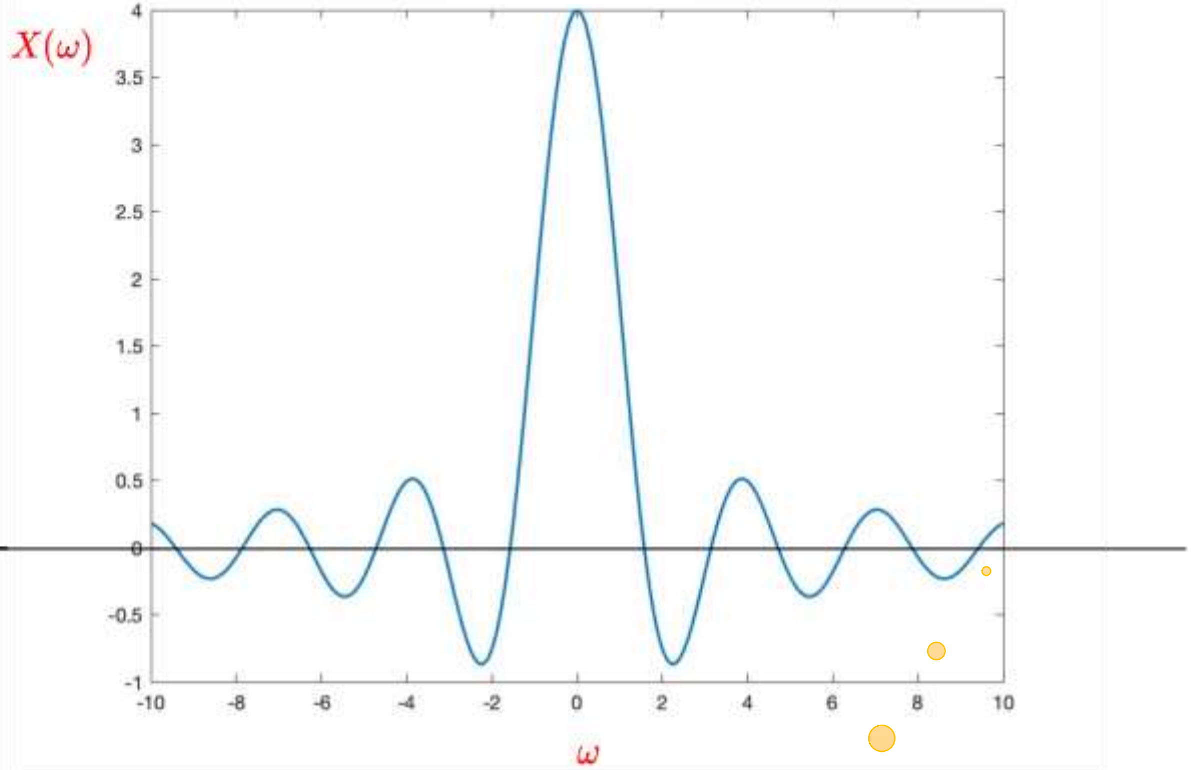
矩形序列

$$x(n)=\begin{cases}1 & -2\le n\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

通过DTFT求解得到的频谱密度函数



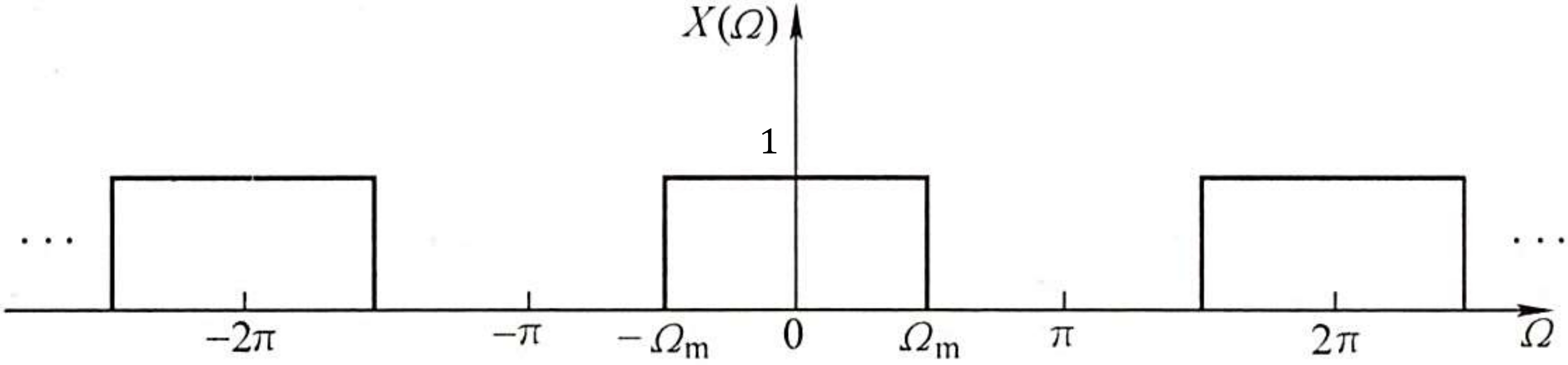

单矩形脉冲信号
傅里叶变换




**存在频谱混叠**

是无限延伸的

例2-11：已知一周期连续频谱如图所示，求其相应的序列$x(n)$。




周期 2π

$$\mathrm{IDTFT}[X(\Omega)] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

# 例2-11: 已知一周期连续频谱如图所示，求其相应的序列$x(n)$。

解：求离散时间傅里叶反变换（IDTFT），只需要在$2\pi$区间内进行积分，即

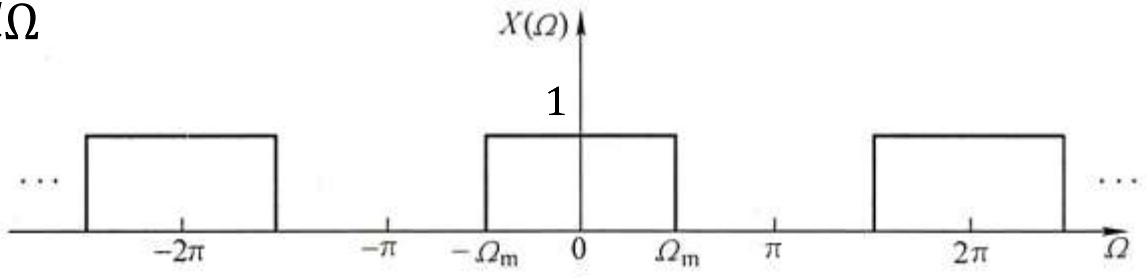
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} 1\cdot e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$= \frac{\Omega_m}{\pi}\cdot\frac{\sin\Omega_m n}{\Omega_m n}, \qquad n \neq 0$$

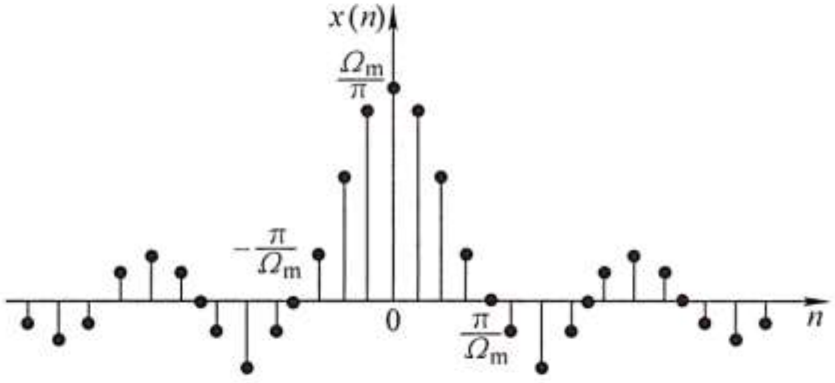
当$n = 0$时,

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega 0}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} 1\, d\Omega = \frac{\Omega_m}{\pi}$$

图a)频谱$X(\Omega)$对应的序列$x(n)$如图b)所示。



a)



b)

# DTFT的性质

已知

$$x(n) \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$$

$$y(n) \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} Y(\Omega)$$

| | | |
|---|---|---|
| 线性 | $ax(n) + by(n)$ | $aX(\Omega) + bY(\Omega)$ |
| 时域平移 | $x(n - n_0)$ | $e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$ |
| 时间翻转 | $x(-n)$ | $X(-\Omega)$ |
| 频域平移 | $e^{j\Omega_0 n}x(n)$ | $X(\Omega - \Omega_0)$ |
| 时域卷积 | $x(n) * y(n)$ | $X(\Omega)Y(\Omega)$ |
| 共轭对称 | $x^*(n)$ | $X^*(-\Omega)$ |
| 频域微分 | $nx(n)$ | $j\dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ |
| 频域卷积 | $x(n)y(n)$ | $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda)Y(\Omega - \lambda)d\lambda$ |

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

# 利用 DTFT 性质求解差分方程

离散时间
LTI 系统

输入信号

- 假设$y(n)$满足零初始条件且$x(n) = \delta(n)$，求解下式**线性常差分方程**

$$y(n) - 0.25y(n-1) = x(n) - x(n-2)$$

解：首先取差分方程中每项的DTFT，利用时移性质：

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-j\Omega n} = 1$$

$$Y(\Omega) - 0.25e^{-j\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega) - e^{-j2\Omega}X(\Omega)$$

$$Y(\Omega) = \frac{1 - e^{-2j\Omega}}{1 - 0.25e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - 0.25e^{-j\Omega}} - \frac{e^{-2j\Omega}}{1 - 0.25e^{-j\Omega}}$$

利用例2-9中的DTFT对：

$$(0.25)^n u(n) \overset{\mathrm{DTFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - 0.25e^{-j\Omega}}$$

$x_1(n) = a^n u(n), |a| < 1$ $\overset{\mathrm{DTFT}}{\Updownarrow}$ $X_1(\Omega) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$

两个非常有用的DTFT对！

$x_2(n) = -a^n u(-n-1), |a| > 1$ $\overset{\mathrm{DTFT}}{\Updownarrow}$ $X_2(\Omega) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$

得

$$y(n) = 0.25^n u(n) - (0.25)^{n-2} u(n-2)$$

求解线性常差分方程法二：z变换法，

$x(n)=\delta(n)\longrightarrow X(z)=1$，$y(n)$为零状态，

$y(n)-0.25y(n-1)=x(n)-x(n-2)$

有 $Y(z)-0.25z^{-1}Y(z)=X(z)-z^{-2}X(z)=1-z^{-2}$

$$Y(z)=\frac{1-z^{-2}}{1-0.25z^{-1}}=\frac{z^2-1}{z(z-0.25)}$$

$x(n)\xrightarrow{z}X(z)$

$x(n-n_0)\xrightarrow{z}z^{-n_0}X(z)$

$x(n+n_0)\xrightarrow{z}z^{n_0}X(z)-z^{n_0}x(0)-z^{n_0-1}x(1)-\cdots-z^{1}x(n_0-1)$

法一：展开 $a^n\overset{z}{\underset{z^{-1}}{\longleftrightarrow}}\frac{z}{z-a}$ ＋平移

$Y(z)=(1-z^{-2})\frac{z}{z-0.25}$，$y(n)=z^{-1}[Y(z)]=0.25^n u(n)-0.25^{(n-2)}u(n-2)$

法二：留数法求z反变换，$y(n)=\sum_i Res[Y(z)z^{n-1},z_i]$

$$y(n)=\lim_{z\to0}\frac{z^2-1}{z-0.25}z^{n-1}+\lim_{z\to0.25}\frac{z^2-1}{z}z^{n-1}$$

① $n=0$时，$z=0$为2阶极点，$y(n)=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-1}{z-0.5}\right]+\lim_{z\to0.25}\frac{z^2-1}{z^2}=16+1-16=1$

② $n=1$时，$y(1)=\lim_{z\to0}\frac{z^2-1}{z-0.25}+\lim_{z\to0.25}\frac{z^2-1}{z}=4+\frac{1}{4}-4=0.25$

③ $n\geq2$时，$y(n)=0+\lim_{z\to0.25}\frac{z^2-1}{z}z^{n-1}=(0.25-4)\cdot0.25^{n-1}=0.25^n-0.25^{n-2}$

综上，$y(n)=0.25^n u(n)-0.25^{n-2}u(n-2)$

离散傅里叶级数

# DTFT、DFS 与连续时间傅里叶变换（CTFT）的关系

离散时间傅里叶变换

**DTFT 与 DFS**： DTFT 是 DFS 当$N \to \infty$时情况 非周期序列

**共同点**：时域都是离散的，在频域频谱都是周期的。离散性⟶周期性

**不同点**：周期序列的频谱通过 DFS 求解，是离散的、具有谐波性，$X(k\Omega_0)$是谐波的复振幅，宜于计算机计算/ 非周期序列的频谱通过 DTFT 求解，是连续的、不具有谐波性，$X(\Omega)$表示频谱密度，不利于计算机的计算或分析。

**DTFT 与 CTFT**：

**共同点**：信号在时域波形均为非周期，频域均为频谱密度函数（连续频谱）。

**不同点**：DTFT 得到的$X(\Omega)$是周期性的， CTFT 得到的$X(\omega)$为非周期的。

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

周期为2π

# 信号与傅里叶变换对应关系

| 时域信号 | 连续时间傅里叶变换 CTFT | 离散时间傅里叶变换 DTFT |
| --- | --- | --- |
| 非周期 | 非周期、连续频谱密度函数 | 周期、连续频谱密度函数 |
| 周期 | 非周期、离散频谱函数 | 周期、离散频谱函数 |

- 连续时间信号的频谱是非周期的
- 离散时间信号的频谱是周期的
- 周期信号具有离散频谱
- 非周期信号具有连续频谱

- 时域周期性——频域离散性
- 时域离散性——频域周期性
- 时域非周期——频域连续性
- 时域连续性——频域非周期

# 课程内容



$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,1,\dots,N-1$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},k=0,1,\dots,N-1,W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},n=0,1,\dots,N-1$$

# 离散傅里叶变换 (DFT)

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, k = 0,1,\dots,N-1, W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, n = 0,1,\dots,N-1$$

