自动控制理论 A 作业 11

1 考虑单位反馈系统，其开环传递函数如下，

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

当取 $r(t)=2\sin t$ 时，系统的稳态输出

$$c_{ss}(t)=2\sin(t-45°)$$

试确定系统参数 ω_n，ζ。

解：根据公式（5-16）和公式（5-17）

得到：$c_{ss}(t)=A|G_B(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi+\angle G_B(j\omega))$

其中：$G_B(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

所以：$|G_B(j\omega)|=\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

$$\angle G_B(j\omega)=-\arctan\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}$$

根据题目给定的条件：$\omega=1\ A=2$

所以：$|G_B(j\omega)|=\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}=\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-1)+(2\zeta\omega_n)^2}}=1$ （1）

$\angle G_B(j\omega)=-\arctan\dfrac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}=-\arctan\dfrac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2-1}=-45^0$ （2）

由式（1）得 $\omega_n^4=(\omega_n^2-1)+(2\zeta\omega_n)^2$

即：$2\omega_n^2-4\zeta^2\omega_n^2-1=0$ （3）

由式（2）得 $\arctan\dfrac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2-1}=45^0$

即：$\omega_n^2-2\zeta\omega_n-1=0$ （4）

联立方程（3）和（4），解方程得：$\omega_n=1.848$　　$\xi=0.6532$

2 绘制下列传递函数的对数幅频渐近特性曲线

(1) $G(s)=\dfrac{2}{(2s+1)(8s+1)}$；

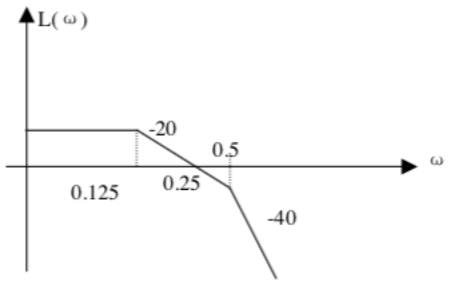
(2) $G(s)=\dfrac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$；

(3) $G(s)=\dfrac{8\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$；

(4) $G(s)=\dfrac{10\left(\frac{s^2}{400}+\frac{s}{10}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}$。

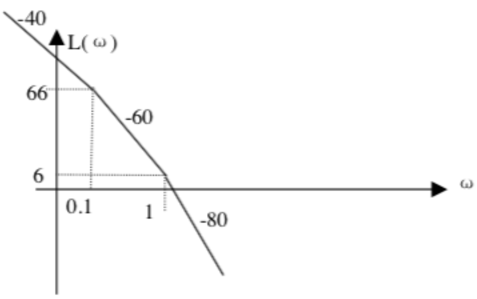
解:（1）系统的交接频率为 0.125 和 0.5，低频段渐近线的斜率为-0，且过（0. 125, 6dB）点，截止频率为 $\omega_c=0.25$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



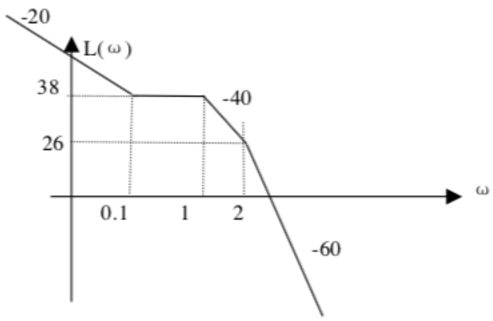
（2）系统的交接频率为 0.1 和 1，低频段渐近线的斜率为-40，且过（0. 1, 66dB）和（1, 6dB）点，截止频率为 $\omega_c=2.1$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



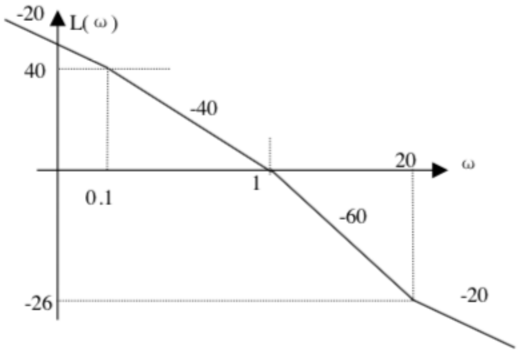
（3）系统的交接频率为0.1　1　2，低频段渐近线的斜率为-20，且过（0.1,38dB）点，截止频率为$\omega_c = 5.43$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



（4）系统的交接频率为0.1　1　20，低频段渐近线的斜率为-20，且过（0.1,40dB）点，截止频率为$\omega_c = 1$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



5－1　一环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{T_1s+1}{T_2s-1}\quad(1>T_1>T_2>0)$$

试绘制该环节的 Nyquist 图(幅相频率特性)和 Bode 图(对数频率特性)。

解　该环节的频率响应为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1+\mathrm{j}T_1\omega}{-1+\mathrm{j}T_2\omega}$$

(1)幅频特性和相频特性分别为

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}},\angle G(\mathrm{j}\omega)=\arctan(T_1\omega)+(-180^\circ+\arctan(T_2\omega))$$

