自动控制理论 A—作业 6

2024/10/24

（Due: Oct. 31, 2024）

1. (20’)

给定线性时不变系统 $\dot{x}=Ax$，如果当 $x(0)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ 时，$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$；当 $x(0)=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}^T$ 时，$x(t)=\begin{bmatrix}2e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$，试求该系统的系统矩阵 A，以及状态转移矩阵 $\phi(t,0)$ 或 $\phi(t)$。

2. (15’)

对于任意两个可交换的矩阵$A\in R^{n\times n}$ 和 $B\in R^{n\times n}$，即$AB=BA$，试证明

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{At}$$

3. (20’)

给定如下线性时不变系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u, \qquad x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \quad t\ge 0\\ y&=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x\end{aligned}$$

请用两种方法求系统的单位阶跃响应 $y(t)$。

4. (15’)

给定矩阵$A\in R^{n\times n}$，则可由下列式子计算e^{At}，

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

假设矩阵 A 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两相异，试求$a_i(t)$，$i=0,1,\cdots,n-1$.（注：请写出详细的步骤）

5. (10’)

设采样周期为的$T=0.01s$，求下面连续系统所对应的离散化状态方程。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

6. (20’)

设描述线性时不变系统的差分方程为 $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$。

(1) 选取 $x_1(k)=y(k),\ x_2(k)=y(k+1)$ 为一组状态变量，写出该系统的状态方程。

(2) 假设系统初始值为 $y(0)=0,\ y(1)=1$，求系统的单位阶跃响应 $y(k)$。