自动控制理论 A 作业 12

2019 年 12 月 21 日

1 考虑单位反馈系统，其开环传递函数如下，

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

当取 $r(t)=2\sin t$ 时，系统的稳态输出

$$c_{ss}(t) = 2\sin(t-45°)$$

试确定系统参数 ω_n，ζ。

解：根据公式（5-16）和公式（5-17）

得到：$c_{ss}(t) = A|G_B(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi+\angle G_B(j\omega))$

其中：$G_B(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

所以：$|G_B(j\omega)| = \dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

$$\angle G_B(j\omega) = -\arctan\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}$$

根据题目给定的条件：$\omega=1\ A=2$

所以：$|G_B(j\omega)| = \dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-1)+(2\zeta\omega_n)^2}} = 1$　　（1）

$\angle G_B(j\omega) = -\arctan\dfrac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2} = -\arctan\dfrac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2-1} = -45^0$　　（2）

由式（1）得 $\omega_n^4 = (\omega_n^2-1)+(2\zeta\omega_n)^2$

即：$2\omega_n^2-4\zeta^2\omega_n^2-1=0$　　（3）

由式（2）得 $\arctan\dfrac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2-1} = 45^0$

即：$\omega_n^2-2\zeta\omega_n-1=0$　　（4）

联立方程（3）和（4），解方程得：$\omega_n=1.848$　　$\xi=0.6532$

2 绘制下列传递函数的对数幅频渐近特性曲线

(1) $G(s)=\dfrac{2}{(2s+1)(8s+1)}$;

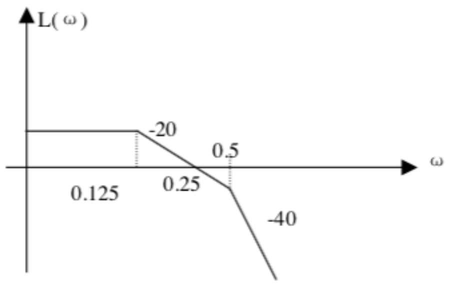
(2) $G(s)=\dfrac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$;

(3) $G(s)=\dfrac{8\left(\dfrac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left(\dfrac{s}{2}+1\right)}$;

(4) $G(s)=\dfrac{10\left(\dfrac{s^2}{400}+\dfrac{s}{10}+1\right)}{s(s+1)\left(\dfrac{s}{0.1}+1\right)}$。

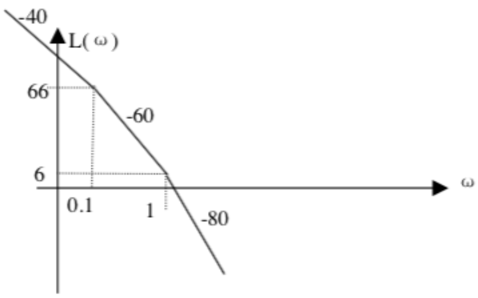
解:(1)系统的交接频率为 0.125 和 0.5,低频段渐近线的斜率为-0,且过(0.125, 6dB)点，截止频率为$\omega_c=0.25$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



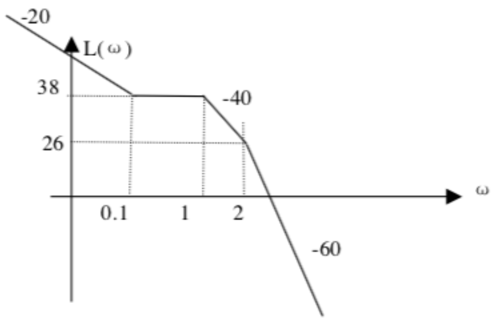
(2) 系统的交接频率为 0.1 和 1，低频段渐近线的斜率为-40，且过（0.1, 66dB）和（1, 6dB）点，截止频率为$\omega_c=2.1$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



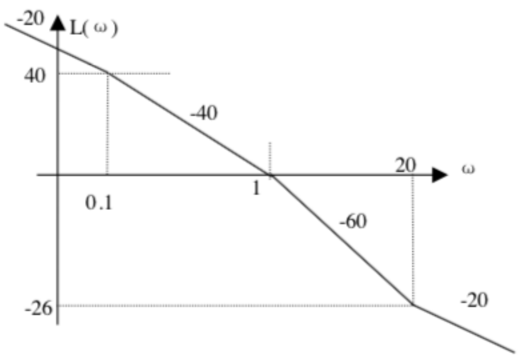
（3）系统的交接频率为 0.1　 1　2，低频段渐近线的斜率为-20，且过（0.1, 38dB）点，截止频率为 $\omega_c = 5.43$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