- DFT 的导出
  - 从 DFS（时域、频域均为离散序列）到 DFT

    周期序列的离散傅里叶级数
  - 从有限长序列的 DTFT 到 DFT

    离散时间傅里叶变换

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

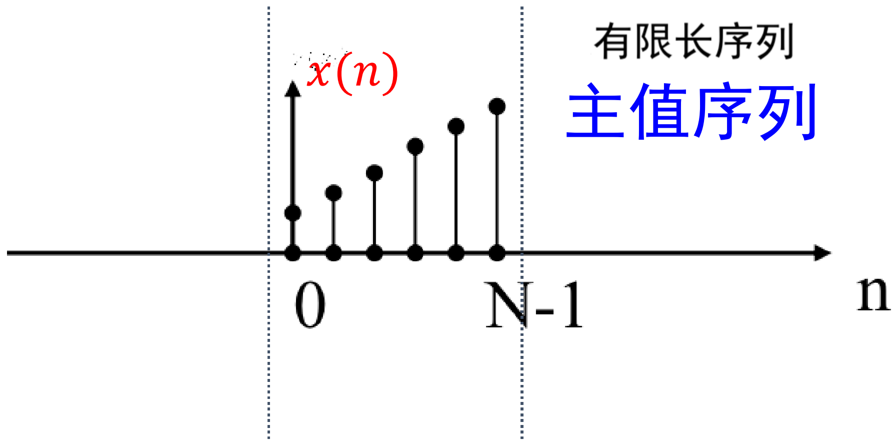
- DFT 的性质

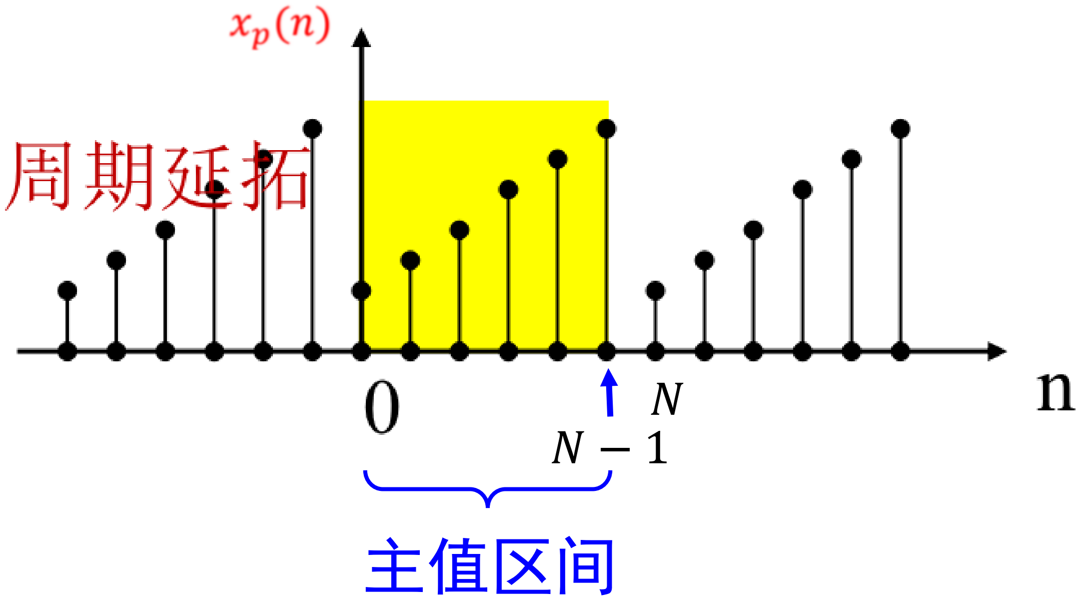
# 从离散傅里叶级数（DFS）到离散傅里叶变换（DFT）

- 考虑有限长序列 $x(n)$ $(0 \le n \le N-1)$，将其按周期 $N$ 进行延拓，得到周期序列

$$x_p(n) = \sum_r x(n+rN) \quad （r\text{为任意整数}）$$

- 称$x(n)$为主值序列



周期序列的离散傅里叶级数

$$\mathrm{DFS}[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

计算$x_p(n)$的 DFS：

$\triangleq x(n),$
$n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$X_p(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-jk\Omega_0 n}, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

周期为$N$，离散

取主值区间

计算 IDFS：

$$\mathrm{IDFS}[X(k\Omega_0)] = x(n) = \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}, \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$\triangleq X(k\Omega_0),$
$k \in \{0, \dots, N-1\}$

周期为$N$，离散

取主值区间 $\Rightarrow$ $\begin{cases} X(k\Omega_0) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$

$\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

$X(\Omega)$

因为$x(n)$是非周期序列，对其做DTFT得到的应是频谱密度函数，借用已知结论$X(\Omega) = NX(k\Omega_0)$，定义长度为 $N$ 的有限长序列$x(n)$的离散傅里叶变换（DFT），用序列$X(k)$表示：

对比：
$F(\omega)=T_1F(n\omega_1)$

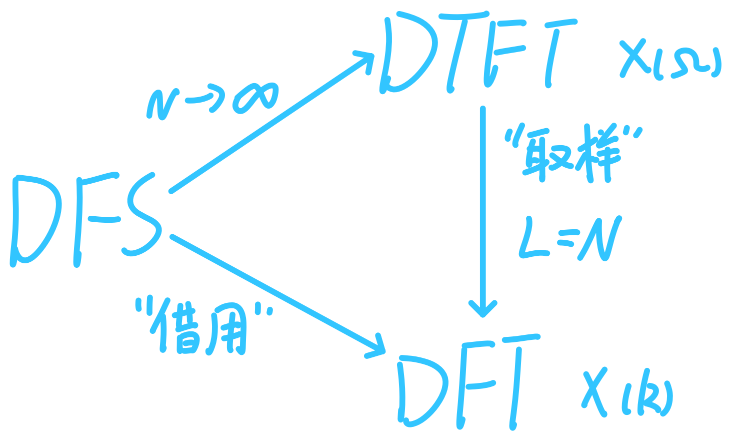
$$X(k) = NX(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, k = 0,1, \dots, N-1$$

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k)$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} NX(k\Omega_0)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, n = 0,1, \dots, N-1$$

# 导出 DFT 的另一思路：有限长序列的 DTFT

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega) \begin{cases} X(\Omega) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\[2ex] x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \end{cases}$$




- 非周期信号的频谱是频率的连续函数，无法用计算机计算
- 离散信号的DTFT是Ω的连续周期函数，尽管在理论上有重要意义，但在计算机上实现有困难。为此，需要一种时域和频域上都是离散的傅里叶变换对，实现计算机的快速计算，即DFT

# 从 DTFT 到 DFT

考虑能量有限、时间长度为 $L$ 的有限长序列的DTFT：

$$X(\Omega)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\Omega n}$$

必须满足$L\leq N$，才能保证频域采样定理！

通常为了算法统一，取 $L=N$

频域离散化

时域样点数为$L$，主值周期$(0,2\pi)$内采样点数为$N$

$$X\left(k\frac{2\pi}{N}\right)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \quad\Rightarrow\quad X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

# 离散傅里叶变换对 $x(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k)$

- 正变换：序列 $x(n) \longrightarrow X(\Omega)$在数字频域主值的取样序列$X(k)$

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

- 反变换：离散频谱序列 $X(k) \longrightarrow$ 长度为$N$的序列 $x(n)$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

# DFT 的矩阵形式

令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$， 则 $W_N^{nk} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$, $W_N^{-nk} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ 记忆: $W_4 = -j$

N为序列x(n)的长度

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, n = 0,1,\dots, N-1$$

写成矩阵形式：

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},k=0,1,\dots,N-1$$

$$\begin{array}{c} \\ k=0,1,\dots,N-1 \downarrow \end{array}\quad \begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\\vdots\\X(N-1)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0\\ W_N^0 & W_N^{1\times1} & W_N^{2\times1} & \cdots & W_N^{(N-1)\times1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ W_N^0 & W_N^{1\times(N-1)} & W_N^{2\times(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}_N^{nk}}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\\vdots\\x(N-1)\end{bmatrix}$$

$n=0,1,\dots,N-1 \rightarrow$

$$x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},n=0,1,\dots,N-1$$

$k=0,1,\dots,N-1 \rightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ n=0,1,\dots,N-1 \downarrow \end{array}\quad \begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\\vdots\\x(N-1)\end{bmatrix}=\frac{1}{N}\underbrace{\begin{bmatrix}W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0\\ W_N^0 & W_N^{-1\times1} & W_N^{-1\times2} & \cdots & W_N^{-1\times(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)\times1} & W_N^{-(N-1)\times2} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}_N^{-nk}}\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\\vdots\\X(N-1)\end{bmatrix}$$

# DFT 的矩阵形式

$\boldsymbol{W}_N^{nk}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{1\times1} & W_N^{2\times1} & \cdots & W_N^{(N-1)\times1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{1\times(N-1)} & W_N^{2\times(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

DFT:

$$\boldsymbol{X}(k) = \boldsymbol{W}_N^{nk}\boldsymbol{x}(n)$$

$$\boldsymbol{W}_N^{nk} = \left(\boldsymbol{W}_N^{nk}\right)^{\mathrm{T}}$$

均为$N \times N$方阵,对称矩阵

$\boldsymbol{W}_N^{-nk}$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1\times1} & W_N^{-1\times2} & \cdots & W_N^{-1\times(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)\times1} & W_N^{-(N-1)\times2} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

IDFT:

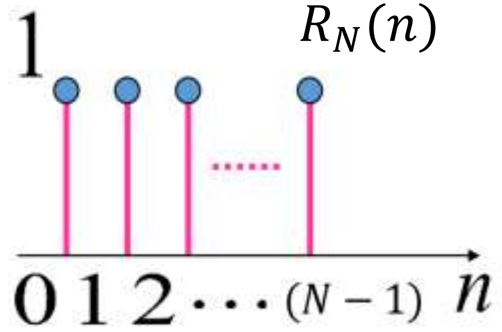
$$\boldsymbol{x}(n) = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^{-nk}\boldsymbol{X}(k)$$

$$\boldsymbol{W}_N^{-nk} = \left(\boldsymbol{W}_N^{-nk}\right)^{\mathrm{T}}$$

# 例2-12： 求矩形脉冲序列 $x(n)=R_N(n)$的离散傅里叶变换。

DFT

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$




解： $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right)^n$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-\left(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right)^N}{1-\left(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right)} & e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\neq 1\\[2ex] N & e^{-j\frac{2\pi k}{N}}=1\end{cases}$$

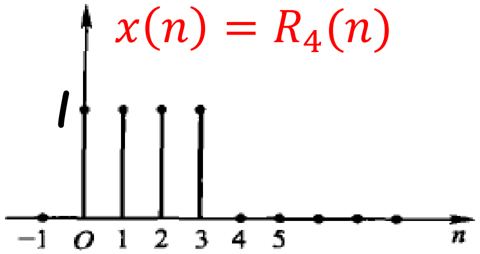
$$=\begin{cases}0 & k=1,2,3,\ldots,N-1\\ N & k=0\end{cases}$$

$$\left(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right)^N=e^{-j2\pi k}=1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{矩形脉冲序列的DFT}\\ X(k)=N\delta(k)\end{array}}$$

$$R_N(n)\xleftrightarrow{DFT}N\delta(k)$$

**例2-13：** 利用矩阵表示式求$x(n)=R_4(n)$的 DFT，再由所得$X(k)$经 IDFT 反求$x(n)$，验证结果的正确性。




序列x(n)的长度

解：由 $N=4$ 知 $W=e^{-\frac{j2\pi}{4}}=-j$（此处因$N$已知，省略了$W_N$的下标）

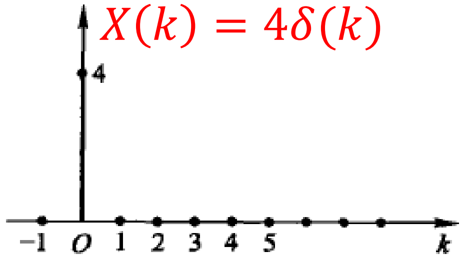
$W^{nk}$　　n　　k

$$\text{DFT}\quad \boldsymbol{X}(k)=\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

显然，此结果与例2-12得到的一般结论$X(k)=N\delta(k)=4\delta(k)$相符合。

$W^{-nk}$　　k

$$\text{IDFT}\quad \boldsymbol{x}(n)=\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^{-1}&W^{-2}&W^{-3}\\W^0&W^{-2}&W^{-4}&W^{-6}\\W^0&W^{-3}&W^{-6}&W^{-9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$



# 离散傅里叶变换（DFT）小结

- 从 DFS 变换对截取序列的主值，就构成了 DFT 对，但本质有区别：
  - DFS 是按傅里叶分析严格定义的
  - DFT 是一种通过“借用”DFS 得出的变换 $X(\omega)=NX(k\Omega_0)$
- DFT 得到 $X(k)$ 的本质：有限非周期序列 $x(n)$ 原来连续的、周期性的频谱密度函数 $X(\Omega)$ 在其数字频域主值区间（长度为$2\pi$）的取样

  N点
- 用 DFT 计算信号频谱的注意事项：
  - 如果从连续时间信号采样，采样频率必须大于两倍的信号最高截止频率
  - 对周期信号要截取整周期

# 离散傅里叶变换（DFT）的性质

① 线性性质

② 圆周移位性质

③ 圆周卷积性质

④ 奇偶虚实性

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,1,\dots,N-1$$

① 线性性质

若$x_1(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow}X_1(k),x_2(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow}X_2(k)$，那么

$$ax_1(n)+bx_2(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow}aX_1(k)+bX_2(k)$$

N点序列x(n)向右圆周位移m位得到$x((n-m))_N R_N(n)$

$$R_N(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow}N\delta(k)$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}R_N(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow}N\delta((k+k_0))_N R_N(k)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}R_N(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow}N\delta((k-k_0))_N R_N(k)$$

# 用取余数（取模值）运算表示周期延拓

若 $n = n_1 + mN$，$0 \le n_1 \le N-1$，$m$为整数，则有

$n$被$N$除，商为$m$，余数为$n_1$

$$((n))_N = (n_1)$$

此运算符表示$n$被$N$除，商为$m$，余数为$n_1$。$(n_1)$是 $((n))_N$ 的解，或称作取余数，或称作$n$对$N$取模值。

矩形序列，N为其长度

设$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，则

余数运算

对于周期序列

$x_p(n) = x_p(n + mN)$

$x_p(n_1) = x_p(n_1 + mN)$

有

$$x_p(n) = x((n))_N \qquad x(n) = x_p(n)R_N(n)$$

有限长=周期+加窗

$$X_p(k) = X((k))_N \qquad X(k) = X_p(k)R_N(k) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

