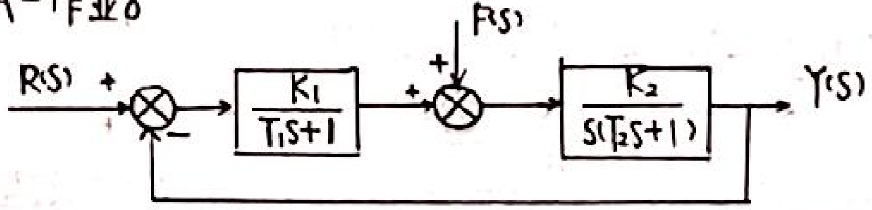
自动控制理论A-作业8

3.39



由题可知 $r(t)=t$, $f(t)=-1(t)$, 即 $R(S)=\frac{1}{S^2}$, $F(S)=-\frac{1}{S}$, 由叠加定理

令 $F(S)=0$, $R(S)=\frac{1}{S^2}$, 先判断系统稳定有特征方程 $T_1T_2S^3+(T_1+T_2)S^2+S+K_1K_2=0$

由劳斯判据知 $T_1T_2>0$, $T_1+T_2>0$, $K_1K_2>0$, $T_1+T_2>T_1T_2K_1K_2$, 得系统稳定

其开环传递函数 $G(S)=\frac{K_1K_2}{S(T_1S+1)(T_2S+1)}$, 可知其为I型系统, 对于 $r(t)=t$, 有 $K_v=\lim\limits_{s\to0}sG(s)=K_1K_2$

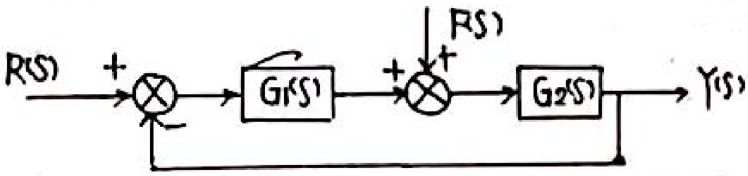
其稳态误差 $e_{s1}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{K_1K_2}$

考虑 $R(S)=0$, $F(S)=-\frac{1}{S}$, 已知 $\Phi_{ef}(S)=\frac{-\frac{K_2}{S(T_2S+1)}}{1+\frac{K_1K_2}{S(T_1S+1)(T_2S+1)}}=\frac{-K_2(T_1S+1)}{T_1T_2S^3+(T_1+T_2)S^2+S+K_1K_2}$

即 $e_{s2}=\lim\limits_{s\to0}s\cdot\Phi_{ef}(s)\cdot F(s)=\lim\limits_{s\to0}\frac{+K_2(T_1S+1)}{T_1T_2S^3+(T_1+T_2)S^2+S+K_1K_2}=\frac{1}{K_1}$

其稳态误差 $e_{ss}=e_{s1}+e_{s2}=\frac{1}{K_1K_2}+\frac{1}{K_1}$

3.40



由劳斯表知 $T_2>0$, $K_1K_2>0$ 系统稳定

(1) $G_1(S)=K_1$, $G_2(S)=\frac{K_2}{S(T_2S+1)}$, 由题可知 $\Phi_{ef}=\frac{-K_2}{T_2S^2+S+K_1K_2}=-\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_1^2K_2}S+\cdots$

得 $C_0=-\frac{1}{K_1}$, $C_1=\frac{1}{K_1^2K_2}$, $e_{ssf}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_if^{(i)}(t)$

当 $f(t)=1(t)$ 时, $e_{ssf}(t)=C_0\cdot f(t)=-\frac{1}{K_1}$, $e_{ssf}=\lim\limits_{t\to\infty}e_{ssf}(t)=-\frac{1}{K_1}$

当 $f(t)=t$ 时, $e_{ssf}(t)=C_0\cdot f(t)+C_1\cdot f'(t)=-\frac{1}{K_1}t+\frac{1}{K_1^2K_2}$, $e_{ssf}=\lim\limits_{t\to\infty}e_{ssf}(t)=-\infty$