（4）系统的交接频率为 0.1　1　20，低频段渐近线的斜率为-20，且过（0.1, 40dB）点，截止频率为 $\omega_c = 1$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



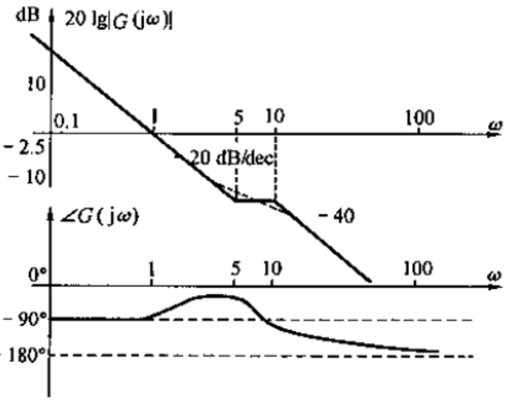
以下题目见哈工大教材第五章习题（P 272～273）

5－2　设某控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{75(0.2s+1)}{s(s^2+16s+100)}$，试绘制该系统的 Bode 图，并确定其剪切频率 ω_c 之值。

解　(1)绘制系统的 Bode 图之前，先将构成传递函数的各串联环节化成典型环节所具有的标准形式

$$\frac{0.75(0.2s+1)}{s[(0.1)^2s^2+2\times0.8\times0.1s+1]}$$

则有，开环增益 $K=0.75\ \mathrm{s}^{-1}$，一阶微分环节的时间常数 $\tau=0.2\ \mathrm{s}$，振荡环节的时间常数 $T=0.1\ \mathrm{s}$ 及阻尼比 $\zeta=0.8$，转折频率分别为 $\dfrac{1}{\tau}=5\ \mathrm{rad/s}$ 及 $\dfrac{1}{T}=10\ \mathrm{rad/s}$。绘制系统渐近幅频特性及相频特性如题5－2解图中的实线所示。图中的虚线为修正后的精确幅频特性，转折频率处的修正值为 $20\lg\dfrac{1}{2\zeta}=-4.08$。并且 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1}=20\lg K=-2.5\ \mathrm{dB}$。



题 5－2 解图

(2)对数幅频特性 $20\lg\left|\dfrac{K}{\mathrm{j}\omega_c}\right|=20\lg0.75-20\lg\omega_c=0$，求得 $\omega_c=0.75\ \mathrm{rad/s}$。

5－3　设某系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K\mathrm{e}^{-0.1s}}{s(s+1)(0.1s+1)}$，试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c=5\ \mathrm{rad/s}$ 时的开环增益 K。

解　该系统的开环幅频特性为

$$|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=\left|\frac{K}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}0.1\omega)}\right|=\frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\cdot\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}$$

对于时滞环节 $\mathrm{e}^{-\tau s}$，有 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau\omega}|=1$。所以求取其幅频特性 $|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|$ 时，可不考虑时滞环节。

根据剪切频率的定义得

$$|G(\mathrm{j}\omega_c)H(\mathrm{j}\omega_c)|=1$$

因此，将 $\omega_c=5\ \mathrm{rad/s}$ 代入上式，解出开环增益 $K=28.5\ \mathrm{s}^{-1}$。

5－4　若系统的单位阶跃响应为

$$c(t)=1-1.8\mathrm{e}^{-4t}+0.8\mathrm{e}^{-9t}\quad(t\geqslant0)$$

试求取该系统的频率响应。

解　由响应表达式得 $c(0)=0$ 和 $\dot{c}(0)=0$。则求得该系统的传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

根据解析法求得该系统的频率响应为

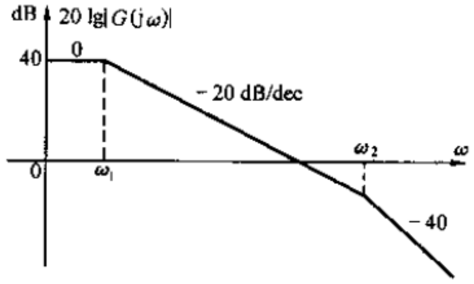
$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\left(1+\mathrm{j}\dfrac{1}{4}\omega\right)\left(1+\mathrm{j}\dfrac{1}{9}\omega\right)}$$