# 圆周移位概念

- 有限长序列

$$x(n)$$

- 周期延拓

$$x((n))_N \quad （即x_p(n)）$$

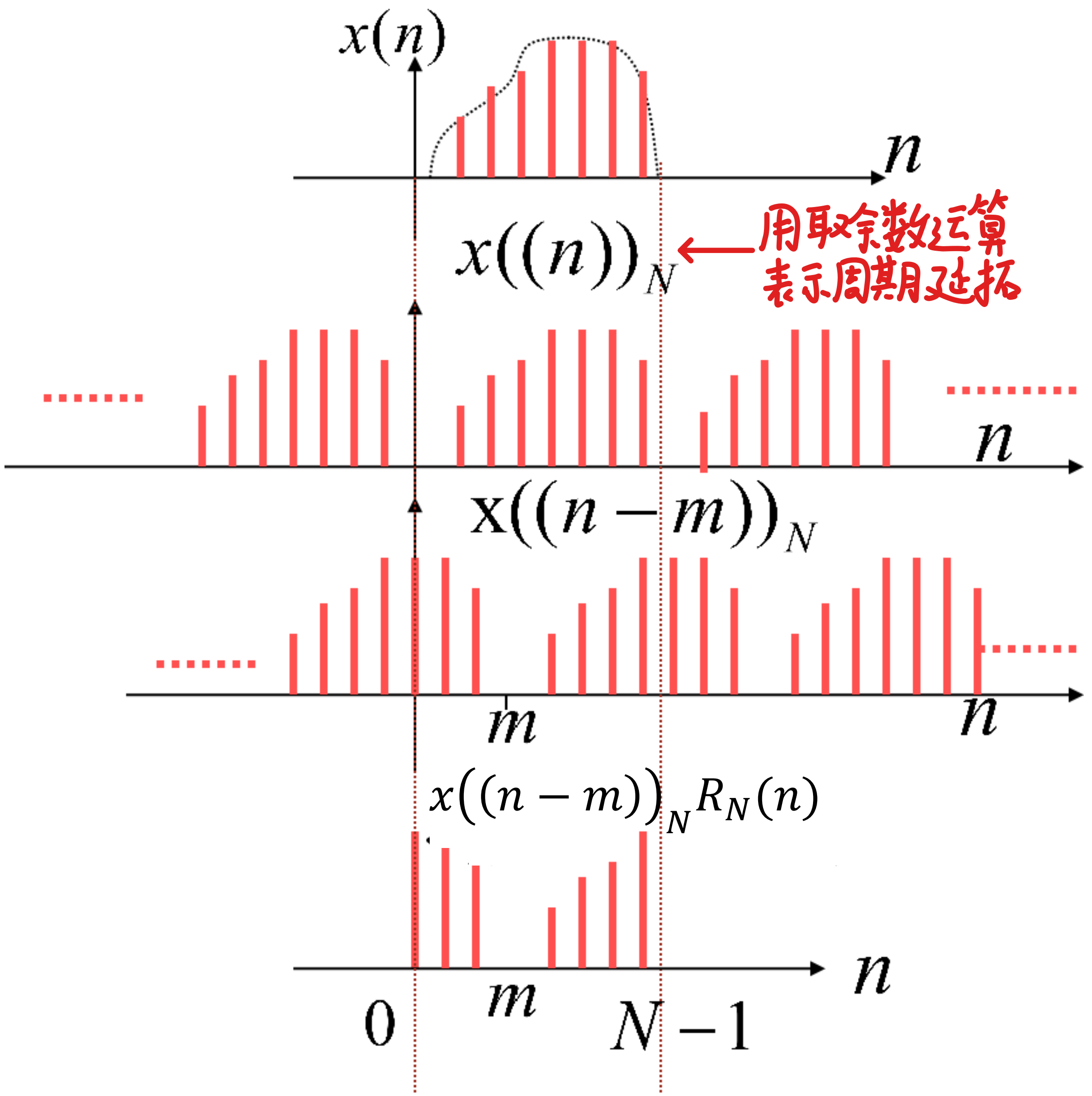
- 线性位移

$$x((n-m))_N \quad （即x_p(n-m)）$$

- 加窗，得到圆周位移序列

$$x((n-m))_N R_N(n)$$

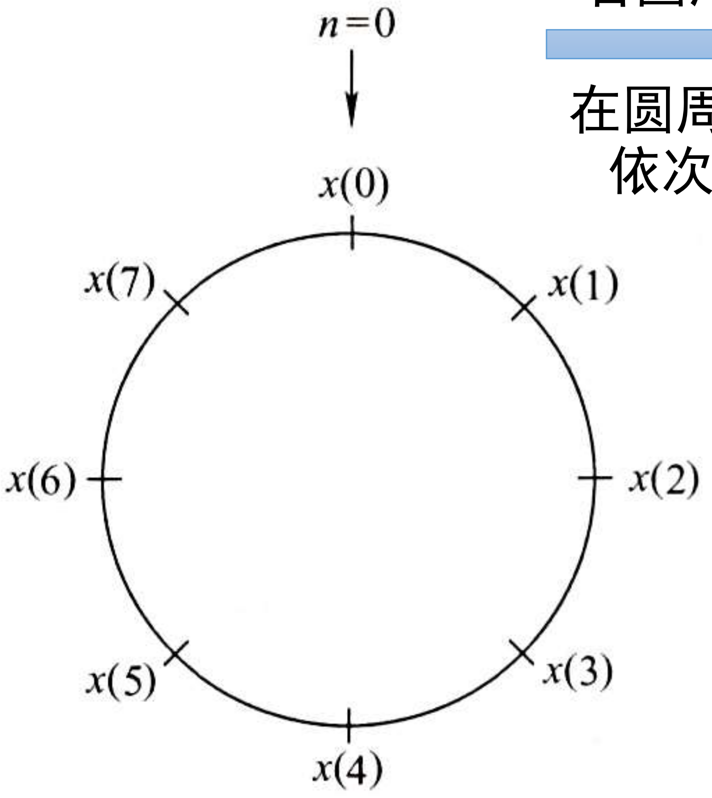
N点序列x(n)向右圆周位移m位



# 理解圆周移位

8点序列

$x(n)$

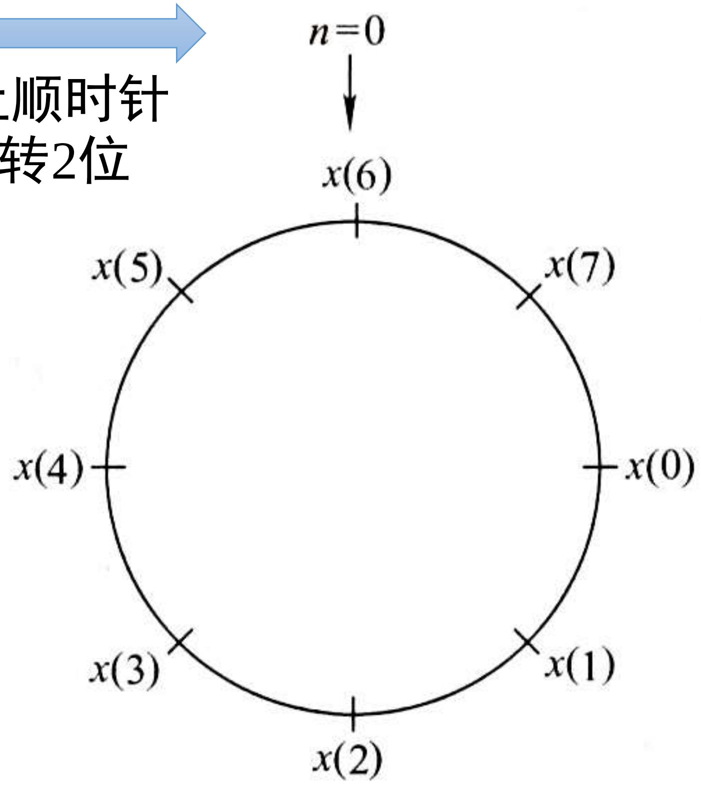



$x((n-2))_N R_N(n)$

右圆周位移2位

在圆周上顺时针

依次旋转2位




圆周移位后

的序列

通过圆周的旋转表示圆周位移

# ② 圆周移位性质：时域和频域

## 圆周移位

$x((n-m))_N R_N(n)$

- 先取模值，后进行函数运算
- $x((n))_N$ 视作将$x(n)$周期延拓

对于$R_N(n) \xleftrightarrow{DFT} N\delta(k)$

$e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}R_N(n) \xleftrightarrow{DFT} N\delta((k+k_0))_N R_N(k)$

**时移特性**

若$x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)$

$e^{-jn\frac{2\pi}{N}m}$

则$x((n-m))_N R_N(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} W_N^{mk} X(k)$

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

**频移特性**

若$x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)$

则$W_N^{-nl} x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X((k-l))_N R_N(k)$

$e^{jn\frac{2\pi}{N}l}$

# ③ 圆周卷积性质：时域圆周卷积

- 若$x(n)$、$h(n)$都是长度为$N$的有限长序列，且 $x(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}X(k)$， $h(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}H(k)$，则

$$x(n)\circledast h(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}X(k)H(k)$$

- 其中 $x(n)\circledast h(n)$ 表示序列$x(n)$ 和 $h(n)$的$N$点圆周卷积（圆卷积），定义为：

$$x(n)\circledast h(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h\big((n-m)\big)_N\right]R_N(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x\big((n-m)\big)_N\right]R_N(n)$$

（以后如无特殊说明，符号$\circledast$表示圆周卷积） $R_N(n)$为取主值操作$(0\sim N-1)$

例2-14：求有限长序列 $x(n)=(n+1)R_4(n), h(n)=(4-n)R_4(n)$ 的圆周卷积 $y(n)=x(n)\circledast h(n)$。

DFT：$\boldsymbol{X}(k)=\boldsymbol{W}_N^{nk}\boldsymbol{x}(n)$

IDFT：$\boldsymbol{x}(n)=\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^{-nk}\boldsymbol{X}(k)$

解：由 $N=4$ 知 $W=e^{-\frac{j2\pi}{4}}=-j$ （此处因$N$已知，省略了$W_N$的下标），求$x(n)$、 $h(n)$的DFT：

$$\boldsymbol{X}(k)=\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\-2+j2\\-2\\-2-j2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}(k)=\begin{bmatrix}H(0)\\H(1)\\H(2)\\H(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\2-j2\\2\\2+j2\end{bmatrix}$$

Y为X与H的按位相乘

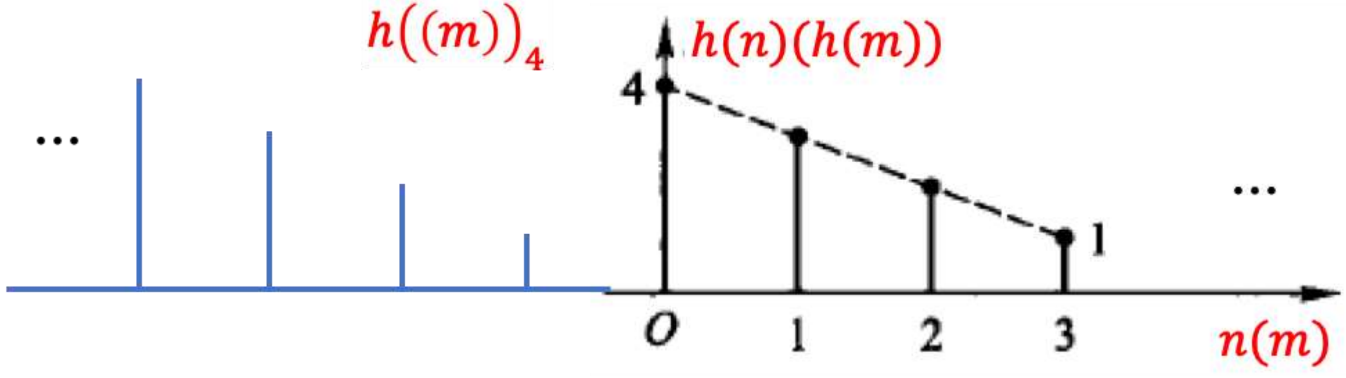
$$\boldsymbol{Y}(k)=\begin{bmatrix}X(0)H(0)\\X(1)H(1)\\X(2)H(2)\\X(3)H(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\j8\\-4\\-j8\end{bmatrix}$$

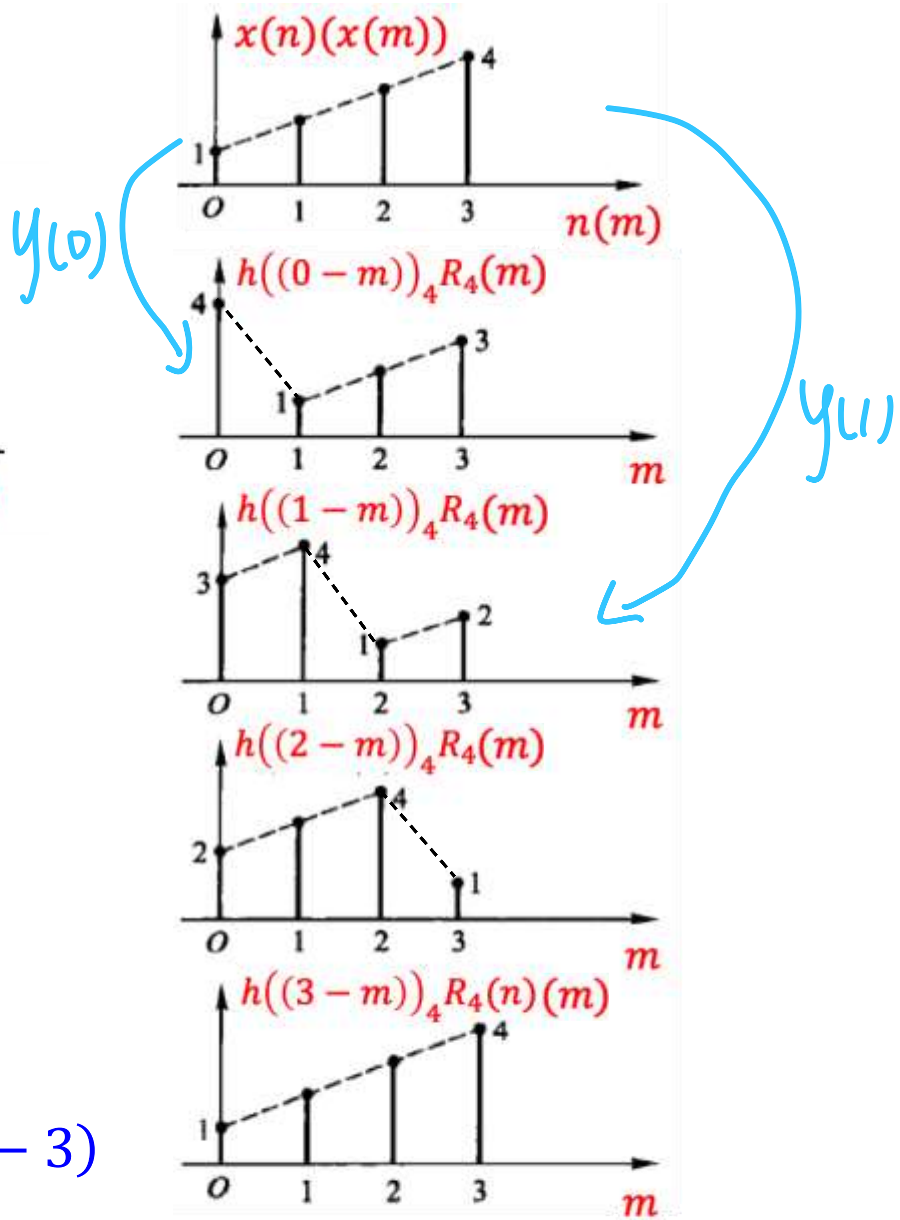
即$Y(k)$的矩阵形式。由时域圆周卷积性质，对$Y(k)$求IDFT，得

$$y(n)=\{24,22,24,30\}\Leftarrow\quad \boldsymbol{y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{W}_N^{-nk}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^{-1}&W^{-2}&W^{-3}\\W^0&W^{-2}&W^{-4}&W^{-6}\\W^0&W^{-3}&W^{-6}&W^{-9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\j8\\-4\\-j8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\22\\24\\30\end{bmatrix}$$

记住 ↑

$$x(n) \circledast h(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N\right] R_N(n)$$




$$y(0) = (1\times 4) + (2\times 1) + (3\times 2) + (4\times 3) = 24$$

$$y(1) = (1\times 3) + (2\times 4) + (3\times 1) + (4\times 2) = 22$$

$$y(2) = (1\times 2) + (2\times 3) + (3\times 4) + (4\times 1) = 24$$

$$y(3) = (1\times 1) + (2\times 2) + (3\times 3) + (4\times 4) = 30$$

$$y(n) = 24\delta(n) + 22\delta(n-1) + 24\delta(n-2) + 30\delta(n-3)$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,1,\dots,N-1$$

