自动控制理论A—作业4

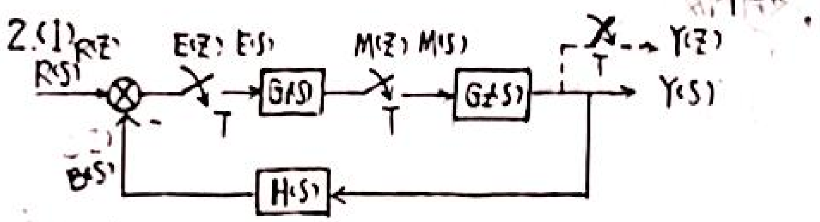
1. 已知 $X(z)=\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$，则 $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-e^{-aT}}$

故 $X(z)=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$，即 $X(kT)=Z^{-1}(X(z))=1-(e^{-aT})^{k}=1-e^{-aTk}$

由于 $X(kT)=1-e^{-aTk}$　　$k=0,1,2\cdots$

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-e^{-aTk})\cdot\delta(t-kT)\right]$$

2.(1)



由图可有：

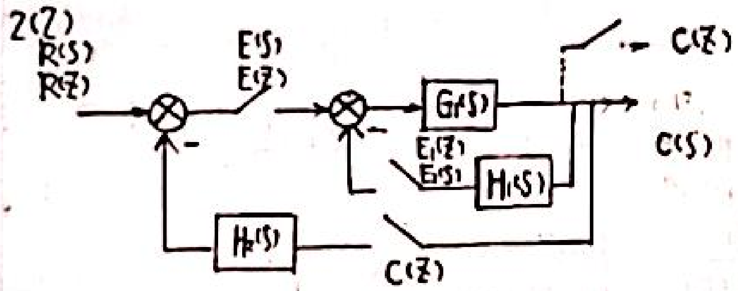
$$\begin{cases}Y(S)=M(S)\cdot G_2(S)\\ M(S)=E(S)\cdot G_1(S)\\ E(S)=R(S)-B(S)\\ B(S)=H(S)G_2(S)\cdot M(S)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}Y(S)=M(S)\cdot G_2(S)\\ M(S)=E(S)\cdot G_1(S)\\ E(S)=R(S)-H(S)G_2(S)M(S)\end{cases}$$

进行Z变换后有 $\begin{cases}Y(z)=M(z)\cdot G_2(z)\\ M(z)=E(z)\cdot G_1(z)\\ E(z)=R(z)-G_2H(z)M(z)\end{cases}$

综上化简有 $M(z)=\dfrac{G_1(z)R(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}$，即 $Y(z)=\dfrac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}R(z)$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}$$

2(2)

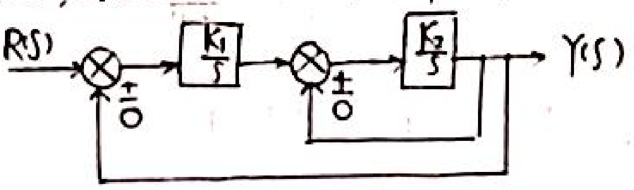


$$\begin{cases}E(S)=R(S)-H_2(S)C(S)\\ C(S)=G_1(S)\left(E(S)-E_1(S)\right)\\ E_1(S)=G_1(S)H_1(S)\left(E(S)-E_1(S)\right)\end{cases}\xrightarrow{\text{变换}}\begin{cases}E(z)=R(z)-H_2(z)C(z)\quad ①\\ C(z)=G_1(z)\left(E(z)-E_1(z)\right)\\ E_1(z)=G_1H_1(z)\left(E(z)-E_1(z)\right)\end{cases}$$

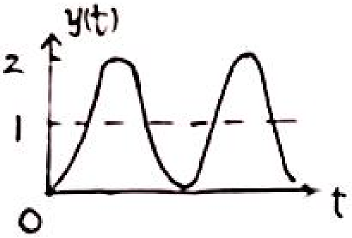
得 $\begin{cases}E_1(z)=\dfrac{G_1H_1(z)}{1+G_1H_1(z)}E(z)\\ C(z)=\dfrac{G_1(z)}{1+G_1H_1(z)}E(z)\quad ②\end{cases}$

将②代入①，解得 $\Phi(z)=\dfrac{C(z)}{R(z)}=\dfrac{G_1(z)}{1+G_1H_1(z)+G_1(z)H_2(z)}$

3. 已知 K_1、K_2为正的常值增益，图b至图d为系统可能出现的单位阶跃响应



(b)



