By 22-PSP

100

自动控制理论 A 作业 12

lg(AB)=lgA+lgB

2024 年 12 月 13 日

根轨迹形式指s前系数均为1
其它情况下,标准型为+1形式

1 考虑单位反馈系统，其开环传递函数如下，

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

当取 $r(t)=2\sin t$ 时，系统的稳态输出

输入正弦信号⇒频域分析 $c_{ss}(t)=2\sin(t-45°)$

试确定系统参数 ω_n，ζ。

解. 系统的闭环传函为 $\Phi(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 为标准振荡环节

输入 $r(t)=2\sin t$, 输出 $c_{ss}(t)=2\sin(t-45°)$, 有 $\omega=1rad/s$, $|\Phi(\omega)|=1$, $\angle\Phi(\omega)=-45°$

$\Phi(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2-\omega^2)+2j\zeta\omega\omega_n} \Rightarrow |\Phi(\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega\omega_n)^2}}$, $\angle\Phi(\omega)=-\arctan\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2}$

将 $\omega=1rad/s$ 时 $|\Phi(\omega)|=1$, $\angle\Phi(\omega)=-45°$ 代入, 有

$$\begin{cases}\omega_n^2=\sqrt{(\omega_n^2-1)^2+(2\zeta\omega_n)^2}\\ 2\zeta\omega_n=\omega_n^2-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(4\zeta^2-2)\omega_n^2+1=0\\ \omega_n^2-2\zeta\omega_n-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_n^4-4\omega_n^2+2=0\\ \zeta=\frac{\omega_n^2-1}{2\omega_n}\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\omega_n=\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx1.848\\ \zeta=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\approx0.653\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega_n=\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx0.765\\ \zeta=\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}<0\end{cases}$ 舍去

综上, $\omega_n\approx1.848$, $\zeta\approx0.653$

2 绘制下列传递函数的对数幅频渐近特性曲线 一定注意. $10^0=1$

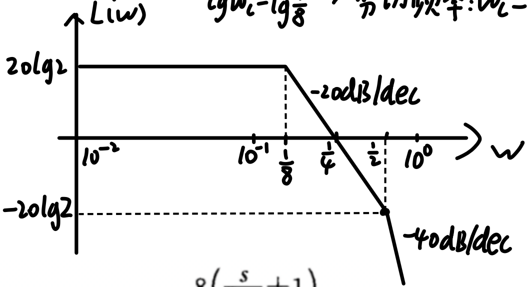
Bode图

(1) $G(s)=\frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$;

解: 已是标准型. 转折频率 $\begin{cases}\omega_1=\frac{1}{8} & -20dB/dec\\ \omega_2=\frac{1}{2} & -20dB/dec\end{cases}$

基准点: $\omega=1$ 时 $L(1)=20\lg K=20\lg2\approx6.02$ 斜率为0

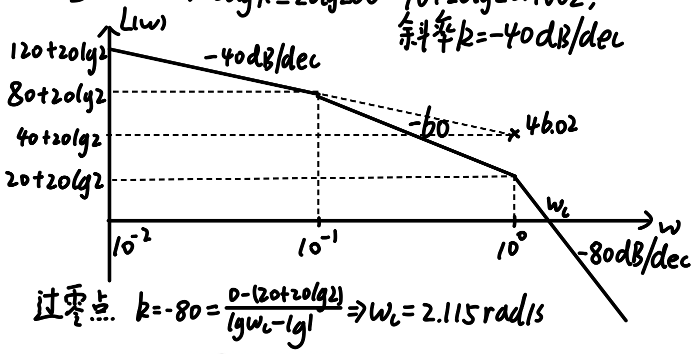
过零点 $k=-20=\frac{0-20\lg2}{\lg\omega_c-\lg\frac{1}{8}} \Rightarrow$ 剪切频率: $\omega_c=\frac{1}{4}rad/s$



(2) $G(s)=\frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$;

已是标准型, 转折频率 $\begin{cases}\frac{1}{10} & -20dB/dec\\ 1 & -20dB/dec\end{cases}$

基准点: $L(1)=20\lg K=20\lg200=40+20\lg2\approx46.02$, 斜率 $k=-40dB/dec$



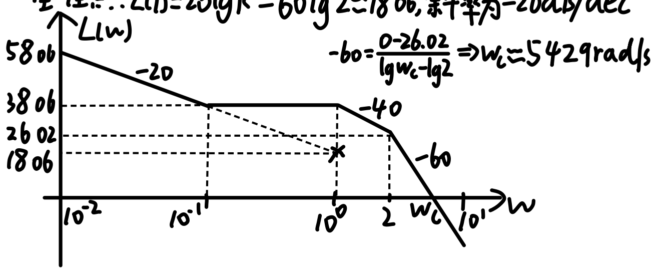
过零点 $k=-80=\frac{0-(20+20\lg2)}{\lg\omega_c-\lg1} \Rightarrow \omega_c=2.115rad/s$

(3) $G(s)=\frac{8\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$;

解. 转折频率 $\begin{cases}0.1 & +20dB/dec\\ 1 & -40dB/dec\\ 2 & -20dB/dec\end{cases}$