例2-15： 计算$x_1(n)$、$x_2(n)$的$N$点圆周卷积，其中

$$x_1(n)=x_2(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

解：利用DFT的时域圆周卷积性质，$x_1(n),x_2(n)$的 DFT 为

$$X_1(k)=X_2(k)=\begin{cases}N & k=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $$X(k)=X_1(k)X_2(k)=\begin{cases}N^2 & k=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因此，$x_1(n)$、$x_2(n)$ 的$N$点圆周卷积是$X(k)$的 IDFT：

$$x(n)=\begin{cases}N & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

# ③ 圆周卷积性质：频域圆周卷积

- 若$x(n)$、$h(n)$都是长度为$N$的有限长序列，且 $x(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}X(k)$， $h(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}H(k)$，则

$$x(n)h(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{N}X(k)\circledast H(k)$$

- 换言之，若 $y(n)=x(n)h(n)$，则

$$Y(k)=\frac{1}{N}X(k)\circledast H(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X(l)H\big((k-l)\big)_N R_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}H(l)X\big((k-l)\big)_N R_N(k)$$

# 圆周卷积 vs 线性卷积

有限长序列

线性卷积：$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)$

圆周卷积：$x(n)\circledast h(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h((n-m))_N\right]R_N(n)$

- 两种卷积的结果不同：线性卷积在序列右移过程中，左端依次留出为零值的空位；而圆周卷积过程中，同样的序列右移，会将右移值循环回序列的左端
- 设序列$x(n),h(n)$（长度分别为$N,M$），则其线性卷积长度为$N+M-1$，如果把序列$x(n),h(n)$（长度分别为$N,M$）都适当地在右侧补零值，两序列补零以后的长度$L$满足

$$\underline{L\geq N+M-1}$$

它们的<u>$L$点圆周卷积与线性卷积结果相同</u>。

提示：根据圆卷积的定义，$N$点圆卷积对应的就是定义式中累加项最大项数$N$的取值。求解 10 点圆卷积，需要为序列$x(n)$补 6 个零，替换变量后得到的$x(m)$补零位置在原序列样值之后（右侧），相应地，$x((n-m))_{10}R_{10}(m)$补零的位置在已知样值之前（左侧）。

# ④ 奇偶虚实性

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,1,\dots,N-1$$

- 若$x(n)$为实序列

$X_r(k)$ 实部　　$X_i(k)$ 虚部

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\overset{\text{欧拉公式}}{=}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]}_{X_r(k)}-j\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]}_{X_i(k)}$$

实部　$k$的偶函数

$$X_r(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(N-k)\right]$$

虚部　$k$的奇函数

$$X_i(k)=-\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(N-k)\right]$$

这里的偶函数、奇函数理解为$X(k)$周期延拓；奇、偶特性都以$\frac{N}{2}$为对称中心（局限在0到$N-1$范围）

# ④ 奇偶虚实性

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,1,\dots,N-1$$

- 若$x(n)$为纯虚数序列

$X_i(k)$ 虚部　　$X_r(k)$ 实部

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=\underline{\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]}-j\underline{\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]}$$

实部

$$X_r(k)=-j\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]$$

$k$的奇函数

虚部

$$X_i(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]$$

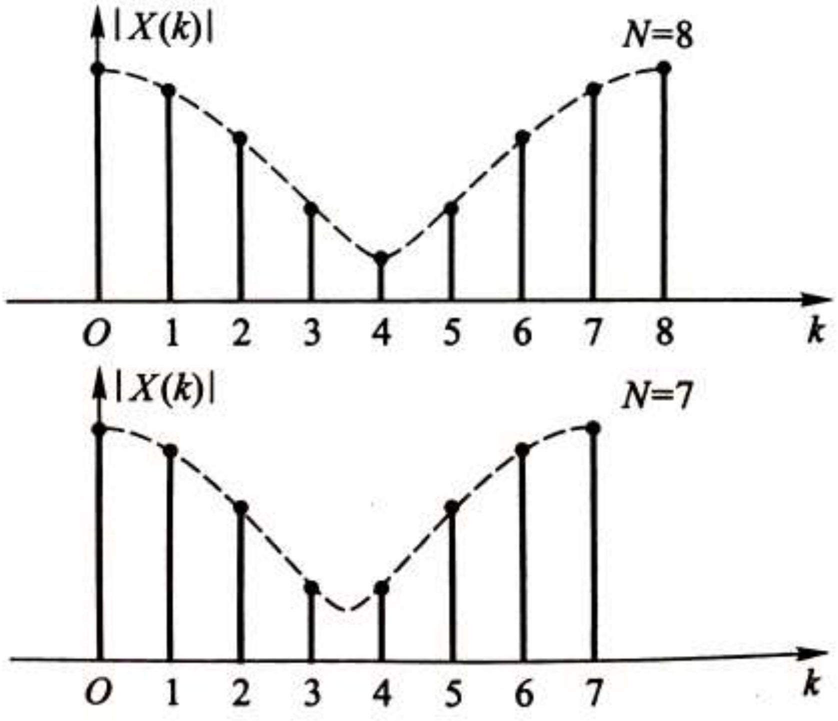
$k$的偶函数

奇函数、偶函数的理解：周期延拓；奇、偶特性以$\frac{N}{2}$为对称中心（局限在0到$N-1$范围）

# ④ 奇偶虚实性

总结：

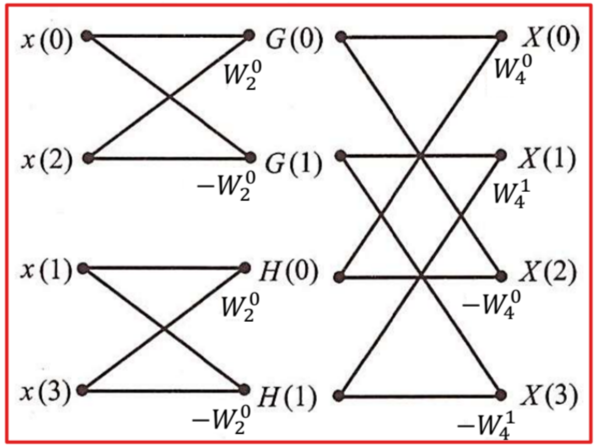
- 实偶函数的 DFT 也为实偶函数
- 实奇函数的 DFT 为虚奇函数
- 虚偶函数的 DFT 是虚偶函数
- 虚奇函数的 DFT 是实奇函数




实序列$x(n)$取DFT时，
$|X(k)|$的对称分布示例图
奇、偶特性以$\frac{N}{2}$为对称中心

# 课程内容

| | 复杂度 | 复数加法 | 复数乘法 |
|---|---|---|---|
| DFT | $O(N^2)$ | $N(N-1)$ | $N^2$ |
| FFT | $O(N\log_2 N)$ | $N\log_2 N$ | $\frac{N}{2}\log_2 N$ |




2.1 信号的采样和恢复

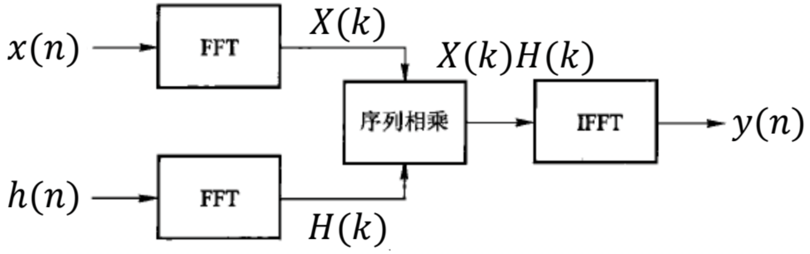
2.2 离散信号的时域描述和运算

2.3 离散信号的频域分析

2.4 快速傅里叶变换及应用

2.5 离散信号的Z域分析

## 利用 FFT 求线性卷积（快速卷积）




通过求解圆周卷积来求取两个序列的线性卷积

两序列分别补零点加长至 $N_1+N_2-1$

## 连续时间信号分析的逼近

①时限连续信号⇒无限频带宽度⇒必有频谱混叠

i 利用抗混叠滤波器去除连续信号中次要的高频成分

ii 选取合适的$T_s$,使混叠产生的误差在允许范围之内

② 频率有限信号⇒时宽无限⇒需要进行加窗截断,会产生频谱泄漏

i 选取合适的窗函数进行截断

③ 连续周期信号⇒加窗截断时需整周期截断⇒无频谱泄漏

# DFT 的计算量分析

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

- DFT：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

- IDFT：

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

- $N$点DFT的计算量： $O(N^2)$
  - 每计算一个$X(k)$值需要进行$N$次复数相乘，$N-1$次复数相加
  - 对于$N$个$X(k)$点，完成全部DFT运算共需$N^2$次复数相乘和$N(N-1)$次复数加法

# DFT 的特点及 FFT 的思想

- $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 的特性： $W_N^0=1,\ W_N^N=1,\ W_N^{\frac{N}{2}}=-1,\ W_N^{\frac{N}{4}}=-j$

## ① 正交性

（利用几何级数求和即可验证）

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{nk}\left(W_N^{mk}\right)^*=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(n-m)k}=\begin{cases}1 & n-m=\ell N\\ 0 & n-m\neq \ell N\end{cases}$$

## ② 周期性

$W_N^{r+mN}=W_N^r$ 或表示为 $W_N^{nk}=W_N^{((nk))_N}$

同理 $W_N^{-nk}=W_N^{n(N-k)}=W_N^{k(N-n)}$；以 $N=4$ 为例，有 $W^4=W^0$，$W^6=W^2$，$W^9=W^1$

# DFT 的特点及 FFT 的思想

- $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 的特性： $W_N^0=1, W_N^N=1, W_N^{\frac{N}{2}}=-1, W_N^{\frac{N}{4}}=-j$

③ 对称性

$$W_N^{r+\frac{N}{2}}=-W_N^r \quad \text{或表示为} \quad W_N^{nk+\frac{N}{2}}=-W_N^{nk}$$

以 $N=4$ 为例，有 $W^3=-W^1$，$W^2=-W^0$；结合通过周期性得到的结论 $W^4=W^0$，$W^6=W^2$，$W^9=W^1$，得

$$\boldsymbol{W}_4^{nk}=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix}$$

$n,k=0,1,2,N-1=0,1,2,3$

# DFT 的特点及 FFT 的思想

- $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 的特性： $W_N^0 = 1,\ W_N^N = 1,\ W_N^{\frac{N}{2}} = -1,\ W_N^{\frac{N}{4}} = -j$

④ 可约性

$$\underline{W_N^{rn} = W_{N/r}^{n},}\qquad \underline{W_{rN}^{rn} = W_N^{n}}$$

因为 $W_N^{rn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = e^{-j\frac{2\pi}{N/r}n} = W_{N/r}^{n}$；由此可将$N$点DFT分解为2组DFT运算，然后取和（假定$N = 2^M$，$M$为正整数）：

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{\text{偶数}n} x(n)W_N^{nk} + \sum_{\text{奇数}n} x(n)W_N^{nk}$$

$\ell = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$ （用$2\ell$表示） （用$(2\ell+1)$表示）

# DFT 的特点及 FFT 的思想

- 由于DFT的计算量与$N$成几何级数增长，可将长序列分解成多个短序列信号，然后分别求各个短序列的DFT，最后将它们组合，得到原序列的 DFT
- 利用以上DFT运算的特点，即可得到序列的 FFT 算法

# $N$点 DFT 分解为两组 $\frac{N}{2}$ 点 DFT

设序列$x(n)$长度为 $N=2^M$，$x(n)$被分解（抽取）为两个长度为$\frac{N}{2}$的子序列

2的整数幂

- 第1个序列由$x(n)$的偶数项组成：

$$x(2\ell),\qquad \ell=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$

- 第2个序列由$x(n)$的奇数项组成：

$$x(2\ell+1),\qquad \ell=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2\ell)W_N^{2\ell k}+\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2\ell+1)W_N^{(2\ell+1)k}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2\ell)(W_N^2)^{\ell k}+W_N^k\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2\ell+1)(W_N^2)^{\ell k}$$

# 基 2FFT 算法（Cooley-Tukey算法）的基本思路

- 序列的长度是2的整数幂时，将$x(n)$分解（抽取）成较短的序列，然后从这些序列的DFT中求得$X(k)$的方法
- $x(n)$的$N$点DFT表示为：

$$W_N^2 = e^{-2j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N/2}\right)} = W_{\frac{N}{2}}$$

$$X(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell)(W_N^2)^{\ell k} + W_N^k \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell+1)(W_N^2)^{\ell k} = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell) W_{\frac{N}{2}}^{\ell k} + W_N^k \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell+1) W_{\frac{N}{2}}^{\ell k}$$

$$= G(k) + W_N^k H(k)$$

2个$\frac{N}{2}$点的DFT之和

其中 $G(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell) W_{\frac{N}{2}}^{\ell k}$　　$H(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell+1) W_{\frac{N}{2}}^{\ell k}$

对应$X(k)$的前$\frac{N}{2}$点 $X(k)=G(k)+W_N^k H(k),\quad k=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$

$G(k)$、$H(k)$为长度为$N/2$点的DFT，周期$N/2$，而$X(k)$周期为$N$？

由周期性得

$$G\left(k+\frac{N}{2}\right)=G(k),\quad H\left(k+\frac{N}{2}\right)=H(k),\quad W_N^{k+\frac{N}{2}}=W_N^{\frac{N}{2}}W_N^k=-W_N^k$$

$W_N^{\frac{N}{2}}=-1$

所以 $$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=G\left(k+\frac{N}{2}\right)+W_N^{\left(k+\frac{N}{2}\right)}H\left(k+\frac{N}{2}\right)$$

对应$X(k)$的后$\frac{N}{2}$点 $=G(k)-W_N^k H(k),\quad k=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$

# 按时间抽取的 FFT 算法

$$X(k)=\sum_{n=0}^{4-1}x(n)W_4^{kn}$$

以$N=4=2^2$为例,

$$k=0 \quad X(0)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^0+x(2)W_4^0+x(3)W_4^0$$

$$k=1 \quad X(1)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^1+x(2)W_4^2+x(3)W_4^3$$

$$k=2 \quad X(2)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^2+x(2)W_4^4+x(3)W_4^6$$

$$k=3 \quad X(3)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^3+x(2)W_4^6+x(3)W_4^9$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

# 按时间抽取的 FFT 算法

$$\begin{cases} X(k) = G(k) + W_N^k H(k), & k = 0, 1, \dots, \dfrac{N}{2} - 1 \\ X\left(k + \dfrac{N}{2}\right) = G(k) - W_N^k H(k), & k = 0, 1, \dots, \dfrac{N}{2} - 1 \end{cases}$$

以$N = 4 = 2^2$为例，得

$$\begin{cases} X(0) = G(0) + W_4^0 H(0) \\ X(1) = G(1) + W_4^1 H(1) \\ X(2) = G(0) - W_4^0 H(0) \\ X(3) = G(1) - W_4^1 H(1) \end{cases}$$

按偶数、奇数序号重新排列 $\Rightarrow$

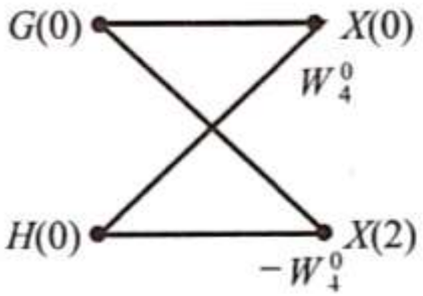
$$\begin{cases} X(0) = G(0) + W_4^0 H(0) \\ X(2) = G(0) - W_4^0 H(0) \\ X(1) = G(1) + W_4^1 H(1) \\ X(3) = G(1) - W_4^1 H(1) \end{cases}$$

