

2024年秋季学期

信号分析与处理

第三章 信号处理基础

授课教师：谢晓晨

哈尔滨工业大学深圳校区

机电工程与自动化学院



课程内容

3.1 系统及其性质

3.1.1 系统的描述

3.1.2 系统的性质

3.2 信号的线性系统处理

3.2.1 时域法分析

3.2.2 频域法分析

3.2.3 复频域分析



3.1.1 系统的描述

系统的定义：

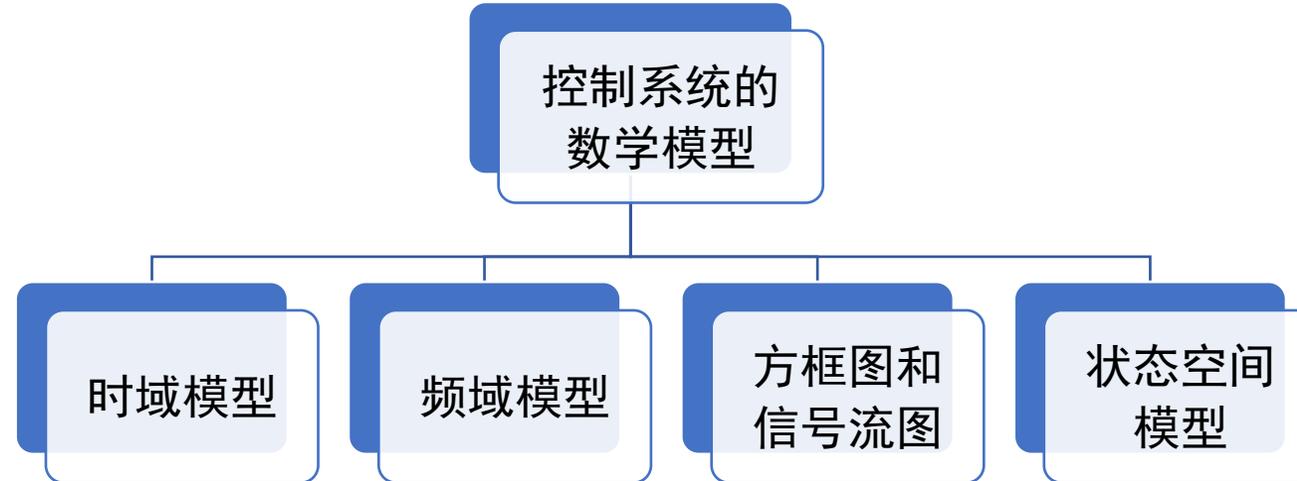
- 若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体称为系统
- 系统可以是自然的，也可以是人造的，涉及范围广泛
- 众多领域各不相同的系统都对施加于它的信号做出**响应**，产生出另外的信号
- 把施加于系统的信号称为系统的**输入信号**，由此产生出来的信号称为系统的**输出信号**
 - 任何系统都接受输入信号，产生输出信号，**系统的特定功能**就体现在：系统接受一定输入信号情况下，产生什么样的输出信号。
 - 任何信号的改变（包括物理形态以及所包含的信息内容）都是通过某种系统实现的，**系统是信号处理的工具**。



系统的数学模型

- 系统数学模型的定义

系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有理想特性的符号组合图形来表征系统特性。



系统的数学模型

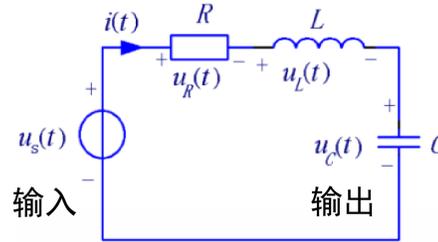
• 系统数学模型的建立

- 对于**同一物理系统**，在不同条件下，可以得到**不同形式的数学模型**。
- 对于**不同的物理系统**，经过抽象和近似，有可能得到**形式上完全相同的数学模型**。
- 对于较复杂的系统，其数学模型可能是一个高阶微分方程，规定此微分方程的阶次就是系统的阶数。

$$x^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + A_1\dot{x} + A_0x = v$$



m 即为系统的阶数



$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t) = u_s(t)$$

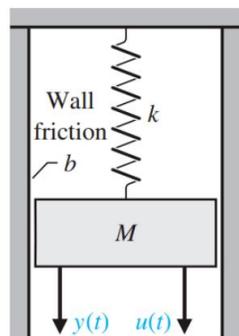
动态电路的
输入输出方程

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{1}{LC} u_s(t)$$

系统数学模型分类

- **输入输出模型**：只反映系统输入和输出之间的关系，或者说只反映系统的外特性，称为输入输出模型，通常由输入输出方程描述。
- **状态空间模型**：不仅反映系统的外特性，而且更着重反映系统的内部状态，称为状态空间模型，通常由状态方程和输出方程描述。



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \quad \text{状态方程}$$

弹簧-质量-阻尼系统的
状态空间模型

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u(t) \quad \text{输出方程}$$

x_1 ：质量块的位移

x_2 ：质量块的速度

系统的研究方法

一般有固定的答案

• 系统分析 (Analysis)

- 在给定系统的情况下，研究系统对输入信号所产生的响应，并由此获得对系统功能和特性的认识。
- 系统的响应、稳定性分析等

• 系统综合 (Synthesis)

- 在已知系统的输入信号及对输出信号要求的情况下，通过调整系统中可变动部分的结构和参数，以保证得到所要求的输出信号。
- 控制器、滤波器的设计等



系统的分类

- 连续时间系统和离散时间系统

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t)$$

线性定常系统(LTI)的状态空间表达式

状态方程 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

输出方程 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$

用微分方程或连续时间状态方程描述

系统的输入输出信号
或
系统的所有状态变量



连续时间信号



连续时间系统

离散时间信号



离散时间系统



用差分方程或离散时间状态方程描述

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

- 单输入单输出系统和多输入多输出系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$



3.1.2 系统的性质

对任意的输入信号，如果每一时刻系统的输出信号值仅仅取决于同时刻的输入信号值，而与它过去的工作状态（历史）无关，称该系统具有无记忆性，否则，该系统为有记忆的。

(1) **记忆性**：瞬时系统，动态系统

对于任意的输入信号，如果系统在任何时刻的输出值，只取决于该时刻和该时刻以前的输入值，而与将来时刻的输入值无关，就称该系统具有因果性；否则，如果某个时刻的输出值还与将来时刻的输入值有关，则为非因果的。

(2) **因果性**：因果系统，非因果系统

(3) **可逆性**：可逆系统

如果一个系统对不同的输入信号产生不同的输出信号，即系统的输入输出信号呈一一对应的关系，则称该系统是可逆的，或称为可逆系统，否则就是不可逆系统。

(4) **稳定性** 如果一个系统对其有界的输入信号其零状态响应也是有界的，则该系统具有稳定性，或称该系统是稳定系统，也可称为有界输入有界输出（BIBO）稳

(5) **时不变性**：时变系统，时不变系统

(6) **线性**：线性系统，增量线性系统



(1) 记忆性

- 对任意的输入信号，如果每一时刻系统的输出信号值仅仅取决于同时刻的输入信号值，而与它过去的工作状态（历史）无关，称该系统具有无记忆性，否则，该系统为有记忆的。
- 无记忆——无记忆系统、瞬时系统或即时系统，通常由代数方程描述。如：电阻器、加法器等。
$$U_R(t) = R \cdot I_R(t)$$
- 有记忆——记忆系统或动态系统，通常可用微分方程或差分方程描述。如：含有储能元件（电容、电感）的系统。

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I_C(\tau) d\tau$$

(2) 因果性

- 对于任意的输入信号，如果系统在任何时刻的输出值，只取决于该时刻和该时刻以前的输入值，而与将来时刻的输入值无关，就称该系统具有因果性；否则，如果某个时刻的输出值还与将来时刻的输入值有关，则为非因果的。
- 具有因果性的系统称为因果系统，具有非因果性的系统为非因果系统。
- 通常由电阻器、电感线圈、电容器构成的实际物理系统都是因果系统。而在信号处理技术领域，待处理的时间信号已被记录并保存下来，可以利用后一时刻的输入来决定前一时刻的输出，将构成非因果系统。



因果系统的表示方法

数学上，若把 t_0 或 n_0 看作现在时刻，则 $t < t_0$ 或 $n < n_0$ 的时刻就是以前时刻，而 $t > t_0$ 或 $n > n_0$ 的时刻为将来时刻。

因果系统可表示为 $y(t) = f\{x(t - \tau), \tau \geq 0\}$ (连续时间)

或

$y(n) = f\{x(n - k), k \geq 0\}$ (离散时间)

判断题： 以下系统是因果系统吗？

$$(1) y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$



$$(2) y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$



$$(3) y(t) = x(t + 1)$$

t+1为将来时刻



(3) 可逆性

- 如果一个系统对不同的输入信号产生不同的输出信号，即系统的输入输出信号呈一一对应的关系，则称该系统是**可逆的**，或称为**可逆系统**，否则就是不可逆系统。
- 可逆系统的概念在信号传输与处理技术领域中有广泛的应用。
 - 例如在通信系统中，为满足某些要求可将待传输信号进行特定的加工（如编码），在接收信号之后仍要恢复原信号，编码器应当是可逆的。



(4) 稳定性

- 如果一个系统对其有界的输入信号其零状态响应也是有界的，则该系统具有稳定性，或称该系统是稳定系统，也可称为有界输入有界输出 (BIBO) 稳定系统。
Bounded-Input Bounded-Output
- 稳定性对系统具有重要的意义，在系统分析中有着重要的地位。
- 如果对有界输入产生的输出不是有界的，则是不稳定的系统。
- BIBO稳定和渐近稳定 *更严格*
 - *外部稳定* 渐近稳定是BIBO稳定 (输入输出均有界)
 - *内部稳定* BIBO稳定有可能不满足渐近稳定条件 (例如传递函数存在零极点对消)



(5) 时不变性

• 定义：

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

如果系统的参数不随时间而变化，则称此系统为**时不变系统**（或非时变系统、定常系统）；如果系统的参量随时间改变，则称其为**时变系统**（或参变系统）。

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

★ 时变、时不变系统的检验方法：信号在时间上的平移

- 检验一个系统的时不变性，可以从定义出发，对于 $x_1(t)$ ，有 $y_1(t)$ ，令 $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ ，检验 $y_2(t)$ 是否等于 $y_1(t - t_0)$ 。若是，则系统是时不变的，否则系统就是时变的。

(6) 线性

★ 同时满足叠加性和齐次性的系统称为线性系统，否则为非线性系统。

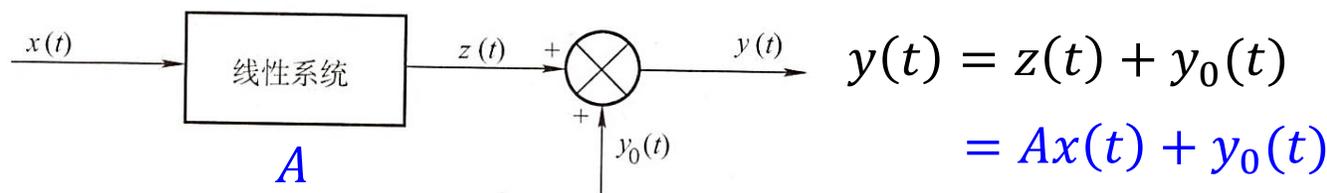
- **叠加性**：几个输入信号同时作用于系统时，系统的响应等于每个输入信号单独作用所产生的响应之和。

$$\begin{array}{l} x_1 \rightarrow y_1 \\ x_2 \rightarrow y_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 \rightarrow y_1 + y_2$$

- **齐次性**：当输入信号为原输入信号的 K 倍时，系统的输出响应也为原输出响应的 K 倍。

$$x \rightarrow y \quad \rightarrow \quad Kx \rightarrow Ky$$

- 系统输出的**增量**与**输入增量**之间呈线性关系，把这一类系统称为增量线性系统。



$$\begin{array}{l} \text{输出增量} \quad \text{输入增量} \\ \Rightarrow \underline{\Delta y(t) = A\Delta x(t)} \end{array}$$

