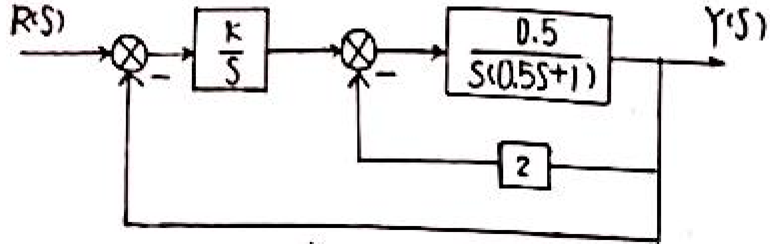
自动控制原理A-作业9

4.1 由题绘制K由0变至∞时该系统根轨迹图



开环传递函数 $T(s)=\frac{K}{s(s^2+2s+2)}=\frac{K}{s(s+1+j)(s+1-j)}$，由此其无开环零点，有开环极点 $p_1=0$，$p_2=-1-j$，$p_3=-1+j$

由此，根轨迹起点为开环极点，终点为无穷远，三条根轨迹分支数

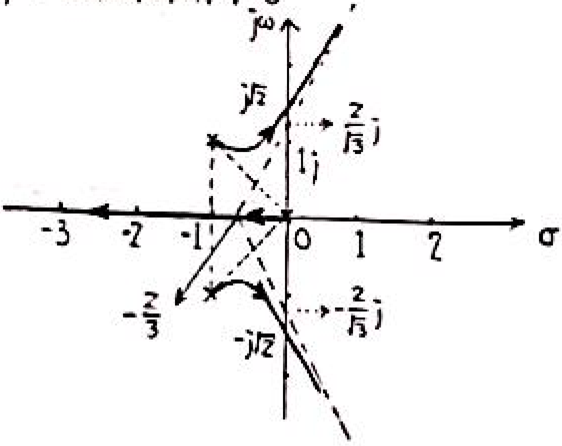
求渐近线 $\Phi=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}$ 得三条渐近线 $\Phi=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}$；其与横轴交点 $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=-\frac{2}{3}$

根轨迹与虚轴交点 $j\omega(-\omega^2+2j\omega+2)+K=0$，虚部 $-\omega^3+2\omega=0$，实部 $-2\omega^2+K=0$ 解得 $\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\K=4\end{cases}$

出射角~~入射角~~ p_2：$-\sum_{i=1}^{3}\angle(s-p_i)=(2l+1)\pi$ 得出射角 $-45°$

由于根轨迹关于实轴对称得 p_3处出射角为45°

由此可绘



4.2

由题可知开环传递函数 $T(s)=\frac{K(0.25s+1)}{s(0.5s+1)}=\cancel{2K}\,0.5K\frac{s+4}{s(s+2)}$，由此可知开环极点 $p_1=0$，$p_2=-2$ 开环零点 $z_1=-4$

令 $K^*=0.5K$，由开环极点、零点数可知其有两条根轨迹，一条渐近线

渐近线与实轴夹角 $\Phi=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\pi$，再由实轴上根轨迹分布得 $[-2,0]$，$(-\infty,-4]$ 均为根轨迹

计算分离点 闭环特征方程 $s(s+2)+K^*(s+4)=0$，化简 $s^2+(K^*+2)s+4K^*=0$

该特征方程求分离点，其为二重根，求导得 $s=-\frac{K^*+2}{2}$ 代入特征方程解得 $K_1^*=6+4\sqrt{2}$ 即 $s_1=-4-2\sqrt{2}$