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

# $N = 4$ DFT 分组

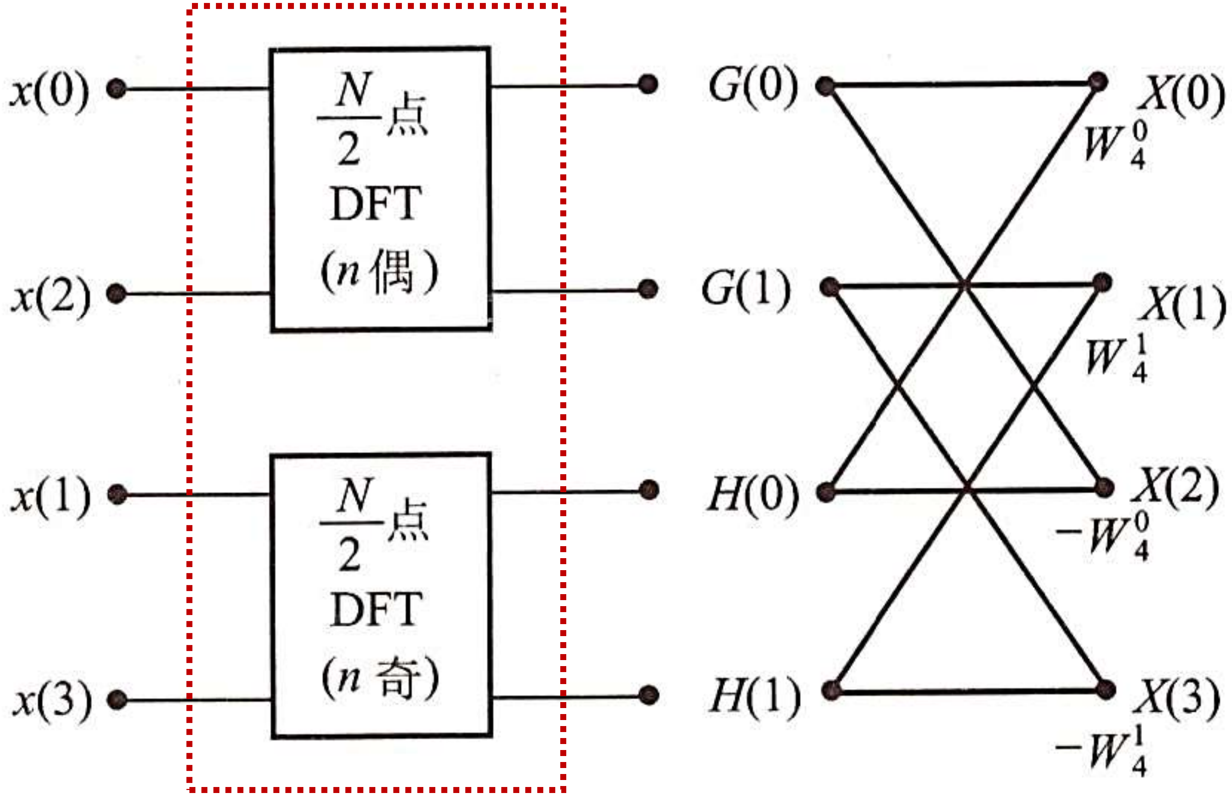
$$\begin{cases} X(0) = G(0) + W_4^0 H(0) \\ X(2) = G(0) - W_4^0 H(0) \\ X(1) = G(1) + W_4^1 H(1) \\ X(3) = G(1) - W_4^1 H(1) \end{cases}$$

$$G(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell) W_{\frac{N}{2}}^{\ell k} \qquad H(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell+1) W_{\frac{N}{2}}^{\ell k}$$




蝶形运算单元

也可以表示成蝶形运算



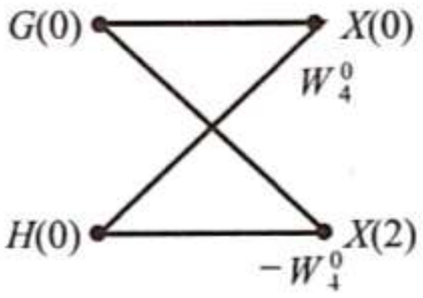
$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

# $N = 4$ DFT 分组

要会

$$\begin{cases} G(0) = x(0) + W_2^0 x(2) \\ G(1) = x(0) - W_2^0 x(2) \end{cases} \qquad \begin{cases} H(0) = x(1) + W_2^0 x(3) \\ H(1) = x(1) - W_2^0 x(3) \end{cases}$$

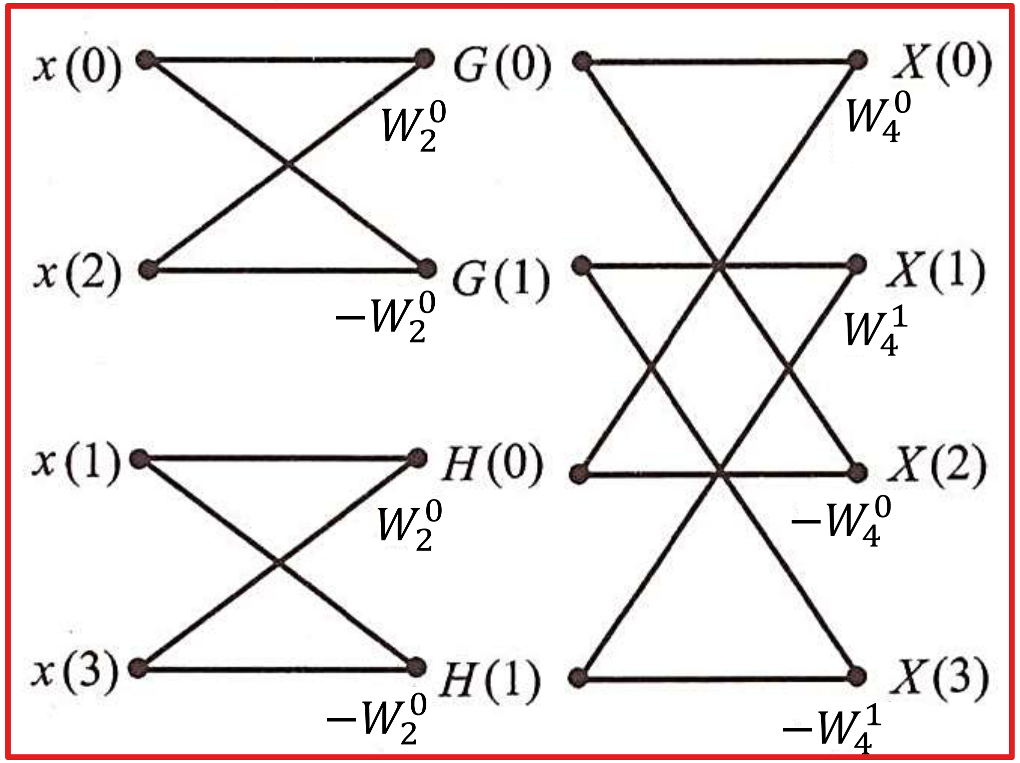
$$\begin{cases} X(0) = G(0) + W_4^0 H(0) \\ X(2) = G(0) - W_4^0 H(0) \\ X(1) = G(1) + W_4^1 H(1) \\ X(3) = G(1) - W_4^1 H(1) \end{cases}$$




