2024年秋季学期

信号分析与处理

第四章 滤波器

授课教师：谢晓晨

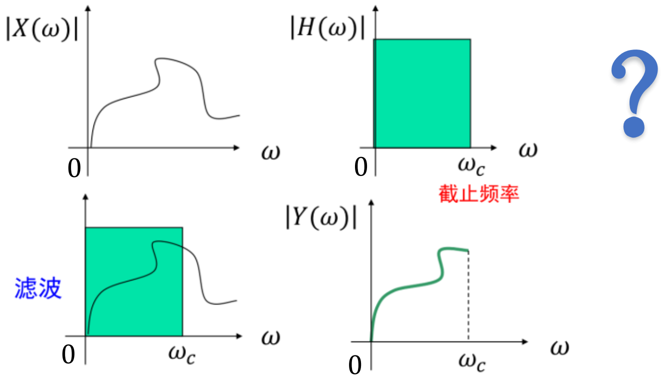
哈尔滨工业大学深圳校区

机电工程与自动化学院

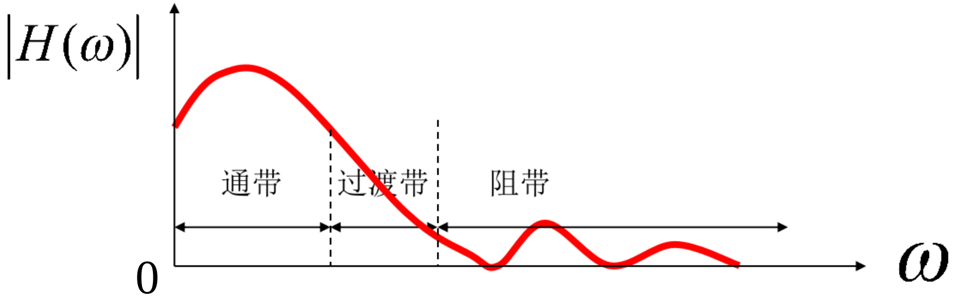
滤波的概念

- 传统：消除或减弱干扰噪声，提取有用信号的过程（滤除噪声）
- 现代：从原始信号中获取目标信息的过程（信号波形检测，参数估计等）
- 滤波的原理：根据有用信号与噪声信号的不同特性，实现二者的
- 滤波器：实现滤波功能的系统，是一种具有一定传输特性的信号处理装置
- 从系统的角度看，滤波器是在时域具有冲激响应$h(t)$或脉冲响应$h(n)$的可实现的线性时不变系统

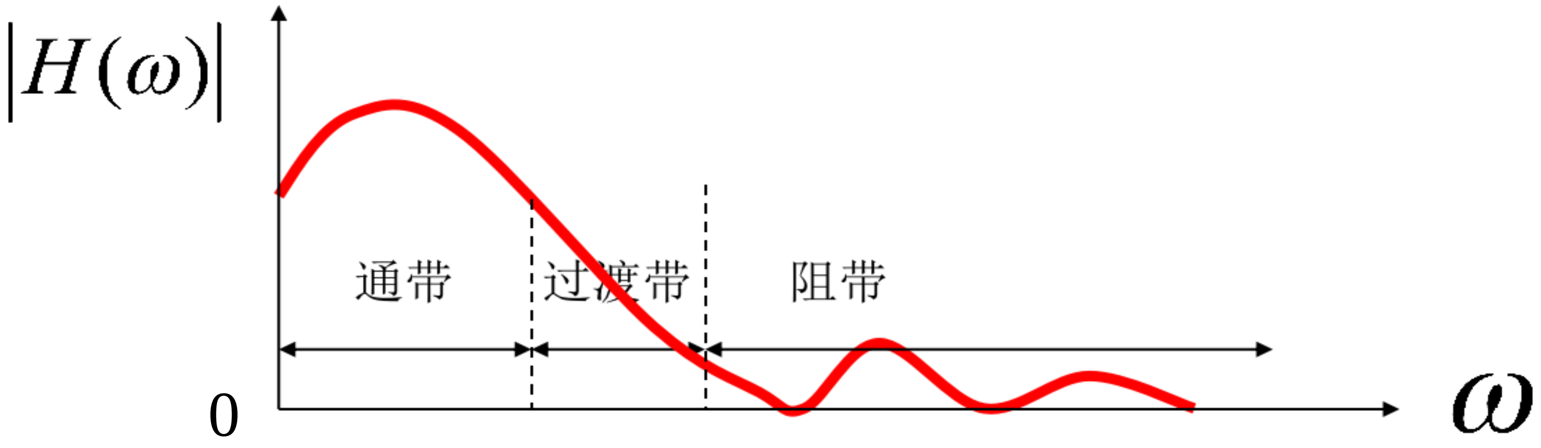
滤波器的技术要求



- 滤波器的物理可实现性
  - 理想低通滤波器是非因果的，物理不可实现；其矩形幅频特性亦如此，实际中不能实现从一个频带到另一个频带之间的突变
  - 允许滤波器的幅频特性在通带和阻带有一定的衰减范围，且幅频特性在这一范围内允许有起伏
  - 在通带和阻带之间有一定的过渡带



滤波器的技术要求



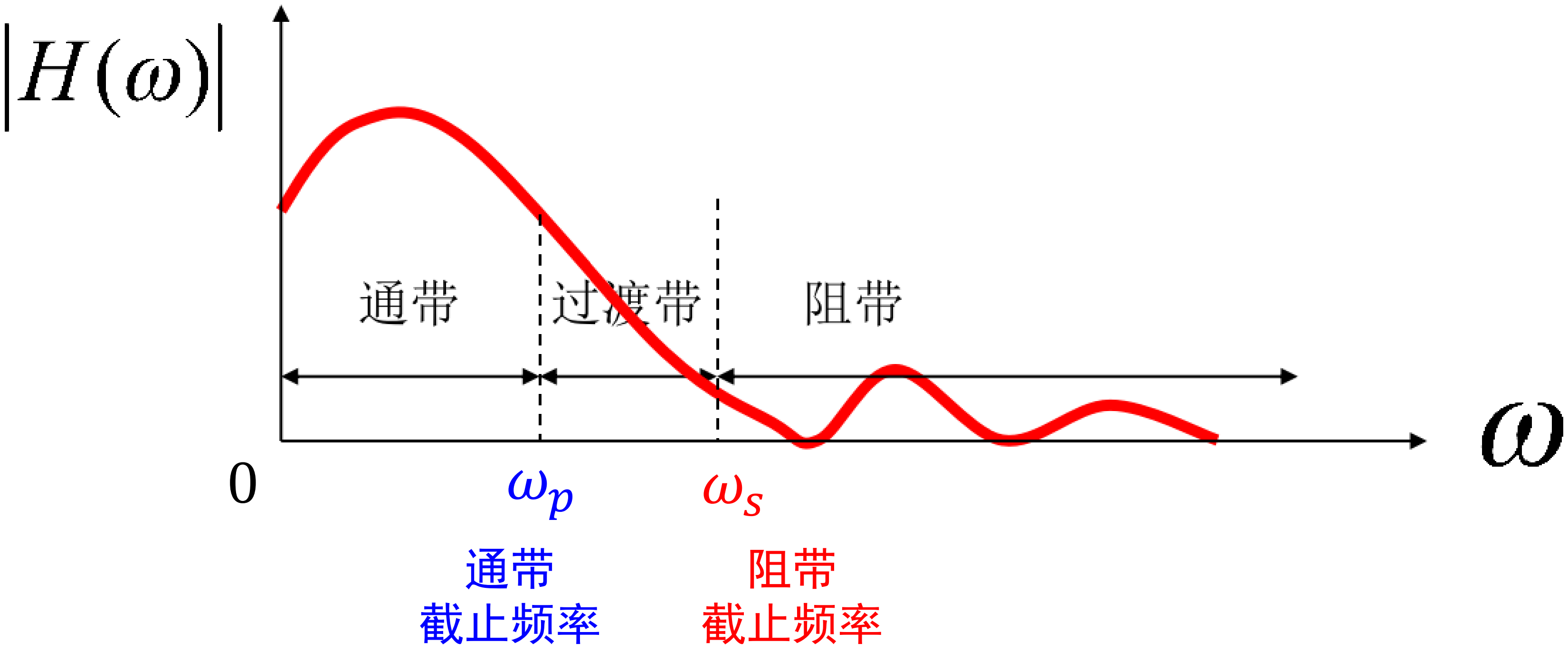
- 信号以很小的衰减通过滤波器的频率范围称为滤波器的“通频带”，简称通带
- 阻止信号通过滤波器的频率范围称为滤波器的“阻频带”，简称阻带
- 过渡带即为通带与阻带之间的频率范围

滤波器的技术指标

（1） 中心频率：滤波器通带、阻带截止频率的几何平均值

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_p \cdot \omega_s}$$

对应对数坐标下的算术平均值



滤波器的技术指标

（2）通带波动Δ_α：在滤波器的通带内，频率特性曲线的最大峰值与谷值之差

（3）相移ϕ：某一特定频率的信号通过滤波器时，其在滤波器的输入和输出端的相位之差。

（4）群延迟τ_g：又称为“包络延迟”，用相移ϕ对于频率的变化率来衡量，即

$$\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

对于实际的滤波器，$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$通常为负值，因而$\tau_g$通常为正值。

滤波器的技术指标

|H(0)|假定已被归一化为1

（5）衰减函数α：又称衰耗特性或工作损耗，单位是分贝（dB）

$$\alpha = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20\lg|H(\omega)| = -10\lg|H(\omega)|^2$$

