自动控制理论A-作业10

10.16

已知线性定常系统 $\dot{x}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -4\end{pmatrix}x=Ax$，用李亚普诺夫第二法判断系统平衡状态稳定性

由此，$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -4\end{pmatrix}$，$Q=I$，设 $P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{pmatrix}$，则由 $A^TP+PA=-Q$ 可知

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & -4\end{pmatrix}P+P\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad 解得 P=\begin{pmatrix}\frac{23}{60} & -\frac{7}{60}\\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60}\end{pmatrix}$$

由于 $P_{11}=\frac{23}{60}>0$，$\det P=\frac{17}{300}>0$，由 $\dot{x}=0$，$\begin{cases}-x_1-2x_2=0\\ x_1-4x_2=0\end{cases}$ 可得平衡状态为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

知P矩阵为正定对称阵

则可知其在平衡状态为大范围渐近稳定的.

10.17

已知线性定常系统 $\dot{x}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}x$，令 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

1.判断A的特征值是否全部在左半平面内

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-5\quad 解得 \lambda_1=1-\sqrt{6},\ \lambda_2=1+\sqrt{6}$$

故系统在平衡状态并不稳定

2.李亚普诺夫第二法

令 $Q=I$，$P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{pmatrix}$，由 $A^TP+PA=-Q$ 得

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}P+P\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad 解得 P=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{20}\\ -\frac{1}{20} & -\frac{3}{20}\end{pmatrix}\quad P_{11}=\frac{2}{5}>0\quad |P|=-0.0625<0$$

~~故P不定，但根据A的特征值可知其不稳定. 对于线性定常系统其非渐近稳定，即不稳定~~

故P不定 系统非渐近稳定，由特征值判据知其不稳定

10.28 线性定常离散系统状态方程

$$\left.\begin{aligned}x_1(k+1)&=x_1(k)+3x_2(k)\\ x_2(k+1)&=-3x_1(k)-2x_2(k)-3x_3(k)\\ x_3(k+1)&=x_1(k)\end{aligned}\right\}\ 得\ \Phi=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

~~令 $P=\begin{vmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{12} & P_{22} & P_{23}\\ P_{13} & P_{23} & P_{33}\end{vmatrix}$，由 $\Phi^TP\Phi-P=-Q$，令 $Q=I$~~ 求解 Φ 的特征值

解得Φ的特征值为$0.1173+2.6974i$，$0.1173-2.6974i$，-1.2346

由于特征值在单位圆外，系统不稳定

令$P=\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{33} & P_{33} \end{vmatrix}$，$Q=I$，解$\Phi^T P \Phi - P = -Q$，解得$P=\begin{vmatrix} -0.2436 & -0.2564 & -0.5 \\ -0.2564 & -0.6282 & -1.4615 \\ -0.5 & -1.4615 & -4.6538 \end{vmatrix}$

求解

验证

$\Delta_1=-0.2436<0$，$\Delta_2=0.0873>0$，$\Delta_3=-0.1036<0$，说明P不为正定，系统不稳定

10.29

线性定常离散系统 $x(k+1)=Ax(k)$，

系统矩阵$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K}{2} & 0 \end{vmatrix}$，$K>0$

求解A的特征值：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -\frac{K}{2} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{K}{2}\lambda=\lambda(\lambda^2-\frac{K}{2})=\lambda(\lambda+\sqrt{\frac{K}{2}})(\lambda-\sqrt{\frac{K}{2}})$$

得$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\sqrt{\frac{K}{2}}$，$\lambda_3=-\sqrt{\frac{K}{2}}$，由于其在平衡点$x_e=0$处渐近稳定，且$K>0$，则特征值应在单位圆内

即$0<K<2$。

仅供参考 反对抄袭

方朱艾

2023.6