蝶形运算单元

把所有DFT运算都表示为蝶形：

注：有些教材上会在$N$已知时省略$W_N^k$下标

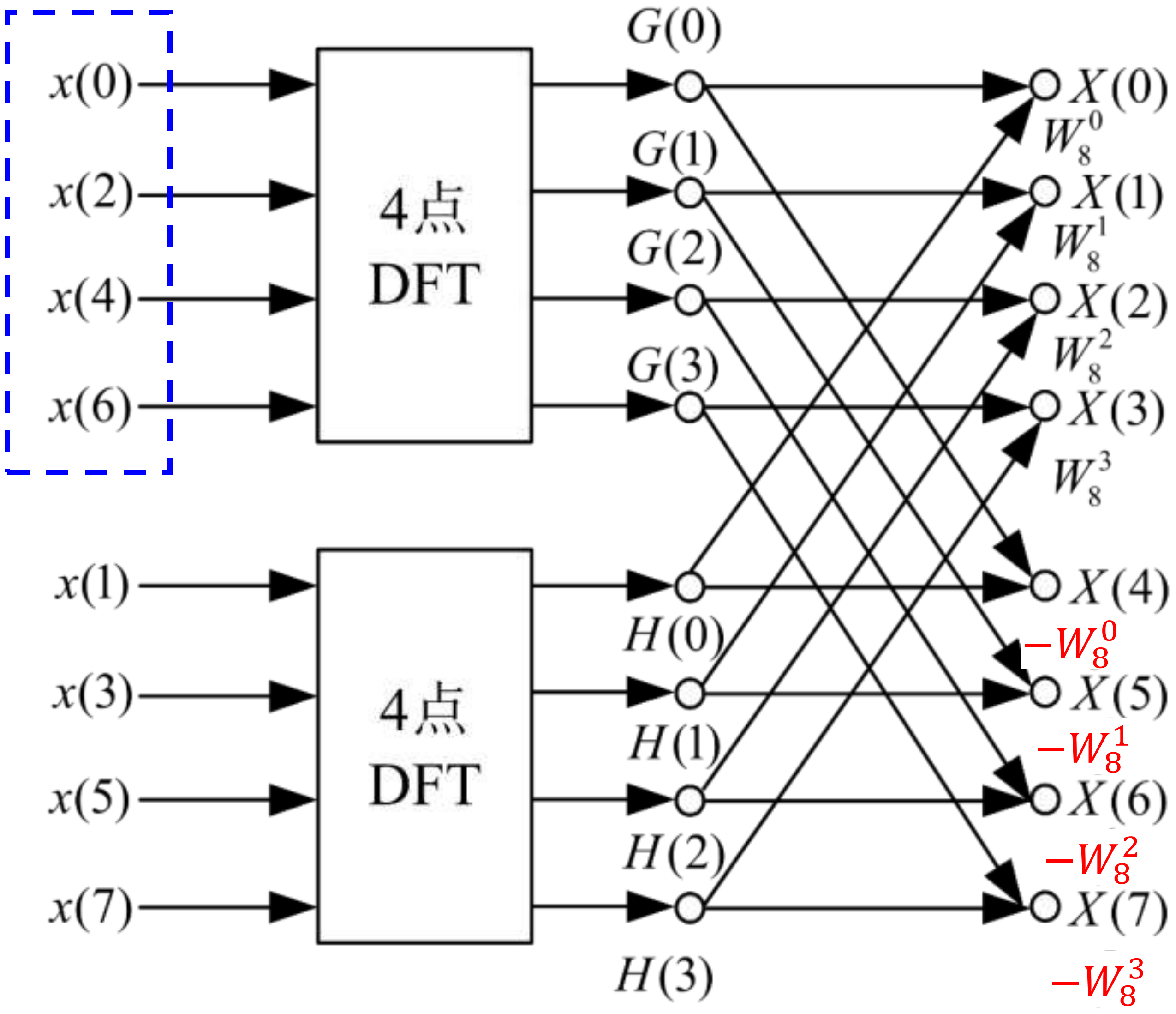



$W_2 = -1,\ W_4 = -j$

$N = 8$

8点按时间抽取FFT第一阶段的运算框图 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

以偶数部分为例，对 4 点 DFT 进行分解



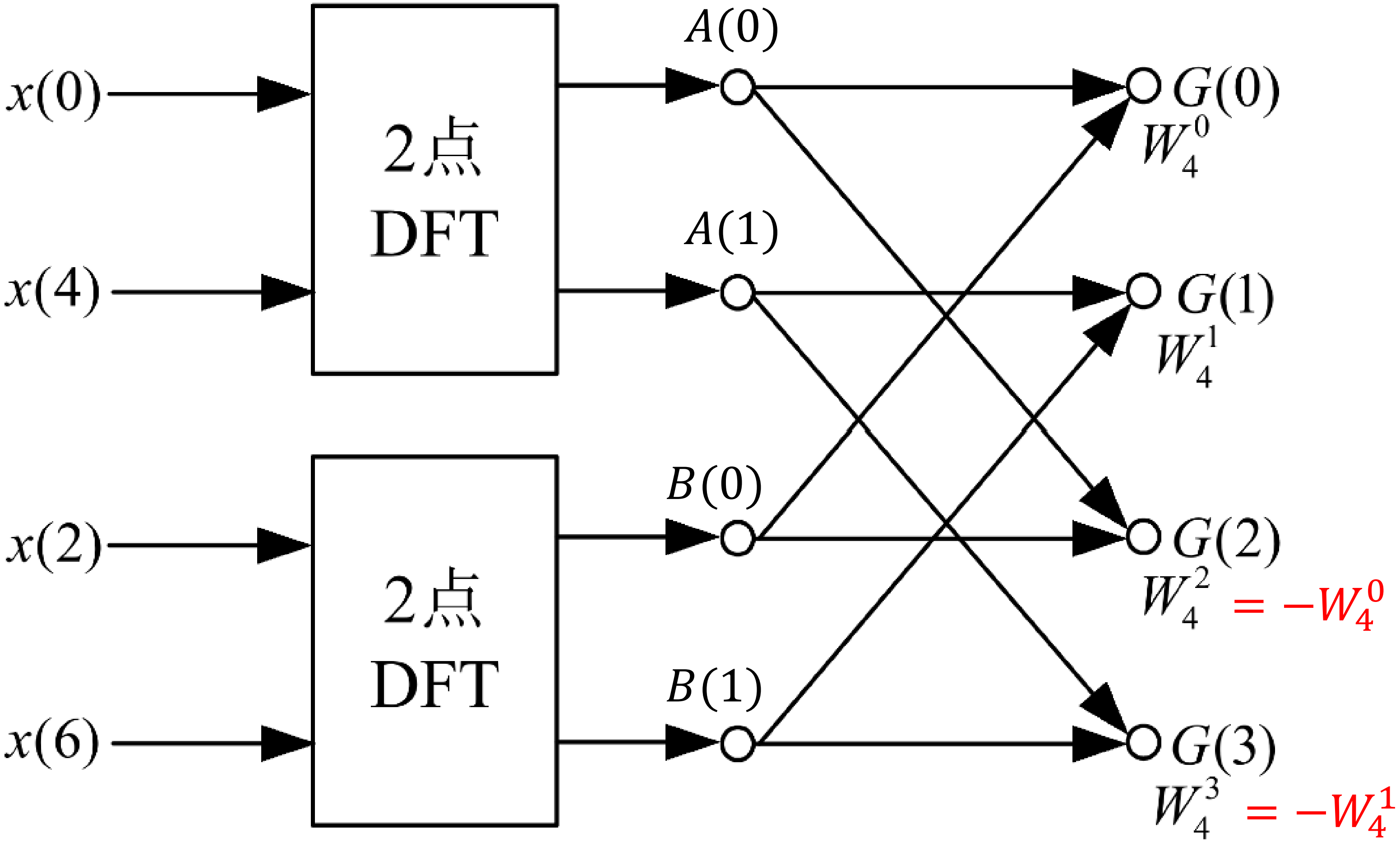

由于 $\frac{N}{2} = 4$ 是偶数，

$x(2\ell)$和$x(2\ell + 1)$

还可以再被分解

（抽取）

# 按时间抽取FFT将4点DFT分解为两个2点DFT



将4点DFT分解为两个2点DFT：当$\ell$为偶数时，令$\ell=2r$； $\ell$为奇数时，令$\ell=2r+1$

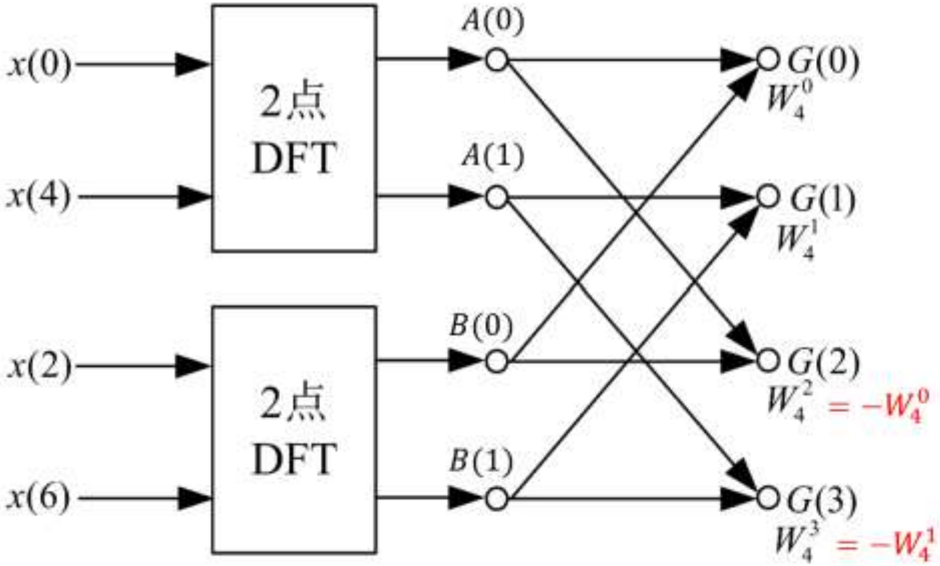
$$G(k)=\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2\ell)W_{\frac{N}{2}}^{\ell k}=\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1}x(2\cdot 2r)W_{\frac{N}{2}}^{2rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1}x(2\cdot(2r+1))W_{\frac{N}{2}}^{(2r+1)k}$$

$$=\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1}x(4r)W_{\frac{N}{4}}^{rk}+W_{\frac{N}{2}}^{k}\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1}x(4r+2)W_{\frac{N}{4}}^{rk}$$

$$=A(k)+W_N^{2k}B(k),\qquad k=0,1,\dots,\frac{N}{4}-1$$

类似地，可得

$$G\left(k+\frac{N}{4}\right)=A(k)-W_N^{2k}B(k),\qquad k=0,1,\dots,\frac{N}{4}-1$$



将4点DFT分解为两个2点DFT：

$$\begin{cases} G(k) = A(k) + W_N^{2k} B(k), & k = 0, 1, \dots, \dfrac{N}{4} - 1 \\ G\left(k + \dfrac{N}{4}\right) = A(k) - W_N^{2k} B(k), & k = 0, 1, \dots, \dfrac{N}{4} - 1 \end{cases}$$

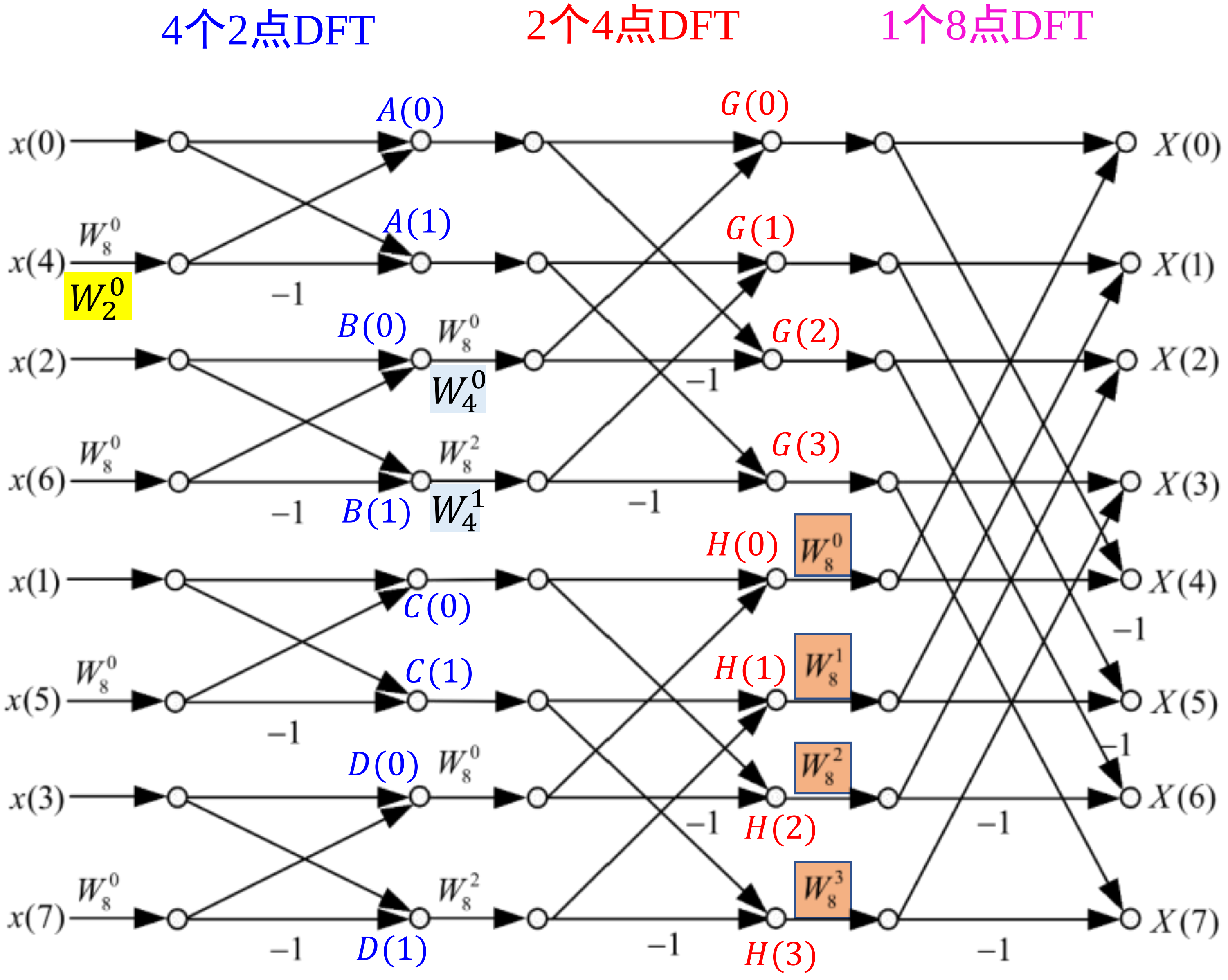
$$\begin{cases} A(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r) W_{\frac{N}{4}}^{rk} \\ B(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+2) W_{\frac{N}{4}}^{rk} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(k) = C(k) + W_N^{2k} D(k), & k = 0, 1, \dots, \dfrac{N}{4} - 1 \\ H\left(k + \dfrac{N}{4}\right) = C(k) - W_N^{2k} D(k), & k = 0, 1, \dots, \dfrac{N}{4} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+1) W_{\frac{N}{4}}^{rk} \\ D(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+3) W_{\frac{N}{4}}^{rk} \end{cases}$$

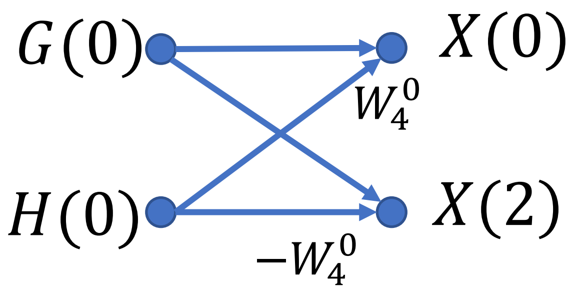
$N = 8$

一个完整的8点基2按时间抽取FFT算法流程（自左向右，共有三级运算）

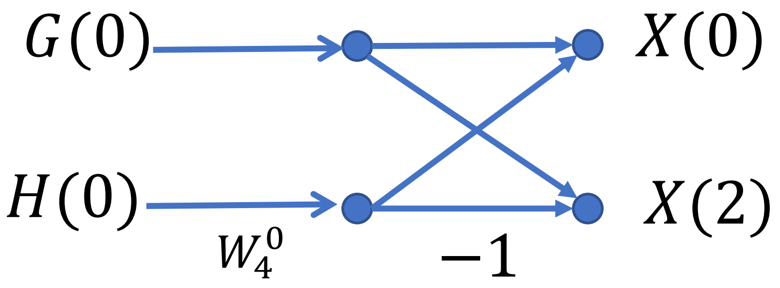


# FFT 算法的特点

- 基本运算单元为一个蝶形




或




- 每一蝶形是独立的
- 每一级中有$\frac{N}{2}$个蝶形，需乘法$\frac{N}{2}$次，加减法$N$次

# FFT 与 DFT 的计算量对比

DFT: $O(N^2)$
FFT: $O(N\log_2 N)$

设$N = 2^M$

FFT：

复数乘法：$\frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2}\log_2 N$ 次

复数加法：$NM = N\log_2 N$ 次

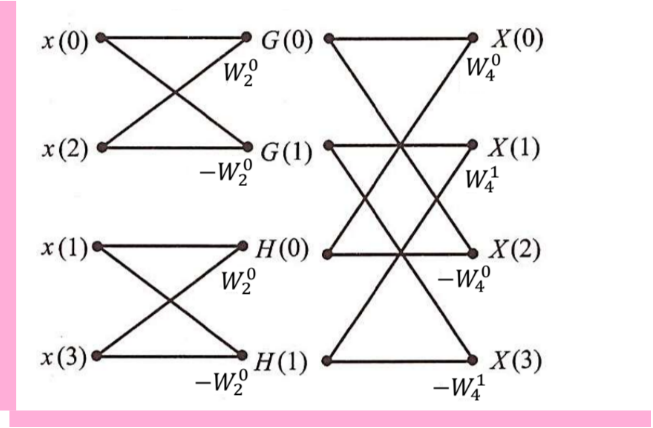
计算复杂度 $O(N\log_2 N)$

DFT：

复数乘法：$N^2$ 次

复数加法：$N(N-1)$ 次

计算复杂度 $O(N^2)$




# 例2-16：已知有限长序列

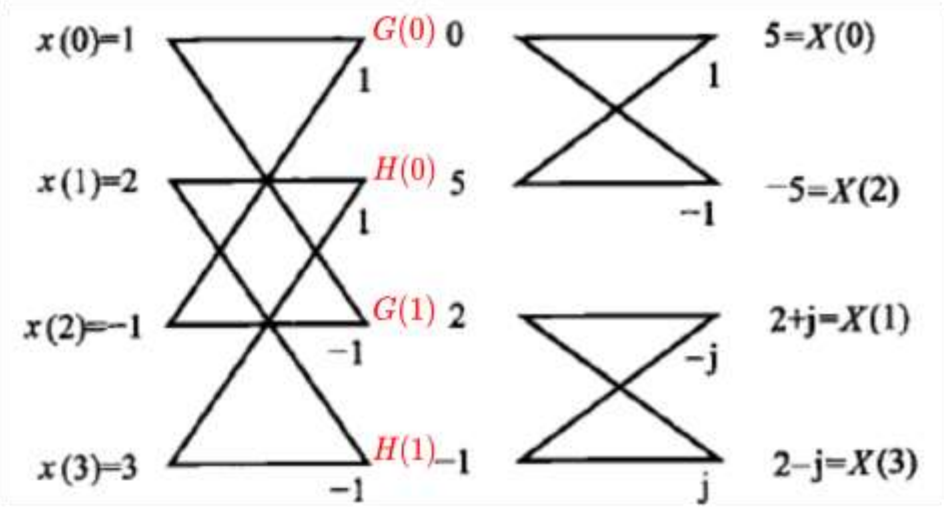
$$x(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 2 & n=1\\ -1 & n=2\\ 3 & n=3\end{cases}$$

按FFT运算流程求$X(k)$，再以所得$X(k)$利用IFFT反求$x(n)$。

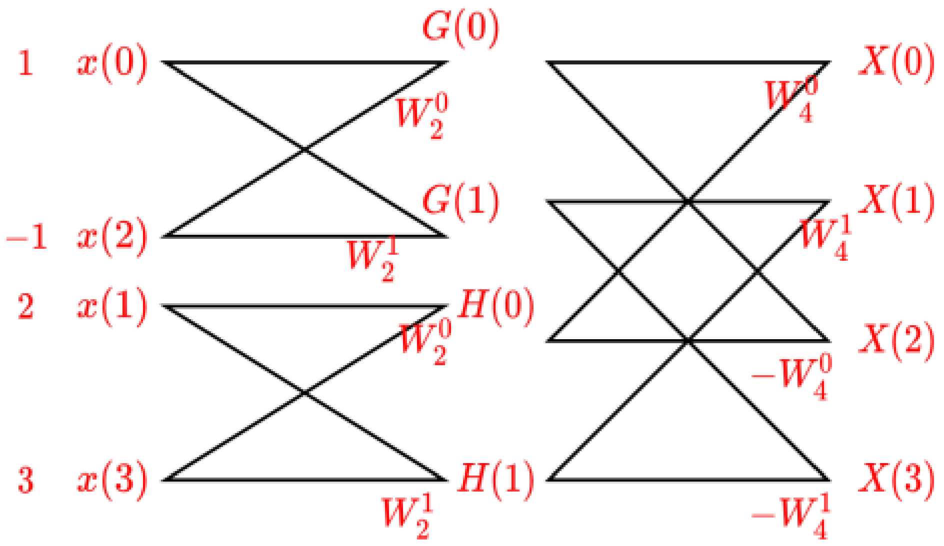
$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