- 通带衰减函数：

$$\alpha_p = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega_p)|} = -20\lg|H(\omega_p)|$$

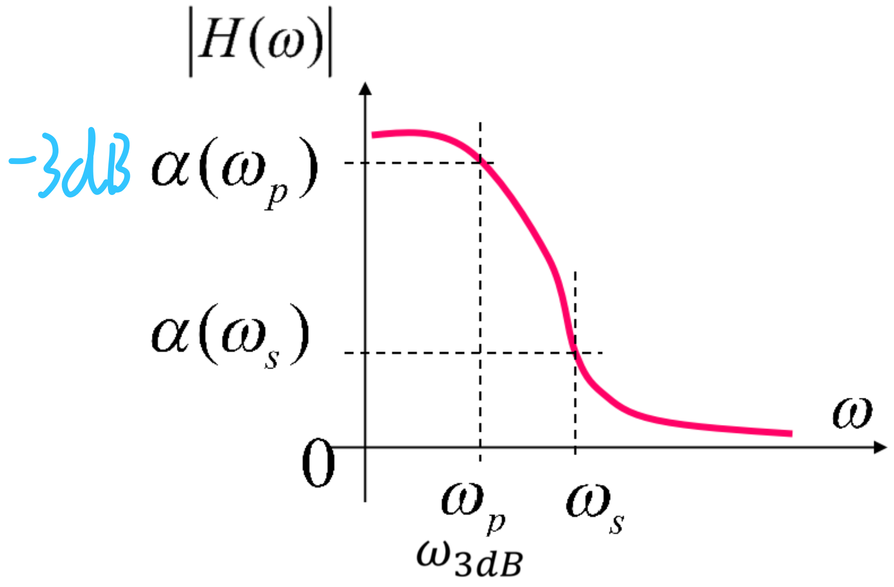
通带截止频率

- 阻带衰减函数：

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega_s)|} = -20\lg|H(\omega_s)|$$

阻带截止频率

滤波器的技术指标



$\alpha(\omega_p)$ 通带最大衰减

$\alpha(\omega_s)$ 阻带最小衰减

ω_p 通带截止频率

ω_s 阻带截止频率

工程上，设计低通滤波器时，通常取幅值下降 3dB 时所对应的频率值ω_{3dB}作为通带截止频率，即

$$\omega_p = \omega_{3dB}$$

此时，$\alpha_p = 3\ \mathrm{dB}$

滤波器的技术指标

- 通常认为，当信号的功率谱密度$|H(\omega)|^2$降到它峰值的一半时，频率谐波对整体的影响就可以忽略。
- 对于频率特性为$H(\omega)$的**因果滤波器**，设$|H(\omega)|$峰值为 1，则半功率点对应 $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$，即：

归一化后进行讨论

$$20\lg|H(\omega)| = 10\lg|H(\omega)|^2 = 10\lg\frac{1}{2} = 20\lg\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\ \mathrm{dB}$$

- 此时通带即是 $|H(\omega)|$ 从 0dB 的峰值点下降到不小于 −3dB 的频率 ω 的集合

（注意：“一半”是以功率角度来定义的！）

课程内容

4.1 滤波器概述

4.2 模拟滤波器

$s = j\omega$

模拟滤波器的设计：保持稳定性，用$-s^2$代替 $|H(\omega)|^2$的ω^2，均分$H(s)H(-s)$零极点（注意是否最小相位）

4.2.1 模拟滤波器概述

4.2.2 巴特沃思低通滤波器

4.3 数字滤波器

模拟滤波器概述

- 模拟滤波器是用模拟系统处理模拟信号或连续时间信号的滤波器，是一种选择频率的装置，故又称为频率选择滤波器
- 系统（网络）分析：给定系统的结构及其参数，求激励作用下系统的响应
- 系统（网络）综合：给出激励信号与响应，求满足此要求的具体的系统（网络）结构及其参数
- 综合方法（“插入衰减法”或“工作参数法”）
  - 第一步：根据给定的频率响应特性，寻求一种可实现的有理函数$H(s)$，使其满足设计要求，称为“逼近（approximation）”重点
  - 第二步：由选定的$H(s)$实现二端口网络（即所需滤波器）的电路结构和参数值
    不要求

设计模拟滤波器的方法 (综合设计法)

- 第一步：根据给定的频率响应特性寻求一种可实现的有理函数$H(s)$，即模拟滤波器的系统函数（传递函数）
  - 逼近：根据给定的性能指标——通带和阻带的工作损耗，如通带衰减 α_p 、阻带衰减α_s，根据频率特性的幅度平方函数$|H(\omega)|^2$ 求系统函数$H(s)$
  - 可以选定若干种典型的 $H(s)$ 来逼近理想滤波器（巴特沃思滤波器，切比雪夫滤波器等）

X 不要求

非重点 • 第二步：由选定的 $H(s)$ 实现二端口网络（滤波器）电路结构和参数值

思路：频率特性模平方$|H(\omega)|^2 \rightarrow$ 系统函数 $H(s)$

$|H(\omega)|^2\big|_{j\omega=s} = H(s)H(-s)$

- 如不考虑有源器件，待求的模拟滤波器系统函数 $H(s)$ 应满足：
  - 稳定性——模拟滤波器应当是稳定的时不变系统（有传递函数）
  - 是一个具有实系数的s有理函数，极点分布在s左半平面⇒保证可以进行$s=j\omega$代换
  - 分子多项式的阶次不大于分母多项式的阶次——符合实际系统的因果性
  - $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$是 t 的实函数

单位冲激响应

$$H(\omega) = H(j\omega) = H^*(-j\omega)$$

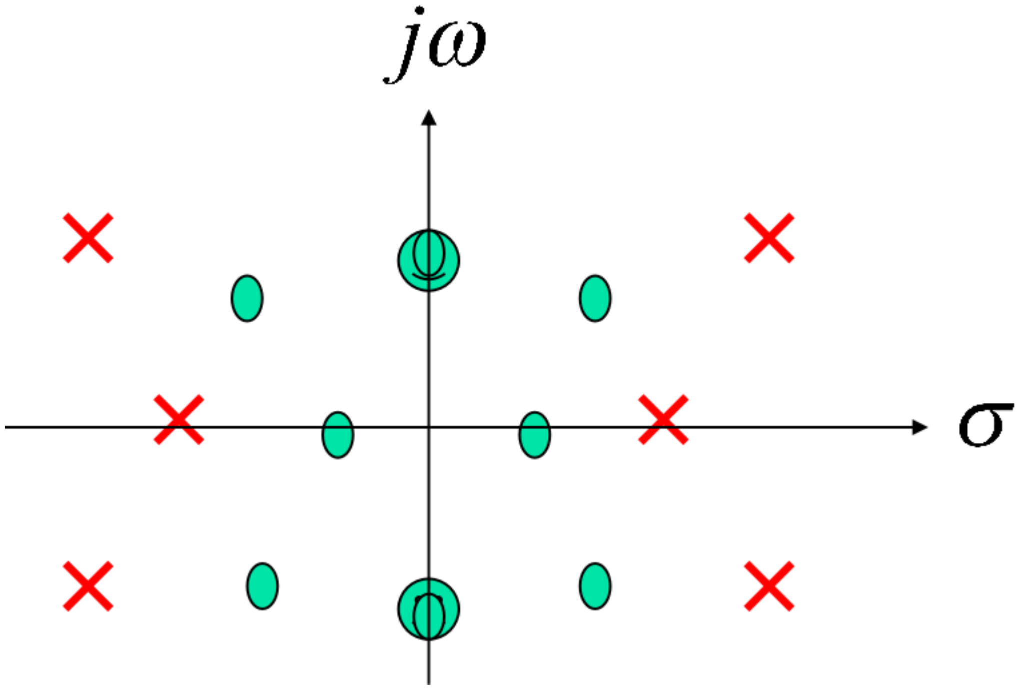
共轭对称性！

$$|H(j\omega)|^2\bigg|_{j\omega=s} = H(j\omega)H(-j\omega)\bigg|_{j\omega=s} = H(s)H(-s)$$

复数的性质 $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

零极点对称分布

$$|H(j\omega)|^2\Big|_{j\omega=s} = H(j\omega)H(-j\omega)\Big|_{j\omega=s} = H(s)H(-s)$$



零点、极点对称分布！

这些零点、极点中：

- 有一半属于$H(s)$
- 另一半属于$H(-s)$

相关概念及方法

- 根据$H(s)$的可实现条件和$H(s)$，$H(-s)$的零、极点分布，将给定的幅度平方函数以$-s^2$代替ω^2，确定$H(s)$与$H(-s)$的零、极点

  $s=j\omega$

  - $H(s)$的极点必须位于s的左半平面，$H(-s)$的极点必须位于s的右半平面
  - 零点选取取决于所设计滤波器**是否为最小相位系统**

    相位最小的充要条件！

    在一定的幅频特性下，相移最小的系统

    - 若是最小相位系统：$H(s)$的所有零点也应分布在左半平面或$j\omega$轴上
    - 若是非最小相位系统：零点位置与稳定性无关，可任意选取
    - 若有零点在$j\omega$轴上：根据$H(s)$的系数为实数，在$j\omega$轴上的零点必须是偶阶重零点，此时，要把轴上的零点平分给 $H(s)$ 与 $H(-s)$

例4-1：给定滤波特性的幅度平方函数：

写成$|H(\omega)|^2$或$|H(j\omega)|^2$均可

$$|H(j\omega)|^2=\frac{k^2(1+\omega^2)}{[4+(j\omega+2)^2][4+(j\omega-2)^2]}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数。

