By 22-psp

自动控制理论 A 作业 11

100

2024 年 11 月 28 日

10.16　已知线性定常系统的状态方程为

直接法. $A^TP+PA=-I$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & -4\end{bmatrix}x$$

试利用李亚普诺夫第二法判别该系统平衡状态的稳定性。

连续线性系统的Lyapunov方程
$A^TP+PA=-Q=-I$
离散线性系统的Lyapunov方程
$A^TPA-P=-Q=-I$

解：已知 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & -4\end{bmatrix}$，取 $Q=I$，$A^TP+PA=-Q$，即

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}P_{12}+P_{21}-2P_{11} & P_{22}-2P_{11}-5P_{12}\\ P_{22}-2P_{11}-5P_{21} & -2P_{12}-2P_{21}-8P_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -1\end{bmatrix}$$

解四元一次方程组，得 $P_{11}=\frac{23}{60}$，$P_{12}=P_{21}=-\frac{7}{60}$，$P_{22}=\frac{11}{60}$

由于 $P_{11}>0$，$|P|=P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}=\frac{23\times11-7\times7}{60\times60}=\frac{17}{300}>0$ 故P为正定阵

由于系统为线性定常系统，故在原点是大范围渐近稳定的

法二 原系统为 $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1-2x_2\\ \dot{x}_2=x_1-4x_2\end{cases}$. 取 $V(x)=x_1^2+2x_2^2$ 为正定的

$$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+4x_2\dot{x}_2=2x_1(-x_1-2x_2)+4x_2(x_1-4x_2)=-2x_1^2-16x_2^2$$

为负定的，且有 $\lim_{x\to\infty}|V(x)|=\infty$

故系统在原点是大范围渐近稳定的

10.17　已知线性定常系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}x$$

第一法(间接法)

试分析该系统在平衡状态的稳定性。

定理9-9　对于线性定常系统 $\dot{x}=Ax, x(0)=x_0, t\ge0$，有：系统的唯一平衡状态$x_e=0$是渐近稳定的充分必要条件是，$A$的所有特征值均具有负实部。

解. $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$|\lambda I-A|=\lambda^2-2\lambda-5=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+20}}{2}=1\pm\sqrt{6}$

由于特征根 $\lambda=1+\sqrt{6}$ 有正的实部，故系统不稳定

10.28　已知线性定常离散系统的状态方程为

$$x_1(k+1)=x_1(k)+3x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=-3x_1(k)-2x_2(k)-3x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=x_1(k)$$

试分析该系统的平衡状态的稳定性。

对于线性定常离散系统 $x(k+1)=\Phi x(k)$　第一法(间接法)

- 系统渐近稳定的充要条件：Φ的特征值的模均小于1

解：$x(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}x(k)$，故 $\Phi=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-\Phi|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & \\ 3 & \lambda+2 & 3\\ -1 & & \lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3 & \\ \lambda+2 & 3\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3\\ 3 & \lambda+2\end{vmatrix}=9+\lambda(\lambda^2+\lambda+7)=\lambda^3+\lambda^2+7\lambda+9=0$$

特征根为 $\lambda_1=-1.2346$，$\lambda_{2,3}=0.117\pm j2.697$，在单位圆外 ⇒ 系统不稳定

By 22-psp

10.29　已知线性定常离散系统的齐次状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$$

其中系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{K}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

以及 $K > 0$。试确定给定系统在平衡点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = 0$ 处渐近稳定时参数 K 的取值范围。

解. $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \\ & \lambda & -1 \\ & -\frac{K}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{K}{2} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & -1 \\ & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - \frac{K}{2}) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{\frac{K}{2}}, \lambda_3 = -\sqrt{\frac{K}{2}}$

要使在 $x_e = 0$ 处渐近稳定，必有特征值均位于单位圆内 $\Rightarrow \sqrt{\frac{K}{2}} < 1$

即 $0 < K < 2$