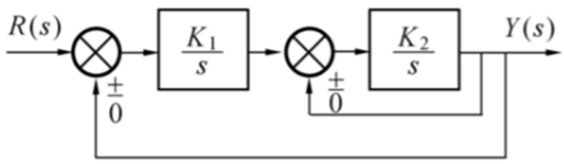
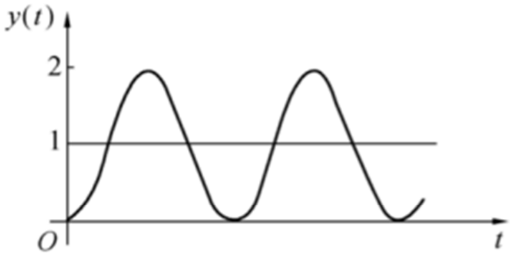
自动控制理论 A 作业 6

2019 年 10 月 17 日

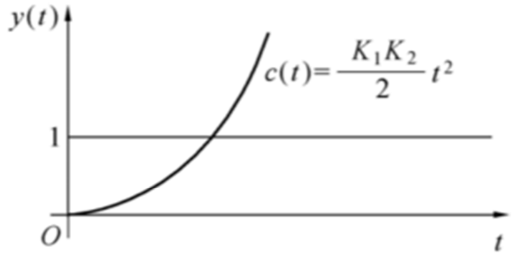
3.1　设有二阶系统，其方框图如题 3.1(a) 图所示。图中符号“+”、“-”分别表示取正反馈与负反馈，“0”表示无反馈；K_1 与 K_2 为常值增益，且 K_1、$K_2 > 0$。题 3.1(b) ~ (f) 图所示为在该系统中可能出现的单位阶跃响应曲线。试确定与每种单位阶跃响应相对应的主反馈及内反馈的极性，并说明理由。



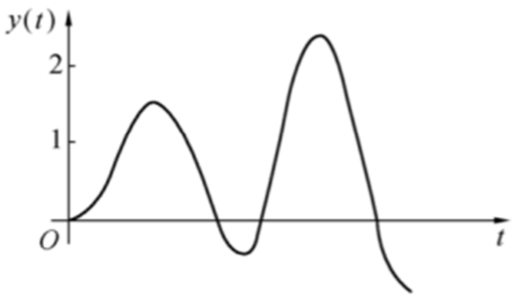
(a)



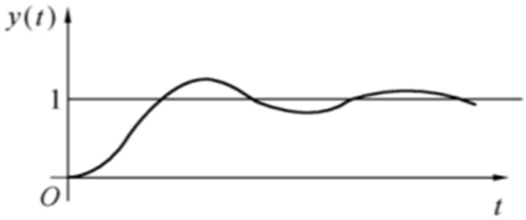
(b)



(e)



(c)



(f)

3.1 计算得到

反馈类型	内0外0	内0外负	内0外正	内负外负	内负外0	内负外正
传递函数	$\frac{K_1K_2}{s^2}$	$\frac{K_1K_2}{s^2+K_1K_2}$	$\frac{K_1K_2}{s^2-K_1K_2}$	$\frac{K_1K_2}{s^2+sK_2+K_1K_2}$	$\frac{K_1K_2}{s^2+sK_2}$	$\frac{K_1K_2}{s^2+sK_2-K_1K_2}$

反馈类型	内正外0	内正外负	内正外正
传函	$\frac{K_1K_2}{s^2-sK_2}$	$\frac{K_1K_2}{s^2-sK_2+K_1K_2}$	$\frac{K_1K_2}{s^2-sK_2-K_1K_2}$