$K_2^*=6-4\sqrt{2}$ $s_2=-4+2\sqrt{2}$

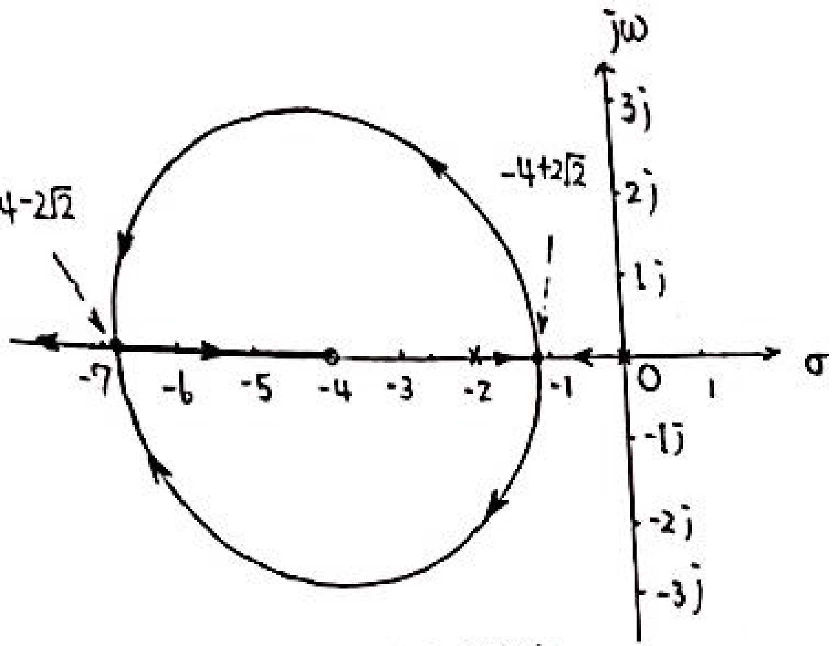
由此有两分离点 $s_1=-4-2\sqrt{2}$，$s_2=-4+2\sqrt{2}$

而复平面的根轨迹由求解特征方程可知是圆弧，根据背面第5题方法可知二者同理

题目要求无超调响应时开环增益K，即为根轨迹在左半实轴部分，由分离点 K_1^*，K_2^* 可有

K^*范围 $[0,6-4\sqrt{2}]\cup[6+4\sqrt{2},+\infty)$，则K的范围 $[0,12-8\sqrt{2}]\cup[12+8\sqrt{2},+\infty)$

根轨迹图见背面.



4.2根轨迹

5.
由题有单位反馈系统开环传函 $G(s)=K^*\frac{s+2}{s(s+1)}$，其根轨迹已给，证明复数根轨迹部分是以$(-2,j0)$为圆心以$\sqrt{2}$为半径的圆.

证明 系统闭环特征方程 $D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(K^*+1)s+2K^*$

$$s_{1,2}=\frac{-(K^*+1)\pm\sqrt{(K^*+1)^2-8K^*}}{2}=-\frac{K^*+1}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K^*-(K^*+1)^2}}{2}=\sigma+j\omega$$

则 $\sigma=-\frac{K^*+1}{2}$，$\omega^2=\frac{8K^*-(K^*+1)^2}{4}\overset{K^*=-2\sigma-1}{=\!=}\frac{-8(2\sigma+1)-4\sigma^2}{4}=-1\sigma^2-2(2\sigma+1)$
$=-\sigma^2-4\sigma-2$

$K^*=-2\sigma$ [redacted] 1

即 $\sigma^2+\omega^2+4\sigma+2=0\rightarrow(\sigma+2)^2+\omega^2=(\sqrt{2})^2$

由此可知其在复平面的根轨迹为$(-2,j0)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆.

10.
单位反馈系统开环传函 $G(s)=\frac{K}{s(s+3)(s+7)}$，确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性K取值