解：用$-s^2$代替ω^2，有

s 代替 $j\omega$

$$H(s)H(-s)=\frac{k^2(1-s^2)}{[4+(s+2)^2][4+(s-2)^2]}$$

$H(s)H(-s)$的极点：$s=\pm2\pm j2$；零点：$s=\pm1$；取左半平面零极点构成$H(s)$，得

极点 $s=-2\pm j2$，零点 $s=-1$

$$H(s)=\frac{k(s+1)}{(s+2)^2+4}$$

注意平分比例系数k

例4-2：给定滤波特性的幅度平方函数

$$|H(\omega)|^2=\frac{(1-\omega^2)^2}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数。

解：用$-s^2$代替ω^2，有

$$H(s)H(-s)=\frac{(1+s^2)^2}{(4-s^2)(9-s^2)}=\frac{(1+s^2)(1+s^2)}{(s+2)(-s+2)(s+3)(-s+3)}$$

$H(s)H(-s)$的极点为：$s=\pm 2, s=\pm 3$；有二阶重零点：$s=\pm j$，$s=\pm j$

$H(s)$作为可实现滤波器的传递函数，取左半平面的极点及$j\omega$轴上一对共轭零点：

$$H(s)=\frac{1+s^2}{(s+2)(s+3)}=\frac{1+s^2}{s^2+5s+6}$$

别忘了平分虚轴上的零点！

课程内容

$s=j\omega$

模拟滤波器的设计：保持稳定性，用$-s^2$代替 $|H(\omega)|^2$的ω^2，均分$H(s)H(-s)$零极点（注意是否最小相位）

4.1 滤波器概述

4.2 模拟滤波器

4.2.1 模拟滤波器概述

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

4.2.2 巴特沃思低通滤波器

巴特沃思低通滤波器的原理和设计方法

- 根据技术指标确定滤波器阶数，查表找巴特沃思多项式，频率反归一化

$\bar{s}=\frac{s}{\omega_c}$

$$\alpha_s=10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right]\rightarrow n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

$\omega_c=\omega_p=\omega_{3dB}$

通带截止频率

4.3 数字滤波器

幅频特性模平方（幅度二次方函数）

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

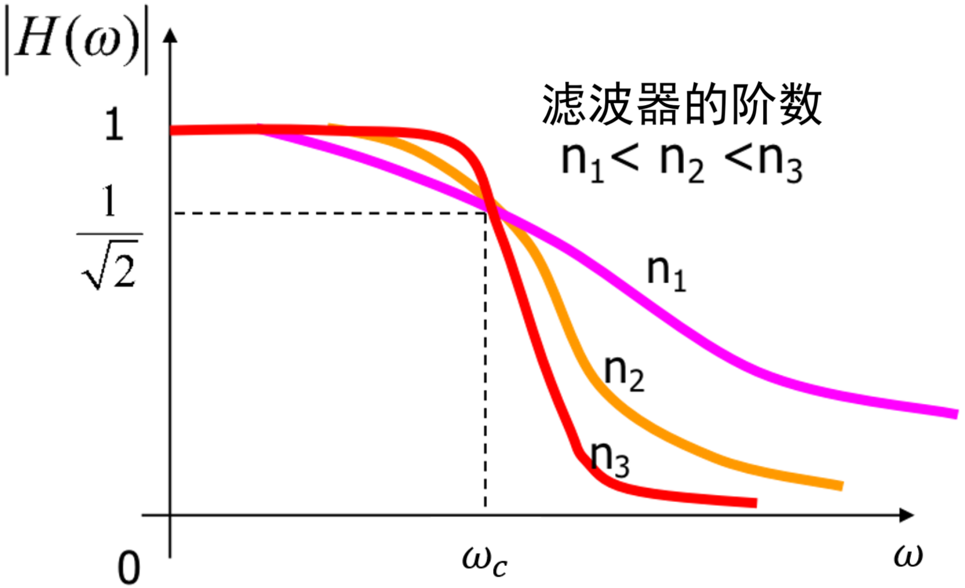
- n——滤波器的阶数
- ω_c——滤波器的截止频率，当$\omega=\omega_c$时，$|H(\omega)|^2=\frac{1}{2}$

  ω_c对应的是滤波器的-3dB点

巴特沃思低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 最大平坦性：可以证明，若阶数为n，在 $\omega = 0$ 处，它的前$(2n-1)$阶导数都等于零。这表明，巴特沃思滤波器在 $\omega = 0$ 附近一段范围内是非常平直的，它以原点的最大平坦性来逼近理想滤波器——“最平响应”

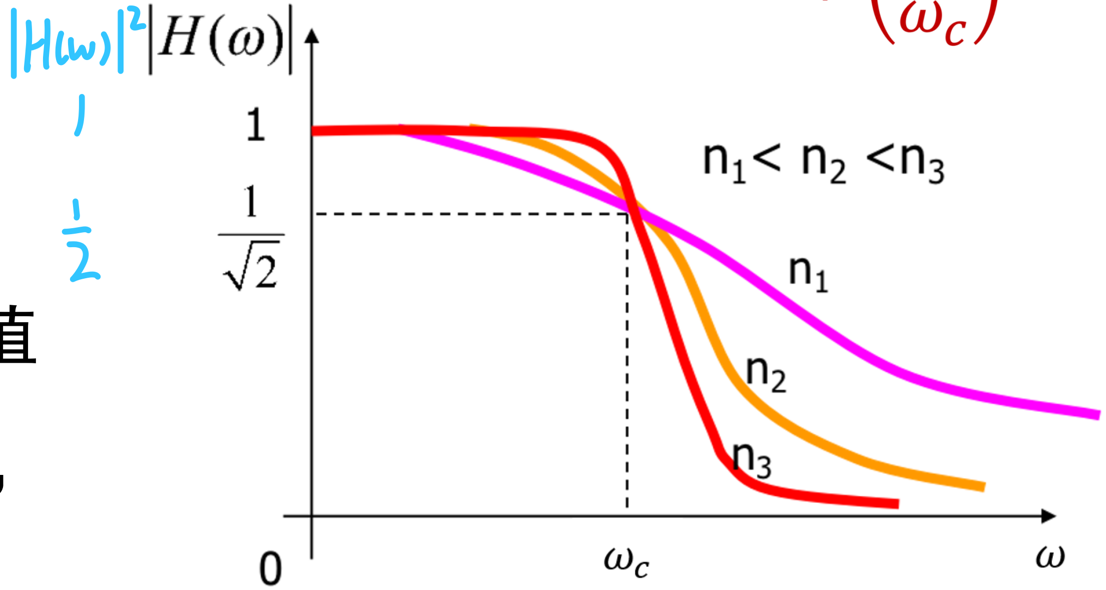


巴特沃思滤波器又称“最大平坦幅值滤波器”

巴特沃思低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 频响曲线的单调下降特性：幅值函数无论在通带、阻带（或过渡带）都是单调递减的；在$\omega = 0$处，具有最大值$|H(\omega)| = 1$；当$\omega \to \infty$，幅值趋于零，$|H(\infty)| = 0$。

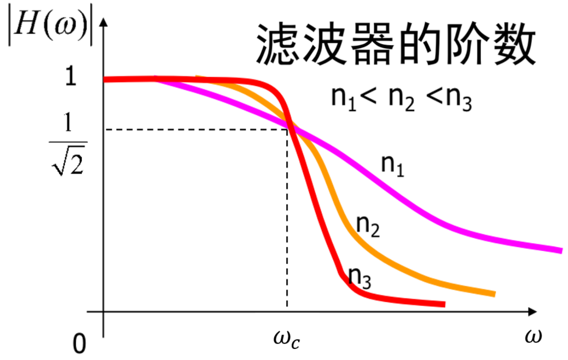


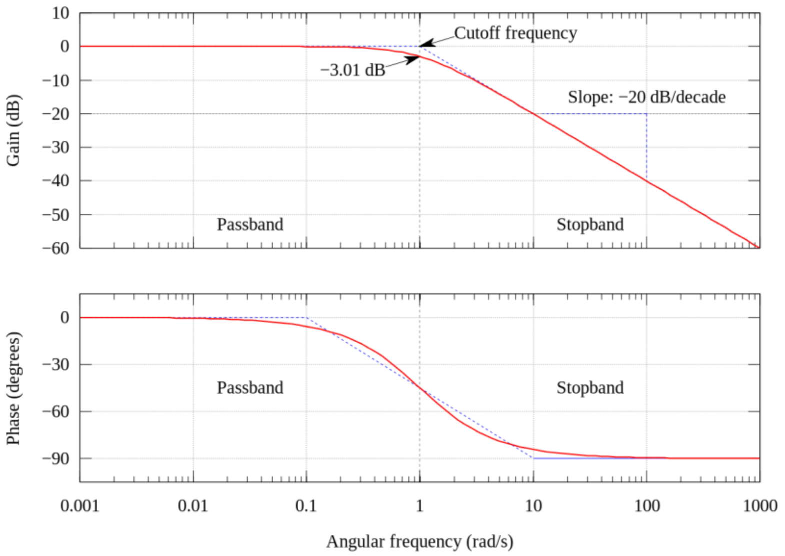
在$\omega = \omega_c$处，$|H(\omega_c)| = 0.707$，即$|H(\omega_c)|$比$|H(0)|$下降了3dB（无论阶数n取何值，巴特沃思滤波器的3dB带宽都位于$\omega = \omega_c$）。