解：画出求DFT的流程如下，逐级计算得到 $X(k)=\{5,\ 2+j,\ -5,\ 2-j\}$。

输入时间序列顺序不变



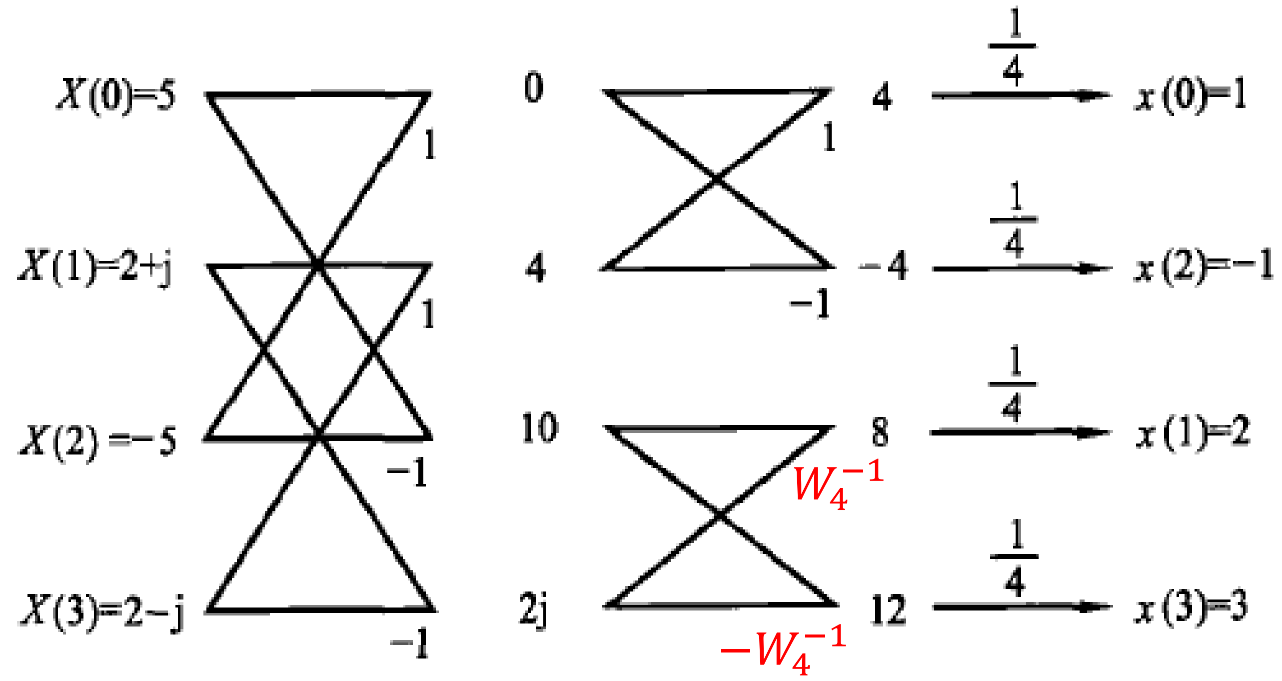

码位倒置



不要求

同理，可以进行 IFFT 运算：

注意 $\frac{1}{N}$



# FFT 的应用（= “DFT的应用”）

- 利用 FFT 求线性卷积（快速卷积）
- 利用 FFT 求线性相关（略）
- 利用 FFT 做连续时间信号的频谱分析
  - 时限连续信号
  - 带限连续信号
  - 连续周期信号

# FFT 应用中的注意事项

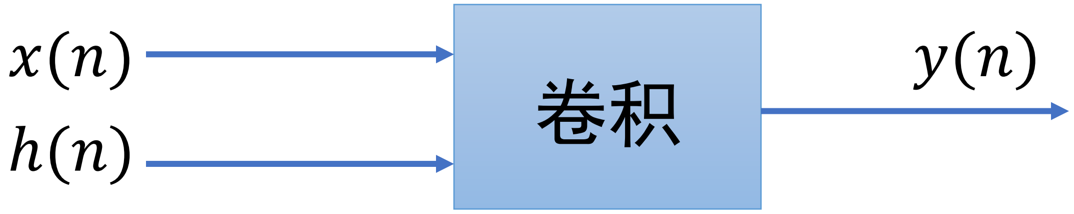
- 信号离散化时，采样频率要满足奈奎斯特频率
- 在基2FFT算法中，$N$一定是2的整数次幂，若不是，则需要给序列补上若干个零，凑成2的整数次幂
- 频率分辨率：DFT中谱线间的最小间隔（单位为Hz或rad），等于信号的基波频率 $f_0$（或$\Omega_0$），$f_0$ 越小则频率分辨率越高
- 对于通过采样频率$f_s$得到的、长度为$N$的数据序列，频率分辨率为

$$f_0 = \frac{1}{NT_s} = \frac{f_s}{N}$$

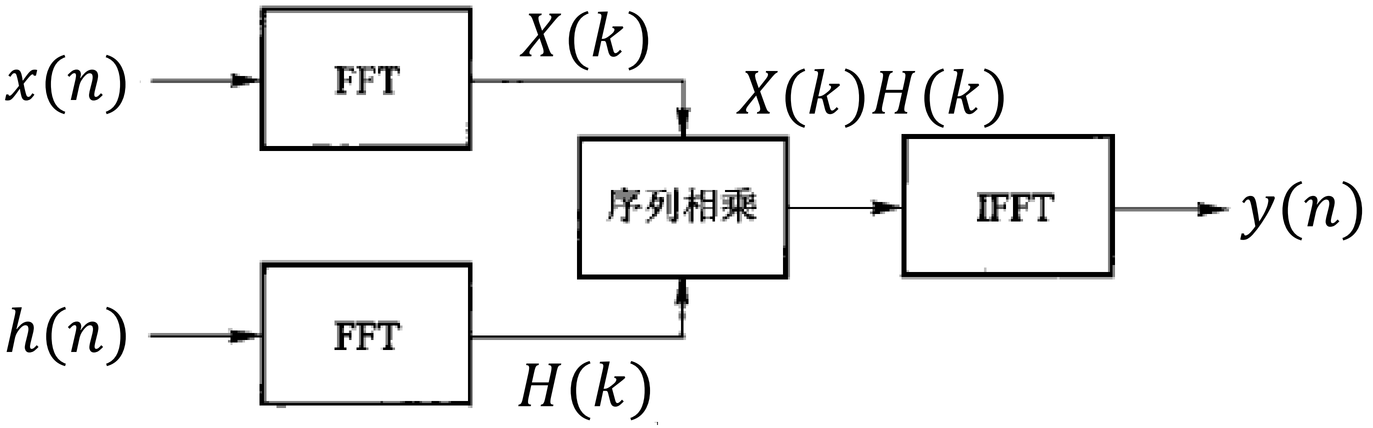
# 利用 FFT 求线性卷积（快速卷积）

$x(n), n = 0, \dots, N_1 - 1, \qquad h(n), n = 0,1, \dots, N_2 - 1$

长度 $N_1 + N_2 - 1$




$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$




通过求解圆周卷积来求取两个序列的线性卷积

两序列分别补零点加长至 $N_1 + N_2 - 1$

# 利用 FFT 求线性卷积（快速卷积）

- 在一般的数字滤波器中，由 $h(n)$ 求 $H(k)$ 这一步是预先设计好的，数据已置于存储器之中，实际只需要两个FFT的计算
- 两序列长度接近或相等时，随着序列长度$N$的增大，圆卷积比线性卷积复杂度降低越多
- 若一个序列较短，而另一序列很长时，可采用分段卷积的方法

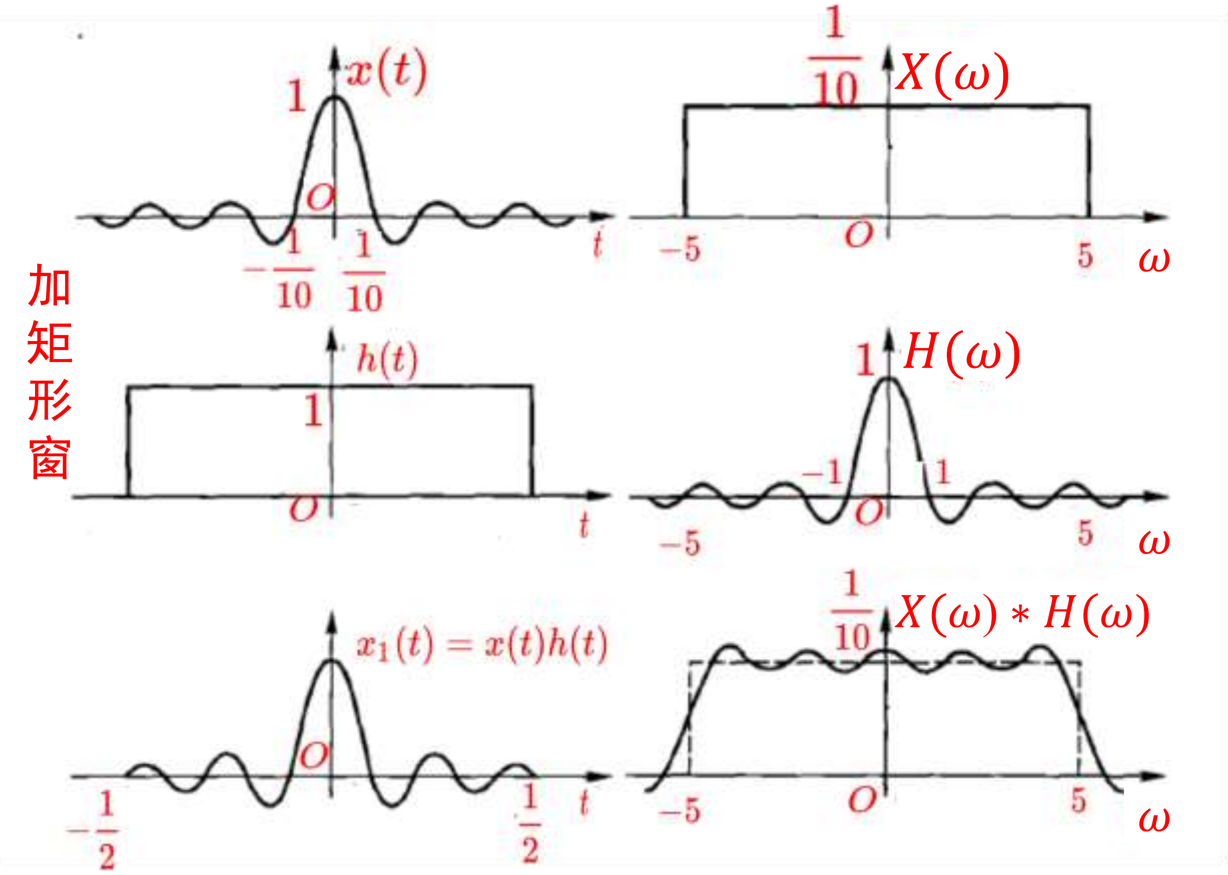
# 连续时间信号分析的逼近

## 时限连续信号

- 一般时限信号具有无限频带宽度，根据时域采样定理，无论怎样减小采样间隔 $T_s$，都不可避免产生频谱混叠
- 过度减小采样间隔，会极大地增加DFT计算工作量和计算机存储单元，实际应用中不可取
- 解决方法：
  低通滤波器
  - 利用抗混叠滤波器去除连续信号中次要的高频成分，再进行采样
  - 选取合适的$T_s$，使混叠产生的误差限制在允许范围之内

## 频率有限信号

- 带限信号的采样频率选取较容易，但一般带限信号时宽无限，不符合DFT在时域对信号的要求，需要进行加窗截断
- 当信号长度截断不当时，会产生频谱泄漏现象




截断过程使频谱产生失真，从原有的频率受限图形扩展开来，称为“泄漏”

# 频率有限信号

- 泄漏与混叠有着密切联系，因为泄漏导致频谱扩展，从而引起混叠
- 减少频谱泄漏的处理方法：选取形状合适的窗函数
  - 矩形窗在时域的突变导致频域中高频成分衰减慢，造成的频谱泄漏也最严重
  - 用比较光滑的窗函数代替截取信号样本的矩形窗函数，使被截断后的时域波形两端突变能变得更平滑
  - 三角形窗、升余弦窗（Haning窗）、改进的升余弦窗（Hamming窗）等在频域有较低的旁瓣，使频谱泄漏现象减弱

## 连续周期信号

- 连续周期信号是非时限信号，作DFT处理时也要加窗截断
- 当截断长度正好是信号周期时，不会产生频谱泄漏，但当截断长度不是信号周期时，会产生频谱泄漏
- 处理方法：合理地选取截断长度（整周期截断）

# 电平数值的相对变动

- 连续信号离散化后，频域存在幅值的变动，即 $X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$
- 对一个时间有限连续信号进行傅里叶分析：DFT计算结果乘以系数$T_s$，可得到近似频谱
- 由频谱合成波形：如果已知某信号的频谱在正、负频率范围内共占据频带$f_s$，利用IDFT计算之结果乘以系数$f_s$即可获得其近似的时间波形
- 用DFT来求一周期函数的傅里叶级数近似式：这时因子$\frac{1}{N}$最好放置在正变换式中，而不是逆变换式中（此时，无论正、逆DFT变换都可直接表示所需结果，无需再乘转换系数）

# 课程内容

2.1 信号的采样和恢复

2.2 离散信号的时域描述和运算

2.3 离散信号的频域分析

2.4 快速傅里叶变换及应用

2.5 离散信号的Z域分析

# 离散信号的Z变换

- 从 DTFT 到 Z变换
- Z变换的收敛域
- Z变换的几何表示
- 单边Z变换
- Z变换与其他变换的关系
  - Z变换与拉普拉斯变换的关系（从s平面映射到z平面）
  - Z变换与DTFT、DFT的关系

# 为什么要进行离散信号的Z域分析

- 增长型的离散信号$x(n)$的傅里叶变换是不收敛的
- 为了满足收敛条件，类似拉普拉斯变换，将$x(n)$乘以一衰减的实指数信号$r^{-n}$ $(r > 1)$，使信号$x(n)r^{-n}$满足收敛条件

# 离散信号的Z变换

- $x(n)r^{-n}$的离散时间傅里叶变换（DTFT） $\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$

$$\mathrm{DTFT}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(re^{j\Omega}\right)^{-n}$$

- 令复变量 $z = re^{j\Omega}$, 定义离散时间信号（序列）$x(n)$的Z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- $z^{-n}$的系数值就是$x(n)$的值， $z^{-n}$的幂次表示了序列的序号

# 离散信号的Z反变换

IDTFT： $x(n)r^{-n} = \mathrm{IDTFT}[X(z)] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} X(z)e^{j\Omega n}d\Omega$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)\left(re^{j\Omega}\right)^n d\Omega$$

$z$

由 $z=re^{j\Omega}$ 知
$dz=jre^{j\Omega}d\Omega=jzd\Omega$
$\Rightarrow d\Omega=\dfrac{dz}{jz}$

将积分变量Ω改变为$z$，得 $x(n) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\oint_C X(z)\cdot z^{n-1}dz$

- $\oint_C X(z)\cdot z^{n-1}dz$表示以$r$为半径、以原点为中心的封闭圆周上沿逆时针方向的围线积分

由于 $z=re^{j\Omega}=r(\cos\Omega+j\sin\Omega)$, $|z|=r$, $\arg z=\Omega$

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = x(n)$$

得到双边Z变换对，$n\in(-\infty,\infty)$ $\quad x(n)\overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow}X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

# Z变换的收敛域

- 一个Z变换式只有和它的收敛域结合在一起，才能与信号建立起对应的关系

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+\frac{x(1)}{z}+\frac{x(2)}{z^2}+\cdots$$

收敛域：当 $x(n)$为有界时，令上述级数收敛的z 的所有可取值的集合称为收敛域

1) 比值判别法（ $a_n$ 表示级数中的第$n$项） $a_n=x(n)z^{-n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

2) 根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

$\rho>1$ 级数发散

$\rho=1$ 可能收敛

$\rho<1$ 级数收敛

# Z变换的几何表示

- 在Z平面内分别用“O”和“×”标出 $X(z)$ 的零点和极点的位置，并指出收敛域，构成Z变换的几何表示
- 在极点处 $X(z)$ 不收敛，因而收敛域内没有极点，而且收敛域边界总是以极点为界

