自动控制理论A - 作业3

1.(a)

系统运动方程，假设系统初始状态为0，可有

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=k(y-x)+b(\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt})$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=r(t)-k(y-x)-b(\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt})$$

(b) 选取状态变量 $\dot{y}$、y、$\dot{x}$、x，令 $x_1=\dot{y}$，$x_2=y$，$x_3=\dot{x}$，$x_4=x$

有 $M\dot{x}_1=r(t)-k(x_2-x_4)-b(x_1-x_3)$

$\dot{x}_2=x_1$

$m\dot{x}_3=k(x_2-x_4)+b(x_1-x_3)$

$\dot{x}_4=x_3$

$$\text{故}\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{b}{M} & -\frac{k}{M} & \frac{b}{M} & \frac{k}{M}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{M}\\0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot r(t)\\ y=(0\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\end{cases}$$

其为状态空间表达式

(C) 令上述状态空间表达式为 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

$y(t)=Cx(t)+Du(t)$

其中 $A=\begin{pmatrix}-\frac{b}{M} & -\frac{k}{M} & \frac{b}{M} & \frac{k}{M}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=(\frac{1}{M},0,0,0)^T$，$C=(0\ 1\ 0\ 0)$，$D=0$

由题对其进行拉氏变换有

$\begin{cases}sX(s)=AX(s)+BU(s)\\ Y(s)=CX(s)\end{cases}$ 得 $X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$ 代入 $Y(s)=CX(s)$ 故 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B$

$$\text{故}G(s)=C(sI-A)^{-1}B=(0\ 1\ 0\ 0)\cdot\begin{pmatrix}s+\frac{b}{M} & \frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & -\frac{k}{M}\\ -1 & s & 0 & 0\\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & s+\frac{b}{m} & \frac{k}{m}\\ 0 & 0 & -1 & s\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{M}\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}{\det(A)}\cdot\frac{1}{M}$$

而 $\det(A)=s^4+(\frac{b}{m}+\frac{b}{M})s^3+(\frac{k}{m}+\frac{k}{M})s^2$ 代入上式可有

$$G(s)=\frac{ms^2+bs+k}{Mms^4+(M+m)bs^3+(M+m)ks^2}$$

2.

(a) ~~$G(s)=\frac{8}{s^3+7s^2+14s+8}=\frac{\frac{8}{3}}{s+1}+\frac{4}{s+2}+\frac{\frac{4}{3}}{s+4}$~~

$\frac{Y(s)}{\tilde{Y}(s)}=8 \quad \frac{\tilde{Y}(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+7s^2+14s+8}$

~~由题 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{8}{s^3+7s^2+14s+8}$~~

即 $\tilde{y}^{(3)}+7\tilde{y}^{(2)}+14\tilde{y}^{(1)}+8\tilde{y}=u$

$y=8\tilde{y}$

~~令 $\frac{Y(s)}{X_1(s)}=8,\ \frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+7s^2+14s+8}$~~

令 $\tilde{y}=x_1,\ \tilde{y}^{(1)}=x_2,\ \tilde{y}^{(2)}=x_3$ 有 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-14&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$

$y=[8\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

由题 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{8}{s^3+7s^2+14s+8}$ 有 $s^3Y(s)+7s^2Y(s)+14sY(s)+8Y(s)=8U(s)$

能控规范(标准型)
改正如上

令 $x_1=y,\ x_2=\dot{y},\ x_3=\ddot{y}$，则有 $\dot{x}_3=-7x_3-14x_2-8x_1+8u(t)$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-7x_3-14x_2-8x_1+8u(t)\\ y=x_1\end{cases}$$

有状态空间表达式
$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-14&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}u\\ y=(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\end{cases}$$

(b)

由 $G(s)=\frac{s^2+2s+5}{s^3+2s^2+3s+10}=\frac{Y(s)}{U(s)}$，令 $\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+2s^2+3s+10}$，$\frac{Y(s)}{X_1(s)}=s^2+2s+5$

可有 $(s^3+2s^2+3s+10)X_1(s)=U(s)$，$Y(s)=(s^2+2s+5)X_1(s)$

令 $x_1=x_1,\ x_2=\dot{x}_1,\ x_3=\dot{x}_2=\ddot{x}_1$

则有
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-2x_3-3x_2-10x_1+u(t)\end{cases}$$
即 $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-10&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$

而 $y=\ddot{x}_1+2\dot{x}_1+5x_1=(5\ 2\ 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

综上
$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-10&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u\\ y=(5\ 2\ 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\end{cases}$$

3.

