自动控制理论 A 作业 11

2019 年 12 月 10 日

10.16 已知线性定常系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x$$

试利用李亚普诺夫第二法判别该系统平衡状态的稳定性。

8-19 已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} X$，试应用李雅普诺夫第二法判别该系统的平衡状态的稳定性。

解 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$，取 $Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，设 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$，则由 $A^{T}P + PA = -Q$ 有

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得 $P_{11} = \frac{23}{60}, P_{12} = -\frac{7}{60}, P_{22} = \frac{11}{60}$，因此 $P = \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$。

$\Delta_1 = |P_{11}| = \frac{23}{60} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{70}{60} & \frac{11}{60} \end{vmatrix} = \frac{204}{60^2} > 0$，因此，对称矩阵 P 具有正定性，所以系统的平衡状态是大范围渐近稳定的。

10.17 已知线性定常系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x$$

试分析该系统在平衡状态的稳定性。

8-20 已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X$，试分析系统在平衡状态 $X_e = 0$ 处的稳定性。

解 $X_e = 0$，由 $A^{T}P + PA = -I$ 有

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其中 $P_{12} = P_{21}$，解得 $P_{11} = \frac{2}{5}, P_{21} = P_{12} = -\frac{1}{2}, P_{22} = -\frac{3}{20}$，并且 $\Delta_1 = P_{11} = \frac{2}{5} > 0, \Delta = |P| = -0.062\,5$，所以系统不稳定。

10.28　已知线性定常离散系统的状态方程为

$$x_1(k+1)=x_1(k)+3x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=-3x_1(k)-2x_2(k)-3x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=x_1(k)$$

试分析该系统的平衡状态的稳定性。

解　由题知 $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\-3&-2&-3\\1&0&0\end{bmatrix}$，应用 MATLAB 中的 eig 函数求得 A 的特征根为 $0.117\,3\pm 2.697\,4\mathrm{i},-1.234\,6$。特征根在 z 平面单位圆外，系统不稳定；或取 $Q=I$，P 是对称阵，由 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$，得 $P=\begin{bmatrix}-0.246\,3&-0.256\,4&-0.5\\-0.256\,4&-0.628\,2&-1.461\,5\\-0.5&-1.461\,5&-4.653\,8\end{bmatrix}=-0.246\,3<0$，$P$ 不是正定的，故系统不稳定。

10.29　已知线性定常离散系统的齐次状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$$

其中系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{K}{2}&0\end{bmatrix}$$

以及 $K>0$。试确定给定系统在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 处渐近稳定时参数 K 的取值范围。

8－23　已知线性定常离散系统的齐次状态方程为 $X(k+1)=AX(k)$，其中系统矩阵 A 为 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{K}{2}&0\end{bmatrix}$，以及 $k>0$。试确定系统在平衡状态 $X_e=0$ 处渐近稳定时参数 K 的取值范围。

解　$X(k+1)=AX(k)$，$k>0$，$|zI-A|=\begin{vmatrix}z&-1&0\\0&z&-1\\0&\frac{-K}{2}&z\end{vmatrix}=z^3-\frac{K}{2}z=z(z^2-\frac{K}{2})=0$，解得 $z_1=0$，$z_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{K}{2}}$，若系统稳定，则 $\sqrt{\frac{K}{2}}<1$，$K<2$，又 $K>0$，即 $0<K<2$。

或取 $Q=I$，$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{12}&p_{22}&p_{23}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\end{bmatrix}$，由 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$，得 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{2+\frac{K}{4}}{1-\frac{1}{4}K^2}&0\\0&0&\dfrac{3}{1-\frac{1}{4}K^2}\end{bmatrix}$，欲使 P 为正定，只要 $1-\frac{1}{4}K^2>0$，即 $K<2$。