

1. 这个题目的核心是想要让大家利用 A1~A8 公理来相互证明。

存在的问题：

(1) 部分同学利用具象化假设 n 维向量

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

的方式进行证明，理论上是可以的，但是希望同学们还是可以熟练使用 A1~A8 公理来进行证明。

(2) 对于标量和向量的还没有充分的理解。

一个标量加一个向量是没有意义的，与此同时，标量和向量是不能划等号的。

例如证明 (a) $\beta \vec{0} = \vec{0}$ β 为标量

错误示例： $\beta = (\vec{0} + \vec{1})\beta$

$$\beta = \beta \vec{0} + \beta \vec{1} = \beta \vec{0} + \beta$$

$$\beta \vec{0} = \vec{0}$$

2. 这个题主要也是考察大家对 A1~A8 公理的掌握程度。

存在的问题：

(1) 想当然的顺着写公式，出现错误计算：

$$(a + b) \cdot (x_1, x_2) = ((a + b)x_1, x_2) = a \cdot (x_1, x_2) + b \cdot (x_1, x_2)$$

$$\text{注意仔细计算 } a \cdot (x_1, x_2) + b \cdot (x_1, x_2) = ((a + b)x_1, 2x_2)$$

(2) 不严谨证明：

直接指出它的零元不为 $\vec{0}$ 。

反观第三题： V 是一个向量空间，但它的零元为 1。

严谨的证明可以借鉴参考一下优秀作业。

(注：可以利用零元来证明，但前提是要假设它是一个向量空间，指出零元 $(0,0)$ 然后与 $(0, x_2)$ 矛盾，直接指出它的零元不为 $\vec{0}$ 在逻辑上不够严密)。

(3) 部分同学在一一验证 A1~A8 公理，出现矛盾之后解题过程就戛然而止，并没有给出结论，即并没有指出 V 是否是一个向量空间。建议以后直接将你的结论或者结果明示在你的解题开头。

3, 这道题的主要思路是两个点，一个是在题中所给运算的基础上，证明 A1-A8 八大公理。另一点是证明在题中所定义的新的数乘和加法运算下，整个空间的封闭性。许多同学只证明了其中一个点。还有部分同学给出的结论错误，主要是没有充分理解题目中定义的运算方式导致证明八大公理时出现错误，或是直接将“零元”这一抽象的概念当作 0 带入进行验算得到错误的结论。

4,

(a) 使用向量空间的定义要先说明零元，然后再验证加性和乘性封闭性；

若使用 span 性质一定要说明 $H \cap K$ 是 V 的一个子集。

(b) 若第一题没有说明 H 、 K 是向量空间，在此题中需先说明。

(c) $H = \text{span}(u_1, \dots, u_p) = \{a_1 u_1 + \dots + a_p u_p \mid a_i \in F\}$ ，很多人漏了大括号！

在使用 span 的定义证明时需要特别说明 $\forall v \in H + K$ ， v 可以被 $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ 线性表示。

使用向量和集合的方法证明需要分别证明

$$H + K \subseteq \text{span}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q), \text{span}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \subseteq H + K。$$

- 5, (a) 按定义证明即可;
- (b) 根据删掉的向量是否可以被其余向量线性表出进行讨论即可。

最后希望同学们答题时尽量排版工整, 纸张统一使用 A4 大小的纸张。