由图推测其为二阶无阻尼的情况

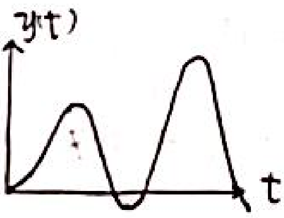
$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\text{，}y(t)=L^{-1}(Y(s))=1-\cos\omega_n t$$

当主反馈为负反馈，没有内反馈时，

$$G(s)=\frac{\frac{K_1K_2}{s^2}}{1+\frac{K_1K_2}{s^2}}=\frac{K_1K_2}{s^2+K_1K_2}\text{，}\omega_n^2=K_1K_2\text{，}\xi=0$$

综上(b)为：主反馈为负反馈、无内反馈

(C)



由图可知，其为振荡发散的曲线，极点位于复平面右半平面，且不在实轴上

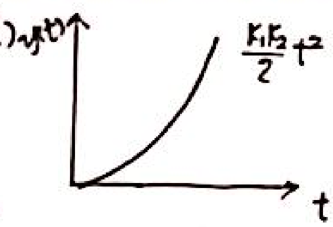
当主反馈为负反馈，内反馈为正反馈时：

$$G(s)=\frac{\frac{K_1}{s}\cdot\frac{K_2}{s-K_2}}{1+\frac{K_1}{s}\cdot\frac{K_2}{s-K_2}}=\frac{K_1K_2}{s^2-K_2s+K_1K_2}$$

分母的根满足上述极点条件，可有此图像

综上(C)为：主反馈为负反馈、内反馈为正反馈。

(d)

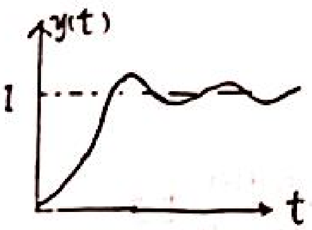


由图 $Y(s)=L(\frac{K_1K_2}{2}t^2)=\frac{K_1K_2}{2}\cdot\frac{2!}{s^3}=\frac{K_1K_2}{s^3}$，由于 $U(s)=\frac{1}{s}$

则 $G(s)=\frac{K_1K_2}{s^2}$，显然，其为：无主反馈、无内反馈

综上(d)为：无主反馈、无内反馈。

(e)



由图其为二阶欠阻尼图像，极点为复平面左半平面上，且不在实轴上

当主反馈为负反馈、内反馈为负反馈

$$G(s)=\frac{\frac{K_1}{s}\cdot\frac{K_2}{s+K_2}}{1+\frac{K_1}{s}\cdot\frac{K_2}{s+K_2}}=\frac{K_1K_2}{s^2+K_2s+K_1K_2}$$

$$\begin{cases}\omega_n^2=K_1K_2\\2\xi\omega_n=K_2\end{cases}\quad\begin{cases}\omega_n=\sqrt{K_1K_2}\\\xi=\frac{K_2}{2\sqrt{K_1K_2}}\end{cases}$$ 在0~1之间

可有上述图像

综上(e)为：主反馈为负反馈、内反馈为负反馈。

4(1). 开环传函为$G(S)=\frac{aS+1}{S(S+b)}$, $a=0.4$, $b=0.5$

开环传函: $G(S)=\frac{aS+1}{S(S+b)}$, 其零点$-\frac{5}{2}$, 极点 0, $-\frac{1}{2}$

闭环传函: $A(S)=\frac{G(S)}{1+G(S)}=\frac{aS+1}{S^2+(a+b)S+1}$, 其零点$-\frac{5}{2}$, 极点 $-0.45+j\frac{\sqrt{3.19}}{2}$, $-0.45-j\frac{\sqrt{3.19}}{2}$

(约为 $-0.45+j0.893$, $-0.45-j0.893$)

4(2)

由于闭环传函$A(S)=\frac{aS+1}{S^2+(a+b)S+1}$, $\begin{cases}2\xi\omega_n=a+b\\ \omega_n^2=1\end{cases}$, 则 $\begin{cases}\xi=0.45\\ \omega_n=1\end{cases}$

综上, 系统阻尼比$\xi=0.45$, 无阻尼振荡频率$\omega_n=1$

4(3)

令$z=\frac{1}{a}$ ($\frac{5}{2}$). $\frac{as+1}{s^2+(a+b)s+1}=\frac{s+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}(s^2+(a+b)s+1)}=\frac{1}{s^2+(a+b)s+1}+\frac{s}{z}\frac{1}{s^2+(a+b)s+1}$