巴特沃思低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 滤波器幅频特性与阶数n的关系：
  - 阶数n增加，通带幅频特性变平坦，阻带幅频特性衰减加快，过渡带变窄，整个幅频特性趋于理想低通特性
  - 当$\omega>\omega_c$后，特性曲线近似以$20n$ dB/倍频程速度下降（虽然增加n可以改善衰减性能，但代价是实现电路的元件数量也要增加）
- 巴特沃思滤波器具有良好的相频特性，在通带内没有起伏，比较接近直线





一阶巴特沃思低通滤波器的Bode图

巴特沃思低通滤波器的零极点分布

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$$|H(s)|^2 = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}\right]_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1+(-1)^n\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

令分母多项式为零，有

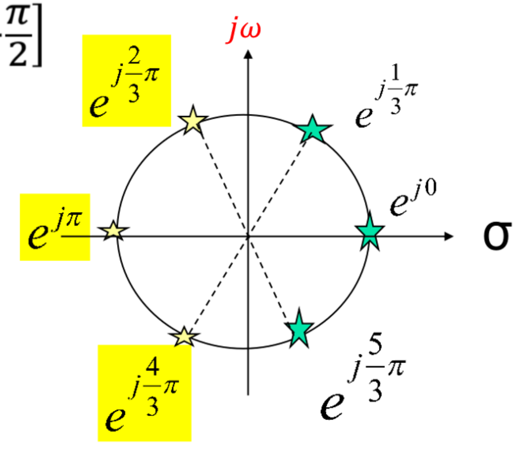
$$1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n} = 0$$

$$s_k = j\omega_c(-1)^{\frac{1}{2n}} = \omega_c e^{j\left[\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right]}, \qquad k = 1,2,\dots,2n$$

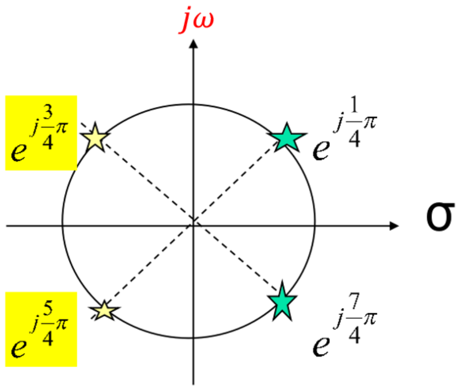
s_k即为$H(s)$和$H(-s)$的全部极点。

巴特沃思低通滤波器的零极点分布

$$s_k = j\omega_c(-1)^{\frac{1}{2n}} = \omega_c e^{j\left[\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right]}$$



$n=3$



$n=2$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- $H(s)H(-s)$的$2n$个极点以$\frac{\pi}{n}$为间隔均匀分布在半径为ω_c的圆上，这个圆称为巴特沃思圆；
- 所有极点以$j\omega$轴为对称轴呈对称分布，$j\omega$轴上没有极点；
- 当n为奇数时，有两个极点分布在$s=\pm\omega_c$的实轴上；n为偶数时，实轴上没有极点。所有复数极点两两呈共轭对称分布。

巴特沃思低通滤波器的传递函数

- 为得到稳定的$H(s)$，取全部左半平面的极点为$H(s)$的极点，而对称分布的右半s平面的极点对应$H(-s)$的极点

$$H(s) = \frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s - s_k)}$$

分子取ω_c^n保证
$|H(s)|_{s=0} = 1$

- 对不同截止频率ω_c，得到的同一阶次巴特沃思滤波器的传递函数也有所不同，为了使滤波器设计具有通用性，需要将频率进行归一化处理
- 选择截止频率ω_c作为参考频率，为此，$H(s)$的分子、分母各除以ω_c^n，并令$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$，$\bar{s}$称为归一化复频率

归一化处理后

$\bar{s}$称为归一化复频率

不作要求

- 当阶数 n 为偶数时

$$H(\bar{s})=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n/2}\left(\bar{s}^2-2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)\bar{s}+1\right)}$$

- 当阶数 n 为奇数时

$$H(\bar{s})=\frac{1}{\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(\bar{s}+1)\left(\bar{s}^2-2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)\bar{s}+1\right)}$$

巴特沃思多项式

归一化频率的各阶巴特沃思多项式

此表考试会给

不作要求 $\bar{s}$称为归一化复频率

H(s)的分母，其分子为1

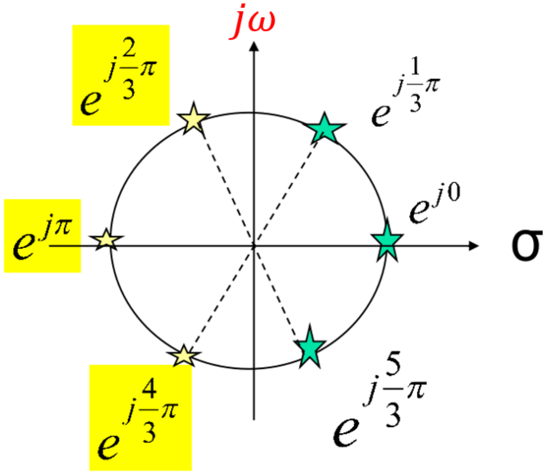
n	巴特沃思多项式
1	$\bar{s}+1$
2	$\bar{s}^2+\sqrt{2}\,\bar{s}+1$
3	$\bar{s}^3+2\bar{s}^2+2\bar{s}+1$
4	$\bar{s}^4+2.613\bar{s}^3+3.414\bar{s}^2+2.613\bar{s}+1$
5	$\bar{s}^5+3.236\bar{s}^4+5.236\bar{s}^3+5.236\bar{s}^2+3.236\bar{s}+1$
6	$\bar{s}^6+3.864\bar{s}^5+7.464\bar{s}^4+9.142\bar{s}^3+7.464\bar{s}^2+3.864\bar{s}+1$
7	$\bar{s}^7+4.494\bar{s}^6+10.098\bar{s}^5+14.592\bar{s}^4+14.592\bar{s}^3+10.098\bar{s}^2+4.494\bar{s}+1$
8	$\bar{s}^8+5.153\bar{s}^7+13.137\bar{s}^6+21.846\bar{s}^5+25.688\bar{s}^4+21.846\bar{s}^3+13.137\bar{s}^2+5.153\bar{s}+1$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

例4-3：求三阶巴特沃思低通滤波器的传递函数，设$\omega_c = 1\ \mathrm{rad/s}$。

方便讨论,归一化前后形式一样

解：$n = 3$为奇数，则幅度平方函数为



$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}$$

$s=j\omega$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6}$$

6个极点分别为：

$$s_{p1} = \omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}, s_{p2} = -\omega_c, s_{p3} = -\omega_c e^{j\frac{\pi}{3}}, s_{p4} = -\omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}, s_{p5} = \omega_c, s_{p6} = \omega_c e^{j\frac{\pi}{3}}$$

取位于s左半平面的3个极点，可得滤波器的系统函数：

对比表格

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{\left(s-\omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)(s+\omega_c)\left(s+\omega_c e^{j\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

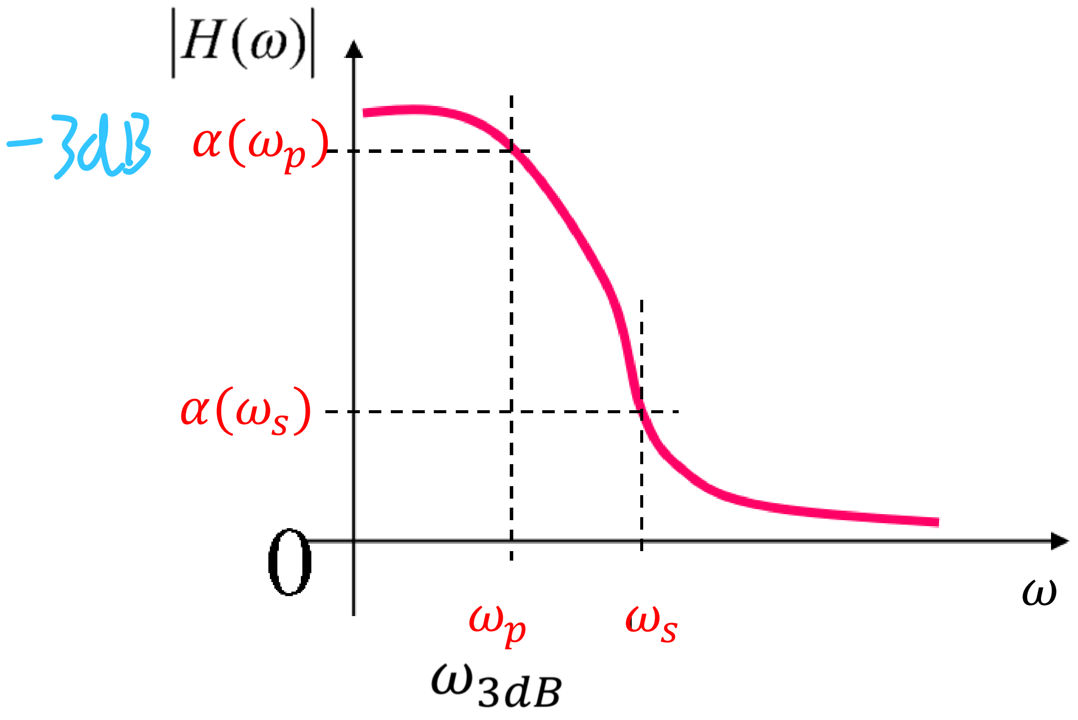
巴特沃思低通滤波器阶次的确定

- 在工程中常用衰减函数来描述滤波器的幅频特性，巴特沃思低通滤波器的衰减函数α为

$$\alpha = -20\lg|H(\omega)| = -20\lg\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}\right] = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

$$\omega_c = \omega_p = \omega_{3dB}$$

通带截止频率



$\alpha(\omega_p)$ 通带最大衰减

$\alpha(\omega_s)$ 阻带最小衰减

ω_p 通带截止频率

ω_s 阻带截止频率

设计低通滤波器时，通常取幅值下降3dB时所对应的频率值ω_{3dB}为通带截止频率，即

$$\omega_c = \omega_p = \omega_{3dB}$$

此时，$\alpha_p = 3\text{dB}$ 当作确定的，不能改

当$\omega = \omega_p$时，巴特沃思低通滤波器的通带衰减函数为

$$\alpha_p = 10\lg\left[1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

默认为3dB

当$\omega = \omega_s$时，巴特沃思低通滤波器的阻带衰减函数为

注意α_s为正值

$$\alpha_s = 10\lg\left[1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

由此可求得滤波器的阶次为 硬背

$$n \geq \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} \quad \text{的整数}$$