课程内容

3.1 系统及其性质

3.1.1 系统的描述

3.1.2 系统的性质

3.2 信号的线性系统处理

3.2.1 时域法分析 $y(t) = x(t) * h(t), y(n) = x(n) * h(n)$

3.2.2 频域法分析

3.2.3 复频域分析

信号的线性系统处理



时域法分析

线性时不变因果系统

线性时不变系统的单位冲激响应

线性时不变系统的时域分析



频域法分析

频率响应

无失真传输

理想低通滤波器



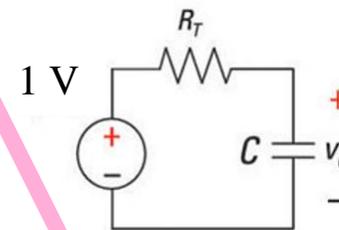
复频域分析

微分方程的复频域求解

传递函数



线性时不变动态系统的表示方法



例：1V 的恒定电压源
加到 RC 电路上持续10s，
需要知道初始电容电压

- 对于连续系统，由线性常系数微分方程描述：

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t)$$

- 对于离散系统，由线性常系数差分方程描述：

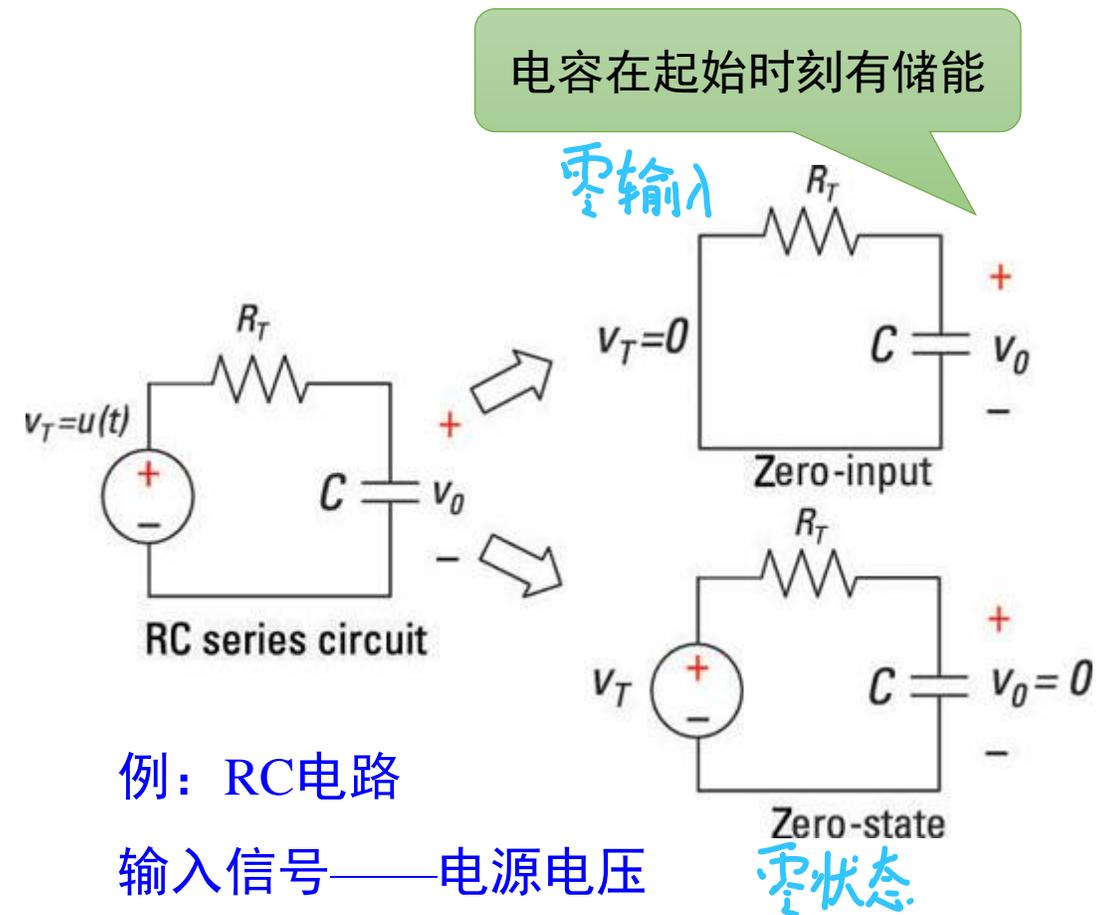
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

求解系统方程的局限：

- 需要初始条件下的系统输出、各阶导数初值等
- 纯数学方法不能表现系统响应的物理意义
- 输入信号或初始条件改变，需要重新求解

零输入响应和零状态响应

- 零输入响应：没有外加激励信号作用，只有起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应；相当于本次输入为零，系统由非零初始状态延续下来的输出。
- 零状态响应：系统在零初始状态下，对本次输入激励的响应。



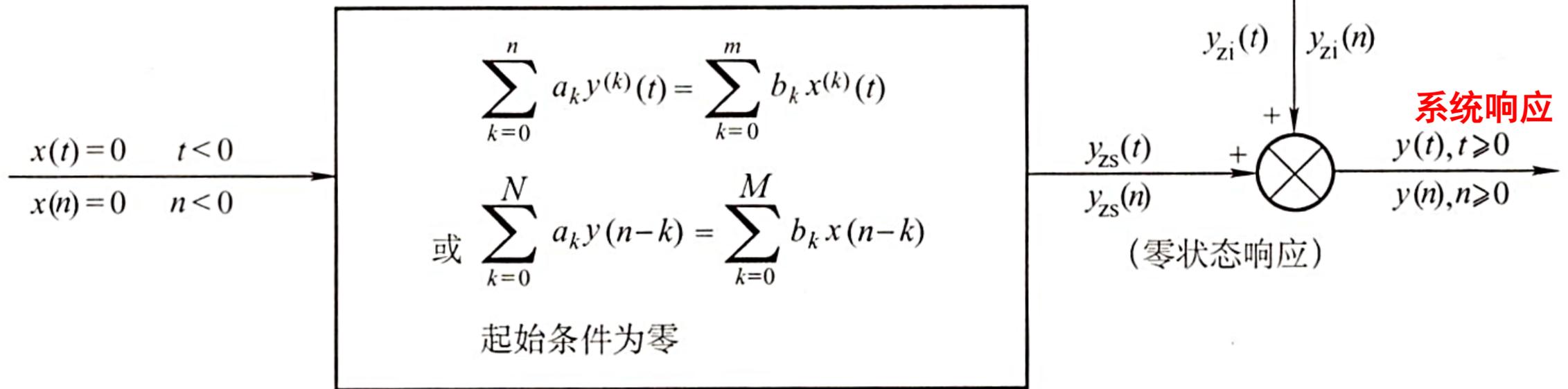
例：RC电路

输入信号——电源电压

状态变量——电容两端电压 v_0

系统响应

★ 系统响应 = 零输入响应 + 零状态响应



零状态

注：线性系统只有在零初始状态下才是线性的，否则是一个增量线性系统。

线性时不变 (LTI) 系统的单位冲激/脉冲响应

• 定义

连续时间LTI系统的单位冲激响应 $n > m$ 时, $h(t)$ 具有形式:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

• 系统在零初始条件下, 对激励为单位冲激信号 $\delta(t)$ 的响应, 记为 $h(t)$

• 系统在零初始条件下, 对激励为单位样值信号 $\delta(n)$ 的响应, 记为 $h(n)$

$$h(n) = \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^n u(n) \quad N > M$$

离散时间LTI系统的单位脉冲响应

连续时间 LTI 系统的单位冲激响应

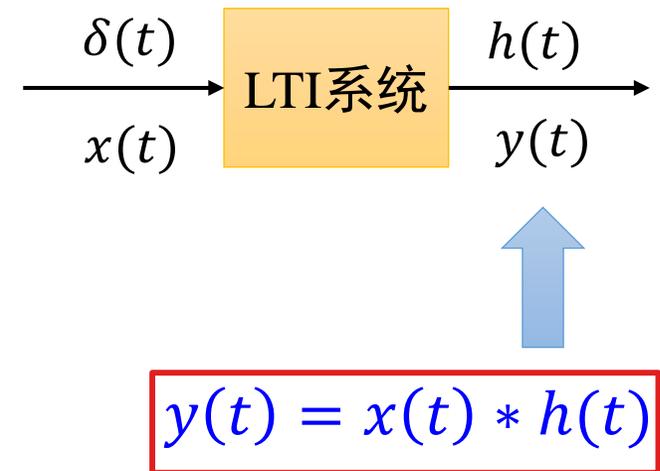
系统表达式

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t)$$

代入 $x(t) = \delta(t)$, $y(t) = h(t)$ 得

$$\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \delta^{(k)}(t)$$

下求出单位冲激响应 $h(t)$



连续时间 LTI 系统单位冲激响应 $h(t)$ 的特点

① 具有齐次微分方程解的基本形式

当 $t > 0$ 时, 由于 $\delta(t)$ 及其各阶导数均等于零, $h(t)$ 应满足 **齐次方程**

$$\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \delta^{(k)}(t) = 0, \quad t > 0$$

由于系统的因果性, $h(t)$ 又要满足 $h(t) = 0, t < 0$, 所以 $h(t)$ 应具有齐次微分方程解的基本形式。例如, 当上述齐次方程有 n 个不同的 单特征根 λ_i

($i = 1, 2, \dots, n$) 时:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

$u(t)$ 用于限制时间范围 $t > 0$



连续时间 LTI 系统单位冲激响应 $h(t)$ 的特点

推广: n 阶常系数齐次线性微分方程 $y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$

特征方程 $r^n + P_1 r^{n-1} + P_2 r^{n-2} + \dots + P_{n-1} r + P_n = 0$

$$\sum_{k=0}^n P_k y^{(k)} = 0$$

求出特征方程的根 r_1, \dots, r_n 复数域上有 n 个根 (重根按重数计算) 且复根一定共轭成对出现

特征方程的根

给出微分方程通解中对应的项

单实根 r

给出项 ce^{rx}

k 重实根 r

给出 k 项 $e^{rx}(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1})$

一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

给出两项 $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

也是任意常数

一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

给出 $2k$ 项 $e^{\alpha x} [c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}] \cos \beta x + [D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}] \sin \beta x$

将给出的所有项求和便得到通解

KOKUYO



连续时间 LTI 系统单位冲激响应 $h(t)$ 的特点

② 其形式与 n 、 m 值的相对大小密切相关

- $n > m$ 时, $h(t)$ 具有形式:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

- $n = m$ 时, $h(t)$ 具有形式:

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

- $n < m$ 时, $h(t)$ 具有形式:

$$h(t) = \sum_{j=0}^{m-n} c_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \delta^{(k)}(t)$$

要求出 $h(t)$, 需要对等式两边求 n 重积分
 (物理上可实现系统一般具有的形式)
 一般系统往往具有惯性 ($\frac{1}{Ts+1}$), 极点多于零点, $n > m$



求 $h(t)$ 的经典方法和步骤 ($n > m$)

- 列系统微分方程
- 求微分方程的特征根
- 得齐次解
- 求各阶导数
- 代入微分方程
- 两边奇异函数的系数平衡，可求出系数

$$h(t) = \left[\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} \right] u(t)$$




例3-1：试求如下微分方程所描述的系统的单位冲激响应。
 $x(t) = \delta(t)$

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t) \quad n=2, m=1$$

解：系统对应的特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ ，求得两个特征根分别为：

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ 。系统的单位冲激响应 $h(t)$ 应具有如下形式：

$$h(t) = (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t})u(t) \quad \underline{n > m} \text{ 时, } h(t) \text{ 具有形式:}$$

将其代入原方程，此时 $y(t) = h(t)$ ， $x(t) = \delta(t)$ ：

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

$$h''(t) + 4h'(t) + 3h(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

$$(A_1 + A_2)\delta'(t) + (3A_1 + A_2)\delta(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \quad \text{求 } h'(t) \text{ 时注意 } f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

