自动控制理论A-作业5

1 已知单位负反馈系统，开环传递函数 $L(s)=\dfrac{10}{s(s^2+7s+12)}$

(1) 该系统的闭环传递函数 $T(s)=\dfrac{L(s)}{1+L(s)}=\dfrac{10}{s^3+7s^2+12s+10}$，由终值定理可知 $y_1(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}T(s)=1$，增益为1

(2) 用一个二阶系统 $\Phi(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+2}$ 来近似 $T(s)$　因为 $s^3+7s^2+12s+10=(s+5)(s^2+2s+2)$，$-5$ 是 $-1\pm j$ 实部的5倍
可令 $-1\pm j$ 为主导，且用该系统 $y_2(\infty)=1$

(3) 用计算机绘制原系统单位阶跃响应 $y_1(t)$，近似系统的单位阶跃响应 $y_2(t)$，代码曲线见最后一页
二者相关性能通过matlab得到如下：(t_s 是用曲线上的值，不是包络线上的值来确定)

	t_r	t_p	t_s $\Delta=0.02$	σ_p	e_{ss}
$y_1(t)$	2.601s	3.310s	4.419s	4.10%	0
$y_2(t)$	2.356s	3.142s	4.217s	4.32%	0

由上表及之后曲线图可知，$y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 总体上很接近，上升时间、峰值时间、调整时间 $y_2(t)$ 更快更短一些
而 $y_1(t)$ 的超调量略小一些，二者稳态误差为0

2. 已知 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，其中 $\xi=0.7$，$\omega_n=1$，给其添一个右半平面闭环零点 $z=1$

为了更好分析瞬态性能和稳定性能，令零点 $-z=-\frac{1}{\tau}=1$，即 $\Phi(s)=\dfrac{(-s+1)\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，而不是 $\dfrac{(s-1)\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

化简代入已知数据 $\xi=0.7$，$\omega_n=1$，可有 $G(s)=\dfrac{1}{s^2+1.4s+1}$，$\Phi(s)=\dfrac{-s+1}{s^2+1.4s+1}$

用matlab获取原系统单位阶跃响应曲线 $y_1(t)$ 以及添零点的系统其单位阶跃响应曲线 $y_2(t)$ 和测量相关数据
曲线及代码见后页，数据性能如下：$y_2(t)$ 的 t_p 取上升过程的峰值。

	t_r	t_p	t_s $\Delta=0.02$	σ_p	e_{ss}
$y_1(t)$	3.285s	4.399s	5.979s	4.60%	0
$y_2(t)$	3.842s	4.957s	6.752s	5.74%	0

由上表以及之后的曲线可知，$y_2(t)$ 在初始时会先下降再开始上升，对于上升时间、峰值时间、调整时间 $y_1(t)$ 要比 $y_2(t)$ 要快一些，而 $y_2(t)$ 的超调量大于 $y_1(t)$ 的，看出 $y_1(t)$ 的瞬态性能较优，二者稳态误差均为0

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$，求其特征方程 $AX=\lambda X$，得 $|\lambda E-A|=0$

化简得特征方程为 $\lambda(\lambda^2+\lambda+1)=0$，特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\lambda_3=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$

可知每个特征根的代数重数、几何重数皆为1，每个特征根在Jordan中对角线上出现一次，对应的Jordan块只有一块

故Jordan标准型为 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}&&\\&-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}&\\&&0\end{pmatrix}$

4.

(1) 已知 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，由题 $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left((sI-A)^{-1}\right)$ ∴

即 $(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+2)^2}\begin{pmatrix}s+2 & +1\\ 0 & s+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{pmatrix}$

得 $e^{At}=\begin{pmatrix}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+2}) & \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+2)^2})\\ 0 & \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-2t} & te^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$

(2) 已知 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$，同理 $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left((sI-A)^{-1}\right)$

即 $(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+4}\begin{pmatrix}s & -1\\ 4 & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{s}{s^2+4} & -\frac{1}{s^2+4}\\ \frac{4}{s^2+4} & \frac{s}{s^2+4}\end{pmatrix}$

得 $e^{At}=\begin{pmatrix}\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+4}) & -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4})\\ 2\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4}) & \mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{pmatrix}$

5. 已知A的特征根 λ_1、λ_2、$\cdots\lambda_n$ 两两相异，且A为n阶实矩阵

可知 λ_i 的代数重数等于其几何重数为1，~~说明其特征向量两两线性无关~~

λ_i 的特征向量只有一个为 x_i，$i=1,2\cdots n-1,n$。可知 x_1、$x_2\cdots x_n$ 线性无关

说明其A矩阵可以对角化，如下：

$A=P\Lambda P^{-1}$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$。可知 $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