例4-4：若巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当$\omega_1 = 2\ \mathrm{rad/s}$时，其衰减不大于3dB；当$\omega_2 = 6\ \mathrm{rad/s}$时，其衰减不小于30dB。求此滤波器的传递函数。

解：令 $\omega_c = \omega_1 = \omega_p = \omega_{3dB} = 2\ \mathrm{rad/s}$，$\omega_s = \omega_2 = 6\ \mathrm{rad/s}$，则其归一化后的频域指标为

$$\bar{\omega}_c = \frac{\omega_p}{\omega_c} = 1, \qquad \alpha_p = 3\mathrm{dB}, \qquad \bar{\omega}_s = \frac{\omega_2}{\omega_c} = 3, \qquad \alpha_s = 30\mathrm{dB}$$

可求得该滤波器的阶数为 $\alpha_s = 30\mathrm{dB}$, $\frac{\omega_2}{\omega_c} = \frac{6\mathrm{rad/s}}{2\mathrm{rad/s}} = 3$

$$n = \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg\frac{\omega_2}{\omega_c}} = \frac{\lg\sqrt{10^3 - 1}}{\lg 3} \approx 3.143$$

取滤波器阶次 $n = 4$，查表可得此滤波器归一化传递函数为

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^4 + 2.613\bar{s}^3 + 3.414\bar{s}^2 + 2.613\bar{s} + 1}$$

归一化：$\bar{s}=\frac{s}{\omega_c}$

通过反归一化处理，令$s=\bar{s}\omega_c$，可求出实际滤波器的传递函数为

此题中 $\omega_c=2\ rad/s$

$$H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{2}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{2}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{2}\right)+1}$$

$$=\frac{16}{s^4+5.226s^3+13.656s^2+20.904s+16}$$

课程内容

4.1 滤波器概述

4.2 模拟滤波器

4.3 数字滤波器

4.3.1 数字滤波器概述

4.3.2 无限冲激响应数字滤波器

4.3.3 有限冲激响应数字滤波器

数字滤波器概述

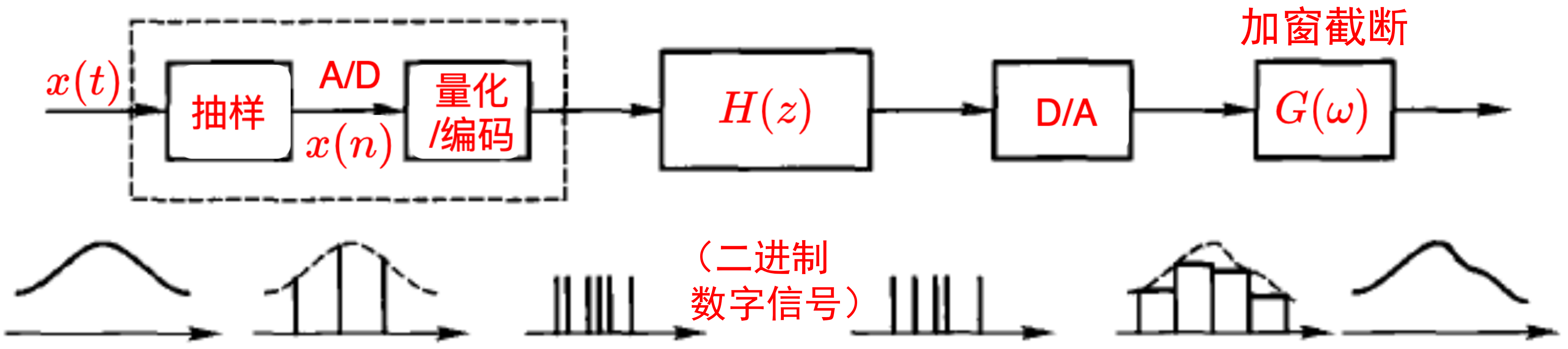
- 连续时间信号——模拟滤波器
- 离散时间信号——数字滤波器
- 数字滤波器可以用硬件设备实现，也可以在计算机上用软件完成

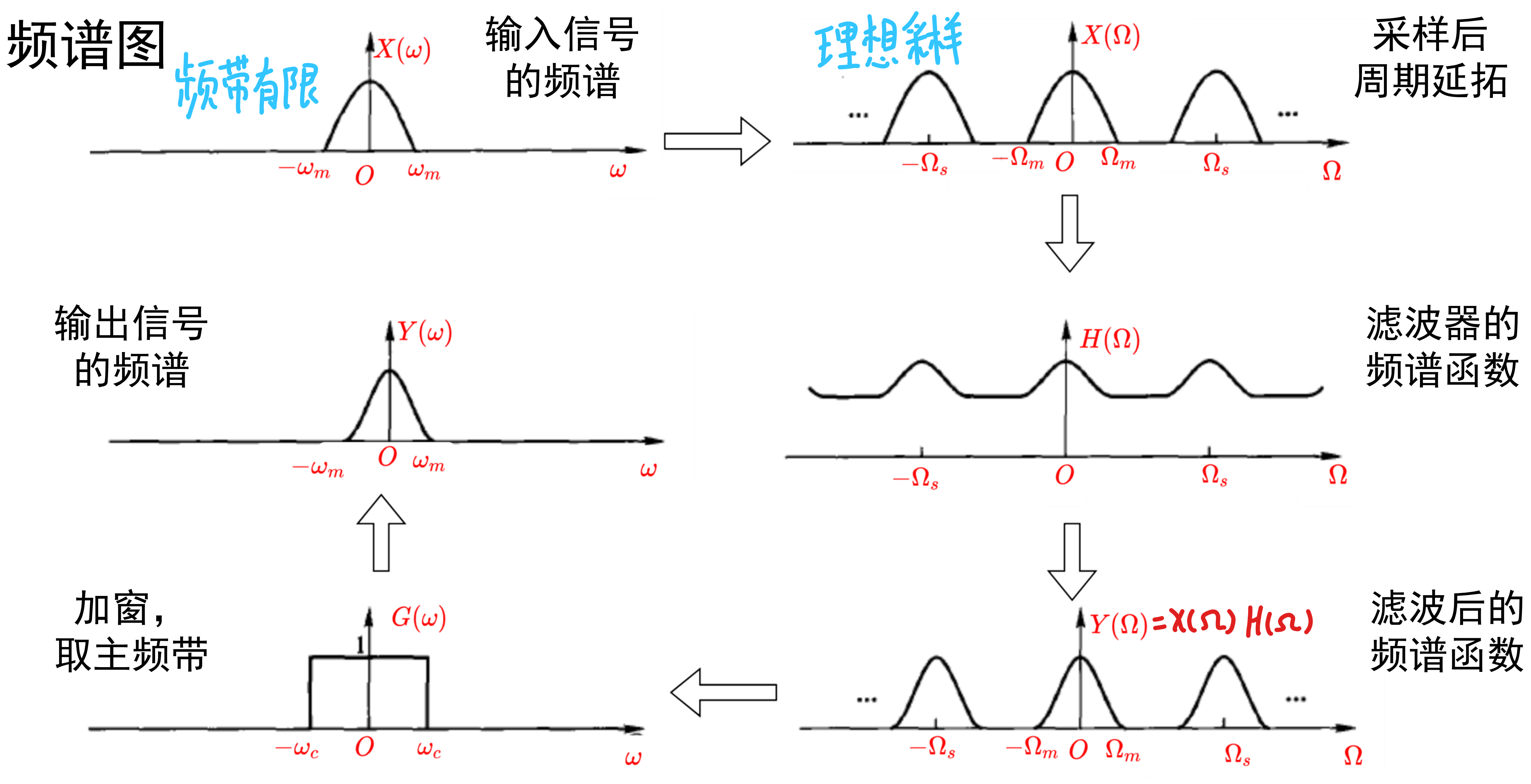
- **注**：为了便于研究从模拟滤波器到数字滤波器的映射关系，**从本节起**将模拟滤波器的单位冲激响应记为 $h_a(t)$，将数字滤波器的响应记为 $h(n)$；相应地，模拟滤波器的系统函数记为 $H_a(s)$，数字滤波器的系统函数记为 $H(z)$。