基准点: $L(1)=20\lg K=60\lg2\approx18.06$, 斜率为 $-20dB/dec$

$-60=\frac{0-26.02}{\lg\omega_c-\lg2} \Rightarrow \omega_c\approx5.429rad/s$

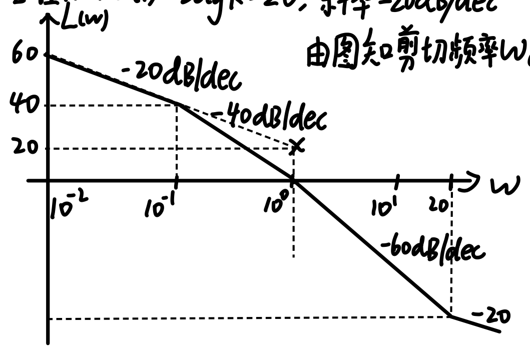


(4) $G(s)=\frac{10\left(\frac{s^2}{400}+\frac{s}{10}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}$

转折频率 $\begin{cases}0.1 & -20dB/dec\\ 1 & -20dB/dec\\ 20 & 40dB/dec\end{cases}$

基准点: $L(1)=20\lg K=20$, 斜率 $-20dB/dec$

由图知剪切频率 $\omega_c=1rad/s$



By 22-psp

5.1 一阶环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{T_1 s+1}{T_2 s-1} \qquad 1>T_1>T_2>0$$

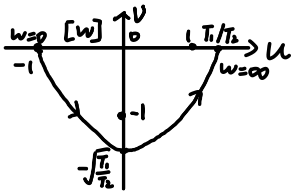
试绘制该环节的 Nyquist 图及 Bode 图。

解. $G(s)=\frac{T_1s+1}{T_2s-1}$, $1>T_1>T_2>0$, $G(j\omega)=\frac{j\omega T_1+1}{j\omega T_2-1}=\frac{T_1T_2\omega^2-1}{T_2^2\omega^2+1}+j\frac{-(T_1+T_2)\omega}{T_2^2\omega^2+1}=X+jY$

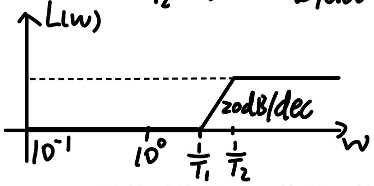
实部 $X=\frac{T_1T_2\omega^2-1}{T_2^2\omega^2+1}$，虚部 $Y=\frac{-(T_1+T_2)\omega}{T_2^2\omega^2+1}$，交点. $\omega=0$时$(-1,0)$，$\omega=\sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}$时$(0,-\sqrt{\frac{T_1}{T_2}})$，$\omega=\infty$时$(\frac{T_1}{T_2},0)$

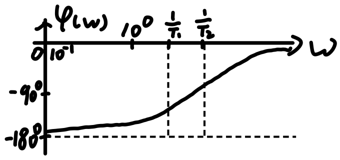
其中 $\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}>1$，$\frac{T_1}{T_2}>1$

Nyquist图为.



转折频率 $\begin{cases}1<\frac{1}{T_1}\ (小)\ +20dB/dec\\ 1<\frac{1}{T_2}\ (大)\ -20dB/dec\end{cases}$ 基准线斜率为0 幅角 $\omega=0$时为$-180°$ $\omega=\infty$时为$0°$





5.3 设某系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c=5$ rad/s 时的开环增益 K。

解. $GH(j\omega)=\frac{Ke^{-0.1j\omega}}{j\omega(0.1j\omega+1)(j\omega+1)}\Rightarrow|GH(j\omega)|=\frac{K}{\omega\sqrt{0.01\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}}$

$\omega_c=5rad/s$ 即 $\omega=\omega_c$时，$|GH(j\omega)|=1$

代入得 $K=\omega_c\sqrt{0.01\omega_c^2+1}\sqrt{\omega_c^2+1}=28504$

5.4 若系统的单位阶跃响应为

$$y(t)=1-1.8e^{-4t}+0.8e^{-9t} \qquad t\geqslant 0$$

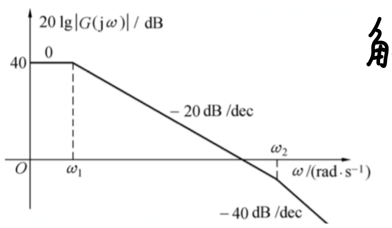
试求取该系统的频率响应。$\Phi(j\omega)=\Phi(s)|_{s=j\omega}$

解: 系统输入为 $u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s}$，输出$y(0)=0$，零状态，$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]=\frac{1}{s}-1.8\frac{1}{s+4}+0.8\frac{1}{s+9}$

系统传函 $\Phi(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=1-\frac{1.8s}{s+4}+\frac{0.8s}{s+9}=\frac{36}{(s+4)(s+9)}=\frac{1}{(\frac{s}{4}+1)(\frac{s}{9}+1)}$