则 $e^{At}=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots=P\cdot P^{-1}+P\Lambda P^{-1}+\frac{1}{2!}P\Lambda^2P^{-1}+\cdots+\frac{1}{k!}P\Lambda^kP^{-1}+\cdots$

$$=P\begin{pmatrix}1+\lambda_1+\frac{1}{2!}\lambda_1^2+\cdots+\frac{1}{k!}\lambda_1^k+\cdots & & & & \\ & 1+\lambda_2+\frac{1}{2!}\lambda_2^2+\cdots+\frac{1}{k!}\lambda_2^k+\cdots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1+\lambda_{n-1}+\frac{1}{2!}\lambda_{n-1}^2+\cdots\frac{1}{k!}\lambda_{n-1}^k+\cdots & \\ & & & & 1+\lambda_n+\frac{1}{2!}\lambda_n^2+\cdots+\frac{1}{k!}\lambda_n^k+\cdots\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & & & \\ & e^{\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_{n-1}} & \\ & & & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$$

又知 P、$\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_{n-1}} & \\ & & & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$、$P^{-1}$ 均为 $n\times n$ 的方阵，由行列式乘法公式得，且 $|P||P^{-1}|=1$

$$\det(e^{At})=|P|\cdot\begin{vmatrix}e^{\lambda_1} & & & & \\ & e^{\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_{n-1}} & \\ & & & & e^{\lambda_n}\end{vmatrix}|P^{-1}|=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda_i}$$

6.系统的闭环传递函数如下：

$$T(s)=\frac{G_p(s)\frac{K}{s(s+2)}}{1+\frac{K}{s(s+2)}\frac{s+3}{s+0.1}}=\frac{K(s+0.1)}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}G_p(s)$$

(1) 又知 $K=0.4$、$G_p(s)=1$，即 $T(s)=\frac{0.4s+0.04}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}$.

令 $e(t)=u(t)-y(t)$，$E(s)=L(e(t))=U(s)-Y(s)=U(s)(1-T(s))$，$U(s)=\frac{1}{s}$

由终值定理得：

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s^3+2.1s^2+0.2s+1.16}{s^3+2.1s^2+0.6s+1.2}=\frac{1.16}{1.2}\approx 0.9667$$

(2) 给 $G_p(s)$ 选择合适值，使单位阶跃响应稳态误差为0.

$$E(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{s^3+2.1s^2+(0.2+K)s+3K-G_p(s)\cdot K\cdot s-G_p(s)\cdot K\cdot 0.1}{s^3+2.1s^2+(0.2+K)s+3K}\right)$$

$e_{ss}=\lim_{t\to+\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}\frac{(3-0.1G_p(s))K}{s^3+2.1s^2+(0.2+K)s+3K}$，则 $G_p(s)$ 要满足 $\lim_{s\to 0}(3-0.1G_p(s))=0$

即 $G_p(s)$ 常数项为30，题目让选合适值，~~故~~ 即选 $G_p(s)=30$.

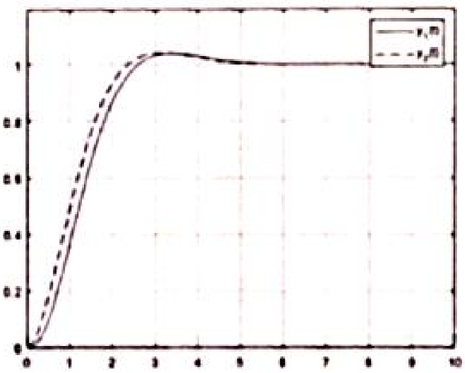
1、2题代码图、仿真图见下页

第一题：

y1(t)表示原系统单位阶跃响应曲线，y2(t)表示近似系统单位阶跃响应曲线。代码截图如下：

```
clc;clear;
t=0:0.001:10;
num1=10;        den1=[1,7,12,10];
y1=step(num1,den1,t);   %原系统单位阶跃响应
num2=2;         den2=[1,2,2];
y2=step(num2,den2,t);   %近似系统单位阶跃响应
figure(1)
plot(t,y1,'LineStyle','-','color','r');     hold on;
plot(t,y2,'LineStyle','--','color','b');    grid on;
legend("y_1(t)","y_2(t)");
```

仿真图像如下：

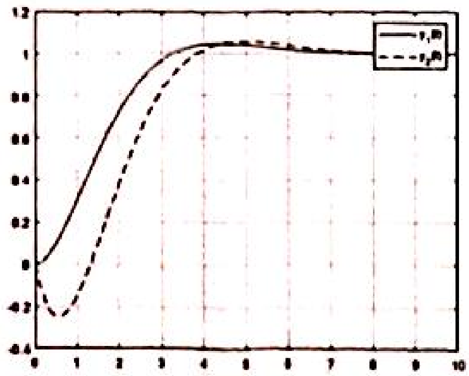


第二题：

y1(t)表示原系统单位阶跃响应曲线，y2(t)表示添加零点的单位阶跃响应曲线。代码如下：

```
clc;clear;
t=0:0.001:10;
num1=1;        den1=[1,1.4,1];
y1=step(num1,den1,t);   %原系统的单位阶跃响应
num2=[-1,1];    den2=[1,1.4,1];
y2=step(num2,den2,t);   %添加零点的系统单位阶跃响应
figure(1)
plot(t,y1,'LineStyle','-','color','r');     hold on;
plot(t,y2,'LineStyle','--','color','b');    grid on;
legend("y_1(t)","y_2(t)");
```

仿真图像如下：



仅供参考 反对抄袭
方未艾
2023.6