By 22-psp

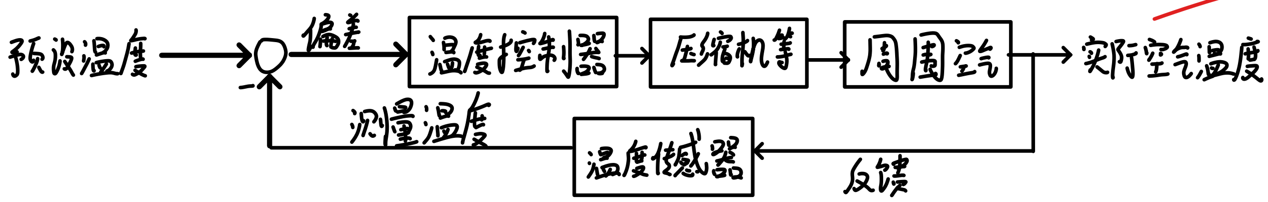
自动控制理论 A—作业 1

（Due: Sept. 12, 2024）

100

1. (10’) 请参考教材图 1.3 所示的控制框图，描述一个生活或工程中存在的闭环控制系统的例子。

生活中常用的空调是一个闭环反馈控制系统



2. (10’) 试求解函数 $f(t)=5e^{-2t}-\sin 2t,\quad t\geq 0$ 的 Laplace 变换（请写出求解过程）。

解：由于 $1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$, $Res>0$, $e^{-2t}\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+2}$, $Res>-2$, $\sin wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{w}{s^2+w^2}$, $Res>0$

故 $\mathcal{L}[f(t)] = 5\mathcal{L}[e^{-2t}]-\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{5}{s+2}-\frac{2}{s^2+4}$, $Res>0$

3. (10’) 求函数 $F(s)=\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$ 的 Laplace 逆变换。

后面会用到

$f(t-t_0)\xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-t_0 s}F(s)$

$e^{-at}f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$

解. $F(s)=\dfrac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}$

由于 $\cos wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+w^2}$，位移 · $e^{-t}\cos wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+1}{(s+1)^2+w^2}$

从而 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] = 2e^{-t}\cos 2t$

4. (10’) 利用定义求 $f(t)=e^{at}$ 的 Laplace 变换，并给出成立的条件。其中 a 为实数。定义：$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

解：$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}$

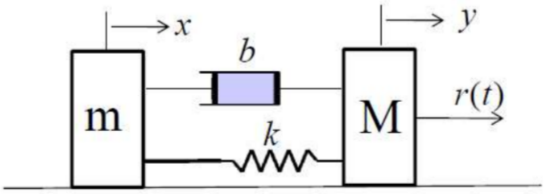
当 $a-Res<0$ 即 $Res>a$ 时 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{a-s}(0-(-1)) = \frac{1}{s-a}$

当 $a-Res>0$ 时，积分不存在

故 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s-a}$ $Res>a$

5. (10’+10’) 如下图所示，假设两个滑块都在无摩擦的表面上运动，
   (a) 请写出系统的运动方程（微分方程）。
   (b) 假设 $r(t)$ 为系统的控制输入量，y 为系统的输出量，请计算系统的传递函数 $G(s)=Y(s)/R(s)$。

要写成标准形式！
$\frac{\text{分子多项式}}{\text{分母多项式}}$ 或 零极点增益形式



(1) 系统 $r(t) = M\ddot{y}+m\ddot{x}$ …①

对于 M. $r(t)-b(\dot{y}-\dot{x})-k(y-x)=M\ddot{y}$ …②

对于 m: $b(\dot{y}-\dot{x})+k(y-x)=m\ddot{x}$ …③

(2) ③ 拉氏变换. $bsY(s)-bsX(s)+kY(s)-kX(s)=ms^2X(s)$

① 拉氏变换. $R(s) = Ms^2Y(s)+ms^2X(s)$

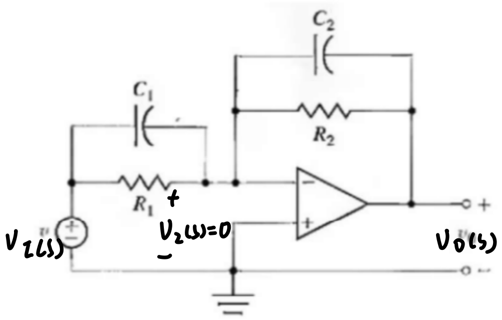
代入，消去 $X(s)$

有 $R(s)=\left[Ms^2+\frac{ms^2(bs+k)}{ms^2+bs+k}\right]Y(s)$

从而 $G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{ms^2+bs+k}{Mms^4+(M+m)bs^3+(M+m)ks^2}$