模拟 $h_a(t) \xrightarrow{L} H_a(s)$　　数字：$h(n) \xrightarrow{Z} H(z)$

数字滤波器的概念

- 数字滤波器是具有一定传输特性的数字信号处理装置
- 输入和输出都是数字信号
- 借助于数字器件和一定的数值计算方法，对输入信号的波形或频谱进行加工、处理、改变输入信号，从而去掉信号中的无用成分，保留有用成分




频谱图
频带有限
$X(\omega)$
输入信号
的频谱
$-\omega_m$ O ω_m ω
理想采样
$X(\Omega)$
采样后
周期延拓
$-\Omega_s$ $-\Omega_m$ O Ω_m Ω_s Ω
$H(\Omega)$
滤波器的
频谱函数
$-\Omega_s$ O Ω_s Ω
$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)$
滤波后的
频谱函数
$-\Omega_s$ $-\Omega_m$ O Ω_m Ω_s Ω
加窗，
取主频带
$G(\omega)$
1
$-\omega_c$ O ω_c ω
输出信号
的频谱
$Y(\omega)$
$-\omega_m$ O ω_m ω

数字滤波器相比模拟滤波器的优点

- **精度高**：模拟器件（如R、L、C）精度一般很难做高，而数字滤波器的精度则由字长决定。若要增加精度，只需增加字长。

- **可靠性高**：模拟滤波器中各种参数都有一定的温度系数，会随着环境变化而变化，易出现感应、杂散效应甚至振荡等。数字滤波器一般不受外界环境（如温度、湿度等）的影响，没有模拟电路的元器件老化问题。

- **灵活性高**：通过编程可以随时修改滤波器特性的设计，灵活性较高。

- **便于大规模集成**：设计数字滤波器具有一定的规范性，便于大规模集成生产。数字滤波器可工作于极低频率，也可比较容易地实现模拟滤波器难以实现的线性相位系统。

数字滤波器的原理

- 设输入序列为$x(n)$，输出序列为$y(n)$，则数字滤波器可用线性时不变离散系统表示为

$$y(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

- 数字滤波器的传递函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_iz^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_iz^{-i}}$$

决定系统的零点

决定系统的极点

数字滤波器的构成

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

- 若分母上的系数$a_i=0$，则有

$\mathcal{Z}[x(k-n)]=Z[x(t-nT)]=z^{-n}X(z)$

$$H(z)=\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$$

$Z^{-1}[b_i z^{-i}]=b_i\,\delta(k-i)$

$$h(n)=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)+\cdots+b_M\delta(n-M)$$

- 单位脉冲响应的时间长度是有限的，最多有$(M+1)$项
- 把系统函数具有以上形式的数字滤波器称为有限冲激响应（FIR，Finite Impulse Response) 滤波器（不作要求）
- $H(z)$只有单极点$z=0$，在单位圆内，故FIR滤波器总是稳定的

数字滤波器的构成

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

- 若至少有一个a_i的值不为零，并且分母至少存在一个根不为分子所抵消，则对应的数字滤波器称为无限冲激响应（IIR，Infinite Impulse Response）滤波器

单位脉冲响应有无限多项，时间长度持续到无限长

- 示例：

几何级数

$$H(z)=\frac{b_0}{1-z^{-1}}=b_0(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots),\qquad |z|>1$$

$$h(n)=b_0[\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots]=b_0u(n)$$

IIR 滤波器和 FIR 滤波器优缺点比较

无限冲激响应　　　　有限冲激响应

- IIR 滤波器
  - 优点：含有零极点，可以利用模拟滤波器的设计，计算量小，设计简单
  - 缺点：零极点的存在导致系统稳定性问题；相位的非线性
- FIR 滤波器
  - 优点：严格线性相位；滤波器总是稳定的；可以利用FFT快速处理
  - 缺点：所需阶次要比IIR高，运算量较大

课程内容

4.1 滤波器概述

4.2 模拟滤波器

4.3 数字滤波器

4.3.1 数字滤波器概述

4.3.2 无限冲激响应数字滤波器

无限冲激响应

IIR 滤波器设计流程 间接设计法

冲激响应不变法

$\Omega = \omega T$

- 模拟滤波器和数字滤波器之间的频率变换是线性关系，即$\Omega = \omega T$
- 具有较好的时域逼近特性，可以很好地逼近模拟滤波器冲激响应
- s平面与z平面映射的多值性容易造成频谱混叠现象

s域→z域

给定数字滤波器技术指标

↓

转换成模拟滤波器指标

巴特沃思低通滤波器

↓

设计模拟滤波器 $H_a(s)$

↓ s域与z域映射

求得要求的数字滤波器$H(z)$

双线性变换法

频率进行预畸变处理

$$\omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

双线性变换是从s平面到z平面一一对应的映射关系

双线性变换将s平面虚轴唯一地映射到z平面的单位圆，保证了$H(z)$的频率响应能模仿$H_a(s)$的频率响应，避免了频率响应混叠现象

双线性变换将s左半平面全部映射到z平面单位圆内，将s右半平面全部映射到z平面的单位圆外，保证了$H(z)$和$H_a(s)$相比，其稳定性不发生变化

$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

由 s 平面到 z 平面的映射

- 为了使数字滤波器保持模拟滤波器的特性，由复变量s到复变量z之间的映射关系必须满足两个基本条件：

① 为了保证模拟和数字滤波器频率特性的**相互对应关系**，s平面的复频率轴必须映射到z平面的单位圆上；

① s平面虚轴→z平面单位圆
② s平面左半平面→z平面单位圆内

虚轴

② 为了保持模拟和数字滤波器的**稳定性**，必须要求s平面的左半平面映射到z平面的单位圆以内。

冲激响应不变法

- **遵循准则**：使数字滤波器的单位脉冲响应$h(n)$等于所参照的模拟滤波器的单位冲激响应$h_a(t)$的**采样值**（此时得到的是**有限值**）

$$h(n)=h_a(t)\Big|_{t=nT}$$

- **设计思路**：
  - 根据技术指标确定模拟滤波器$H_a(s)$ 巴特沃思低通滤波器
  - 对$H_a(s)$取拉普拉斯反变换求冲激响应$h_a(t)$
  - 由冲激响应不变的原则，对$h_a(t)$以 T 为采样周期，采样得到$h(n)$
  - 求$h(n)$的Z变换，求出数字滤波器$H(z)$

冲激响应不变法

- 设模拟滤波器的系统函数具有N个单极点 p_i，$i=1,2,\ldots,N$，假设无零点、

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{s-p_i}$$

$$K_i=(s-p_i)H_a(s)\Big|_{s=p_i}$$

拉普拉斯反变换

$$h_a(t)=\sum_{i=1}^{N}K_i e^{p_i t}u(t)$$

采样

$$h(n)=h_a(t)\Big|_{\underline{t=nT}}=\sum_{i=1}^{N}K_i e^{p_i nT}u(n)$$ u(n)就是u(nT)

Z 变换

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}K_i e^{p_i nT}\right)z^{-n}=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{1-e^{p_i T}z^{-1}}$$

①交换求和次序
②几何级数求和

从s平面到z平面的映射

- s平面的极点p_i映射到z平面是位于$z=e^{p_iT}$的极点。

$$z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\Omega}=e^{\sigma T}\cdot \underbrace{e^{j(\Omega+2k\pi)}}_{\text{周期性}}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{T}k\right)T}$$