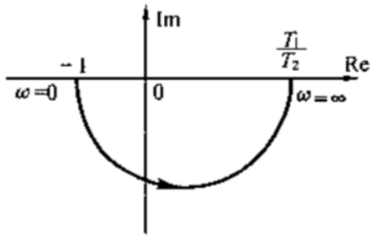
当 $\omega=0$ 时，$|G(\mathrm{j}0)|=1,\angle G(\mathrm{j}0)=-180^\circ$；当 $\omega=\infty$ 时，$|G(\mathrm{j}\infty)|=\frac{T_1}{T_2},\angle G(\mathrm{j}\infty)=0^\circ$。

给定环节的 Nyquist 图如题 5－1 解图(1)所示。

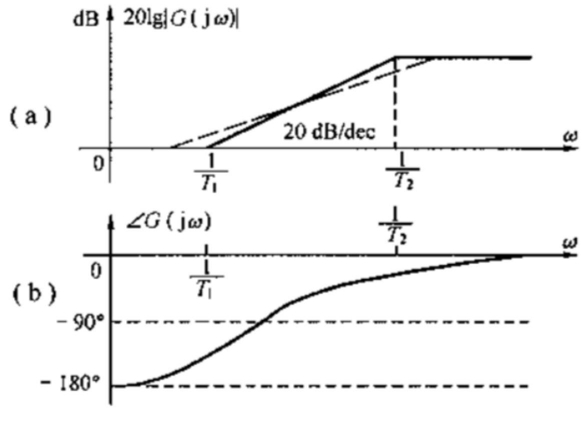
(2)对数幅频特性为

$$20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|=20\lg\sqrt{1+(T_1\omega)^2}+20\lg\frac{1}{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}$$

其中$\frac{1}{T_1}$与$\frac{1}{T_2}$分别为一阶微分环节及不稳定惯性环节的转折频率。则在频段内画出该环节的对数幅频特性和相频特性如题 5－1 解图(2)(a)，(b)所示。



题 5－1 解图(1)



题 5－1 解图(2)

5－3　设某系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{Ke^{-0.1s}}{s(s+1)(0.1s+1)}$，试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c=5$ rad/s 时的开环增益 K。

解　该系统的开环幅频特性为

$$|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=\left|\frac{K}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}0.1\omega)}\right|=\frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\cdot\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}$$

对于时滞环节 $e^{-\tau s}$，有 $|e^{-\mathrm{j}\tau\omega}|=1$。所以求取其幅频特性 $|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|$ 时，可不考虑时滞环节。

根据剪切频率的定义得

$$|G(\mathrm{j}\omega_c)H(\mathrm{j}\omega_c)|=1$$

因此，将 $\omega_c=5$ rad/s 代入上式，解出开环增益 $K=28.5\ \mathrm{s}^{-1}$。

5－4　若系统的单位阶跃响应为

$$c(t)=1-1.8e^{-4t}+0.8e^{-9t}\quad(t\geqslant 0)$$

试求取该系统的频率响应。

解　由响应表达式得 $c(0)=0$ 和 $\dot{c}(0)=0$。则求得该系统的传递函数 $G(s)$ 为

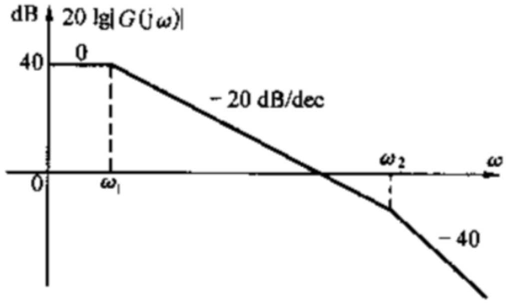
$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

根据解析法求得该系统的频率响应为

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left(1+j\frac{1}{4}\omega\right)\left(1+j\frac{1}{9}\omega\right)}$$

5－5　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－5 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解　从题 5－5 图所示 Bode 图的幅频特性的斜率变化可知，开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节及两个惯性环节构成，其时间常数分别为 $\frac{1}{\omega_1}$ 和 $\frac{1}{\omega_2}$，则



题 5－5 图

$$G(s)=\frac{K}{\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$$

其中开环增益 K 可由 $20\lg K=40$ dB 求得。

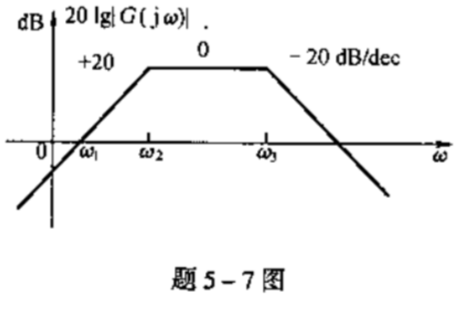
因此得

$$K=100$$

所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{100}{\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}$。

5－7　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－7 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解　由图可知，系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、微分环节及两个惯性环节构成。两个惯性环节的时间常数分别为 $1/\omega_2$ 和 $1/\omega_3$。开环传递函数 $G(s)$ 具有如下形式

