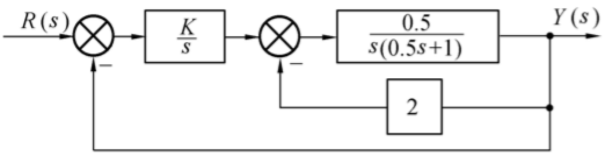
自动控制理论 A 作业 10

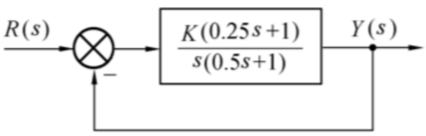
2019 年 11 月 29 日

4.1　某反馈系统的方框图如题 4.1 图所示。试绘制 K 从 0 变到 ∞ 时该系统的根轨迹图。

4.2　试应用根轨迹法确定题 4.2 图所示系统无超调响应时的开环增益 K。

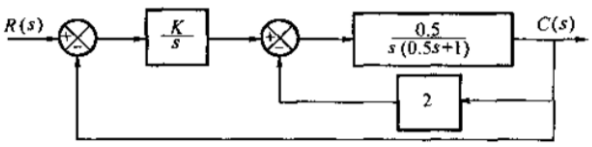


题 4.1 图　　反馈系统方框图



题 4.2 图　　反馈系统方框图

4－1　某反馈系统的方框图如题 4－1 图所示。试绘制 K 从 0 变到 ∞ 时该系统的根轨
图。



题 4－1 图

解　给定控制系统的开环传递函数为

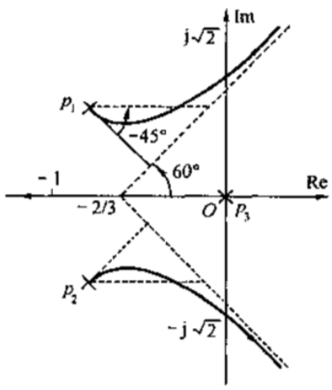
$$G(s)=\frac{K}{s}\cdot\frac{\dfrac{\frac{1}{2}}{s\left(\frac{1}{2}s+1\right)}}{1+\dfrac{\frac{1}{2}}{s\left(\frac{1}{2}s+1\right)}\times 2}=\frac{K}{s(s^2+2s+2)}$$

给定系统的根轨迹方程为

$$\frac{K}{s[s-(-1+\mathrm{j})][s-(-1-\mathrm{j})]}=-1$$

代表 180°根轨迹。

(1)开环极点 $p_1=-1+\mathrm{j}, p_2=-1-\mathrm{j}, p_3=0, n=3$,无开环零点,即 $m=0$,故当 $k\to\infty$ 时三条根轨迹均趋向无穷远处。



题 4－1 解图

(2)三条渐近线在实轴上相交于一点,其坐标为

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-\frac{2}{3}$$

渐近线与实轴正方向的夹角为

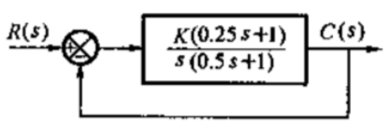
$$\varphi_i=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\frac{(2l+1)\pi}{3}$$

$$(l=0,1,2,\cdots,n-m-1)$$

解得 $\varphi_1=60°, \varphi_2=180°, \varphi_3=-60°$。

(3)$(-\infty,0]$属于实轴上的根轨迹。

4－2　试应用根轨迹法确定题 4－2 图所示系统无超调响应时的开环增益 K。



题 4－2 图

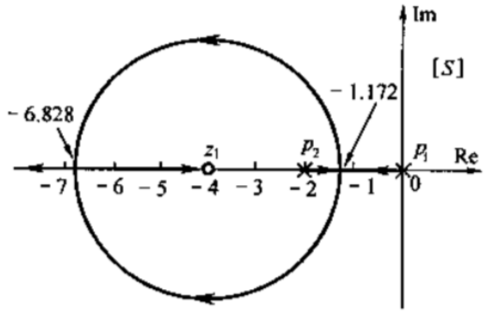
解　题 4－2 图所示系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K(0.25s+1)}{s(0.5s+1)}$，化成标准形式，得 $G(s)=\dfrac{k(s+4)}{s(s+2)}$，式中 $k=0.5K$。则根轨迹方程为 $\dfrac{k(s+4)}{s(s+2)}=-1$，属于 180°根轨迹。

(1)开环极点 $p_1=0, p_2=-2, n=2$；开环零点 $z_1=-4, m=1$。所以系统具有两条根轨迹及一条渐近线。

(2)渐近线与实轴正方向的夹角为 $\varphi=\dfrac{(2l+1)\pi}{n-m}$，取 $l=n-m-1=0$，得 $\varphi=180°$。

(3)$(-\infty,-4]$ 和 $[-2,0]$ 属于实轴上的根轨迹。

(4)计算根轨迹在实轴上的分离点与会合点坐标。由 $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_j}=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_i}$，有 $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}=\dfrac{1}{d+4}$，解得分离点坐标 $d_1=-1.172$ 及会合点坐标 $d_2=-6.828$。