标准形式 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\Phi(s)$

图b为等幅振荡，$\xi=0$，ω_n^2前为正号 ⇒ 内部零反馈，外部负反馈 ✓

图c为发散的不稳定系统，$\xi<0$，ω_n^2为正 ⇒ 内部正反馈，外部负反馈 ✓

图e的响应 $c(t)=\frac{K_1K_2}{2}t^2$

$\Downarrow$

脉冲响应 $y_\delta(t)=c'(t)=K_1K_2t$

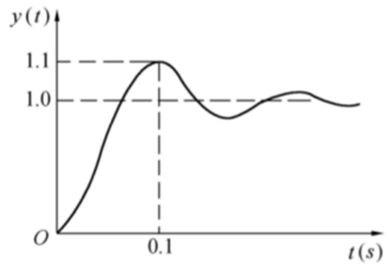
$\Downarrow$

传递函数 $\Phi(s)=L(K_1K_2t)=\frac{K_1K_2}{s^2}$ ⇒ 内外均为零反馈 ✓

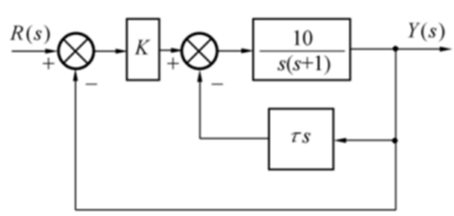
图f为稳定的系统，阶跃响应收敛于1，$\xi>0$，ω_n^2前为正号 ⇒ 内外均为负反馈 ✓

3.2　由实验测得二阶系统的单位阶跃响应 $y(t)$ 如题 3.2 图所示。试根据已知的单位阶跃响应 $y(t)$ 计算系统参数 ζ 及 ω_n。

3.3　已知控制系统方框图如图题 3.3 所示。要求该系统的单位阶跃响应 $y(t)$ 具有超调量 $\sigma\% = 16.3\%$ 和峰值时间 $t_p = 1$ s。试确定前置放大器的增益 K 及内反馈系数 τ。



题 3.2 图　二阶系统的单位阶跃响应



题 3.3 图　系统方框图

3.5　设二阶系统的单位阶跃响应 $y(t)$ 如题 3.2 图所示。已知该系统属单位负反馈控制形式，试确定其开环传递函数。

解得结果约为 t=13.7753s

3.2

$$\begin{cases} t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.1s \\ \sigma_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \dfrac{1.1-1}{1} = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 10\pi \\ \omega_n\zeta = -10\ln 0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 38.95\ rad/s \\ \zeta = 0.5912. \end{cases}$$

3.3 化简框图，得到闭环传函

$$\Phi(s) = \frac{10K}{s^2+(10\tau+1)s+10K}$$

$$\because \sigma_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\% \Rightarrow \zeta \approx 0.5$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1s \xrightarrow{代入\zeta=0.5} \omega_n = 3.6276\ rad/s$$

$$10K = \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{10K}$$

$$10\tau+1 = 2\zeta\omega_n \Rightarrow \zeta = \frac{10\tau+1}{2\sqrt{10K}}$$

解出 $K = 1.316$，$\tau = 0.26276$.

3.5 标准形式的开环传函 $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s}$ 由3.2知 $\begin{cases} \omega_n = 38.95\ rad/s \\ \zeta = 0.5912 \end{cases}$

代入得 $G(s) = \dfrac{1517.1}{s^2+46.05s}$

3.6 已知系统的单位脉冲响应为 $h(t) = 3e^{-0.2t} + 2e^{-0.5t}$

(1) 求系统的传递函数；

(2) 确定系统的单位阶跃响应达到稳态值的 95%所需的时间。

3.6 (1) 求拉氏变换得传函 $G(s) = L[h(t)] = \dfrac{3}{s+0.2} + \dfrac{2}{s+0.5}$

$$= \frac{5s+1.9}{s^2+0.7s+0.1}$$

(2) 将 $\frac{1}{s}G(s)$ 写成分部分式 有 $\frac{1}{s}G(s) = \dfrac{19}{s} - \dfrac{15}{s+0.2} - \dfrac{4}{s+0.5} = Y(s)$ 阶跃响应的拉氏变换形式.

作逆变换 $y(t) = 19 - 15e^{-0.2t} - 4e^{-0.5t}$

达到稳态值(19)的95%所需时间t满足 $15e^{-0.2t} + 4e^{-0.5t} = 0.95$.