方程两边各奇异项系数相等，有 $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$ ，则

$$h(t) = \left(\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \right) u(t) \quad \text{注意要加上时间范围}$$

法 = 等式两边拉氏变换

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = sX(s) + 2X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$



离散时间 LTI 系统的单位样值响应

- $\delta(t)$ 和 $\delta(n)$ 的区别
- 表达式

单位样值信号

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1 \end{array} \right.$$

单位冲激信号

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

离散时间LTI系统：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$y(n) = h(n)$$

$$x(n) = \delta(n)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k)$$



离散时间 LTI 系统单位样值响应 $h(n)$ 的特点

$$\sum_{k=0}^N a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k)$$

单位样值信号

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$$

$$h(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^n u(n) & N > M \\ \sum_{j=0}^{M-N} C_j \delta(n-j) + \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^n u(n) & N \leq M \end{cases}$$



例3-2：线性时不变因果离散系统的差分方程为

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$$

求该系统的单位样值响应。 $N=M=2$

解：系统的特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ，特征根为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ 。 $h(n)$ 的表达式：

$h(n) = C_0\delta(n) + A_1 3^n u(n) + A_2 2^n u(n)$ ，满足方程

$$h(n) - 5h(n-1) + 6h(n-2) = \delta(n) - 3\delta(n-2)$$

代入，得 利用 $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

$$\begin{aligned} & (C_0 + A_1 + A_2)\delta(n) + (-5C_0 - 2A_1 - 3A_2)\delta(n-1) + 6C_0\delta(n-2) \\ & = \delta(n) - 3\delta(n-2) \end{aligned}$$

为使等式两边对应项系数相等，得 $C_0 = -\frac{1}{2}, A_1 = 2, A_2 = -\frac{1}{2}$

因此，系统的单位样值响应为 $h(n) = -\frac{1}{2}\delta(n) + 2 \cdot 3^n u(n) - \frac{1}{2} \cdot 2^n u(n)$

$h(0) = 1, h(1) = 5, h(2) = 16$



$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$$

z变换. $Y(z) - 5z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = X(z) - 3z^{-2}X(z)$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

其中 $x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = 1$

$$\text{从而 } Y(z) = \frac{z^2 - 3}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z^2 - 3}{(z-2)(z-3)}$$

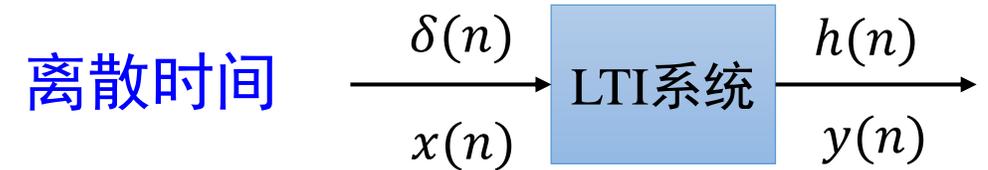
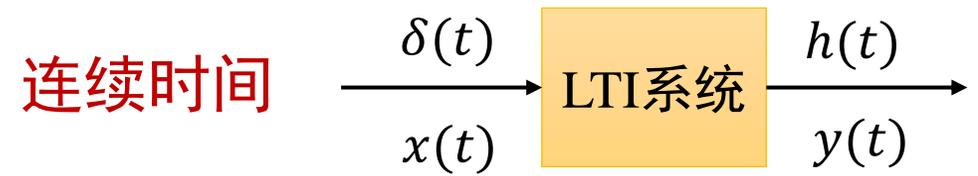
$$\begin{aligned} y(k) &= z^{-1}[Y(z)] = \sum_i \text{Res} \left[\frac{z^2 - 3}{(z-2)(z-3)} z^{k-1} \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z^2 - 3)z^{k-1}}{z-3} + \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z^2 - 3)z^{k-1}}{z-2} \\ &= 6 \cdot 3^{k-1} - 2^{k-1} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

$$y(0) = 1, y(1) = 5, y(2) = 16, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{故 } y(n) &= -\frac{1}{2}\delta(n) + 6 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2}\delta(n) + 2 \cdot 3^n u(n) - \frac{1}{2} 2^n u(n) \end{aligned}$$

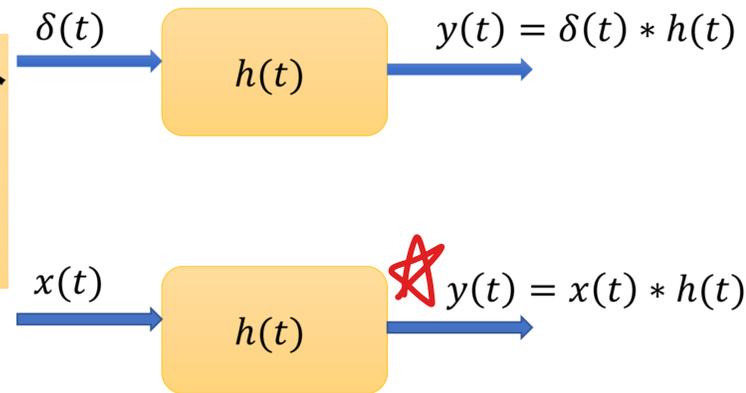
总结：LTI 系统单位冲激/脉冲响应的求解步骤

- 列系统微分/差分方程
- 求微分/差分方程的特征根
- 得到齐次解的形式
- 求各阶导数/平移所得序列
- 代入系统微分/差分方程
- 两边奇异函数/序列的系数平衡，即可求出相应的系数



线性时不变系统的时域分析

LTI系统对任意输入信号 $x(t)$ 的响应是 $x(t)$ 与系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积



- 卷积积分——连续时间线性时不变系统

- 卷积和——离散时间线性时不变系统

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

离散时间LTI系统的特性

- 基本思想（以连续时间情况为例）：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$$

任意连续时间信号可以分解为一系列冲激函数之和，如果已知LTI系统的单位冲激响应 $h(t)$ ，利用线性和时不变性就能确定出系统对任意信号的响应。

卷积积分 $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
 线性卷积： $x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$



冲激/脉冲响应和阶跃响应的关系

 $h(t)/h(n)$
 $c(t)/c(n)$

单位阶跃响应 $c(t)/c(n)$

单位冲激响应

$$h(t) = c'(t)$$



连续时间

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

单位样值响应

$$h(n) = c(n) - c(n - 1)$$



离散时间

$$c(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n - m)$$

单位冲激/脉冲响应是单位阶跃响应的微分/后向差分



LTI

例3-3: 已知系统的单位脉冲响应为: $h(n) = a^n u(n)$, 系统的激励信号为 $x(n) = b^n u(n)$, $a \neq b$, 求该系统对激励 $x(n)$ 的零状态响应 $y(n)$ 。

线性卷积的定义

由于 $h(n), x(n) = 0, n < 0$

离散时间LTI系统的特性

解: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^n b^m a^{n-m}$

$$= \sum_{m=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^m a^n = a^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^m = a^n \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}}$$

等比数列

$$= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{或写为 } y(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} u(n)$$



课程内容

3.1 系统及其性质

3.1.1 系统的描述

3.1.2 系统的性质

3.2 信号的线性系统处理

3.2.1 时域法分析

3.2.2 频域法分析

3.2.3 复频域分析



频域分析法

当 $x(t) = e^{j\omega t}$ 时, $H(\omega) = \frac{y(t)}{x(t)}$
 当 $x(n) = e^{j\Omega n}$ 时, $H(\Omega) = \frac{y(n)}{x(n)}$

研究信号通过系统以后，在频谱结构上发生的变化，即输出响应随频率变化的规律——具有物理意义

$z = e^{sT} = e^{j\omega T} = e^{j\Omega}$

频域法分析

- 频率响应 $\left\{ \begin{aligned} H(\omega) &= \mathcal{F}[h(t)] = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(s) \Big|_{s=j\omega} \\ H(\Omega) &= \text{DTFT}[h(n)] = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \end{aligned} \right.$

通带内无失真传输，
阻带内信号衰减为0

无过渡带

- 无失真传输 $y(t) = Kx(t - t_0), Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}X(\omega)$

时域条件

频域条件

- 理想低通滤波器——①非因果系统，物理上不可实现

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

② 实际中不能实现从一个频带到另一个频带之间的突变

无过渡带



线性系统的频率响应 (连续系统)

注: LTI系统只会对输入信号的频率分量进行幅度和相位的调制, 不会引入新的频率分量, 也不会改变输入信号的频率

- 考察单位冲激响应为 $h(t)$ 的LTI系统对复指数信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的响应

可以表征单一频率的输入信号

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cdot e^{j\omega t}$$

CTFT的定义

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

频率特性 (频率响应) 函数

同频率的理解: 频率是 t 前面的系数, $H(\omega)$ 是 ω 的函数, 与 t 无关, 不会影响频率, 只会对信号的幅值和相位产生影响

LTI系统对复指数信号的响应仍是同频率的复指数信号, 只是幅值和相位发生改变

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

$$= |H(\omega)|e^{j[\omega t + \varphi_h(\omega)]}$$

对于任意连续信号 $x(t)$

- 由傅里叶反变换，得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

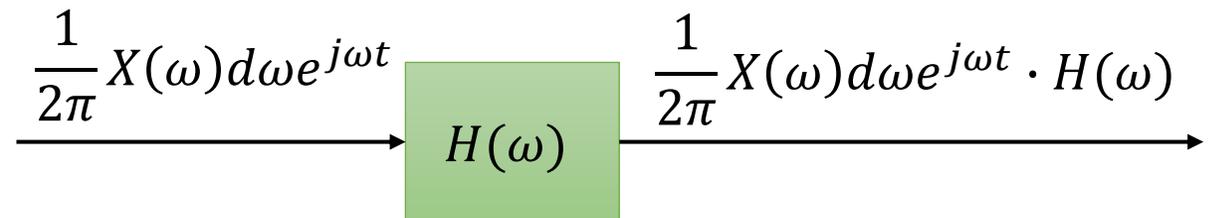


利用系统的齐次性和叠加性

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1}[X(\omega) H(\omega)] \end{aligned}$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = X(\omega) H(\omega)$$

$x(t)$ 可看作是无穷多个
不同频率复指数信号
分量的和

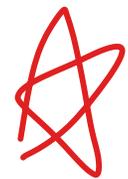


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

(另一思路) ↓ 傅里叶变换的
时域卷积定理

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

频率特性



$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \mathcal{F}[h(t)] \quad H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi_h(\omega)}$$