题 4－2 解图

给定系统的根轨迹图如题 4－2 解图所示，在复平面上根轨迹是以零点 $z_1=-4$ 为圆心、以零点到分离点(或会合点)的距离为半径的圆。系统无超调响应时，系统的特征根全部为实数。即在根轨迹图上对应 $(-\infty,-4)$ 和 $(-2,0)$ 两区段。系统特征方程为 $0.5s^2+(1+0.25K)s+K=0$，即 $K=\dfrac{-(0.5s^2+s)}{0.25s+1}$，将 $s=-1.172$ 及 $s=-6.828$ 代入上式，求得 $K_1=0.686, K_2=23.31$。所以系统无超调响应时开环增益 K 的取值范围为 $0\leqslant K\leqslant 0.686$ 或 $23.31\leqslant K<\infty$。

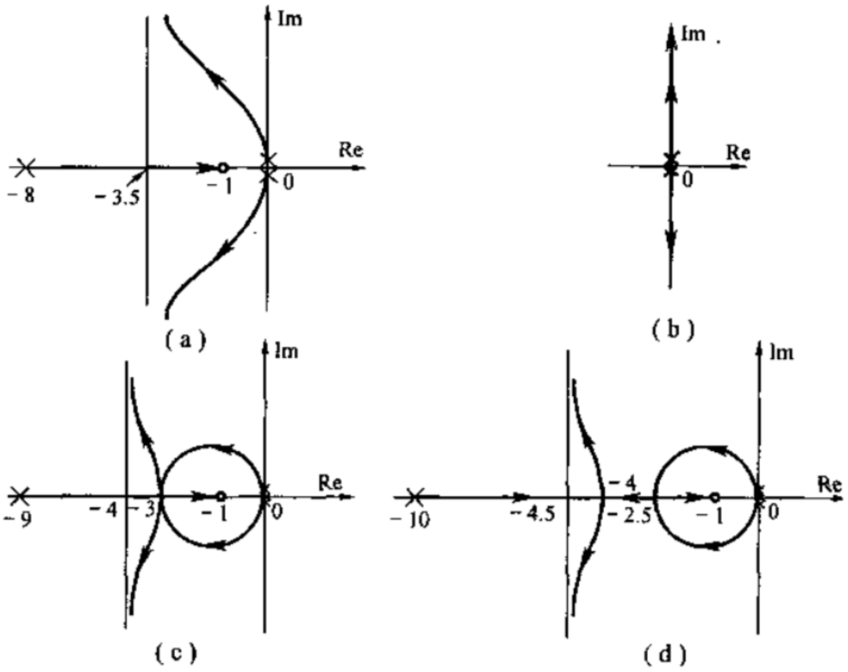
4.4　设某反馈系统的特征方程为

$$s^2(s+a)+k(s+1)=0$$

试确定以 k 为参变量的根轨迹与负实轴无交点、有一个交点与有两个交点时的参量 a，并绘制相应的根轨迹图。

4－4　设某反馈系统的特征方程为 $s^2(s+a)+k(s+1)=0$。试确定以 k 为参变量的根轨迹与负实轴无交点、有一个交点与有两个交点时的参量 a，并绘制相应的根轨迹图。

解　由题意可得给定系统的根轨迹方程为 $\dfrac{k(s+1)}{s^2(s+a)}=-1$，由 $\dfrac{2}{d}+\dfrac{1}{d+a}=\dfrac{1}{d+1}$，求得根轨迹与负实轴交点的表达式



题4－4解图

$$d=\frac{-(3+a)\pm\sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$$

(1)当根轨迹与负实轴无交点，即 d 无实数解，则 $(a-1)(a-9)<0$，解得此时参数 a 的取值范围为 $1<a<9$。当 $a=8$ 时根轨迹的大致图形如题4－4解图(a)所示。

(2)当根轨迹与负实轴有一个交点，即 d 为两相等实根，此时 $a=1$ 或 $a=9$。$a=1$ 及 $a=9$ 时根轨迹的大致图形分别如解图(b)，(c)所示。

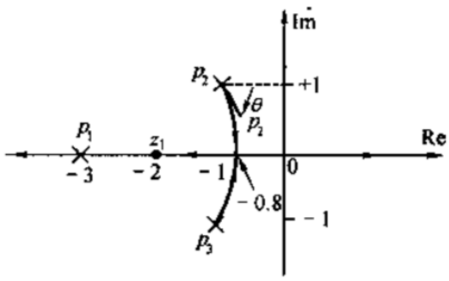
(3)当根轨迹与负实轴有两个交点，即 d 为两不等实根，此时 $(a-1)(a-9)>0$，解得 $a>9$。$a=10$ 时根轨迹的大致图形如解图(d)所示。

4.5　设某正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试为该系统绘制以 k 为参变量的根轨迹图。

4－5　设某正反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$，试为该系统绘制以 k 为参变量的根轨迹图。



题 4－5 解图

解　该正反馈系统的根轨迹方程为 $\frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}=+1$，需按 0°根轨迹绘制。