令$y_1(t)$为$\frac{1}{s^2+(a+b)s+1}$的单位阶跃响应(时域), $y_2(t)$为$A(S)$的单位阶跃响应(时域)

$y_2(t)=y_1(t)+\frac{1}{z}\dot{y}_1(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{l}{z}\sin(\omega_d t+\theta+\psi)$, $\begin{cases}l=\sqrt{(z-\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}\\ \cos\psi=\frac{z-\xi\omega_n}{l},\ \sin\psi=\frac{\omega_d}{l}\\ \sin\theta=\sqrt{1-\xi^2}\quad \cos\theta=\xi\end{cases}$

峰值时间T_p: 对$y_2(t)$求导, 其为第一导数零点

$$T_p=\frac{\pi-\psi}{\omega_d}=\frac{\pi-\psi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\approx 3.058s$$

$\psi=23.5398°=0.4108\ rad$

$\theta=63.2527°=1.104\ rad$

$l=2.236$

超调量$\sigma\%$: $\sigma\%=|y_2(T_p)-1|\times100\%\approx22.59\%$

上升时间T_r: $T_r=\frac{\pi-\theta-\psi}{\omega_d}=1.8217s$

调整时间T_s: $|y_2(t)-1|\le\left|e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{l}{z}\right|\le\Delta$, 得$T_s=\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{l}{z\sqrt{1-\xi^2}\cdot\Delta}$

① $\Delta=0.02$, 得$T_s\approx8.697s$

② $\Delta=0.05$, 得$T_s\simeq6.661s$

4(4). $a=0$时 $A(S)=\frac{1}{S^2+bS+1}$, $\begin{cases}\omega_n^2=1\\ 2\xi\omega_n=b\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\omega_n=1\\ \xi=0.25\end{cases}$

$\omega_d=0.968$

$\theta=\arccos\xi=1.318\ rad$

峰值时间T_p: $T_p=\frac{\pi}{\omega_d}=3.245s$; 超调量$\sigma\%$: $\sigma\%=e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}\times100\%=44.43\%$

上升时间T_r: $T_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}=1.884s$; 调整时间$T_s$: ① $\Delta=0.02$, $T_s=\frac{4+\ln\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}{\xi\omega_n}=16.13s$

② $\Delta=0.05$, $T_s=\frac{3+\ln\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}{\xi\omega_n}=12.13s$

5. 开环传函 $G(s)=\dfrac{K_2}{s^2+K_1K_2s}$，闭环传函：$A(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{K_2}{s^2+K_1K_2s+K_2}$ 为二阶系统

(1) 由于其有 $\sigma\%=16\%$，$t_p=2s$，可知其为欠阻尼

令 $\begin{cases}\omega_n^2=K_2\\ 2\xi\omega_n=K_1K_2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}K_1=\dfrac{2\xi}{\omega_n}\\ K_2=\omega_n^2\end{cases}$

而 $\begin{cases}\sigma\%=e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}=0.16\\ t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\xi=0.50387\\ \omega_n=1.8185\end{cases}$ 则 $\begin{cases}K_1=3.3070\\ K_2=0.55416\end{cases}$

(2) 由于输入为单位斜坡信号 $t \xrightarrow{L} \dfrac{1}{s^2}$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{K_2}{s^2+K_1K_2s+K_2}=\frac{1}{s^2}+\frac{-K_1}{s}+\frac{K_1s-1+K_1^2K_2}{s^2+K_1K_2s+K_2}$$

$$y(t)=L^{-1}(Y(s))=t-K_1+L^{-1}\left(\frac{K_1s-1+K_1^2K_2}{s^2+K_1K_2s+K_2}\right)$$

第三项由于 $s^2+K_1K_2s+K_2$，已知 $K_2=5$，再令 $K_1>0$ 可知其极点位于复平面的左半平面，则拉氏逆变换后，该项在稳态时趋于0，可忽略。

当其达到稳态时，稳态误差为 K_1，则 $K_1=0.5>0$

故参数 K_1 取 $\dfrac{1}{2}$

方法二：令输入与输出误差为 $e(t)=u(t)-y(t)$，$E(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2}\dfrac{K_2}{s^2+K_1K_2s+K_2}=\dfrac{s^2+K_1K_2s}{s^2(s^2+K_1K_2s+K_2)}$

由终值定理 $\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=K_1=0.5$

仅供参考 反对抄袭

方未艾

2023.6.