幅频
特性

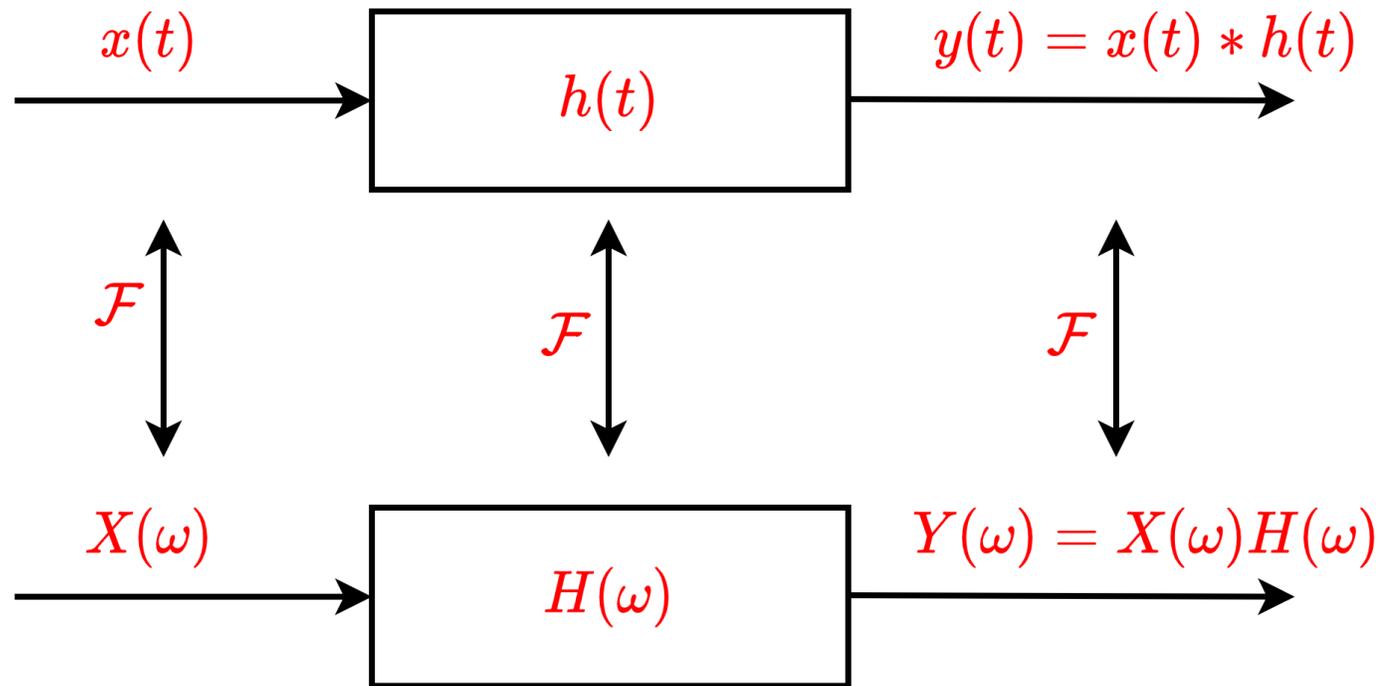
相频
特性

- 自动控制理论中定义的频率响应

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

- 严格来讲，二者不一致；考虑到 $H(s)$ 在虚轴无极点的情况（稳定情况）更为普遍，两种符号表示一致

连续时间 LTI 系统的时域、频域对应关系



- 系统的频率特性用极坐标图表示——奈奎斯特图 (Nyquist plot)
- 幅频、相频特性用对数坐标图表示——伯德图 (Bode plot)

例3-4: 已知描述某系统的微分方程为

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

求系统对输入信号 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 的响应。

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(\omega)$$

由 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ 得

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega + a}$$

$$\text{对比 } e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

解: 对微分方程两边取傅里叶变换, 由微分性质得 $j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega)$

系统的频率特性函数 $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{j\omega + 2}$, $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$

则系统响应 $y(t)$ 的傅里叶变换为

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

对 $Y(\omega)$ 取傅里叶反变换, 得

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$



$$y'(t) + 2y(t) = \lambda(t)$$

拉氏变换. $sY(s) + 2Y(s) = X(s)$, 其中 $X(s) = \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$

$$\text{故 } Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = (e^{-t} - e^{-2t}) \quad t \geq 0$$

线性系统的频率响应（离散系统）

考察单位脉冲响应为 $h(n)$ 的线性时不变系统对复指数序列 $x(n) = e^{j\Omega n}$ 的响应，由卷积和可得输出：

$$\begin{aligned}y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\Omega(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k} \right) \cdot e^{j\Omega n} \\ &= H(\Omega)\end{aligned}$$



对于任意离散信号 $x(n)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

利用系统的齐次性和叠加性

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) H(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) H(\Omega)$$

$x(n)$ 可看作是无穷多个不同频率的复指数信号分量的和

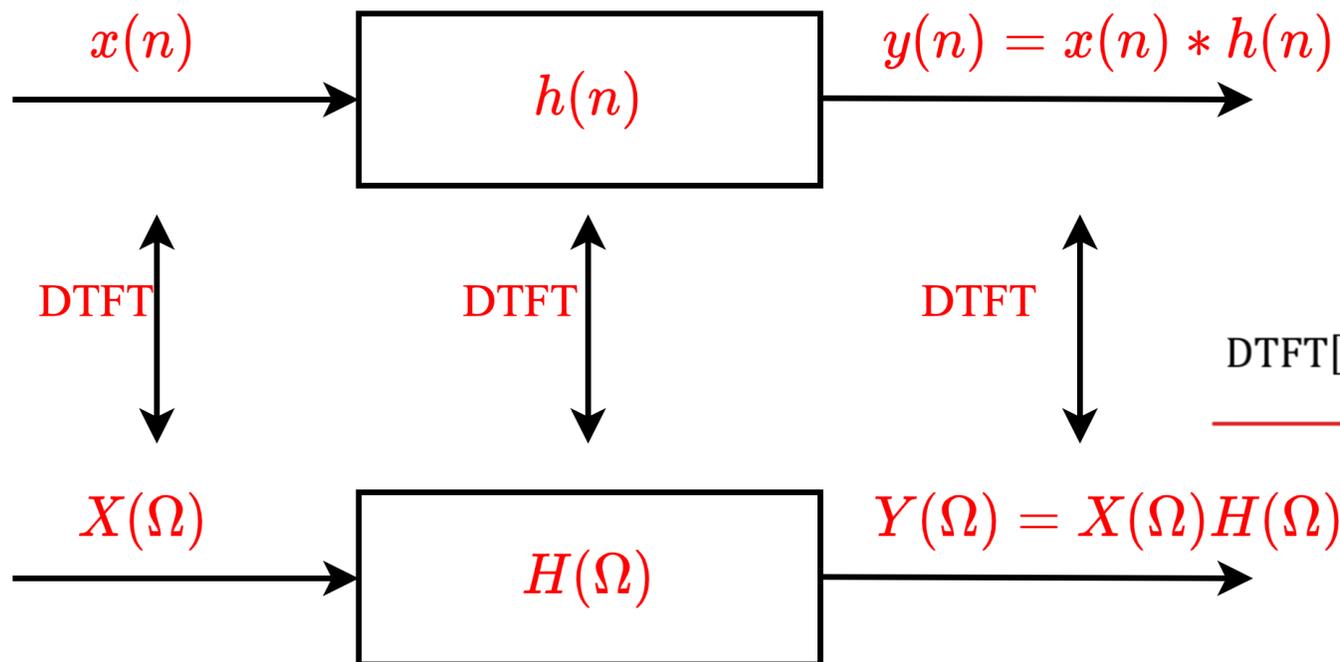
$$y(n) = x(n) * h(n)$$

DTFT 时域
卷积定理

$$Y(\Omega) = X(\Omega) H(\Omega)$$



离散时间 LTI 系统的时域、频域对应关系



离散时间傅里叶变换

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

离散时间系统频率特性 $H(\Omega)$

- $H(\Omega) = \text{DTFT}[h(n)] = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$
- $H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi)$, 是周期函数
- 若考虑模拟频率, 则周期为 ω_s
- $H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}$
 - 幅频特性 $|H(\Omega)|$
 - 相频特性 $\varphi(\Omega)$



☆时域平移	$x(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
时间翻转	$x(-n)$	$X(-\Omega)$
☆频域平移	$e^{j\Omega_0 n} x(n)$	$X(\Omega - \Omega_0)$

例3-5：求以下一阶系统的频率响应：

$$y(n] = a_1 y(n - 1) + x(n) \quad (0 < a_1 < 1)$$

解：由 DTFT 的时移性质，得 $Y(\Omega) = a_1 e^{-j\Omega} Y(\Omega) + X(\Omega)$ ，

则系统的频率响应为：
$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\Omega}}$$

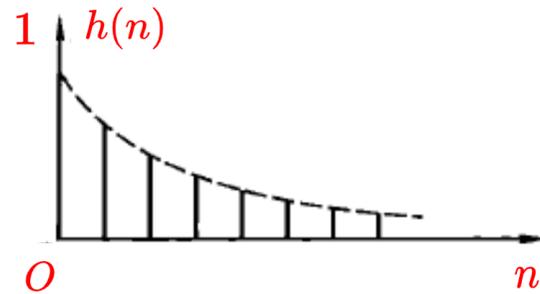
利用了例2-9的结论！

系统的单位样值响应为：
$$h(n) = a_1^n u(n)$$

由此，计算得到幅频特性为：
$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a_1 \cos \Omega)^2 + a_1^2 \sin^2 \Omega}}$$

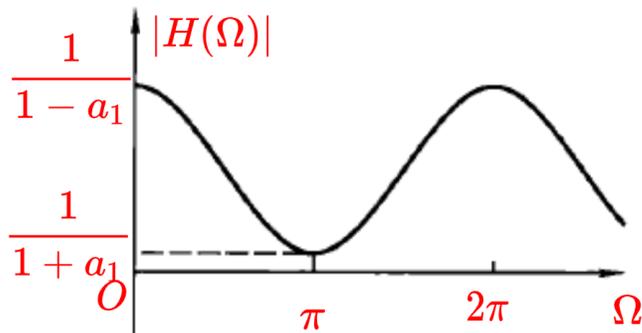
相频特性为：
$$\varphi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{a_1 \sin \Omega}{1 - a_1 \cos \Omega}\right)$$



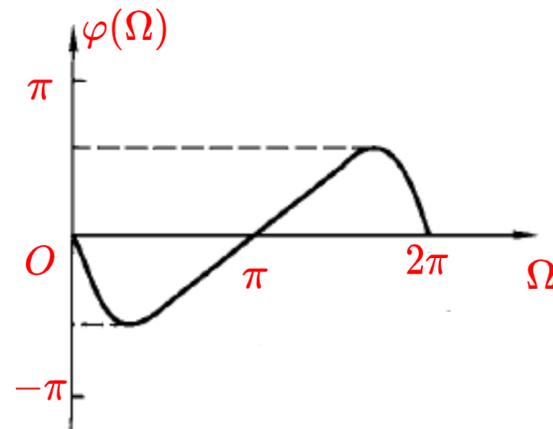


$$y(n] = a_1 y[n - 1] + x[n] \quad (0 < a_1 < 1)$$

$$|H(\Omega)] = \frac{1}{\sqrt{(1 - a_1 \cos \Omega)^2 + a_1^2 \sin^2 \Omega}}$$



$$(0 < a_1 < 1)$$



$$= \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \Omega}}$$

$$\cos \Omega \in [-1, 1]$$

无失真传输

- 信号无失真传输是实现信号可靠传送与交换的基本条件，它要求信号通过系统后，在时域上保持原来信号随时间变化的规律，即信号波形不变，而只能是幅度上对原信号按比例地放大或缩小，或者在时间上有一固定的延迟。

时域平移线性

- 设原信号为 $x(t)$ ，其频谱为 $X(\omega)$ ，经无失真传输后，输出信号 $y(t)$ 应为

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}X(\omega)$$



无失真传输系统的频率特性函数

$$Y(\omega) = K e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = K e^{-j\omega t_0} = |H(\omega)| e^{j\varphi_h(\omega)}$$

- 幅频特性 $|H(\omega)| = K$
 - 相频特性 $\varphi_h(\omega) = -\omega t_0$
- 无失真传输系统的频域条件