6. (15') 下图是一个典型的运算放大器电路。假设电路是理想放大器，且各参数为$R_1=R_2=100$ kΩ，$C_1=10$ μF, $C_2=5$ μF，请计算电路的传递函数. 利用虚短虚断列方程 10^5

10^{-5} 5×10^{-6}



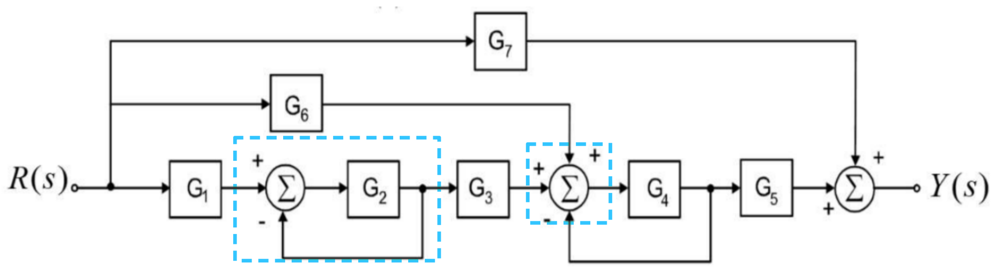
解: $Z_R(s)=R$, $Z_C(s)=\frac{1}{sC}$, 而 $R\|\frac{1}{sC}=\frac{Z_R(s)Z_C(s)}{Z_R(s)+Z_C(s)}=\frac{\frac{R}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{R}{1+sCR}$

由虚短知 $U_2=0$, 虚断:

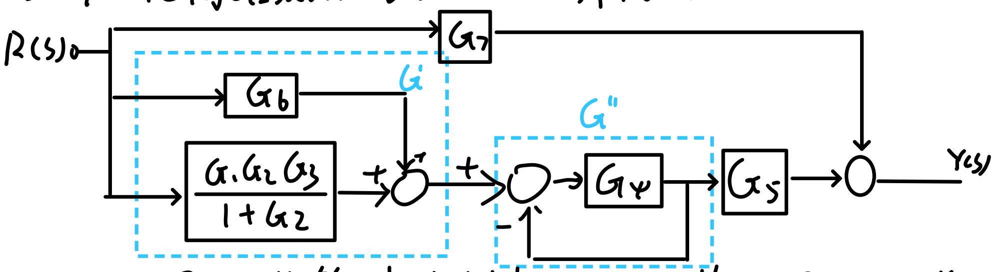
$$\frac{U_I(s)}{R_1\|\frac{1}{sC_1}}=\frac{-U_O(s)}{R_2\|\frac{1}{sC_2}} \Rightarrow G(s)=\frac{U_O(s)}{U_I(s)}=-\frac{R_2\|\frac{1}{sC_2}}{R_1\|\frac{1}{sC_1}}=-\frac{R_2(1+sC_1R_1)}{R_1(1+sC_2R_2)}$$

代入数据 $=-\frac{10^5(1+s\cdot10^{-5}10^5)}{10^5(1+s\cdot0.5\,10^{-5}10^5)}=-\frac{1+s}{1+\frac{1}{2}s}=-\frac{2s+2}{s+2}$

7. (25) 系统方框图下图所示，请计算系统的传递函数$G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}$。（注意：请写出详细的化简步骤） 注意区分并联支路和反馈回路



Step1 化简G_2反馈回路,然后与G_1G_3串联合并

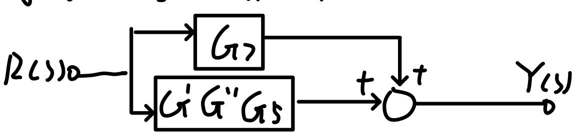


Step2 同理,化简G_4.G''反馈回路,再将它们与G_5合并

并联支路直接相加 $G'=G_6+\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2}$ $G''=\frac{G_4}{1+G_4}$