ω ——模拟角频率

Ω ——数字角频率

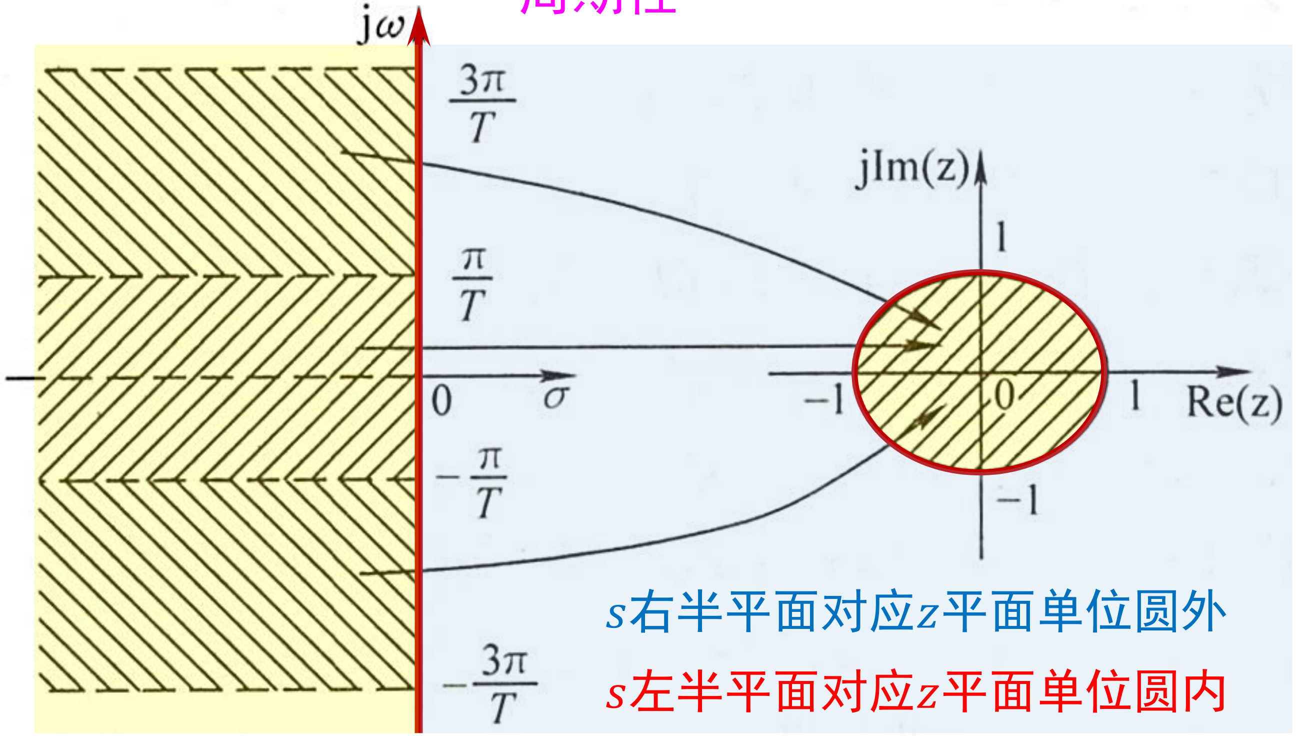
数字角频率和模拟角频率关系：

$\Omega=\omega T$ Ω 以2π为周期

1) $\sigma=0, s=j\omega$: $|z|=1$

2) $\sigma>0, s=\sigma+j\omega$: $|z|>1$

3) $\sigma<0, s=\sigma+j\omega$: $|z|<1$



s右半平面对应z平面单位圆外

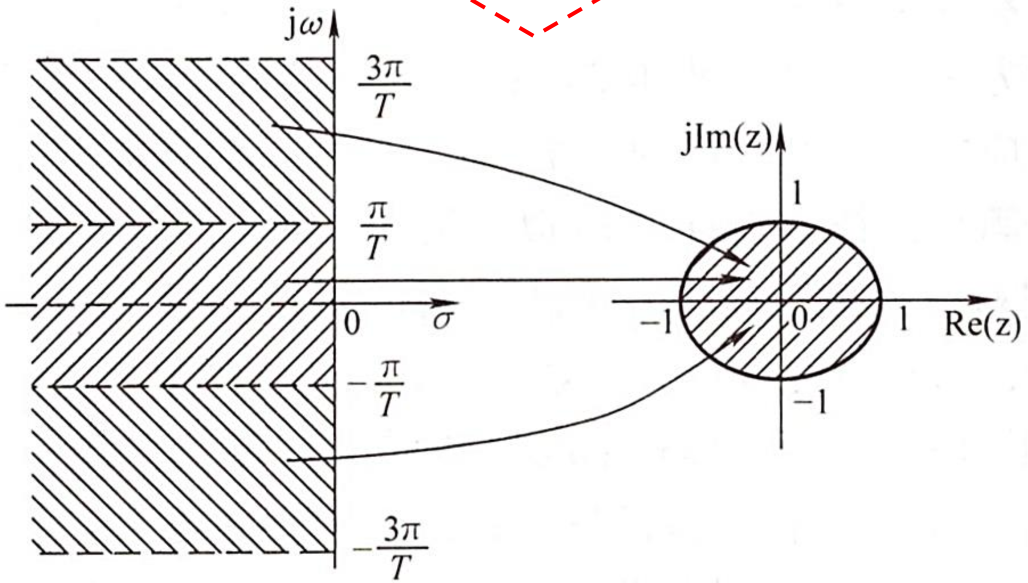
s左半平面对应z平面单位圆内

从s平面到z平面的映射

- 当$\sigma = 0$ 时，s平面的虚轴映射为z平面的单位圆；
- 当$\sigma < 0$ 时，s平面左半平面映射为z平面的单位圆内；
- 当$\sigma > 0$ 时，s平面的右半平面映射为z平面单位圆外；

由$s = \sigma + j(\omega + \frac{2\pi}{T}k)$可知，从$s$平面到$z$平面的映射不是单值的！

- 当σ不变，ω以 $\frac{2\pi}{T}$ 整数倍改变时，映射值不变，也就是将s平面沿着$j\omega$轴分割成为一条条宽度为$\frac{2\pi}{T}$的水平带，**每条水平带都按照前面分析的关系，重叠映射成整个z平面。**



$H_a(s)$ 和 $H(z)$ 的对应关系另一个角度去思考多值映射关系

根据 Z 变换和拉氏变换的关系，冲激采样后的信号等于原信号乘以冲激函数串：

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{h_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)}_{\text{冲激采样后的信号}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{h_a(nT)}_{\text{模拟信号}}e^{-snT}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{h(n)}_{\text{数字信号}}z^{-n}\bigg|_{z=e^{sT}}=H(z)\bigg|_{z=e^{sT}}$$

根据冲激函数串 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 的傅里叶级数展开，有

$$\mathcal{L}\left[h_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]=\mathcal{L}\left[h_a(t)\cdot\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi}{T}kt}\right]=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(s+j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

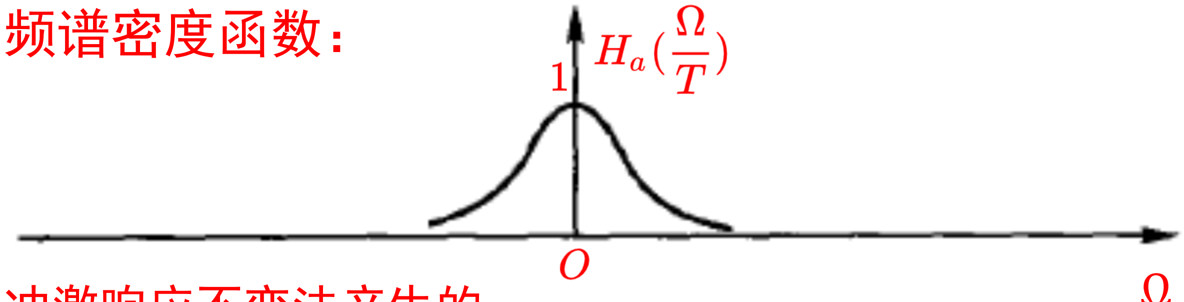
$$H(z)\bigg|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(s+j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

s 平面与 z 平面的映射呈多值映射关系！

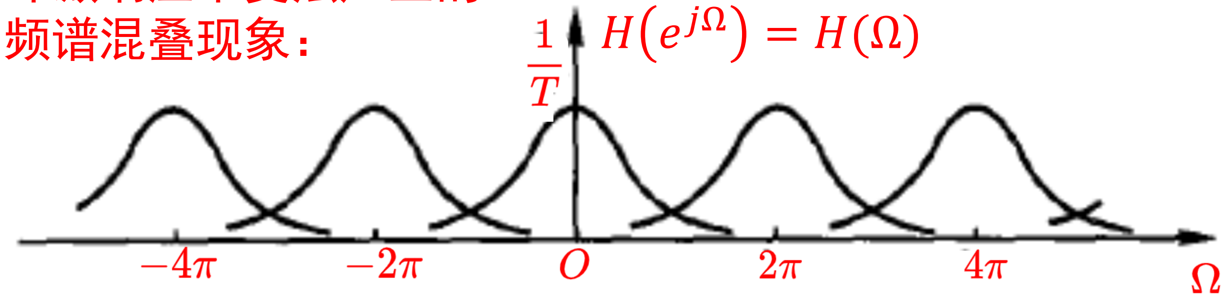
由于冲激响应不变法的$h(n)$是对模拟滤波器的$h_a(t)$采样的结果，就频率特性而言，存在频谱混叠。s平面的虚轴可以映射为z平面的单位圆，而且

$$H(z)=H\left(e^{j\Omega}\right)=H(\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(j\frac{\Omega}{T}+j\frac{2\pi}{T}k\right)\qquad\left(s=j\omega, z=e^{j\Omega}\right)$$

频谱密度函数：



冲激响应不变法产生的频谱混叠现象：



- 冲激响应不变法得到数字滤波器的增益与采样周期T成反比
- 减小采样间隔，可减小混叠，但是会造成数字滤波器增益过高
- 有时，$h(n)$的设计值采用$Th_a(nT)$，以保证转换后数字滤波器增益不变

冲激响应不变法设计 IIR 滤波器的特点

- 模拟滤波器和数字滤波器之间的频率变换是线性关系，即$\Omega = \omega T$
- 具有较好的时域逼近特性，可以很好地逼近模拟滤波器冲激响应
- s平面与z平面映射的多值性容易造成频谱混叠现象

例4-5：设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2s}{s^2+3s+2}$$

用冲激响应不变法求相应的数字滤波器的系统函数$H(z)$。

不要求

解：$H_a(s) = \frac{2s}{s^2+3s+2} = \frac{2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-2}{s+1} + \frac{4}{s+2}$，由 s 平面映射到 z 平面，得

$$H(z) = \frac{-2}{1-e^{-T}z^{-1}} + \frac{4}{1-e^{-2T}z^{-1}} = \frac{2+(2e^{-2T}-4e^{-T})z^{-1}}{1-(e^{-T}+e^{-2T})z^{-1}+e^{-3T}z^{-2}}$$

$$\frac{1}{s-s_k} \Rightarrow \frac{1}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

留数法求 $Z\left[\frac{1}{s-s_k}\right]$

$$Z\left[\frac{1}{s-s_k}\right]=\sum_i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{s-s_k}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]=\lim_{s\to s_k}\frac{z}{z-e^{sT}}=\frac{1}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

例4-6：用冲激响应不变法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，满足技术指标：

（1）3dB带宽的数字截止频率 $\Omega_c = 0.2\pi$ rad； $\alpha_p=3dB$,

（2）阻带大于30dB的数字边界频率 $\Omega_s = 0.5\pi$ rad； $\alpha_s=30dB$.