解得结果约为 t=13.7753s

3.7 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{as+1}{s(s+b)}$，式中 $a=0.4$，$b=0.5$，要求：

(1) 给出系统的开环零点及开环极点；

(2) 求出系统的闭环零点及闭环极点；

(3) 确定系统阻尼比 ξ 及无阻尼震荡频率 ω_n；

(4) 求出系统单位阶跃响应的 $\sigma_p,\ t_r, t_p, t_s$；

(5) 求 $a=0$ 时系统的动态性能指标 $\sigma_p,\ t_r, t_p, t_s$.

3.7

(1) 开环零点：$s=-\frac{1}{a}=-2.5$，开环极点：$s_1=0$，$s_2=-b=-0.5$

(2) 闭环传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{as+1}{s^2+(a+b)s+1}=\dfrac{0.4s+1}{s^2+0.9s+1}$

闭环零点 $s=-\frac{1}{a}$

$=-2.5$

闭环极点 $\begin{cases} s_1=\dfrac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2-4}}{2}=-0.45+0.89j \\ s_2=\dfrac{-(a+b)-\sqrt{(a+b)^2-4}}{2}=-0.45-0.89j \end{cases}$

(3) ξ 和 ω_n 仅与分母有关

有 $\begin{cases} 2\xi\omega_n=0.9 \\ \omega_n^2=1 \end{cases} \Rightarrow \omega_n=1\,rad/s,\ \xi=0.9/2=0.45$

(5) $a=0$，$\Phi(s)=\dfrac{1}{s^2+0.5s+1}$

$\omega_n=1$，$\xi=0.25$

$\sigma_p=e^{-\frac{0.25\pi}{\sqrt{1-0.25^2}}}\times 100\%=44.63\%$

$t_r=\dfrac{\pi-\arccos\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=1.883\,s$

$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=3.245\,s$

$t_s=\dfrac{3}{\xi\omega_n}=12\,s\ (\Delta=0.05)$

若取△=0.02，则 ts=16s

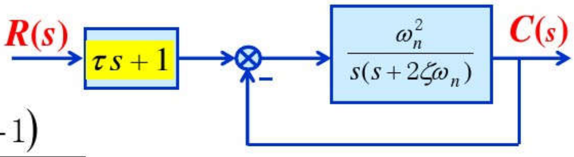
选做 3.7-（4）

带零点的二阶系统时域响应公式有所变化。附参考资料：

同学们计算的过程中可以结合公式和图示来进行运算。利用反正切来求角 ϕ 和 β。

五、具有零点的二阶系统分析

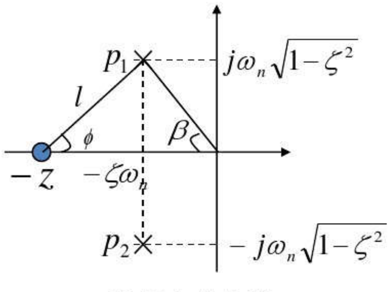
系统结构为



$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

τ：时间常数

-z=-1/τ：闭环零点



零极点分布图

系统(0<ζ<1)单位阶跃响应为：

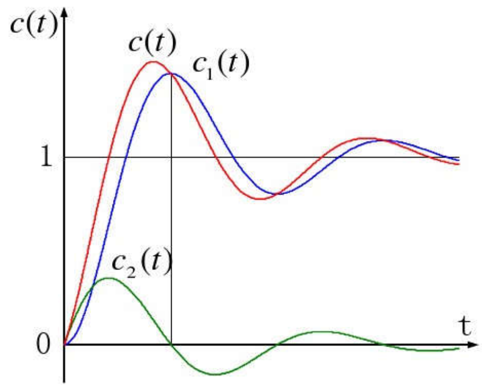
$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}+\frac{\omega_n^2\tau}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=C_1(s)+C_2(s)$$