由于 $p_1=-4$, $p_2=-9$，系统稳定，系统的频率响应为 $\Phi(j\omega)=\Phi(s)|_{s=j\omega}=\frac{1}{(\frac{j\omega}{4}+1)(\frac{j\omega}{9}+1)}$

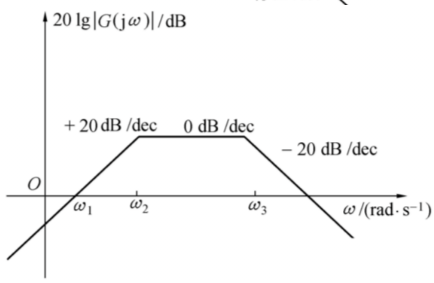
5.5 已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5.5 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



解.基准线. $L(1)=20\lg K=40\Rightarrow K=100$，斜率为0，无积分环节

$\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$处有两个惯性环节，又由题是最小相位系统

开环传函为 $G(s)=\frac{100}{(\frac{s}{\omega_1}+1)(\frac{s}{\omega_2}+1)}$



解.有 $\omega=\omega_2$, $\omega=\omega_3$ 两个惯性环节，基准线斜率为+20dB/dec

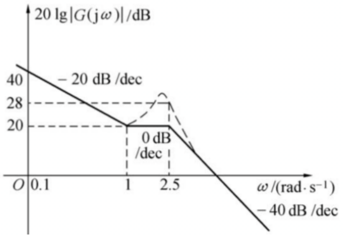
设 $G(s)=\frac{Ks}{(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)}$ 用近似法求K.

$\omega=\omega_1$时，$L(\omega_1)=20\lg(K\omega_1)=0\Rightarrow K=\frac{1}{\omega_1}\Rightarrow G(s)=\frac{\frac{s}{\omega_1}}{(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)}$

By 22-psp

修正项公式 振荡 $-20\lg(2\xi)\,dB$

二阶微分 $20\lg(2\xi)\,dB$

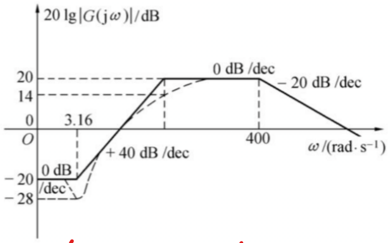


解:基准线斜率 −20dB/dec, $w=1$时, $L(1)=20\lg(k)=20 \Rightarrow K=10$

$w=1$处一阶微分环节, $w=2.5$处一振荡环节, $w_n=2.5$, 此处 $-20\lg(2\xi)=8dB$

$\Rightarrow \xi=0.199$

传函为 $G(s)=\dfrac{10(s+1)}{s\left[\left(\frac{s}{2.5}\right)^2+\frac{0.398s}{2.5}+1\right]}$



−28为真实曲线的最小值

解.基准线斜率为0, $L(1)=20\lg(k)=-20 \Rightarrow K=0.1$

$w=3.16$处有一二阶微分环节(ξ_1), $w=31.6$处有一振荡环节(ξ_2),

$w=400$处有一惯性环节,

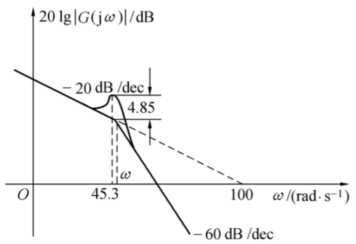
$$G(s)=\frac{\left(\frac{s}{3.16}\right)^2+\frac{2\xi_1 s}{3.16}+1}{10\left[\left(\frac{s}{31.6}\right)^2+\frac{2\xi_2 s}{31.6}+1\right]\left(\frac{s}{400}+1\right)}$$

$$G(s)=\frac{\left(\frac{s}{3.16}\right)^2+\frac{0.406s}{3.16}+1}{10\left[\left(\frac{s}{31.6}\right)^2+\frac{1.996s}{31.6}+1\right]\left(\frac{s}{400}+1\right)}$$

修正 $\cancel{\xi_1: 20\lg(2\xi_1)=8 \Rightarrow \xi_1=0.199}$

$\xi_1: 20\lg\dfrac{1}{2\xi_1\sqrt{1-\xi_1^2}}=8 \Rightarrow \xi_1=0.203$

$\xi_2: -20\lg(2\xi_2)=-6 \Rightarrow \xi_2=0.998$



当 $0<\xi<0.707$时, 对于无零点 $K=1$的标准二阶系统. $w_r=w_n\sqrt{1-2\xi^2}$

$M_r=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

解.基准线斜率为−20dB/dec, $L(1)=20\lg K=40 \Rightarrow K=100$

$w=w_n$处有一振荡环节,参数为 w_n, ξ,

由 $\begin{cases} w_n\sqrt{1-2\xi^2}=45.3 \\ 20\lg\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=4.85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_n \\ \xi=0.95 \end{cases}$ 舍, $\begin{cases} w_n=50.02\,rad/s \\ \xi=0.2999 \end{cases}$

综上, $G(s)=\dfrac{100}{s\left[\left(\frac{s}{50.02}\right)^2+\frac{0.5998s}{50.02}+1\right]}$