由开环传函可知无开环零点，开环极点 $p_1=0$，$p_2=-3$，$p_3=-7$ 三条根轨迹终止于无穷远

由实轴上根轨迹特性确定根轨迹 $[-3,0]$，$(-\infty,-7]$

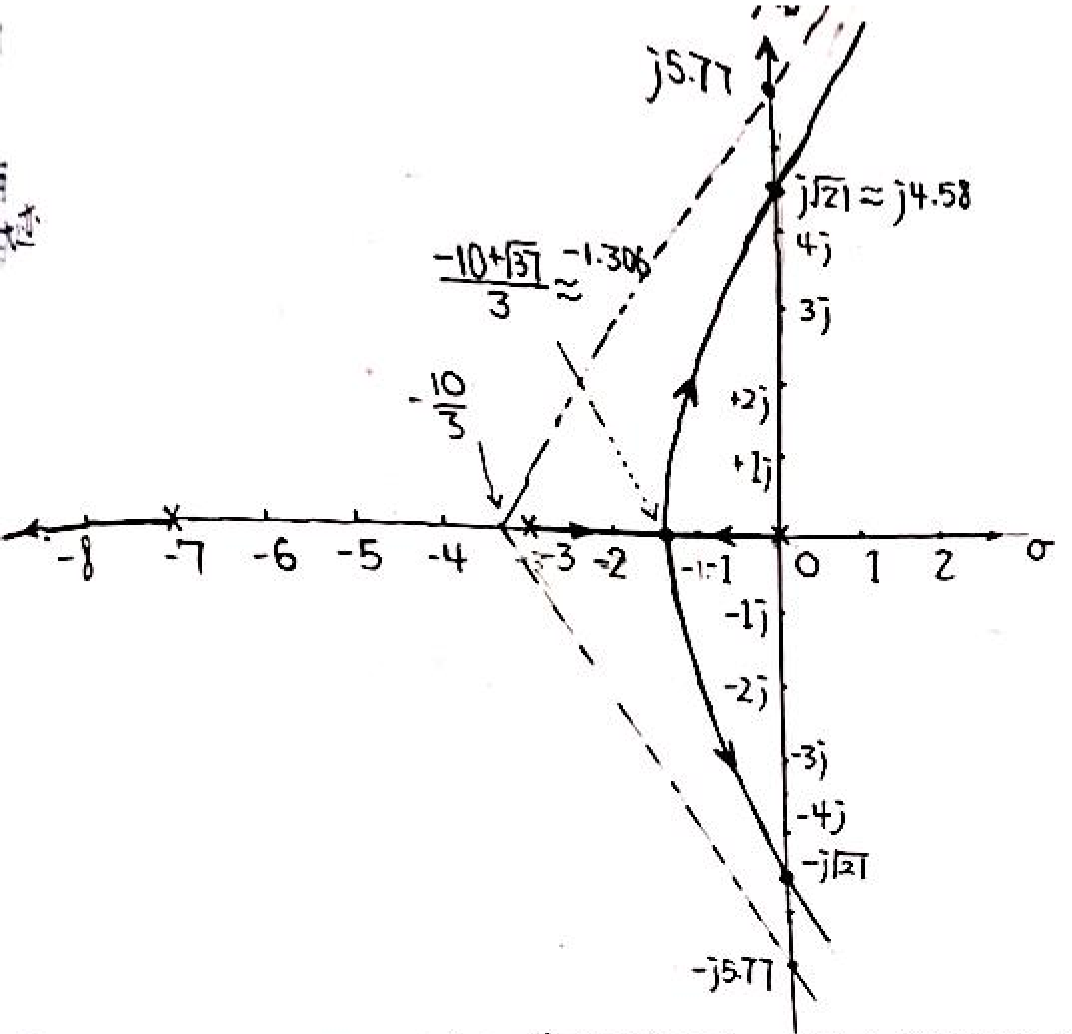
求分离点：其闭环传函为二重根 $s^3+10s^2+21s+K=0$ 求导 $3s^2+20s+21=0$ 得 $d_1=\frac{-10+\sqrt{37}}{3}$ $d_2=\frac{-10-\sqrt{37}}{3}$（舍）

$K_1=12.597$ $K_2=-20.745$ 由于K取负值一般要舍去

求渐近线：(1)与实轴夹角 $\varphi=\frac{(2l+1)\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\pi$