5－5　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－5 图所示。试求取该系统的开环传

递函数。

解 从题 5－5 图所示 Bode 图的幅频特性的斜率变化可知，开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节及两个惯性环节构成，其时间常数分别为 $\frac{1}{\omega_1}$ 和 $\frac{1}{\omega_2}$，则

$$G(s)=\frac{K}{\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$$



题 5－5 图

其中开环增益 K 可由 $20\lg K=40$ dB 求得。

因此得

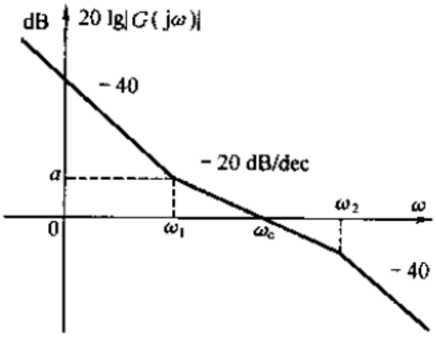
$$K=100$$

所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{100}{\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$。

5－6 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－6 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 从题 5－6 图所示 Bode 图的幅频特性的斜率及其斜率变化可知，开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、两个积分环节、一阶微分环节及惯性环节构成。一阶微分环节及惯性环节的时间常数分别 $\frac{1}{\omega_1}$ 和 $\frac{1}{\omega_2}$。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

$$G(s)=\frac{K\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_2}+1\right)}$$



题 5－6 图

设图所示对数幅频特性的低频段可用传递函数 K/s^2 来描述，则其对数幅频特性为

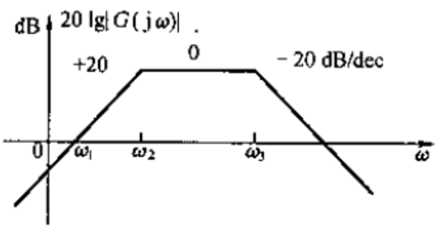
$$L_1(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega^2}=20\lg K-20\lg\omega^2$$

并且 $\frac{a-0}{\lg\omega_1-\lg\omega_c}=-20$，求得 $a=20\lg\frac{\omega_c}{\omega_1}$。因为 $a=L_1(\omega_1)$，求得 $K=\omega_1\cdot\omega_c$。

所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{\omega_1\cdot\omega_c\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$。

5－7 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－7 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解 由图可知，系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、微分环节及两个惯性环节构成。两个惯性环节的时间常数分别为 $1/\omega_2$ 和 $1/\omega_3$。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

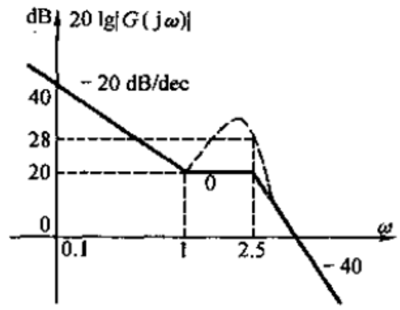


题 5－7 图

$$G(s)=\frac{Ks}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$$

题 5－7 图所示幅频特性低频段可用式 $L(\omega)=20\lg K\omega$ 表示，由图得 $L(\omega_1)=0$ dB。则求得 $K=\frac{1}{\omega_1}$。所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{\frac{1}{\omega_1}s}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$。

5－8　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－8 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



题 5－8 图

解　由图可知，系统的开环传递函数由放大环节、积分环节、一阶微分环节及振荡环节构成。一阶微分环节及振荡环节的时间常数分别为 1 和 0.4。开环传递函数可写成如下形式

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s[(0.4)^2s^2+2\zeta\times0.4s+1]}$$

幅频特性低频段可用下式表示 $L_1(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega}$，并且 $L_1(1)=20$，则求得 $K=10\ \mathrm{s}^{-1}$。

振荡环节在其转折频率 $\omega_n=2.5$ rad/s 处的修正值为 $20\lg\frac{1}{2\zeta}=28-20=8$ dB，解出阻尼比 $\zeta=0.2$。所以该系统的开环传递函数为

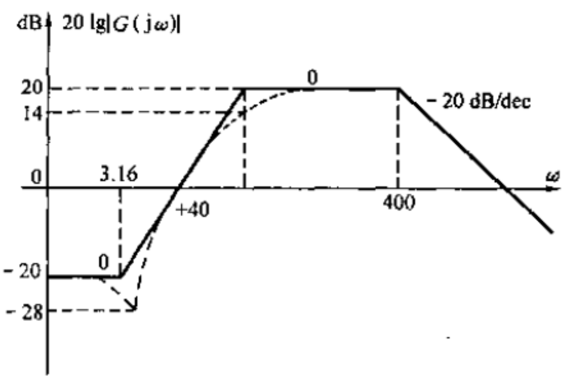
$$G(s)=\frac{10(s+1)}{s(0.16s^2+0.16s+1)}$$