线性相位

谐波相移必须与其频率成正比



无失真传输图示

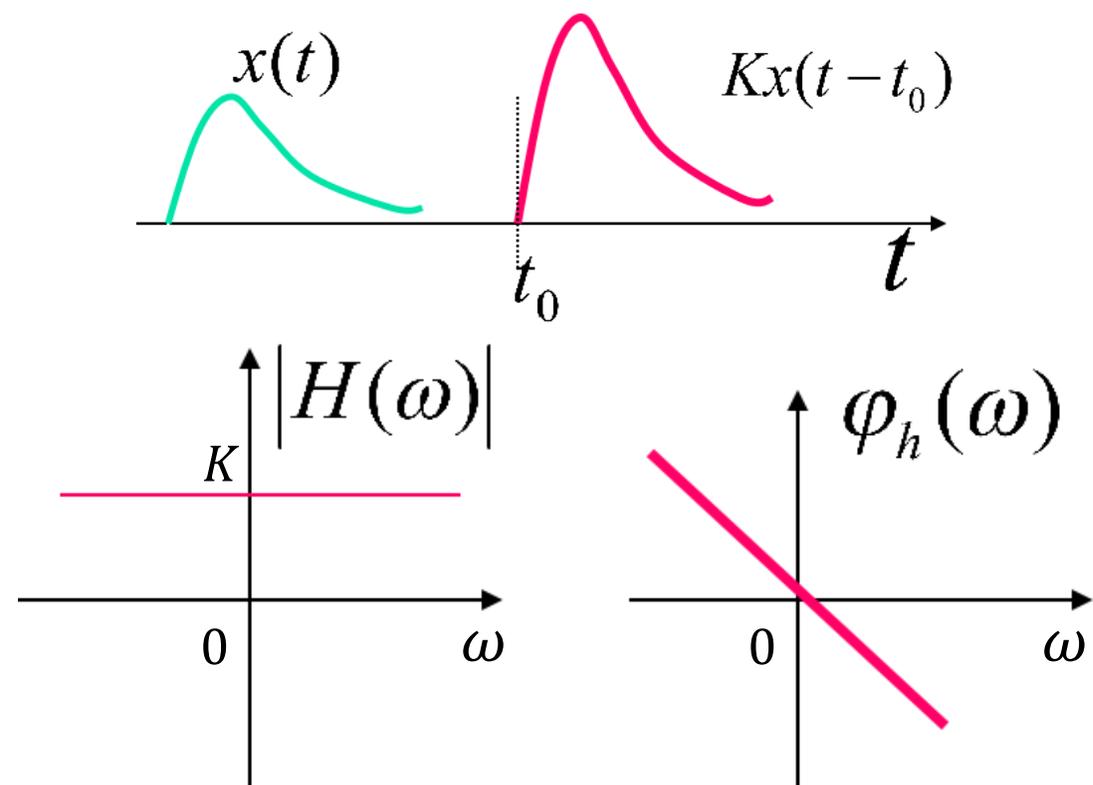
$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} = |H(\omega)|e^{j\varphi_h(\omega)}$$

- 系统幅频特性为常数，幅度不失真
- 信号放大、时延，波形不失真
- 线性相位，波形不失真

$$Y(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

幅频特性 $|H(\omega)| = K$

相频特性 $\varphi_h(\omega) = -\omega t_0$



无失真传输的频域条件

- 系统的幅频特性是一个与频率无关的常数，即在全部频带内，系统都具有恒定的放大倍数
- 系统的相频特性与频率呈线性关系。信号通过系统的延迟时间 t_0 就是系统相频特性 $\varphi_h(\omega)$ 的斜率的负值，即

$$\varphi_h(\omega) = -\omega t_0, \quad t_0 = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega} \quad (\text{群延时/群时延})$$

-一般是正的

- 实际中为了便于测量，常定义 $\tau = \left| \frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega} \right| > 0$ 间接表示群延时

$$\tau = |t_0| > 0$$

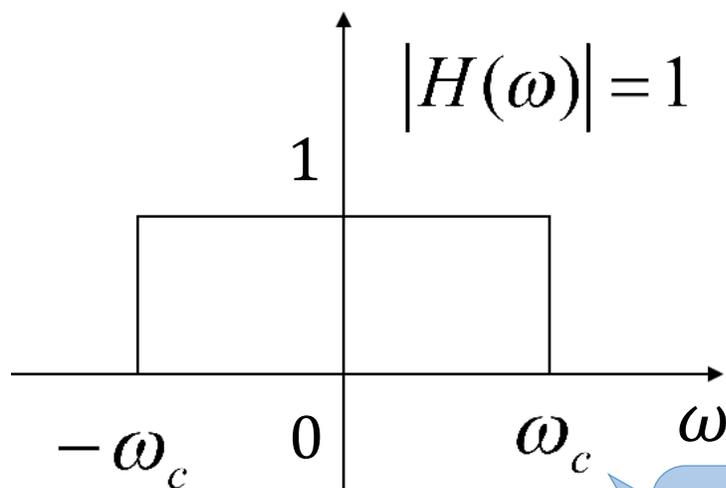


理想低通滤波器

• 频率特性

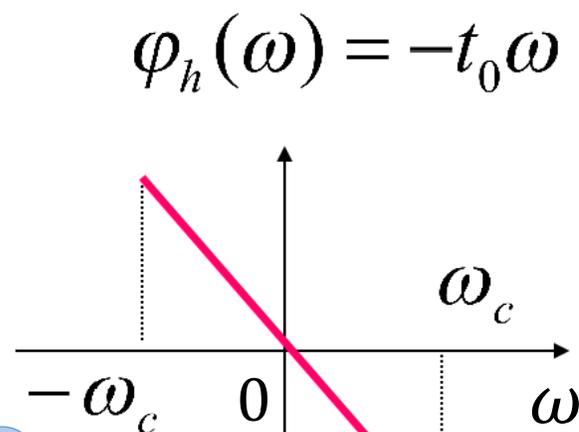
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

等幅
线性相位
截止频率



理想低通滤波器的幅频特性

滤波器的截止频率



理想低通滤波器的相频特性

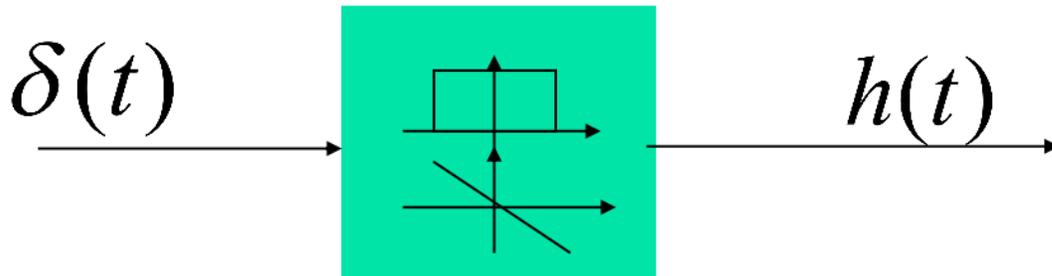
滤波器的通带
 $0 < |\omega| < \omega_c$
 滤波器的阻带
 $|\omega| > \omega_c$

理想低通滤波器——非因果系统，物理上不可实现



理想低通滤波器的冲激响应

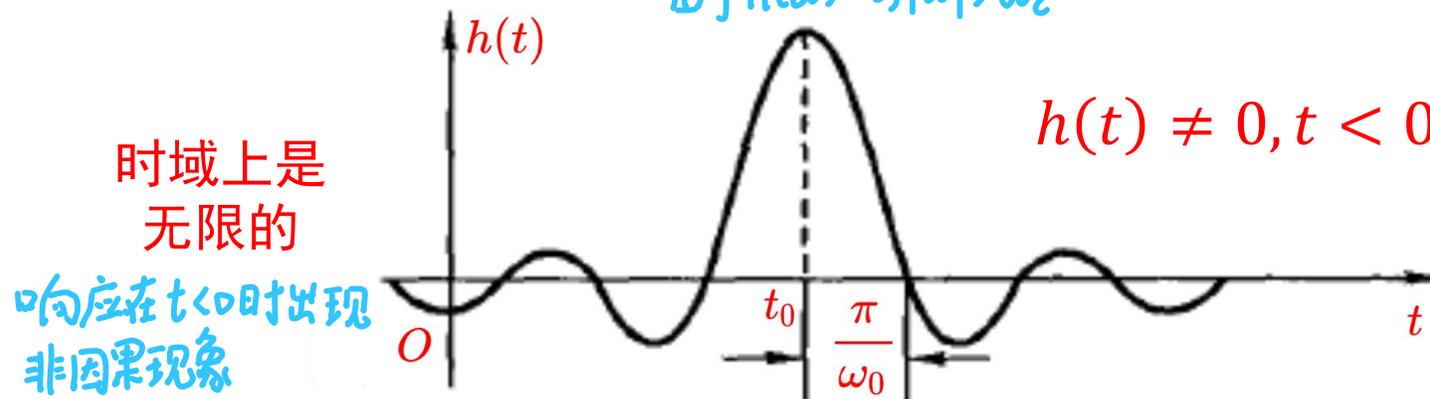
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



- 响应在 t 为负值时已经出现
- 实际上不可能构成理想特性的网络

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

由于 $H(\omega)=0, |\omega|>\omega_c$



理想低通滤波器是非因果系统，物理上不可实现！

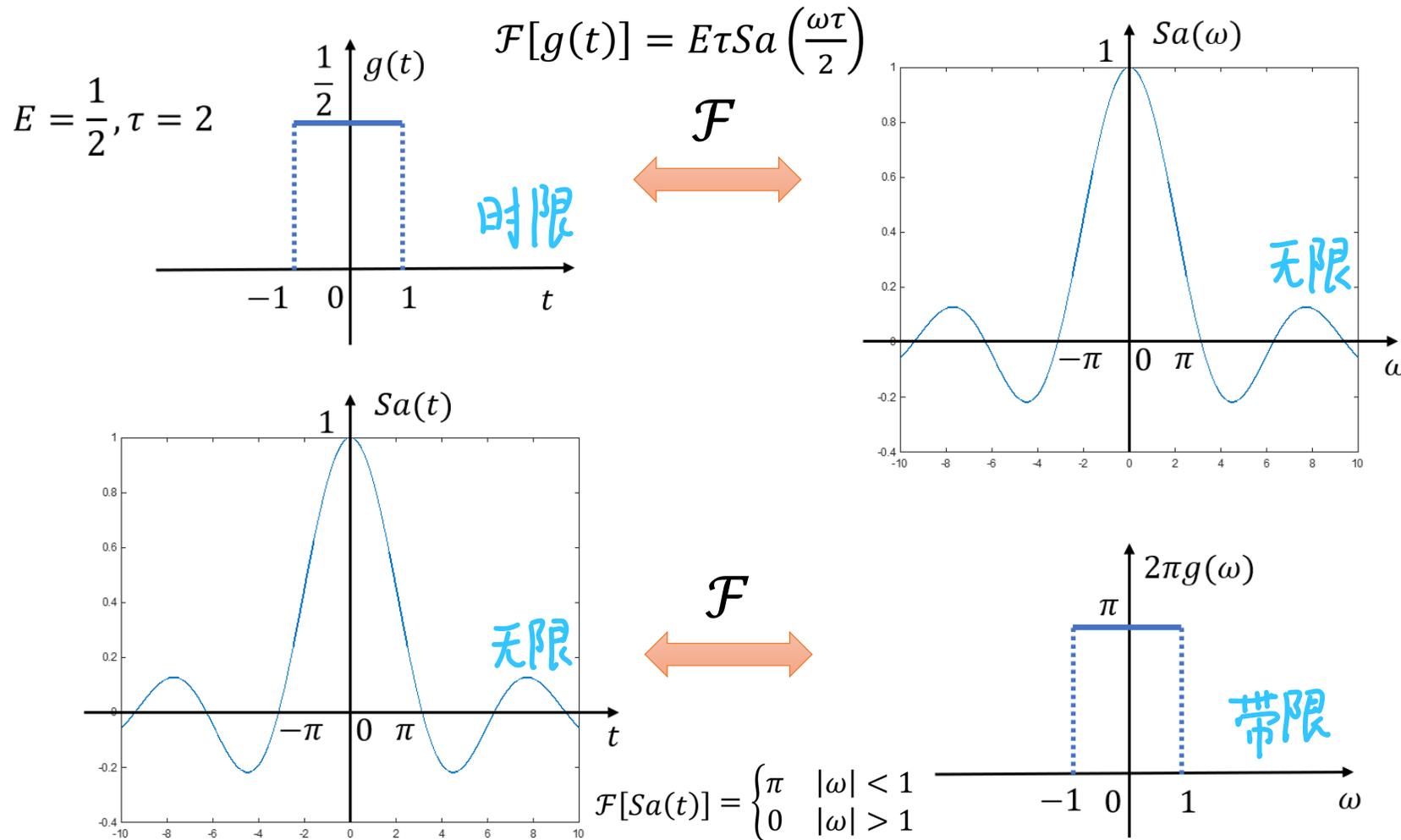
$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin \theta$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