(2)与实轴交点 $\sigma=\frac{-3-7}{3}=-\frac{10}{3}$

虚轴交点：$-j\omega^3-10\omega^2+21j\omega+K=0$，$\begin{cases}-\omega^3+21\omega=0\\-\omega^2\cdot10+K=0\end{cases}$ 得 $\omega=\pm\sqrt{21}$，$K=210$



此系统具有欠阻尼阶跃响应特性~~时K取值~~ K的取值应为(12.597，210)

11. 已知单位负反馈系统开环传函 $G(S)=\frac{K}{S(0.5S+1)}=\frac{2K}{S(S+2)}$ 令 $K^*=2K$

由此可知无开环零点，开环极点 $P_1=0$，$P_2=-2$，则有两条根轨迹，终止于无穷远

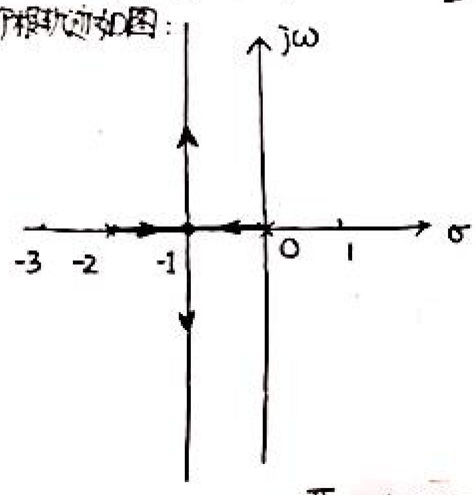
由实轴上根轨迹特点知 根轨迹 $[-2,0]$。

求分离点：闭环传函 $S^2+2S+K^*=0$ 有二重根 求导 $2S+2=0$ 得分离点 $S=-1$，即 $K^*=1$

渐近线：(1)与横轴夹角 $\Phi=\frac{(2l+1)\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

(2)与横轴交点 $\sigma=\frac{0+(-2)}{2}=-1$

即根轨迹如图：



由此可知系统始终是稳定的

(1) $0<K<0.5$，即 $0<K^*<1$

系统有两个不等的负实根，过阻尼。

(2) $K=0.5$，即 $K^*=1$

系统有两个相等的负实根，临界阻尼

(3) $K>0.5$，即 $K^*>1$

系统有两个共轭的复根，实部为负，欠阻尼。

当K=5时，其为欠阻尼，$K^*=10$，闭环传函 $S^2+2S+10=0$

$\omega_n^2=10$，$\xi=\frac{1}{10}\sqrt{10}$，$\theta=\arccos\xi=71.565°=1.249\,rad$

则动态指标

$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=1.0472s$；$\sigma_p=e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}=35.09\%$；$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.6309s$；$t_s=\frac{3-\ln\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n}$ $\Delta=5\%$

$\approx3.0527s$

4.4

该系统闭环特征方程：$s^2(s+a)+K(s+1)=0$ 即 $\frac{K(s+1)}{s^2(s+a)}=-1$

通过 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$，开环零点 -1，开环极点 $0,0,-a$。

即 $\frac{2}{d}+\frac{1}{d+a}=\frac{1}{d+1}$ 求解根轨迹与负实轴交点 得 $d_{1,2}=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$。

韦达定理
$d_1 d_2=a$
$d_1+d_2=-\frac{a+3}{2}$

(1) 根轨迹与负实轴无交点

即 d 无实数解，$(a-1)(a-9)<0$，解得 $1<a<9$

(2) 根轨迹与负实轴有一个交点

即 d 有两个相等的解，$(a-1)(a-9)=0$，解得 $a=9$，$a=1$，舍去 $a=1$，其交点位于O上，与负实轴无交点

(3) 根轨迹与负实轴有两个交点

即 d 有两个不相等的解，$(a-1)(a-9)>0$，解得 $a>9$，舍去 $a<1$，后面讨论 $a\le 0$，$0<a<1$

当 $a\le 0$ 时，可知根轨迹与实轴无交点，后面绘图可知

当 $0<a<1$ 时，极点 $-a$ 直接与零点 -1 相连组成根轨迹，而在O处两极点的渐近线与横轴夹角 $=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$