# 单边Z变换

- $x(n)$的单边Z变换可以看成$x(n)u(n)$的双边Z变换
- 对于因果序列$x(n)=0, n<0$, 其单边Z变换和双边Z变换是一致的
- 定义

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

单边Z变换和双边Z变换差别在于，单边Z变换求和仅在n的非负值上进行，而不管$n<0$时$x(n)$是否为零

单边Z变换并不特别强调收敛域

# Z变换和拉普拉斯变换的关系

周期冲激序列

考虑采样信号 $x_s(t) = x(t)\underline{\delta_T(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$

取拉普拉斯变换

$T$是序列的时间间隔，重复频率$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

采样周期

$$X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st}dt\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

$$z = e^{sT}$$

# Z变换和拉普拉斯变换的关系

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

令$z=e^{sT}$，则$s=\frac{1}{T}\ln z$

$$X_s(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=X(z)$$

$$\mathcal{L}[x_s(t)]\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\mathcal{Z}[x(n)]$$

如果序列$x(n)$各样值与采样信号$x(t)\delta_T(t)$各冲激函数强度相对应，就可借助$z=e^{sT}$，将采样信号的拉氏变换移植来表示离散时间信号的Z变换

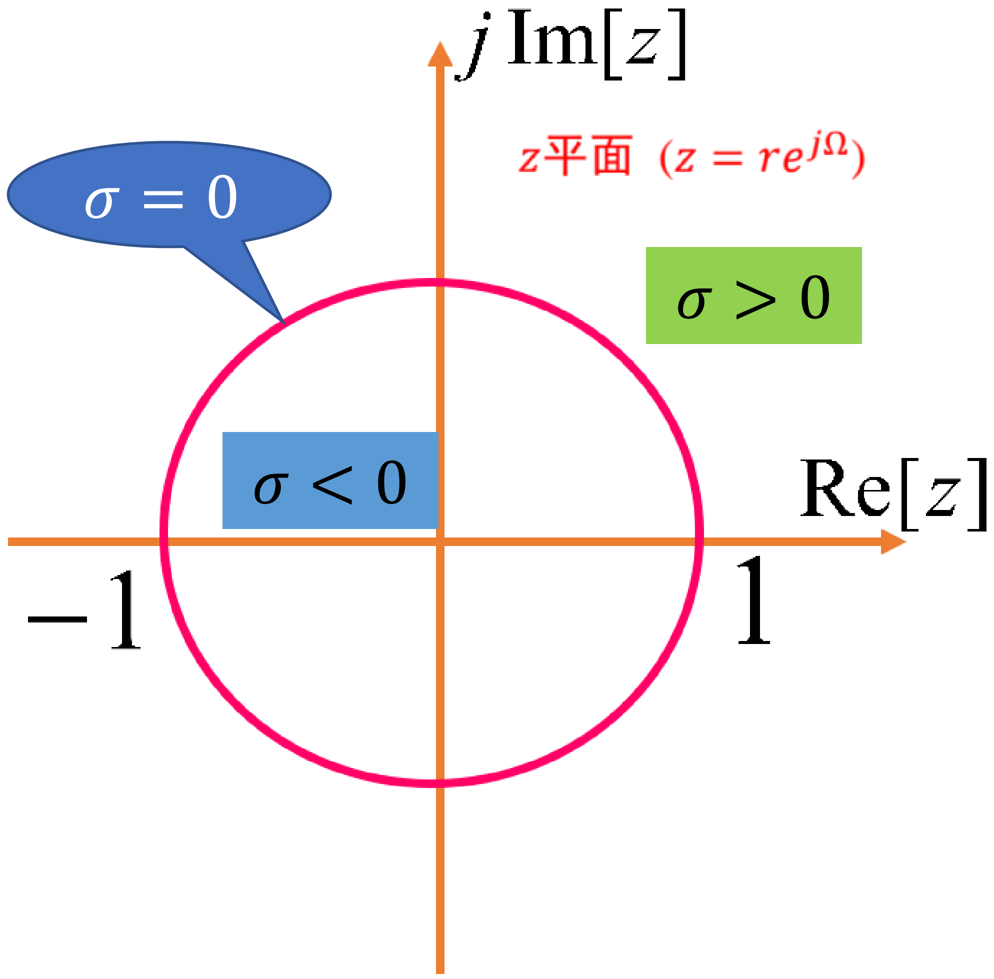
序列的Z变换可以看作：产生序列的理想冲激采样信号的拉普拉斯变换进行$z=e^{sT}$映射的结果，由复变量 $s$ 平面映射到复变量 $z$ 平面

# 从s平面到z平面的映射

$$s = \sigma + j\omega$$

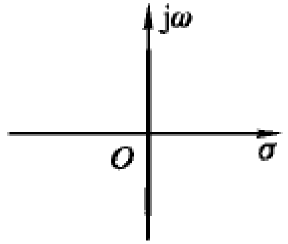
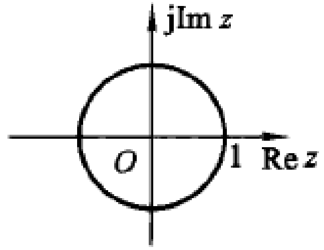
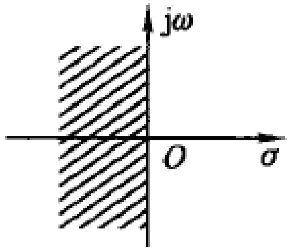
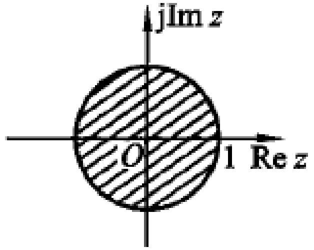
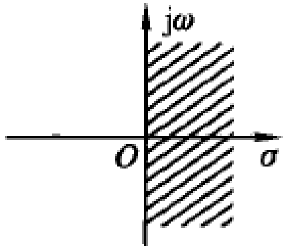
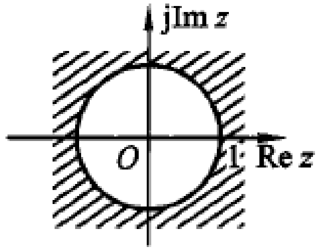
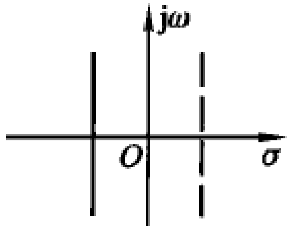
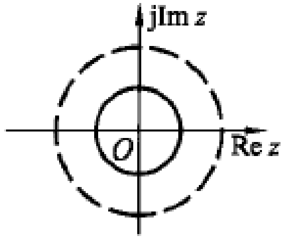
$$\begin{cases} z = re^{j\Omega} \\ z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi}{\omega_s}\sigma} \\ \Omega = \omega T = \dfrac{2\pi\omega}{\omega_s} \end{cases}$$



$$r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi}{\omega_s}\sigma}$$

$$\Omega = \omega T = \frac{2\pi\omega}{\omega_s}$$

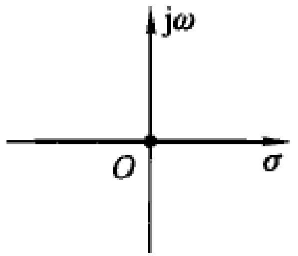
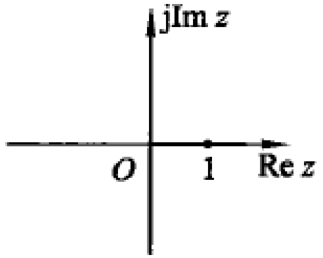
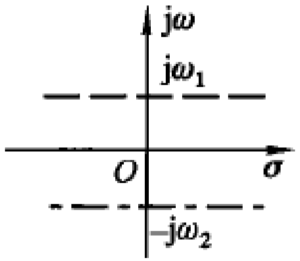
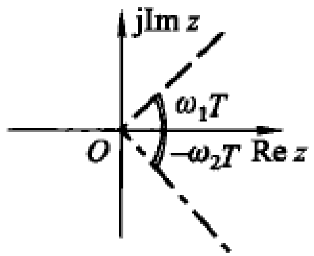
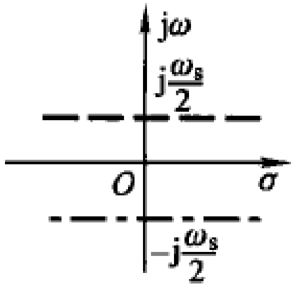
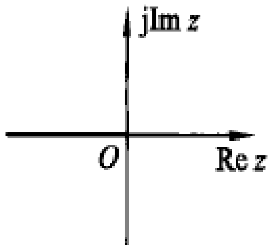
| | $s$平面（$s=\sigma+j\omega$） | $z$平面（$z=re^{j\Omega}$） | |
|---|---|---|---|
| 虚轴 $\begin{pmatrix}\sigma=0 \\ s=j\omega\end{pmatrix}$ |  |  | 单位圆 $\begin{pmatrix}r=1 \\ \Omega \text{ 任意}\end{pmatrix}$ |
| 左半平面（$\sigma<0$） |  |  | 单位圆内 $\begin{pmatrix}r<1 \\ \Omega \text{ 任意}\end{pmatrix}$ |
| 右半平面（$\sigma>0$） |  |  | 单位圆外 $\begin{pmatrix}r>1 \\ \Omega \text{ 任意}\end{pmatrix}$ |
| 平行于虚轴的直线（$\sigma$ 为常数） |  |  | 圆 $\begin{pmatrix}\sigma>0, r>1 \\ \sigma<0, r<1\end{pmatrix}$ |

s平面虚轴 → z平面单位圆上

s左半平面 → z平面单位圆内部

s右半平面 → z平面单位圆外部

z−s 映射并不是单值的！

| | $s$平面 $(s=\sigma+j\omega)$ | $z$平面 $(z=re^{j\Omega})$ | |
|---|---|---|---|
| 实轴 $\begin{pmatrix}\omega=0\\ s=\sigma\end{pmatrix}$ |  |  | 正实轴 $\begin{pmatrix}\Omega=0\\ r\ 任意\end{pmatrix}$ |
| 平行于实轴的直线（$\omega$ 为常数） |  |  | 始于原点的辐射线 $\begin{pmatrix}\Omega\ 为常数\\ r\ 任意\end{pmatrix}$ |
| 通过 $\pm j\dfrac{k\omega_s}{2}$ 平行于实轴的直线 $(k=1,3,\cdots)$ |  |  | 负实轴 $\begin{pmatrix}\Omega=\pi\\ r\ 任意\end{pmatrix}$ |

$$r=e^{\sigma T}=e^{\frac{2\pi}{\omega_s}\sigma}$$

$$\Omega=\omega T=\frac{2\pi\omega}{\omega_s}$$

在s平面上沿虚轴移动对应于z平面上沿单位圆周期性旋转，每平移$\omega_s$，则沿单位圆转一圈

z–s 映射并不是单值的！

# Z变换和DTFT之间的关系

- 离散信号$x(n)$的Z变换是$x(n)$乘以实指数信号$r^{-n}$后的DTFT
- 单位圆上的Z变换就是序列的离散时间傅里叶变换$X(\Omega)$

（前提：单位圆包含在Z变换的收敛域内）

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}=\mathrm{DTFT}[x(n)]=X(\Omega)$$

即$|z|=1$

# Z变换和DFT之间的关系

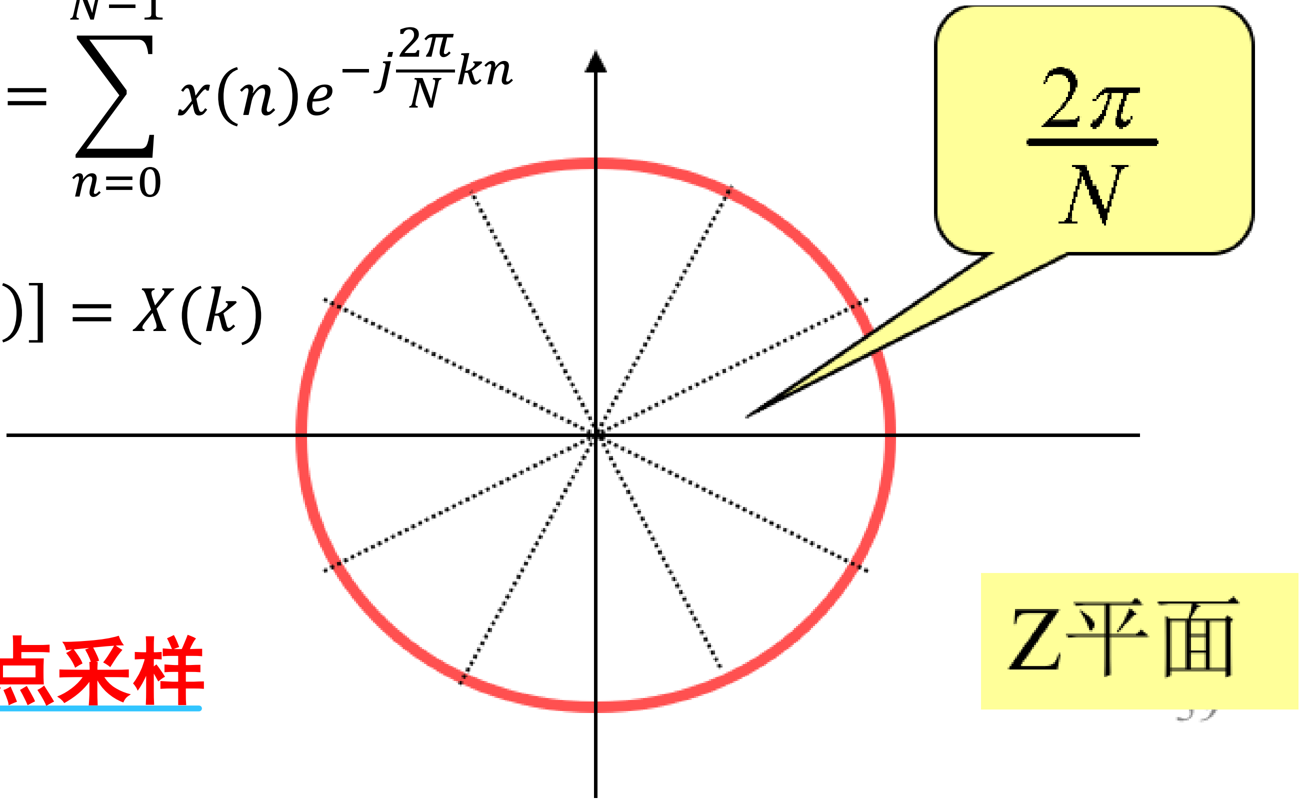
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},k=0,1,\dots,N-1$$

- Z变换和DFT

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

即|z|=1,N点采样 $=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{nk}=\mathrm{DFT}[x(n)]=X(k)$




**DFT是Z变换在单位圆上的N点采样**

# 本章小结

- 冲激采样及采样定理
  - 注意采样周期和延拓周期
- 离散信号的时域描述和分析
  - 卷积和的概念与计算
- 离散信号的频域分析
  - DFS、DTFT及应用
- 离散傅里叶变换（DFT、FFT）
- 离散信号的Z域分析
  - Z变换和其他变换的关系