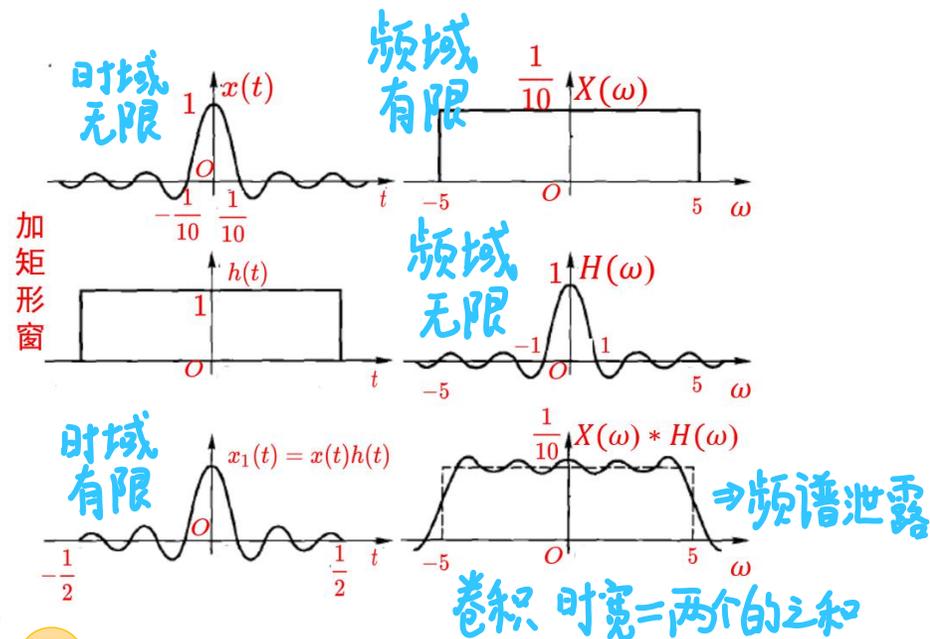
$$\begin{aligned} h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2j\pi(t-t_0)} e^{j(t-t_0)\omega} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{1}{2j\pi(t-t_0)} [e^{j(t-t_0)\omega_c} - e^{-j(t-t_0)\omega_c}] = \frac{2j \sin[(t-t_0)\omega_c]}{2j\pi(t-t_0)} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[(t-t_0)\omega_c] \end{aligned}$$

思考：时（频）域上的有限对应频（时）域的无限？



思考：时（频）域上的有限对应频（时）域的无限？

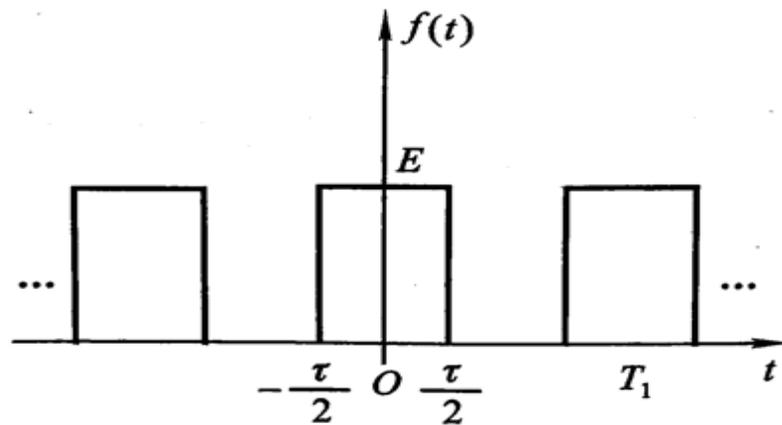
- 若信号时域有限，则在频域上无限
 - 时域上无限的信号可以通过加窗，变成时域有限的信号
 - 频域卷积：导致在频域上的无限扩展
- 若信号频域有限，则在时域上无限
 - 相当于信号在频域上加窗的结果
 - 时域卷积：导致在时域上的无限扩展



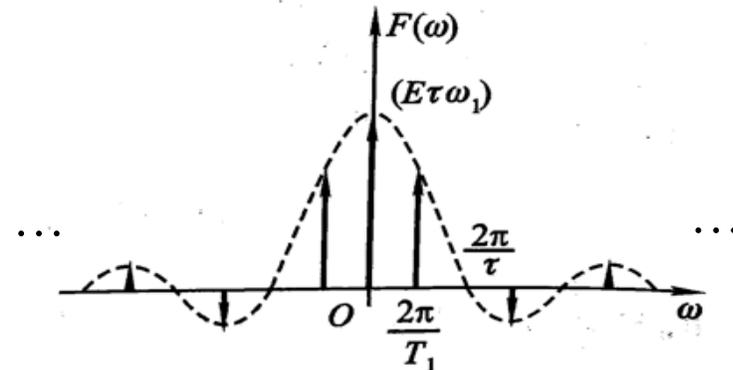
信号在一个域上有限
 \Rightarrow
 在另一个域上无限

信号在一个域上无限 \Rightarrow 另一个域上有限

- 若信号时域无限，在频域上不一定有限
- 例：周期矩形脉冲信号在时域、频域上都是无限的



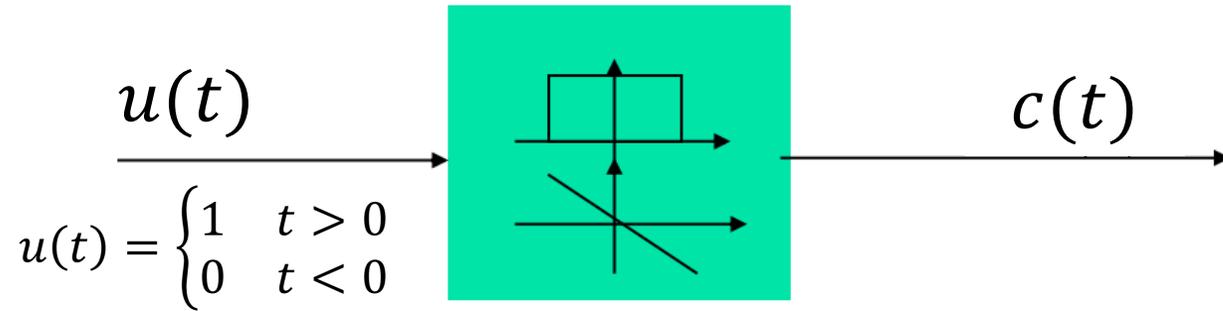
$$F(\omega) = E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$



$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

理想低通的阶跃响应 $c(t)$

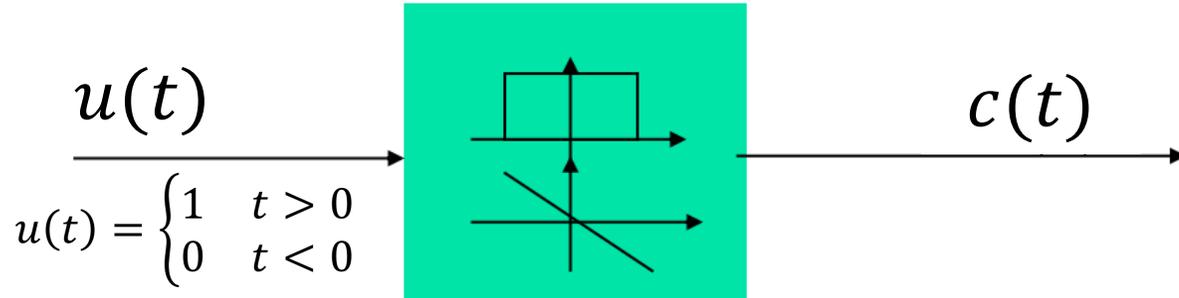
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



$$C(\omega) = \mathcal{F}[u(t)] \cdot H(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0} \quad (-\omega_c < \omega < \omega_c)$$

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{F}^{-1}[C(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \delta(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega \end{aligned}$$

理想低通的阶跃响应 $c(t)$



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\delta(\omega)f(\omega) = \delta(\omega)f(0)$$

$$c(t) = \frac{1}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \delta(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega$$

(欧拉公式)

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega$$

(奇函数, 积分为0)

积分换元
 $x = \omega(t - t_0)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_0)]$$

正弦积分函数

$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$$

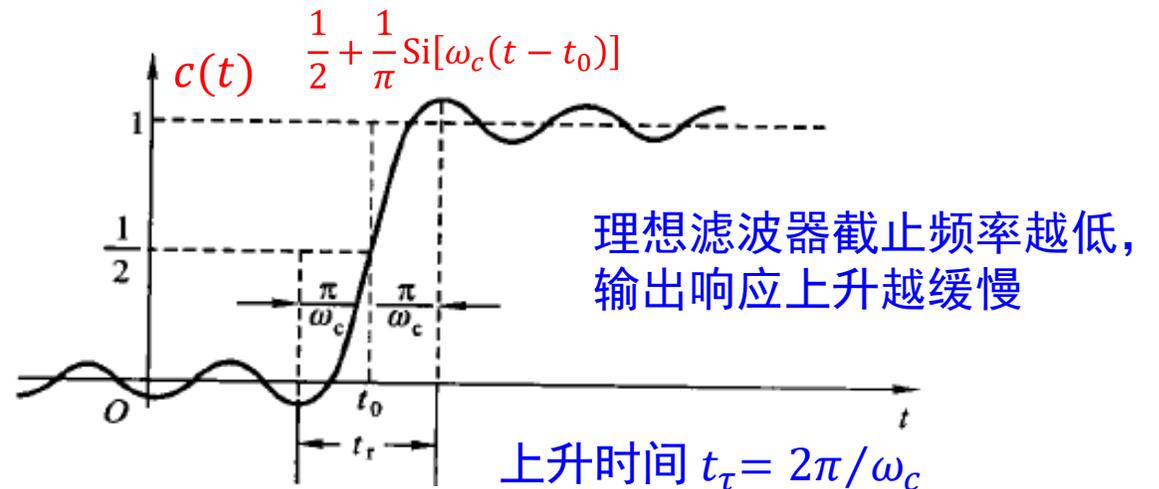
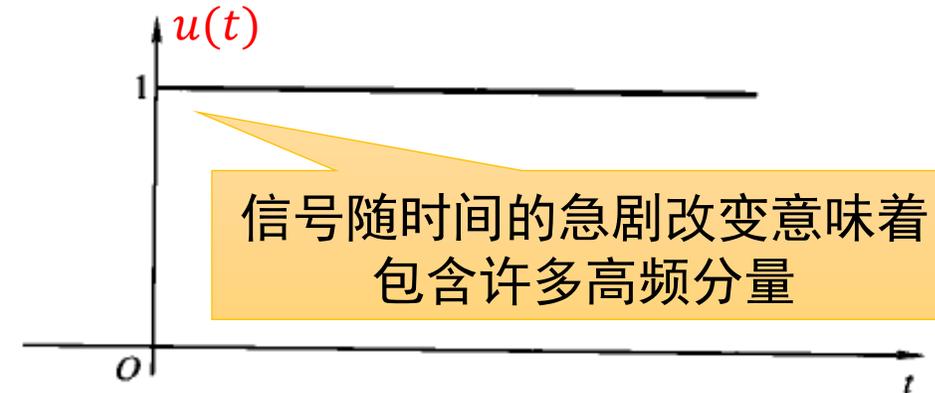
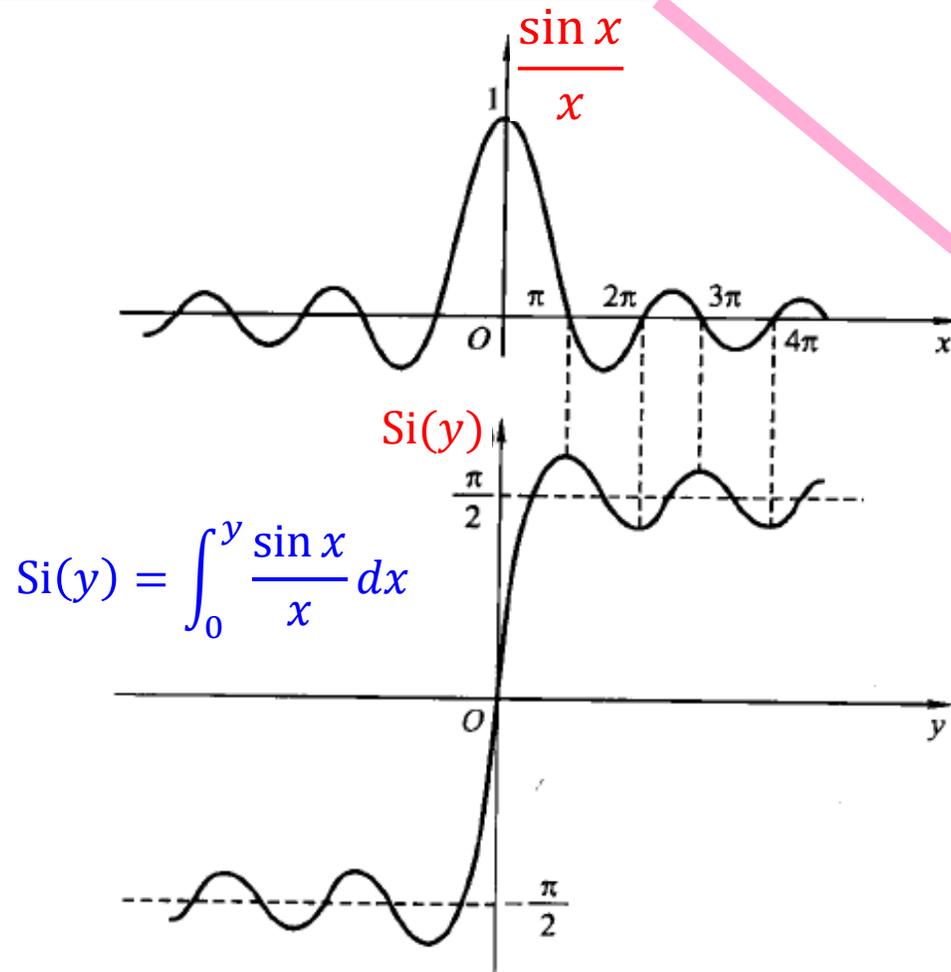
注: $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$