(2) $G_1(S)=\frac{K_1(T_1S+1)}{S}$, $G_2(S)=\frac{K_2}{S(T_2S+1)}$, 且 $T_1>T_2$

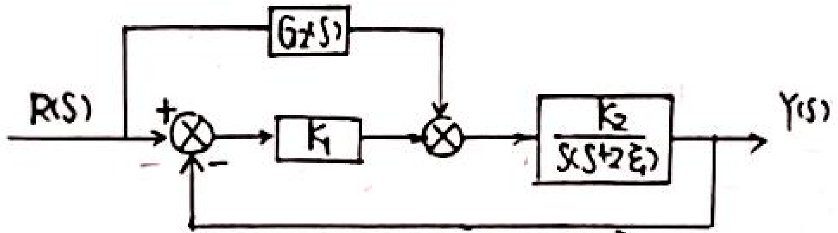
由题可知 $\Phi_{ef}=\frac{-K_2S}{T_2S^3+S^2+K_1K_2T_1S+K_1K_2}$, 列劳斯表有 $T_2>0, K_1K_2>0, T_1>0, T_1>T_2$, 系统稳定

对 Φ_{ef} 进行多项式展开 $\Phi_{ef}=-\frac{1}{K_1}S+\frac{T_1}{K_1}S^2+\cdots$, 得 $C_0=0$, $C_1=-\frac{1}{K_1}$

当 $f(t)=1(t)$ 时, $e_{ssf}(t)=C_0\cdot f(t)=0$, $e_{ssf}=\lim\limits_{t\to\infty}e_{ssf}(t)=0$

当 $f(t)=t$ 时, $e_{ssf}(t)=C_0f(t)+C_1f'(t)=-\frac{1}{K_1}$, $e_{ssf}=\lim\limits_{t\to\infty}e_{ssf}(t)=-\frac{1}{K_1}$

3.41.



已知 $K_1=2$. $K_2=50$. $\xi_1=0.5$. $T=0.2$，确定 $G_2(S)=\frac{\lambda_2 S^2+\lambda_1 S}{TS+1}$ 中 λ_2、λ_1 使其由I型变为III型，先前无 $G_2(S)$.

由题可知 $\Phi(S)=\frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{\lambda_2K_2S^2+(K_1K_2T+\lambda_1K_2)S+K_1K_2}{TS^3+(T+1)S^2+(K_1K_2T+1)S+K_1K_2}$，即特征方程为 $0.2S^3+1.2S^2+21S+100=0$

$R(S)(1-\Phi(S))=\quad TS^3+(T+1-\lambda_2K_2)S^2+(1-\lambda_1K_2)$

列劳斯表:

S^3	0.2	21
S^2	1.2	100
S^1	4.2	
S^0	100	

第一列均为正，其稳定

其开环传函 $G(S)$，由 $\Phi(S)=\frac{G(S)}{1+G(S)}$ 得 $G(S)=\frac{\Phi(S)}{1-\Phi(S)}=\frac{\lambda_2K_2S^2+(K_1K_2T+\lambda_1K_2)S+K_1K_2}{TS^3+(T+1-\lambda_2K_2)S^2+(1-\lambda_1K_2)S}$

由题其为III系统，有 $\begin{cases}T+1-\lambda_2K_2=0\\ 1-\lambda_1K_2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{50}=0.02\\ \lambda_2=\frac{1.2}{50}=0.024\end{cases}$

7.已知单位反馈系统开环传递函数 $G(S)=\frac{10(2S+1)}{S^2(S^2+6S+100)}$，由题可知其为II型系统 $G(S)=\frac{\frac{1}{10}(2S+1)}{S^2(\frac{1}{100}S^2+\frac{3}{50}S+1)}$