5－9　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－9 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解　由图可知，系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、二阶微分环节、振荡环节和惯性环节构成。开环传递函数 $G(s)$ 可写成如下形式

$$G(s)=\frac{K(\tau^2s^2+2\zeta_1\tau s+1)}{(T^2s^2+2\zeta_2Ts+1)(T_1s+1)}$$

其中 $1/\tau=3.16$ rad/s，$1/T=31.6$ rad/s，$1/T_1=400$ rad/s。二阶微分环节和振荡环节相对应的转折频率间幅频特性的斜率为 $+40$ dB/dec，而上述两转折频率处的对数幅值之差为 $+40$ dB，可见振荡环节的转折频率为 31.6 rad/s。



题 5－9 图

振荡环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg\frac{1}{2\zeta_2}=14-20=-6$ dB，解出阻尼比 $\zeta_2=1$。

二阶微分环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg2\zeta=-28+20=-8$ dB，解出阻尼比 $\zeta_1=0.2$。

根据幅频特性低频段求得 $20\lg K = -20\ \mathrm{dB}$，$K = 0.1$。

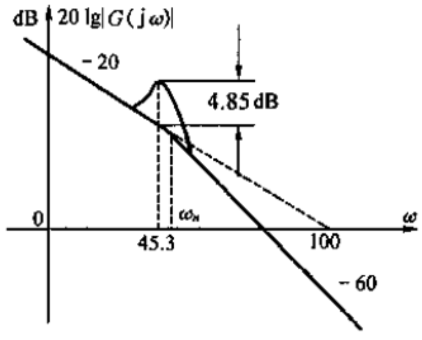
所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{0.1\left[\left(\dfrac{1}{3.16}\right)^2 s^2+2\times 0.2\times\dfrac{1}{3.16}s+1\right]}{\left[\left(\dfrac{1}{31.6}\right)^2 s^2+2\times 1\times\dfrac{1}{31.6}s+1\right]\left(\dfrac{1}{400}s+1\right)}$。

5－10　已知最小相位系统 Bode 的幅频特性如题 5－10 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解　根据图中所示幅频特性各段斜率的变化，可写出具有如下形式的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(T^2s^2+2\zeta Ts+1)}$$

幅频特性低频段可用式 $L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega$ 表示，由图得 $L(100)=0$，则求得 $K=100$。



题 5－10 图

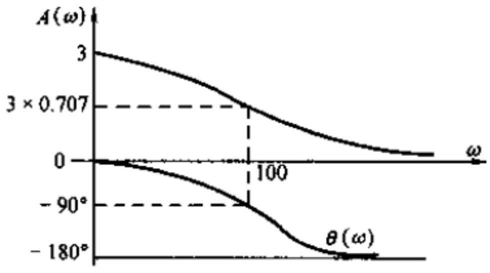
对于振荡环节，其谐振峰值处的修正值为 $20\lg\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=4.85$，解出振荡环节的阻尼比 $\zeta=0.3$。并且谐振频率 $\omega_m=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=45.3\ \mathrm{rad/s}$，解出的无阻尼自振频率 $\omega_n=50\ \mathrm{rad/s}$，则振荡环节的时间常数 $T=\dfrac{1}{50}=0.02\ \mathrm{s}$。最后求得开环传递函数为

$$G(s)=\frac{100}{s(0.000\,4s^2+0.012s+1)}$$

5－11　已知某闭环系统的幅频、相频特性如题5－11图所示。试写出该闭环系统的传递函数。

解　(1)从题 5－11 图所示相频特性的形状及相角变化规律看出该系统是一个二阶系统，其传递函数的一般形式为

$$\Phi(s)=\frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



题 5－11 图

求得相应的幅频与相频特性分别为

$$|\Phi(j\omega)|=A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{(\omega^2-\omega_n^2)+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

$$\angle\Phi(j\omega)=\theta(\omega)=-\arctan\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega^2-\omega_n^2}$$

(2)由相频特性有 $\theta(\omega_n)=-\dfrac{\pi}{2}$，因此求得无阻尼自振频率 $\omega_n=100\ \mathrm{rad/s}$；

(3)由幅频特性有 $A(0)=3$，因此求得 $K=3\times10^4$；

(4)由幅频特性有 $A(\omega_n)=3\times0.707$，解出阻尼比 $\zeta=\sqrt{2}/2$。

根据上述计算结果，求得该闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{3\times10^4}{s^2+\sqrt{2}\times100s+10^4}$$