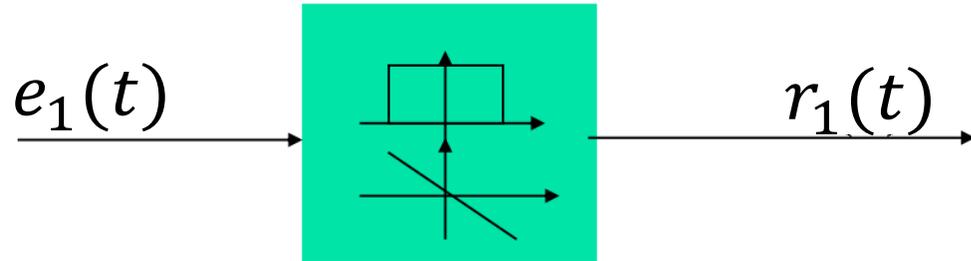
求 $\frac{1}{s}$: 由 $h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$ 知。

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(\tau-t_0)] d\tau = \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{1}{\pi} \text{Sa}(u) du = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \text{Sa}(u) du \right] \\ &= \frac{1}{2} + \text{Si}[\omega_c(t-t_0)] \end{aligned}$$

- 低通滤波器滤除了一些高频分量，不连续点在输出将被圆滑，产生渐变
- **阶跃响应的上升时间与低通滤波器（系统）的截止频率（带宽）成反比**



理想低通对矩形脉冲的阶跃响应

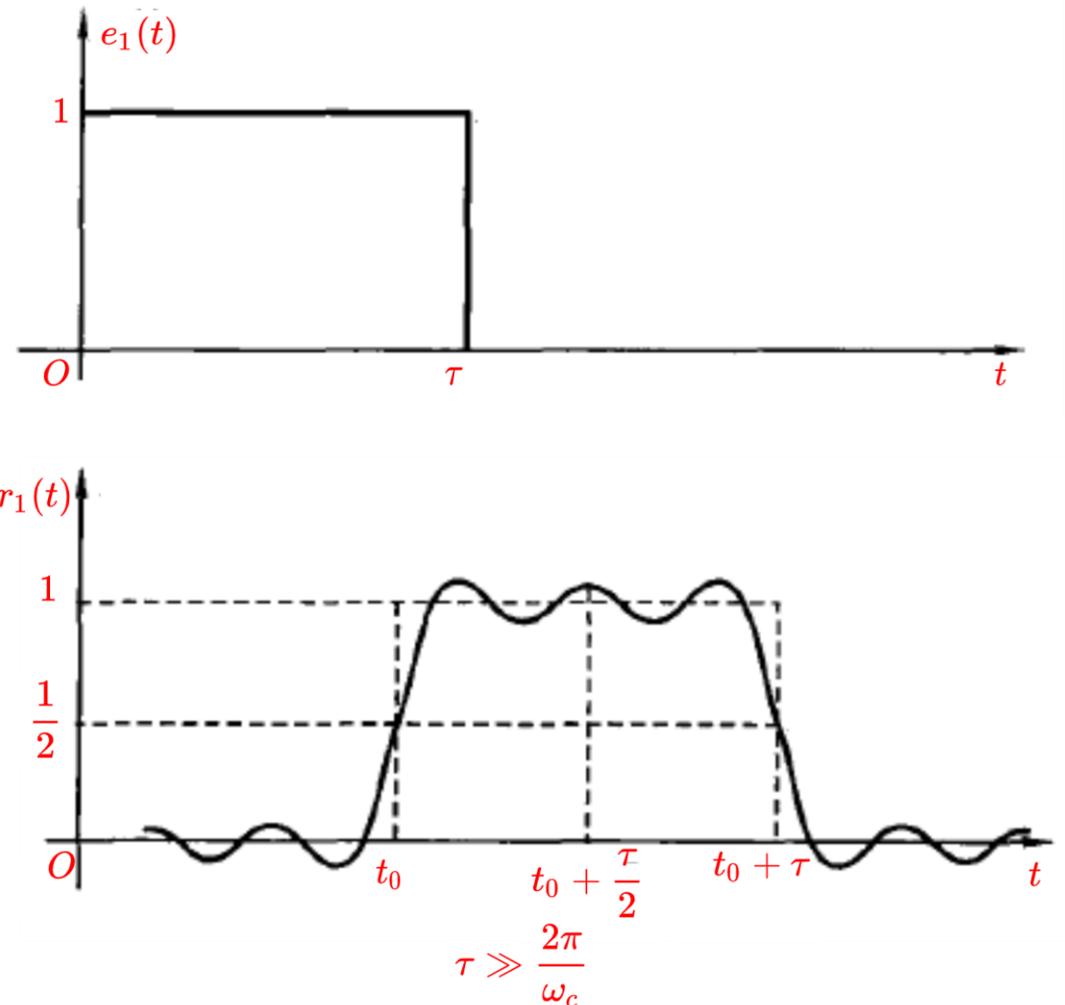


$$e_1(t) = u(t) - u(t - \tau) \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

借助叠加定理求解

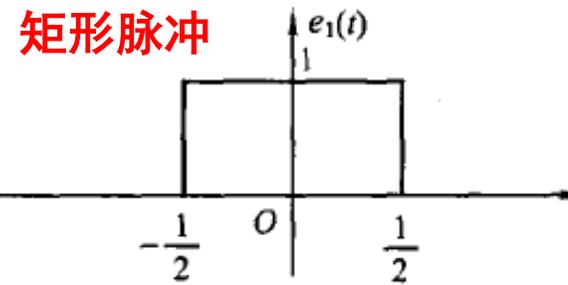
$$r_1(t) = \frac{1}{\pi} \{ \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] - \text{Si}[\omega_c(t - t_0 - \tau)] \}$$

矩形脉冲经理想低通传输时，必须使脉宽 τ 与滤波器的截止频率 ω_c 相适应，才能得到大体上为矩形的响应。

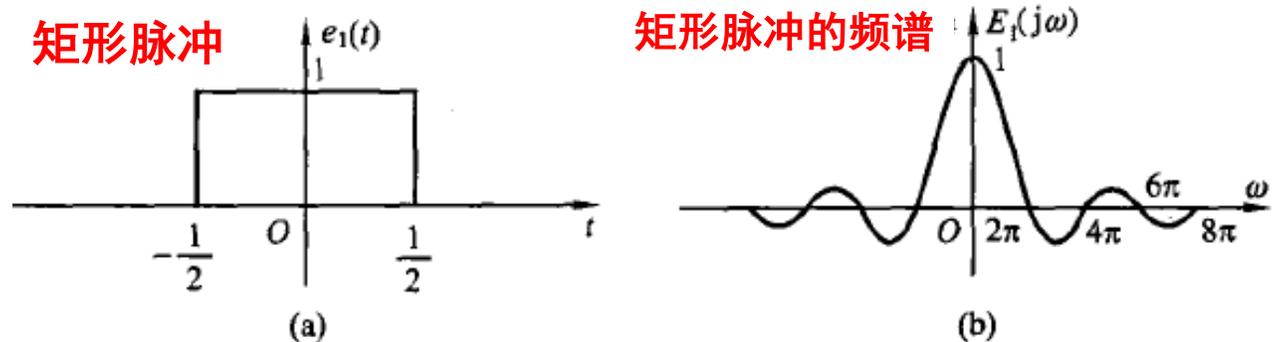


解释吉布斯现象

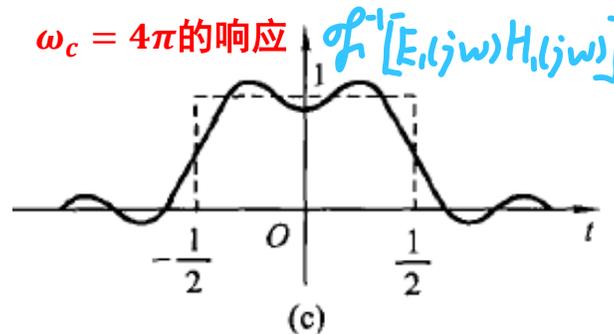
- 利用矩形窗函数滤取信号频谱时，在时域的不连续点出现上冲
- 加大理想低通滤波器的带宽，允许激励信号的更多高频成分通过，于是响应波形改善，但是在跳变点的上冲逼近9%
- 增大 ω_c 可以减小阶跃响应的上升时间，但不能改变9%上冲的强度



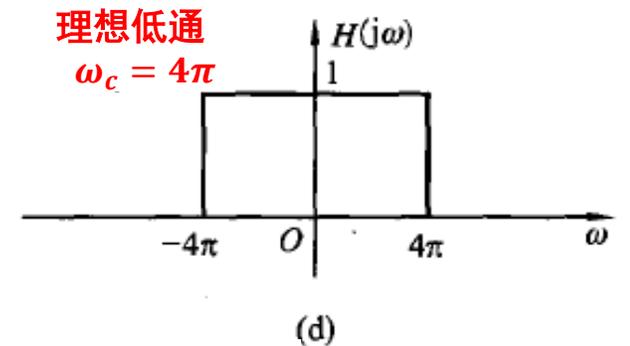
(a)



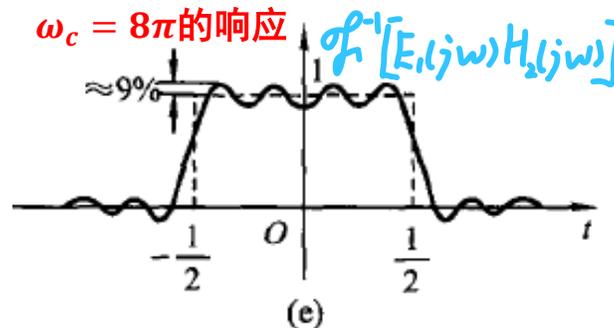
(b)