(1)开环极点，$p_1=-3, p_{2,3}=-1\pm \mathrm{j}, n=3$；开环零点 $z_1=-2, m=1$。

(2)根轨迹具有两条渐近线，其与实轴正方向的夹角为

$$\varphi_i=\frac{2l\pi}{n-m}\quad (l=0,1,\cdots,n-m-1)$$

分别求得 $\varphi_1=0°, \varphi_2=180°$。

(3)$[-3,-\infty)$和$[-2,+\infty)$为实轴上的根轨迹。

(4)出射角

$$\theta_{p_2}=0°+\angle(p_2-z_1)-\angle(p_2-p_1)-\angle(p_2-p_3)=0°+45°-26.6°-90°=-71.6°$$

$$\theta_{p_3}=-\theta_{p_2}=+71.6°$$

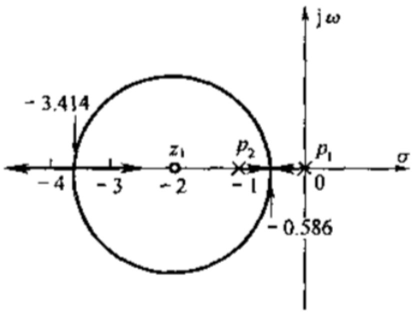
(5)根轨迹与实轴交点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{k(s+2)}\right]\bigg|_{s=\alpha}=0$$

求得实数解 $\alpha_1=-0.8$，因此，极轨迹与实抽会合点坐标为$(-0.8, \mathrm{j}0)$。

(6)给定系统的特征方程为 $1-\frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}=0$，即 $s^3+5s^2+(8-k)s+(6-2k)=0$，将 $s=\mathrm{j}w$ 代入方程，解出 $w=0, k=3$，对应的开环增益为 $K=\frac{k\times 2}{3\times 2}=1$。当 $1>K\geqslant 0$ 时，该系统稳定。当 $K>1$ 时，该系统不稳定。该系统的根轨迹大致图形如题 4－5 解图所示。

5．设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$，其根轨迹图见图。试从数学上证明：复数根轨迹部分是以$(-2, \mathrm{j}0)$为圆心，以$\sqrt{2}$为半径的一个圆。



5.证明　闭环特征方程为

$$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*=0$$

$$\lambda=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}=\frac{-(1+K^*)\pm \mathrm{j}\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}=\sigma\pm \mathrm{j}w$$

$$\sigma=\frac{-(1+K^*)}{2} \tag{1}$$

$$\omega=\pm\frac{1}{2}\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2} \tag{2}$$

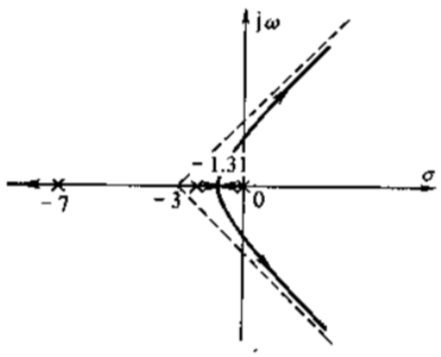
由式(1)得　　$K^*=-2\sigma-1$　　(3)

由式(3)代入式(2),整理得$(\sigma+2)^2+\omega^2=2$。

10.单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k}{s(s+3)(s+7)}$$

试确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性的的取值范围。



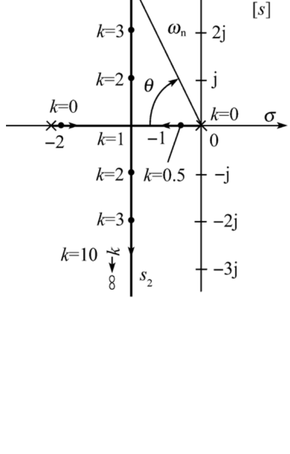
题10解图

分离点-1.31,对应$k=12.6$,根轨迹与虚轴交于$\pm4.58\mathrm{j}$,对应的$k=210$。当$12.6<k<210$时,系统具有一对负实部共轭复数极点,具有欠阻尼阶跃响应。

11. 单位负反馈系统的开环传递函为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}$$

用根轨迹法分析开环放大系数 K 对系统性能的影响，计算 K =5 时系统动态指标 σ_p,t_r,t_p,t_s。



解： $G(s)=\dfrac{K}{s(0.5s+1)}=\dfrac{2K}{s(s+2)}=\dfrac{k}{s(s+2)}$ $k=2K$

K为任意值时，系统都是稳定的。

当0<K<0.5(0<k<1)时，系统有两个相等的负实根，系统的动态响应是非震荡的。

当0.5<K<∞(1<k<∞)时，系统有一对共轭复数极点，系统的动态响应是震荡的。

当K =5（k=10）时，由图知系统的闭环极点为

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-1\pm j3 \Rightarrow$$

$$\omega_n=\sqrt{10}=3.16\text{，}\quad \zeta=\cos\theta=\frac{1}{3.16}=0.316$$

$$\sigma_p=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=35\%$$

$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{3.14-1.25}{3}=0.63s$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=1.05s\text{，}\quad t_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=3s(\Delta=5\%)$$