特征多项式方程 $S^4+6S^3+100S^2+20S+10=0$

列劳斯表：

S^4	1	100	10
S^3	6	20	
S^2	$\frac{290}{3}$	10	
S^1	$\frac{562}{29}$		
S^0	10		

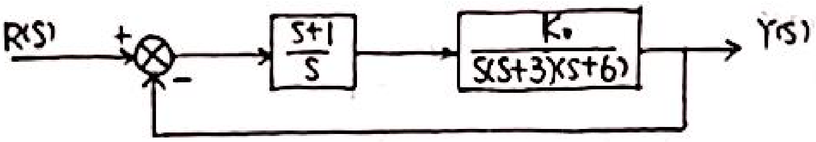
第一列均为正数，其稳定　　G(S) 极点在原点、左半平面可用终值定理

① $r(t)=2t$，其为II型系统 $K_v=\lim\limits_{s\to0} sG(S)=\infty$，$e_{ss}=\frac{2}{K_v}=0$，系统稳态误差为0

② $r(t)=2+2t+t^2$，$K_p=\lim\limits_{s\to0}G(S)=\infty$，$K_v=\lim\limits_{s\to0}sG(S)=\infty$，$K_a=\lim\limits_{s\to0}s^2G(S)=\frac{1}{10}$

故 $e_{ss}=\frac{2}{1+K_p}+\frac{2}{K_v}+\frac{2}{K_a}=20$，系统稳态误差为20.

9 9



由题可知系统开环传函 $G(S)=\frac{K_0(S+1)}{S^2(S+3)(S+6)}=\frac{\frac{1}{18}K_0(S+1)}{S^2(\frac{1}{3}S+1)(\frac{1}{6}S+1)}$，开环增益 $K=\frac{1}{18}K_0$

系统特征方程 $s^4+9s^3+18s^2+K_0S+K_0=0$，列劳斯表.

S^4	1	18	K_0
S^3	9	K_0	
S^2	$18-\frac{K_0}{9}$	K_0	
S^1	$K_0-\frac{9K_0}{18-\frac{K_0}{9}}$		
S^0	K_0		

劳斯表第一列全部大于0,系统稳定

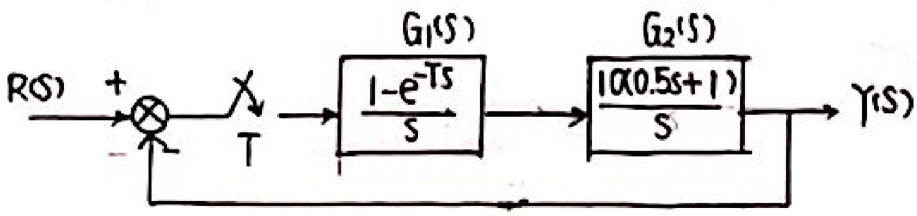
$$\begin{cases}18-\frac{1}{9}K_0>0\\ K_0-\frac{9K_0}{18-\frac{1}{9}K_0}>0\\ K_0>0\end{cases}$$ 得 $0<K_0<81$

又知当 $r(t)=t^2$ 时，II型系统，$K_a=\lim_{s\to 0}S^2G(s)=\frac{1}{18}K_0$，$e_{ss}=\frac{2}{K_a}=\frac{36}{K_0}<0.5$ 得 $72<K_0$

即 $72<K_0<81$ 且 $K=\frac{1}{18}K_0$

则 $4<K<4.5$

6.21



由题可得 开环传函的Z变换：$T=0.2s$

$G_1G_2(Z)=\mathcal{Z}(G_1(S)G_2(S))=\mathcal{Z}((1-e^{-Ts})\frac{5(S+2)}{S^2})=(1-Z^{-1})\cdot 5\left(\frac{Z}{Z-1}+\frac{2TZ}{(Z-1)^2}\right)=\frac{5Z-3}{Z-1}$

其特征方程为 $6Z-4=0$，令 $Z=\frac{\omega+1}{\omega-1}$，作ω变换得 $2\omega+10=0$，$\omega=-5$ 位于左半平面，系统稳定