~~拉普拉斯变换：拉普拉斯变换是一种常用的积分变换，可将一个参数为t的函数转换为参数为复数s的函数，在力学、电学、自动控制系统中起着重要作用~~

拉普拉斯变换：拉普拉斯变换是一种常用的积分变换，其可将函数由时域转换至复频域进行研究，其在力学、电学、自动控制系统中起着重要作用。

一个定义在区间 $[0,+\infty)$ 的函数 $f(t)$ 其拉普拉斯变换为 $F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt$

1.接第3题

Z变换：其为分析线性时不变离散系统问题的重要工具，能将时域离散时间序列变换至复频域中研究

傅里叶变换：是一种线性积分变换，用于信号在时域和频域之间的变换，在物理学、工程学中应用广泛

拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广，将积分范围缩至$[0,+\infty)$，并且对被积函数乘上一个衰减项$e^{-\sigma t}$，σ为实数，从而使得更多函数能够进行变换，不再被绝对可积这一条件限制，更实际方便。

而Z变换则是拉普拉斯变换引申出来的一种变换方法，是离散时间信号拉氏变换的变形，亦称为离散拉氏变换

4.

信号混叠现象：取样信号被还原成连续信号时产生彼此交叠而失真的现象，信号中高频分量被叠在低频中造成混叠。

产生混叠现象的原因：由于对原始信号采样时，所使用的采样频率低于2倍原信号最高频率，则输入原信号中较高频率的信号被采样后，会被错误认为低频信号造成混叠

生活中的混叠现象：直升机在空中飞行，螺旋桨快速旋转，但由于人眼采样频率较慢于其旋转频率，则看上去螺旋桨没有动，或者倒转。

5

(1) $x(n)=(\frac{1}{2})^n\cdot u(n)$，其中$u(n)$为单位阶跃序列，可认为采样周期为1

$$Z[(\tfrac{1}{2})^n u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2})^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}z^{-1})^n$$

若$|\frac{1}{2}z^{-1}|<1$，即$|z|>\frac{1}{2}$时，其可收敛为$Z[(\frac{1}{2})^n u(n)]=\frac{1}{1-(\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{2z}{2z-1}$，为其闭式，$|z|>\frac{1}{2}$

(2) 单位斜坡函数 $x(t)=\begin{cases}t, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

由题可有

$$X(z)=Z(t)=\sum_{k=0}^{\infty}kT\cdot z^{-k}=T(0+1\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}+\cdots+(k-1)z^{-(k-1)}+kz^{-k}+\cdots)$$

而又有两边乘z^{-1}：$z^{-1}X(z)=T(0+0+1\cdot z^{-2}+\cdots+(k-2)z^{-(k-1)}+(k-1)z^{-k}+\cdots)$

二式作差 $X(z)(1-z^{-1})=T(z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-k}+\cdots)$

当$|z|>1$时有 $X(z)(1-z^{-1})=T\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z^{-1}(1-z^{-n})}{1-z^{-1}}=T\cdot\frac{1}{z-1}$ 即有 $X(z)=\frac{T}{(z-1)(1-z^{-1})}=\frac{Tz}{(z-1)^2}$ $|z|>1$

6.证明：已知连续函数$x(t)=0, \forall t<0$，$X(z)=Z(x(t))$，采样周期为T

~~等式左边~~ $\cancel{=Z(x(t+nT))=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+nT)\cdot z^{-k}\xlongequal[k=-n]{k+n}\sum_{k=-n}^{\infty}x(kT)z^{-k+n}=z^n\sum_{k=-n}^{\infty}x(kT)z^{-k}}$

$\cancel{=z^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}+\sum_{k=-n}^{-1}x(kT)z^{-k}\right)}$ 见背面

等式左边 $= Z(x(t+nT)) = \sum_{k_1=0}^{\infty} x(k_1T+nT)\cdot z^{-k_1}$

$$\overset{k=k_1+n}{=\!=} \sum_{k=n}^{\infty} x(kT)\cdot z^{-k+n} = z^n\left(\sum_{k=n}^{\infty} x(kT)z^{-k}\right) = z^n\left(\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right)$$

又知 $x(t)$ 的 z 变换 $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$

上接 $= z^n\left(X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right) =$ 等式右边

得证 $Z(x(t+nT)) = z^n\left(X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right)$