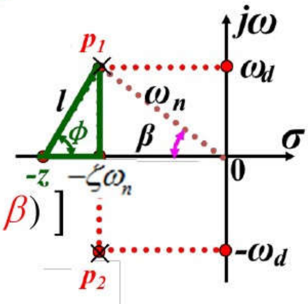
$$C_1(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s} \Rightarrow c_1(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$$C_2(s)=\frac{\omega_n^2\tau}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{s}{z}C_1(s) \Rightarrow c_2(t)=\tau\frac{dc_1(t)}{dt}=\frac{1}{z}\frac{dc_1(t)}{dt}$$

$$c(t)=c_1(t)+\frac{1}{z}\frac{dc_1(t)}{dt}$$



由图可见:$c_2(t)$使得$c(t)$比$c_1(t)$响应迅速且有较大超调量。



$$c_1(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

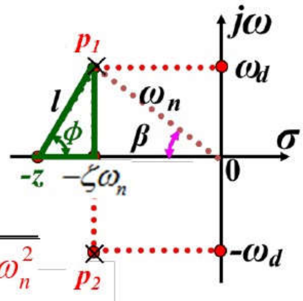
$$\frac{dc_1(t)}{dt}=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\zeta\omega_n\sin(\omega_d t+\beta)-\omega_d\cos(\omega_d t+\beta)\right]$$

$$c(t)=c_1(t)+\frac{1}{z}\frac{dc_1(t)}{dt}$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{z}\left[(z-\zeta\omega_n)\sin(\omega_d t+\beta)+\omega_d\cos(\omega_d t+\beta)\right]$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{l}{z}\left[\frac{(z-\zeta\omega_n)}{l}\sin(\omega_d t+\beta)+\frac{\omega_d}{l}\cos(\omega_d t+\beta)\right]$$

www.xidian.edu.cn
第三章 时域分析法



系统参数间的关系：

$$\phi=\arctan\frac{\omega_d}{z-\zeta\omega_n}$$

$$l=\left|-z-p_1\right|=\sqrt{(z-\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}=\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^2}$$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{l}{z}\left[\frac{(z-\zeta\omega_n)}{l}\sin(\omega_d t+\beta)+\frac{\omega_d}{l}\cos(\omega_d t+\beta)\right]$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{l}{z}\left[\cos\phi\sin(\omega_d t+\beta)+\sin\phi\cos(\omega_d t+\beta)\right]$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{l}{z}\sin(\omega_d t+\beta+\phi)$$

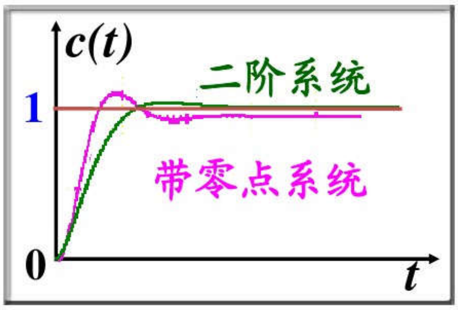
可求得系统的性能指标： $\sigma\% = \frac{l}{z} e^{\frac{-\zeta(\pi-\phi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$

$$t_r = \frac{\pi-(\beta+\phi)}{\omega_d} = \frac{\pi-(\beta+\phi)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

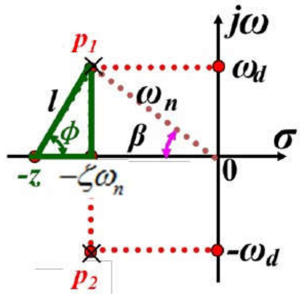
$$t_p = \frac{\pi-\phi}{\omega_d} = \frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\begin{cases} t_s \approx \left(3+\ln\frac{l}{z}\right)\frac{1}{\zeta\omega_n}, \Delta = 5\% \\ t_s \approx \left(4+\ln\frac{l}{z}\right)\frac{1}{\zeta\omega_n}, \Delta = 2\% \end{cases}$$