其渐近线与横轴交点 $\sigma=\frac{-a+1}{2}>0$，大概可知其与负实轴无交点。

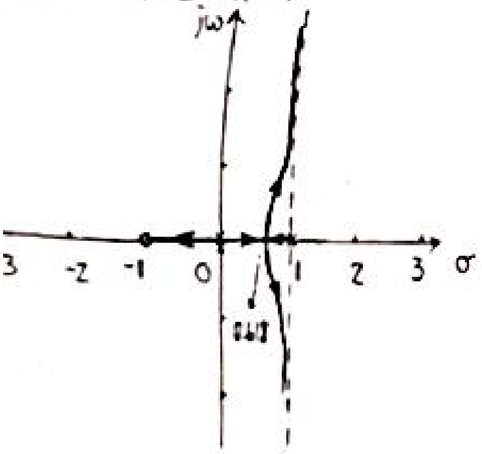
综上

① 根轨迹与负实轴无交点时，$a\le 0$ 或 $0<a<1$ 或 $1<a<9$ 或 $a=1$ 即 $a<9$

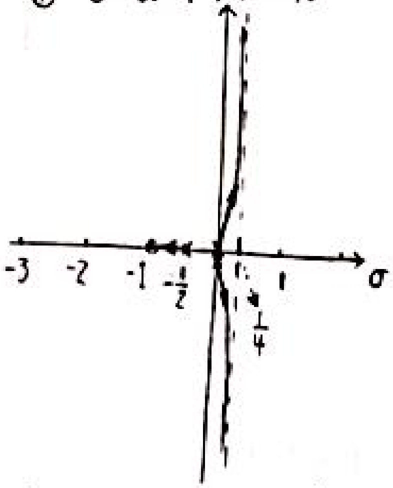
② 根轨迹与负实轴有一个交点，$a=9$

③ 根轨迹与负实轴有两个交点，$a>9$

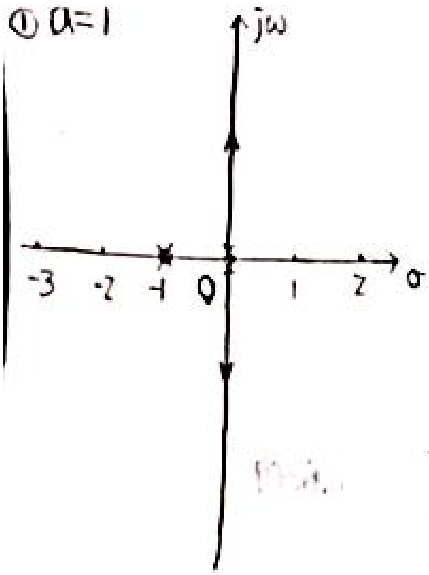
① $a\le 0$ $a=-1$



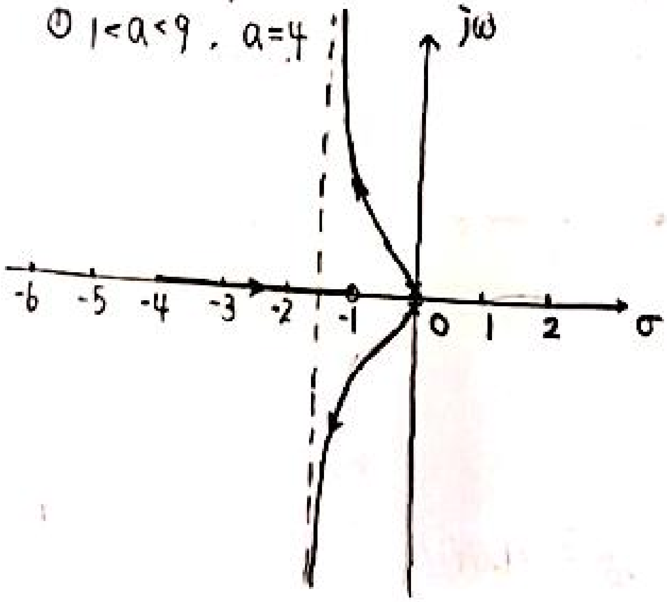
① $0<a<1$，$a=0.5$

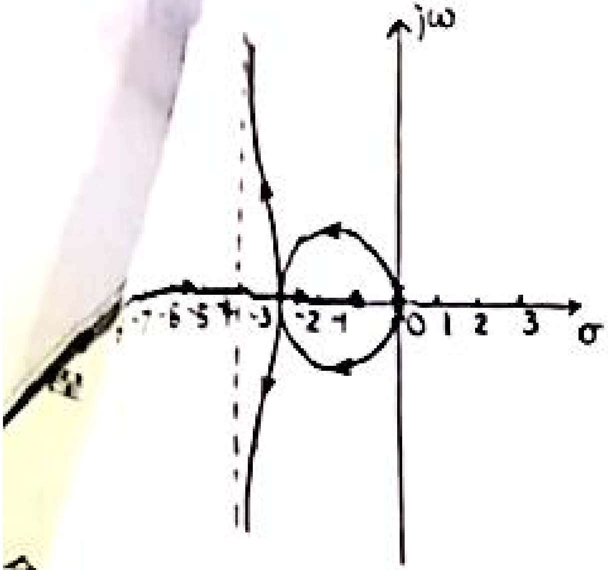


① $a=1$

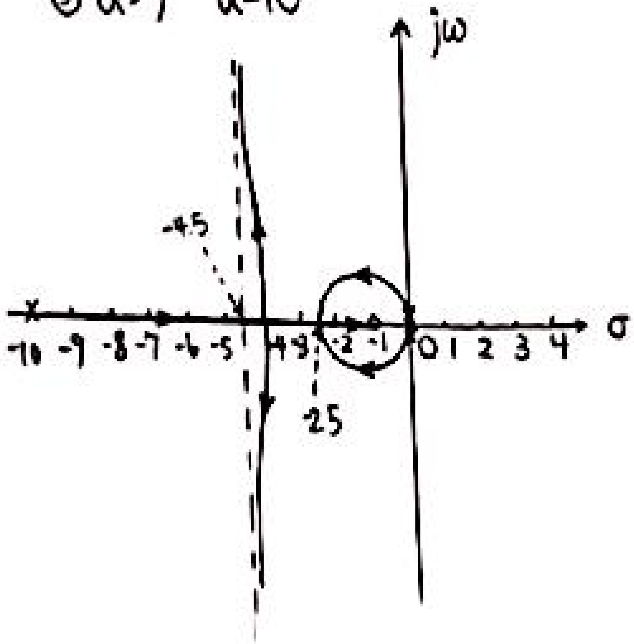


① $1<a<9$，$a=4$





② a>9　a=10



4.5

某正反馈系统的开环传递函数 $G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{(s+3)(s+1-j)(s+1+j)}$

根轨迹方程 $\frac{K(s+2)}{(s+3)(s+1-j)(s+1+j)}=+1$，由开环传递可知 $p_1=-3$，$p_2=-1+j$，$p_3=-1-j$ 开环极点

$z_1=-2$ 开环零点

渐近线与横轴夹角 $\Phi=\frac{2l\pi}{n-m}\Rightarrow 0,\pi$，又知实轴上根轨迹 $(-\infty,-3]$，$[-2,+\infty)$

出射角 p_2：$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=2l\pi$　得出射角为 $-71.565°$

出射角 p_3：同理为 $71.565°$

分离点，闭环特征方程 $(s+3)(s+1-j)(s+1+j)-K(s+2)=0$，由于K极值，共为二重根

求：$\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1-j}+\frac{1}{d+1+j}=\frac{1}{d+2}$　得 $d=-0.8026$

求与虚轴交点，$s^3+5s^2+(8-K)s+(6-2K)=0$　代入 $s=j\omega$　得 $\omega=0$，$K=3$

由此可绘制根轨迹