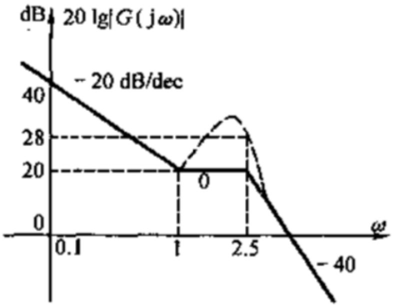


题 5－7 图

$$G(s)=\frac{Ks}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$$

题 5－7 图所示幅频特性低频段可用式 $L(\omega)=20\lg K\omega$ 表示，由图得 $L(\omega_1)=0$ dB。则求得 $K=\frac{1}{\omega_1}$。所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{\frac{1}{\omega_1}s}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$。

5－8　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－8 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



题 5－8 图

解　由图可知，系统的开环传递函数由放大环节、积分环节、一阶微分环节及振荡环节构成。一阶微分环节及振荡环节的时间常数分别为 1 和 0.4。开环传递函数可写成如下形式

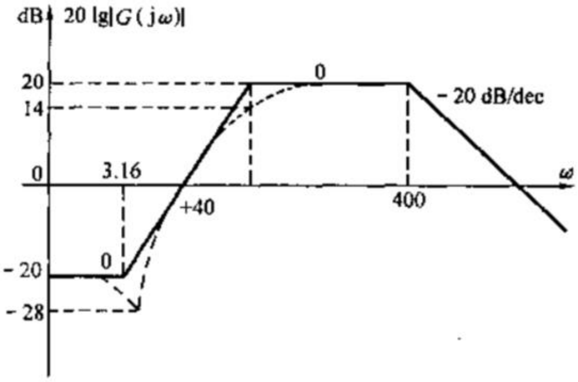
$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s[(0.4)^2s^2+2\zeta\times0.4s+1]}$$

幅频特性低频段可用下式表示 $L_1(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega}$，并且 $L_1(1)=20$，则求得 $K=10\ \mathrm{s}^{-1}$。

振荡环节在其转折频率 $\omega_n=2.5$ rad/s 处的修正值为 $20\lg\frac{1}{2\zeta}=28-20=8$ dB，解出阻尼比 $\zeta=0.2$。所以该系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10(s+1)}{s(0.16s^2+0.16s+1)}$$

5－9　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5－9 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



题 5－9 图

解　由图可知，系统的开环传递函数 $G(s)$ 由放大环节、二阶微分环节、振荡环节和惯性环节构成。开环传递函数 $G(s)$ 可写成如下形式

$$G(s)=\frac{K(\tau^2s^2+2\zeta_1\tau s+1)}{(T^2s^2+2\zeta_2Ts+1)(T_1s+1)}$$

其中 $1/\tau=3.16$ rad/s，$1/T=31.6$ rad/s，$1/T_1=400$ rad/s。二阶微分环节和振荡环节相对应的转折频率间幅频特性的斜率为 +40 dB/dec，而上述两转折频率处的对数幅值之差为 +40 dB，可见振荡环节的转折频率为 31.6 rad/s。

振荡环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg\frac{1}{2\zeta_2}=14-20=-6$ dB，解出阻尼比 $\zeta_2=1$。

二阶微分环节在其转折频率处的修正值为 $20\lg2\zeta=-28+20=-8$ dB，解出阻尼比 $\zeta_1=0.2$。

根据幅频特性低频段求得 $20\lg K=-20$ dB，$K=0.1$。

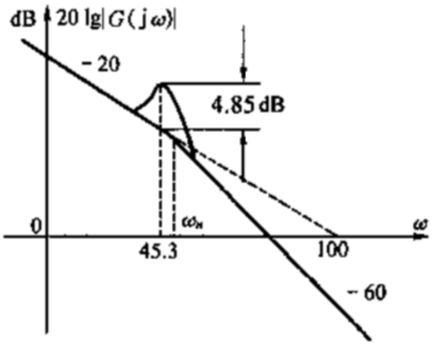
所以该系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{0.1\left[\left(\frac{1}{3.16}\right)^2s^2+2\times0.2\times\frac{1}{3.16}s+1\right]}{\left[\left(\frac{1}{31.6}\right)^2s^2+2\times1\times\frac{1}{31.6}s+1\right]\left(\frac{1}{400}s+1\right)}$。

5－10　已知最小相位系统 Bode 的幅频特性如题 5－10 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

解　根据图中所示幅频特性各段斜率的变化，可写出具有如下形式的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(T^2s^2+2\zeta Ts+1)}$$

幅频特性低频段可用式 $L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega$ 表示，由图得 $L(100)=0$，则求得 $K=100$。



题 5－10 图

对于振荡环节，其谐振峰值处的修正值为 $20\lg\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=4.85$，解出振荡环节的阻尼比 $\zeta=0.3$。并且谐振频率 $\omega_m=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=45.3$ rad/s，解出的无阻尼自振频率 $\omega_n=50$ rad/s，则振荡环节的时间常数 $T=\dfrac{1}{50}=0.02$ s。最后求得开环传递函数为

$$G(s)=\frac{100}{s(0.000\,4s^2+0.012s+1)}$$