自动控制理论A－作业6

1.已知连续时间线性时不变系统 $\dot{x}=Ax+Bu$，亦知A矩阵

由此可知 $\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}((sI-A)^{-1})$

即 $sI-A=\begin{pmatrix} s-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s-\lambda \end{pmatrix}$，$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s-\lambda)^4}\begin{pmatrix} (s-\lambda)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-\lambda)^3 & (s-\lambda)^2 & (s-\lambda) \\ 0 & 0 & (s-\lambda)^3 & (s-\lambda)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (s-\lambda)^3 \end{pmatrix}$

得 $\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}((sI-A)^{-1})=\mathcal{L}^{-1}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda} & \frac{1}{(s-\lambda)^2} & \frac{1}{(s-\lambda)^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda} & \frac{1}{(s-\lambda)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

2.给定线性时不变系统 $\dot{x}=Ax$，可知 $x(t)=\Phi(t)\cdot x(0)$

由① $x(0)=(1,-1)^T$，$x(t)=(e^{-2t},-e^{-2t})^T$；② $x(0)=(2,-1)^T$，$x(t)=(2e^{-2t},-e^{-2t})^T$ 知：

$\begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}=\Phi(t)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，由于 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 秩为2，可逆，有 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1+2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

得 $\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$

又知 $\Phi(t)=e^{At}$ 故 $\dot{\Phi}(t)=A\cdot e^{At}=\begin{pmatrix} -2e^{-2t} & 0 \\ 0 & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$

即 $A=\dot{\Phi}(0)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

3.给定线性时不变系统如下：

$\dot{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}u$，$x(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$t\geq 0$，$y=(1\ 0)x$

对上述方程中作此规定 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 后，进行拉普拉斯变换，且 $u(t)=1$，$t\geq 0$，故 $U(s)=\frac{1}{s}$

$sX(s)-x(0)=AX(s)+B\cdot U(s)$ 得 $X(s)=(sI-A)^{-1}\cdot x(0)+(sI-A)^{-1}B\cdot U(s)$ ……①

而 $(sI-A)=\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}$，即 $(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}$ 代入①式有

$X(s)=\begin{pmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{s} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$

即 $x(t)=\mathcal{L}^{-1}(X(s))=\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$ ，而 $y(t)=(1\ \ 0)\,x(t)=1-e^{-t}$ ， $(t\geq 0)$

4. 已知采样周期T，又知 $\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u$ ，规定 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

求其所对应的离散化方程 $x(k+1)=G\cdot x(k)+H\cdot u(k)$

$G=e^{AT}=\mathcal{L}^{-1}((sI-A)^{-1})\Big|_{t=T}$ ， $H=\int_0^T e^{At}dt\cdot B$

而 $sI-A=\begin{pmatrix}s&-1\\0&s\end{pmatrix}$ ，而 $(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{pmatrix}s&1\\0&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s^2}\\0&\frac{1}{s}\end{pmatrix}$

得 $\mathcal{L}^{-1}((sI-A)^{-1})=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}=e^{At}$

故 $G=\begin{pmatrix}1&T\\0&1\end{pmatrix}$ ，而 $H=\int_0^T\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}dt\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}T^2\\T\end{pmatrix}$

得 $x(k+1)=\begin{pmatrix}1&T\\0&1\end{pmatrix}x(k)+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}T^2\\T\end{pmatrix}u(k)$

5. 已知线性时不变系统差分方程 $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$

选取 $x_1(k)=y(k)$ ， $x_2(k)=y(k+1)$ 为一组状态变量，可有状态方程： $\begin{cases}x_1(k+1)=x_2(k)\\ x_2(k+1)=-3x_2(k)-2x_1(k)+u(k)\end{cases}$

即 $\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(k)\\ y(k)=(1\ \ 0)\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{pmatrix}\end{cases}$ 　令 $G=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix}$ ， $H=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

又知 $y(0)=x_1(0)=0$ ， $y(1)=x_2(0)=1$ ，对系统状态方程进行Z变换有， $x(0)=(0,1)^T$

$z\cdot X(z)-zx(0)=GX(z)+HU(z)$ 可有 $X(z)=(zI-G)^{-1}zx(0)+(zI-G)^{-1}H\cdot U(z)$ ，~~由于~~

原题要得到单位阶跃响应，则 $U(z)=\frac{z}{z-1}$ ，而 $zI-G=\begin{pmatrix}z&-1\\2&z+3\end{pmatrix}$ ，而 $(zI-G)^{-1}=\frac{1}{(z+2)(z+1)}\begin{pmatrix}z+3&1\\-2&z\end{pmatrix}$

故 $X(z)=\frac{z}{(z+2)(z+1)}\begin{pmatrix}z+3&1\\-2&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{(z+2)(z+1)}\begin{pmatrix}z+3&1\\-2&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\frac{z}{z-1}$

而 $\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z+2)(z+1)(z-1)}\begin{pmatrix}z\\z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-1}\\ \frac{4}{3}\frac{1}{z+2}+(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{z-1}\end{pmatrix}$ ，即 $X(z)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\frac{z}{z+2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{6}\frac{z}{z-1}\\ \frac{4}{3}\frac{z}{z+2}+(-\frac{1}{2})\frac{z}{z+1}+\frac{1}{6}\frac{z}{z-1}\end{pmatrix}$

故 $x(k)=\mathcal{Z}^{-1}(X(z))=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\cdot(1)^k+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{2}{3}\cdot(-2)^k\\ \frac{1}{6}(1)^k-\frac{1}{2}(-1)^k+\frac{4}{3}\cdot(-2)^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{pmatrix}$

仅供参考 反对抄袭
方沫文
2023.6

故 $y(k)=(1\ \ 0)\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot(1)^k+\frac{1}{2}\cdot(-1)^k-\frac{2}{3}(-2)^k$ ， $k\geq 0$