（3）采样周期 $T = 10\pi$ μs。

解：第一步：将给定的指标转换为相应的模拟低通滤波器的技术指标。

$$\Omega = \omega T$$

$$\omega_c = \frac{0.2\pi \text{ rad}}{10\pi\text{μs}} = 2\cdot 10^3 \text{ rad/s},\quad \omega_s = 5\cdot 10^3 \text{ rad/s},\quad \alpha_s = 30 \text{ dB}$$

滤波器的阶数应满足 $$n \geq \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} = 3.769$$

第二步：取$n=4$，查表设计四阶归一化巴特沃思低通滤波器：

$$H_a(\bar{s})=\frac{1}{\bar{s}^4+2.613\bar{s}^3+3.414\bar{s}^2+2.613\bar{s}+1}=-\frac{0.92388\bar{s}+0.70711}{\bar{s}^2+0.76537\bar{s}+1}+\frac{0.92388\bar{s}+1.70711}{\bar{s}^2+1.84776\bar{s}+1}$$

第三步：求出满足给定指标的实际模拟低通滤波器。进行反归一化处理，有

$$H_a(s)=-\frac{0.92388\omega_c s+0.70711\omega_c^2}{s^2+0.76537\omega_c s+\omega_c^2}+\frac{0.92388\omega_c s+1.70711\omega_c^2}{s^2+1.84776\omega_c s+\omega_c^2}$$

第四步：按照冲激响应不变法，求满足给定技术指标的数字滤波器。

$$H(z)=\frac{10^4(-1.84776+0.88482z^{-1})}{1-1.31495z^{-1}+0.61823z^{-2}}+\frac{10^4(1.84776-0.40981z^{-1})}{1-1.08704z^{-1}+0.31317z^{-2}}$$

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\Rightarrow\frac{1-e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\Rightarrow\frac{e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

双线性变换法

- 为什么需要双线性变换？

  s平面与z平面映射的多值性容易造成频谱混叠现象

  - 冲激响应不变法存在缺点：容易造成数字滤波器频率响应混叠
  - 冲激响应不变法只适用于低通或者限带的高通、带通情况
  - 必须找出一种频率特性有一一对应的关系的变换
- 设计思路
  - 技术指标——模拟滤波器——变换成频带受限的传递函数——Z变换

双线性变换法 $s \rightarrow z$ 的映射

$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

$z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$

- 原理：利用微分方程表示为差分方程
- 目标：把 s 域 ω 从 0 到 $\pm\infty$ 的分布压缩至 0 到 $\pm\pi$ 之间，这样变换到 z 域就不会出现周期重复，即可构成单值映射
- 将s平面映射到z平面存在下列关系式：

z的表达式

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right),\quad H(z)=H_a\left[\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right]\quad\Rightarrow z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

$z=e^{sT}=\frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}}\overset{展}{=}\frac{1+\frac{sT}{2}}{1-\frac{sT}{2}}$ 分子.分母上均为一个线性变换 ⇒ 双线性变换

双线性变换的映射

- 令$s=\sigma+j\omega$，得 $z=\dfrac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}=\dfrac{1+\frac{\sigma T}{2}+j\frac{\omega T}{2}}{1-\frac{\sigma T}{2}-j\frac{\omega T}{2}}$
  - 若 $\sigma<0$，则 $|z|<1$；
  - 若 $\sigma>0$，则 $|z|>1$；
  - s 平面左半平面映射为 z 平面单位圆内
- 令$s=j\omega$，得 $z=\dfrac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}=\dfrac{1+j\frac{\omega T}{2}}{1-j\frac{\omega T}{2}}$，$|z|=1$
  - s 平面 $j\omega$ 轴映射为 z 平面单位圆

双线性变换法的特性 $s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$ $z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$

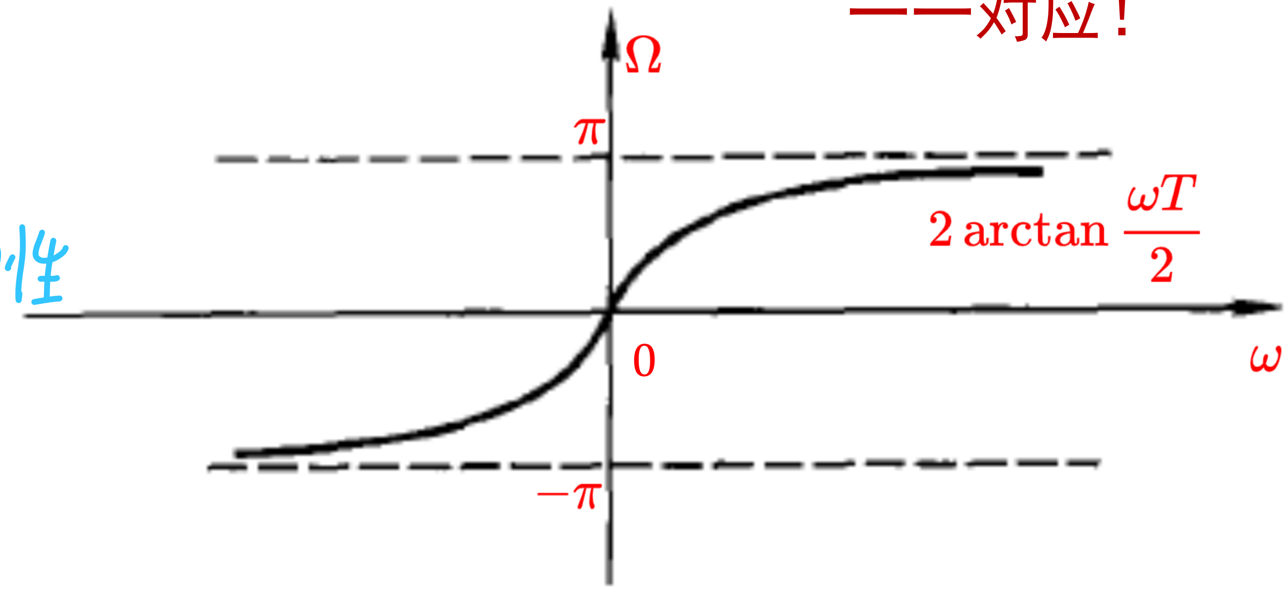
- 双线性变换是从s平面到z平面一一对应的映射关系
- 双线性变换将s平面虚轴唯一地映射到z平面的单位圆，保证了$H(z)$的频率响应能模仿$H_a(s)$的频率响应，避免了频率响应混叠现象
- 双线性变换将s左半平面全部映射到z平面单位圆内，将s右半平面全部映射到z平面的单位圆外，保证了$H(z)$和$H_a(s)$相比，其稳定性不发生变化

数字频率 Ω 和模拟频率 ω 的关系 $\omega=\frac{2}{T}\tan(\frac{\Omega}{2})$

- 在单位圆上有 $z=e^{j\Omega}$（对应$s=j\omega$）
  - $z=e^{j\Omega}=\dfrac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}=\dfrac{1+j\frac{\omega T}{2}}{1-j\frac{\omega T}{2}}$
  - $\Omega=2\arctan\dfrac{\omega T}{2}$ Ω无周期性
  - $\omega=\dfrac{2}{T}\tan\left(\dfrac{\Omega}{2}\right)$

记忆

——对应！



双线性变换法的频率预畸变

- 在冲激响应不变法中，模拟频率 ω 与数字频率 Ω 之间的关系是线性关系：

$$\Omega = \omega T$$

- 在双线性变换法中，模拟频率 ω 与数字频率 Ω 的关系是非线性关系：

$$\omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$$

- 模拟频率与数字频率间的**非线性关系是双线性变换的缺点**，会使数字滤波器与模拟滤波器在频率响应与频率的对应关系上发生畸变。

基于频率预畸变的校正方式

- 先对模拟滤波器的临界频率加以畸变，使其通过双线性变换后正好映射为需要的频率
- 设所求的数字滤波器的通带和阻带的截止频率分别为 Ω_p 和 Ω_s
- 按照式 $\omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$ 求出对应的模拟滤波器的临界频率 ω_p和 ω_s，然后模拟滤波器就按照这两个预畸变的频率 ω_p 和 ω_s 来设计

例4-7：用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，采样周期$T=1s$，巴特沃思数字低通滤波器的技术指标为：

1) 在通带截止频率 $\Omega_p=0.5\pi$ rad 时，衰减不大于3dB；
2) 在阻带截止频率 $\Omega_s=0.75\pi$ rad 时，衰减不小于15dB。

解：将频率进行预畸变处理。则有

$$\omega_c=\omega_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p}{2}=2\ \mathrm{rad/s},\qquad \alpha_p=3\ \mathrm{dB}$$

$$\omega_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_s}{2}=4.828\ \mathrm{rad/s},\qquad \alpha_s=15\ \mathrm{dB}$$

设计满足技术指标的巴特沃思模拟低通滤波器，其阶数 $n\geq\dfrac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}\approx 1.941$

解（续）：取 $n=2$，归一化巴特沃思模拟低通滤波器的传递函数为

$$H_a(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + 1.414\bar{s} + 1}$$

进行反归一化处理，得到巴特沃思模拟低通滤波器的实际传递函数为

$s=\bar{s}\omega_c$

$$H_a(s) = H_a(\bar{s}\omega_c) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1.414\omega_c s + \omega_c^2}$$

利用双线性变换法求出数字滤波器的传递函数$H(z)$：

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} = \frac{1+2z+z^2}{0.586+3.414z^2}$$

$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$