其为I型系统

当 $r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2$，$T=0.2s$，可有 $e_{ss}^*(\infty)=\frac{1}{1+K_p}+\frac{T}{K_v}+\frac{T^2}{K_a}$

$K_p=\lim_{z\to 1}G_1G_2(Z)=\infty$，$K_v=\lim_{z\to 1}(Z-1)G_1G_2(Z)=2$，$K_a=\lim_{z\to 1}(Z-1)^2G_1G_2(Z)=0$

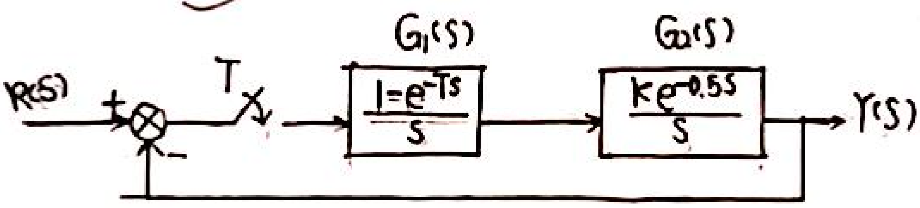
故 $e_{ss}^*(\infty)=\infty$

对于复频域的时延转换至Z域：

$\mathcal{Z}(e^{-KTs}\cdot G(s))=\mathcal{Z}(g(t-KT))$
$=Z^{-K}\cdot\mathcal{Z}(g(t))$
$=Z^{-K}\mathcal{Z}(G(s))$

适用于6.21、6.24题

6.24



已知 $T=0.25s$，求开环传函的Z变换：

$G_1G_2(Z)=\mathcal{Z}(G_1(S)G_2(S))=(1-Z^{-1})\mathcal{Z}(\frac{K\cdot e^{-0.5s}}{s^2})=(1-Z^{-1})\cdot Z^{-2}\cdot K\cdot\mathcal{Z}(\frac{1}{s^2})=\frac{0.25K}{Z^2(Z-1)}$

见背面

则特征方程为 $z^3-z^2+0.25K=0$

令 $z=\frac{1+\omega}{-1+\omega}$ 作 ω变换得 $0.25K\omega^3+(2-0.75K)\omega^2+(4+0.75K)\omega+2-0.25K=0$

列劳斯表：

~~ω^3 $0.25K$ $4+0.75K$~~
~~ω^2 $2-0.75K$ $2-0.25K$~~
~~ω^1 $4+0.75K-\frac{(2-0.25K)0.25K}{2-0.75K}$ 0~~
~~ω^0 $2-0.25K$ 0~~

ω^3	$0.25K$	$4+0.75K$
ω^2	$2-0.75K$	$2-0.25K$
ω^1	$4+0.75K-\frac{(2-0.25K)0.25K}{2-0.75K}$	0
ω^0	$2-0.25K$	0

劳斯表第一列大于0，以及全项大于0

$$\begin{cases} 0.25K>0 \\ 4+0.75K>0 \\ 2-0.75K>0 \\ 2-0.25K>0 \\ 4+0.75K-\frac{(2-0.25K)\cdot 0.25K}{2-0.75K}>0 \end{cases}$$

得 $0<K<2\sqrt{5}-2$

当全项系数小于0，劳斯表第一列全小于0时

K无解

当输入 $r(t)=2\cdot 1(t)+t$ 时，已知其为1型系统。

$K_p=\lim\limits_{z\to 1}G_1G_2(z)=\infty$，$K_v=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G_1G_2(z)=0.25K$

而 $e_{ss}^*(\infty)=\frac{2}{1+K_p}+\frac{T}{K_v}=\frac{T}{0.25K}=\frac{1}{K}<0.5$，得 $K>2$

综上 $2<K<2\sqrt{5}-2$

仅供参考 反对抄袭

方[illegible]文

2023.6