自动控制理论 A 作业 7

2019 年 10 月 29 日

8.6　试根据下列系统矩阵求取线性定常系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$　　　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}$

解　(1) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,\ \boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}&\frac{t^3}{6}\\0&1&t&\frac{t^2}{2}\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}$。

(2) $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}&0&0&0\\0&e^{\lambda t}&te^{\lambda t}&\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\\0&0&e^{\lambda t}&te^{\lambda t}\\0&0&0&e^{\lambda t}\end{bmatrix}$。

8.7　设线性定常系统的齐次状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，且已知

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{bmatrix}\quad 当\ \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}\\-e^{-t}\end{bmatrix}\quad 当\ \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

试求取该系统的系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

解　齐次方程的解为 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(0)$，则

$$\begin{bmatrix}e^{-2t}&2e^{-t}\\-e^{-2t}&-e^{-t}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}&2e^{-t}\\-e^{-2t}&-e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}^{-1}$$

由于 $\mathrm{rank}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=2$，所以 $\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2\\1&1\end{bmatrix}$。

最终求得给定系统的状态转移矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}&2e^{-t}-2e^{-2t}\\-e^{-t}+e^{-2t}&-e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\dot{\Phi}(t)\big|_{t=0}=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+2e^{2t}&-2e^{-t}+4e^{-2t}\\-e^{t}-2e^{-2t}&e^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}0&2\\-1&-3\end{bmatrix}$$

8.9 已知线性定常系统的齐次状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x$$

试确定与状态 $x(t) = [2 \quad 5]^{\mathrm{T}}$ 相对应的初始状态 $x(0)$。

解(1)应用对角化法计算 $\Phi(t)$。

系统矩阵 A 具有友矩阵形式，其特征值 $|sI - A| = s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2) = 0$，求得 $s_1 = 1, s_2 = -2$。则 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, e^{P^{-1}APt} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$，最后求得

$$\Phi(t) = e^{At} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{t} + e^{-2t} & e^{t} - e^{-2t} \\ 2e^{t} - 2e^{-2t} & e^{t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(2)
$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \Phi^{-1}(t)X(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{2t} \\ 3e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

8.11 已知线性定常系统的状态方程及输出方程分别为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] x$$

设当 $t = 0$ 时输入 $u(t) = 1(t)$。试计算初始条件

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下的系统输出 $y(t)$。

第一种方法：拉普拉斯变换法：

$$X(s) = (sI-A)^{-1}X(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}.$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} + \frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} 2 \\ 2s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad y(t) = [1 \quad 0]x = 1 - e^{-t}$$

第二种方法：积分法.

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=Ce^{At}x(0)+C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}* & *\\ * & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\underline{\int_0^t[1\ \ 0]\begin{bmatrix}* & *\\ * & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}d\tau}$$

$$y(t)=e^{-t}-e^{-2t}+\underline{2\int_0^t\left(e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau}$$

$$=e^{-t}-e^{-2t}+1-2e^{-t}+e^{-2t}$$

$$=1-e^{-t}$$

$$=2\int_0^t\left(e^{-t}e^{\tau}-e^{-2t}e^{2\tau}\right)d\tau$$

$$=2e^{-t}e^{\tau}\Big|_0^t-2e^{-2t}\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t$$

$$=2e^{-t}(e^{t}-1)-e^{-2t}(e^{2t}-1)$$

$$=2-2e^{-t}-1+e^{-2t}$$

$$=1-2e^{-t}+e^{-2t}$$

8.13 设描述线性定常离散系统的差分方程为

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$$

试选取

$$x_1(k)=y(k)$$
$$x_2(k)=y(k+1)$$

为一组状态变量，写出该系统的状态方程，并求其解。已知 $u(t)=1(t)$。

8.16 试求取下列状态方程的离散化方程。

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$　　　(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$