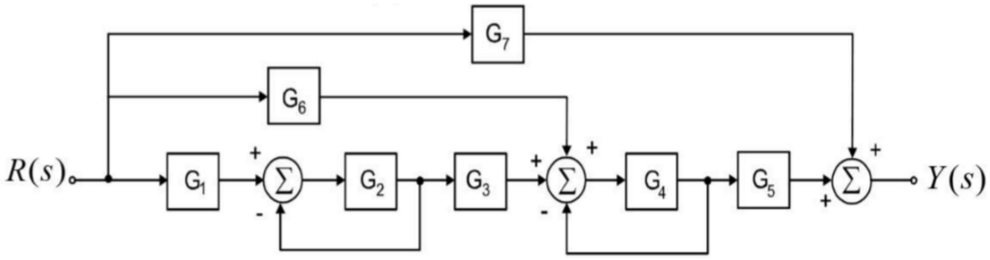
$G'G''G_5=\left(G_6+\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2}\right)\frac{G_4G_5}{1+G_4}$

Step3. 将$G'G''G_5$与G_7合并



$$G(s)=G'G''G_5+G_7=\left(G_6+\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2}\right)\frac{G_4G_5}{1+G_4}+G_7$$

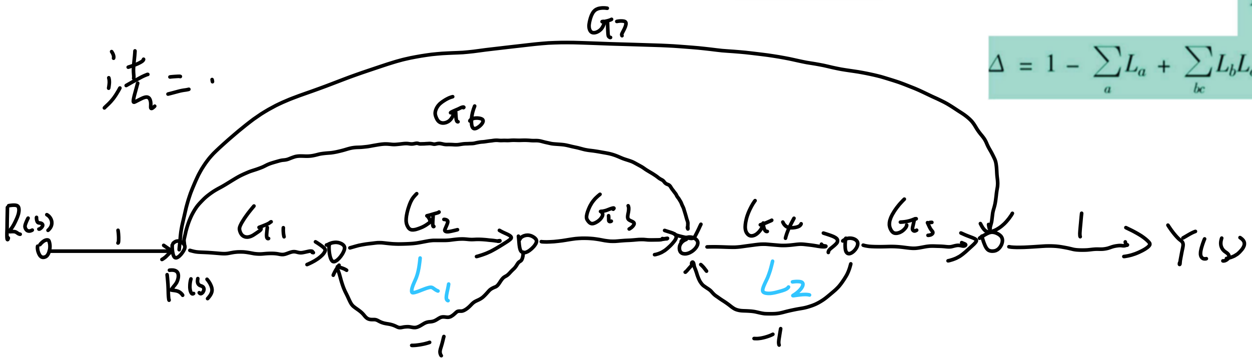
$$=\frac{G_1G_2G_3G_4G_5+(1+G_2)G_6G_4G_5}{1+G_2+G_4+G_2G_4}+G_7$$



$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

$$\Delta = 1-\sum_a L_a+\sum_{bc}L_bL_c-\sum_{def}L_dL_eL_f+\cdots$$

法二:



回路 两个,回路增益为 $L_1=-G_2$ $L_2=-G_4$

互不接触回路增益积. $L_1L_2=G_2G_4$

信号流图的特征式为 $\underbrace{\Delta=1-(L_1+L_2)+L_1L_2}_{\text{注意正负}}=1+G_2+G_4+G_2G_4$ 作为P的分母

三条前向通路

$P_1=G_1G_2G_3G_4G_5$, $P_2=G_6G_4G_5$, $P_3=G_7$

$\Delta_1=1$ $\Delta_2=1+G_2$ $\Delta_3=1+G_2+G_4+G_2G_4$ 正负的确定方法和Δ一致

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{3}P_k\Delta_k=\frac{G_1G_2G_3G_4G_5+(1+G_2)G_6G_4G_5+G_7(1+G_2+G_4+G_2G_4)}{1+G_2+G_4+G_2G_4}$$

$$=\frac{G_1G_2G_3G_4G_5+(1+G_2)G_6G_4G_5}{1+G_2+G_4+G_2G_4}+G_7$$

与法一相同