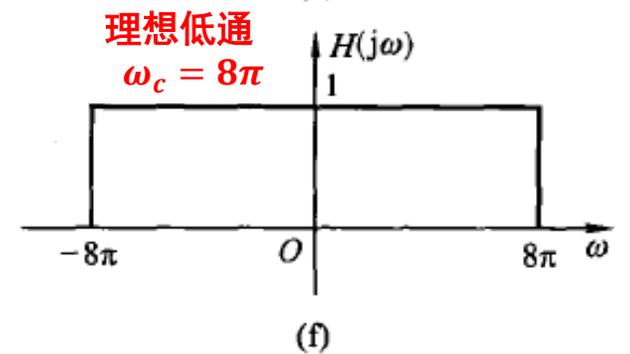
(c)



(d)



(e)



(f)

例3-6: 求信号 $x(t) = Sa(t) \cos(2t)$ 通过理想低通滤波器 (设通带内的放大倍数为 K) 后的输出响应。

可以看作 $Sa(t)$ 对载波信号 $\cos(2t)$ 的调制

门函数 $\rightarrow \text{ET } Sa(\frac{\omega}{2})$
 $Sa(t) \rightarrow \begin{cases} \pi & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases} = \pi g(\omega)$
 $\cos(2t) \rightarrow \pi \delta(\omega - 2) + \pi \delta(\omega + 2)$

解: 输入信号的傅里叶变换

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\cos(2t)] * \mathcal{F}[Sa(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi [g(\omega) * \pi \delta(\omega - 2) + g(\omega) * \pi \delta(\omega + 2)]$$

频域卷积定理

$$x(t) = Sa(t) \cos(2t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{\pi}{2} [g(\omega + 2) + g(\omega - 2)]$$

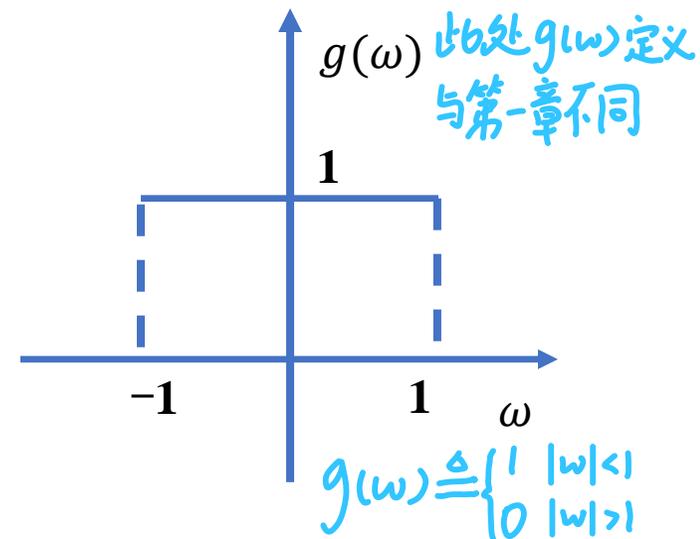
$$f_1(t)f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

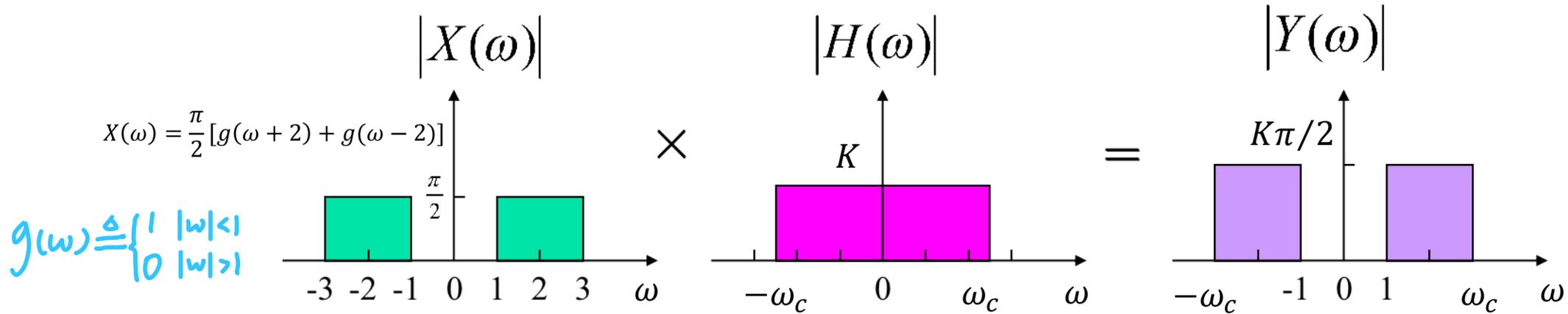
由滤波器频率响应函数

$$H(\omega) = \begin{cases} K e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

可知滤波器输出信号的频谱为

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$





分三种情况：
滤波器的通带
 $0 < |\omega| < \omega_c$

1) $\omega_c \geq 3$ (输入信号的频带完全被包含在低通滤波器的通带内)

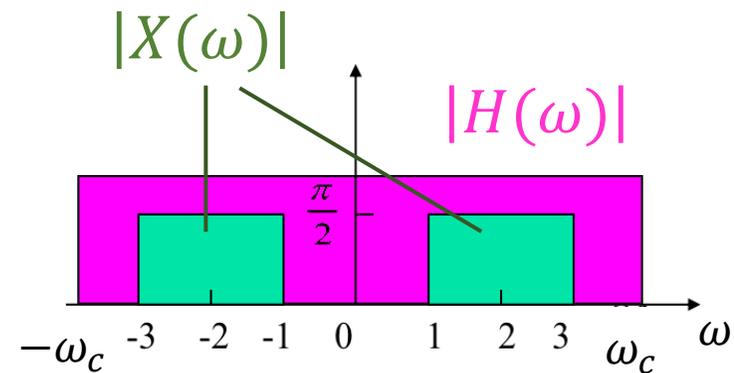
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$Y(\omega) = \frac{K\pi}{2} [g(\omega + 2) + g(\omega - 2)] e^{-j\omega t_0}$$

即 $|Y(\omega)| = K|X(\omega)|$

$y(t) = Kx(t - t_0) = KSa(t - t_0) \cos[2(t - t_0)]$

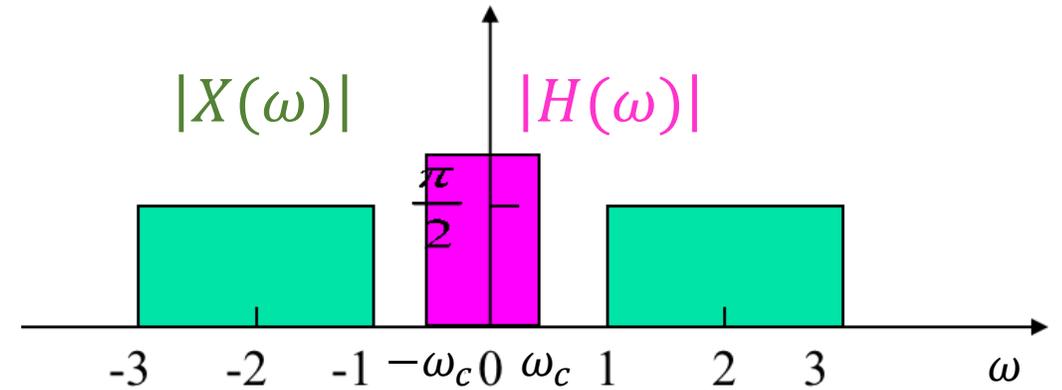
这种情况下,为无失真传输



2) $\omega_c \leq 1$ (输入信号频带完全落在低通滤波器的通带外)

$$Y(\omega) = 0, \quad y(t) = 0$$

此时，系统无输出！



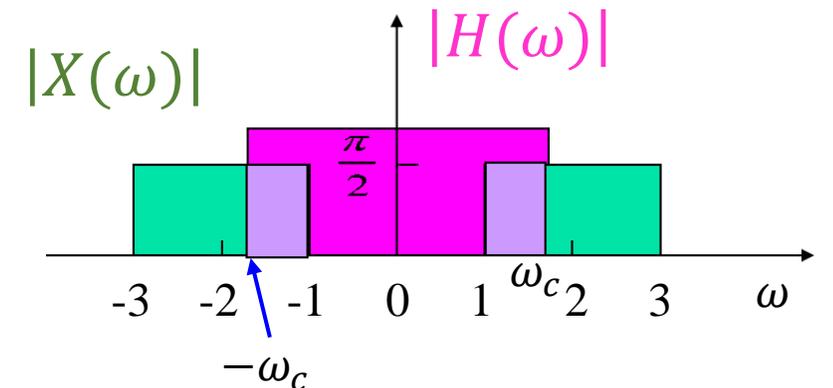
3) $1 < \omega_c < 3$ (输入信号的频带部分落在低通滤波器的通带内)

$$H(\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

可以把不考虑放大及时延的输出看成 $Y_1(\omega)$ ，则

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) \cdot H(\omega)$$

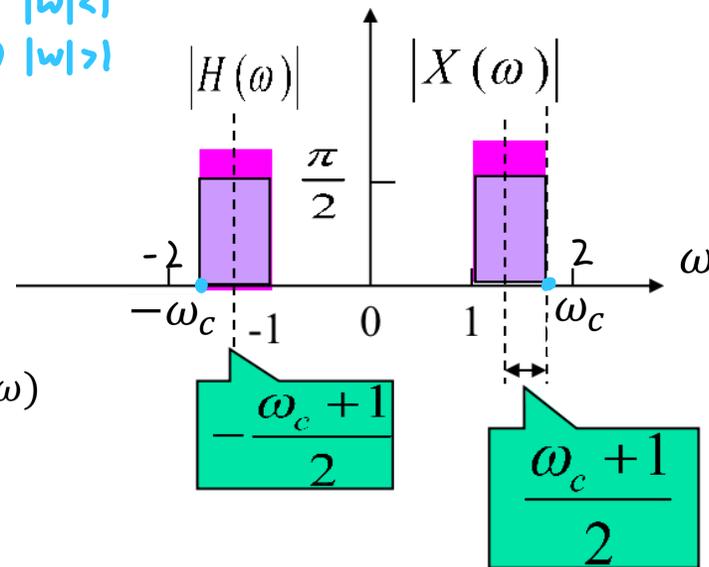
相当于对 $y_1(t)$ 进行无失真传输，目标为求 $y_1(t)$



$$Y_1(\omega) = \frac{\pi}{2} \left\{ g_1 \left(\omega + \frac{\omega_c + 1}{2} \right) + g_1 \left(\omega - \frac{\omega_c + 1}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ g_1(\omega) * \left[\delta \left(\omega + \frac{\omega_c + 1}{2} \right) + \delta \left(\omega - \frac{\omega_c + 1}{2} \right) \right] \right\}$$

$$g(\omega) \triangleq \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$



两个矩形中心点

其中, **小矩形** $g_1(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\omega_c - 1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_c - 1}{2} \end{cases}$

由频域卷积定理, 得 $f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

$$y_1(t) = \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \mathcal{F}^{-1}[g_1(\omega)] \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[\delta \left(\omega + \frac{\omega_c + 1}{2} \right) + \delta \left(\omega - \frac{\omega_c + 1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\omega_c - 1}{2} \text{Sa} \left(\frac{\omega_c - 1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_c + 1}{2} t \right)$$

(利用傅里叶变换时移性质)

又 $Y(\omega) = KY_1(\omega)e^{-j\omega t_0}, |\omega| < \omega_c$
 相当于对 $y_1(t)$ 进行失真传输

输出响应为 $y(t) = \frac{K(\omega_c - 1)}{2} \text{Sa} \left[\frac{\omega_c - 1}{2} (t - t_0) \right] \cos \left[\frac{\omega_c + 1}{2} (t - t_0) \right], \quad -\infty < t < \infty$