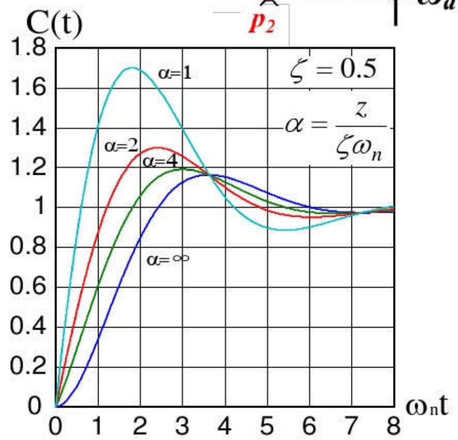
增加零点后，上升时间和峰值时间缩短，系统的初始响应加快，系统的超调量增大，振荡性增加。



为了定量说明附加零点对二阶系统性能的影响，用参数α表示附加零点与典型二阶系统复数极点至虚轴距离之比，即

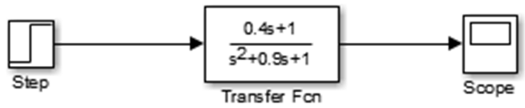


$$\alpha = \frac{z}{\zeta\omega_n}$$

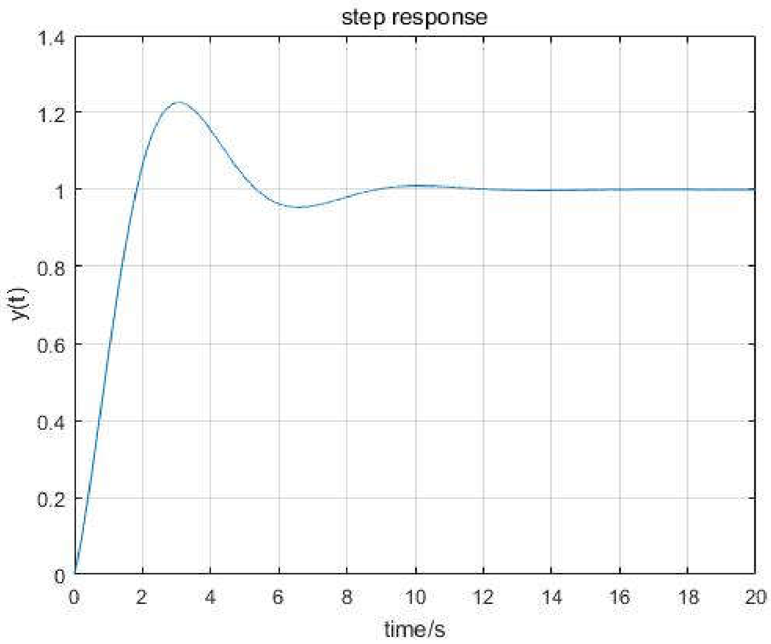


- 零点从极点左侧向极点越靠近，影响越大；
- 当零点距离虚轴很远时（$\alpha>5$），零点的影响可以忽略。

MATLAB 实现：（Simulink）



图像如下：



MATLAB 计算参数：

代码如下：

```
x=0.45; wn=1; wd=wn*sqrt(1-x^2);z=2.5;
l=sqrt(0.89^2+(2.5-0.45)^2)
beta=atan(0.89/0.45)
phi=atan(0.89/(2.5-0.45))
tr=(pi-(beta+phi))/wd
tp=(pi-phi)/wd
ts1=(3+log(l/z))/(x*wn)  %delta=0.05
ts2=(4+log(l/z))/(x*wn)  %delta=0.02
C=(l/z)*exp(-x*(pi-phi)/sqrt(1-x^2))
plot(ScopeData(:,1),ScopeData(:,2))
grid;
xlabel('time/s');
ylabel('y(t)');
title('step response');
```

结果如下：

```
>> hw6_1
```

l =

    2.234860174597060

beta =

    1.102664442919275

phi =

    0.409592104196527

tr =

    1.824506167689516

tp =

    3.059253295065138

ts1 =

    6.417528738961718

ts2 =

    8.639750961183939

C =

    0.225648669224607