

1. (5'+10'+5') 如图 1 所示, 假设两个滑块都在无摩擦的表面上运动,
- 请写出系统的运动方程
 - 选择适当的状态变量, 写出系统的状态空间表达式
 - 假设 $r(t)$ 为系统的控制输入量, y 为系统的输出量, 请根据系统的状态空间模型计算系统的传递函数 $G(s) = Y(s)/R(s)$ 。

状态空间 \rightarrow 传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

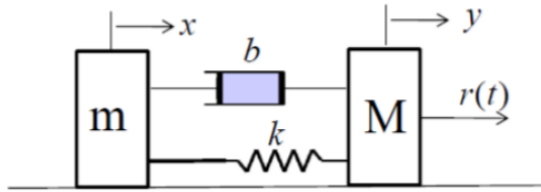


图 1. 弹簧-质量块-阻尼模型

解 (a) 系统 $r(t) = M\ddot{y} + m\ddot{x} \dots \textcircled{1}$
 对于 M : $r(t) - b(\dot{y} - \dot{x}) - k(y - x) = M\ddot{y} \dots \textcircled{2}$
 对于 m : $b(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) = m\ddot{x} \dots \textcircled{3}$

(b) 设状态变量 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}$ 输入 $r(t)$, 输出 $y(t)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}[b(x_4 - x_2) + k(x_3 - x_1)] \\ x_4 \\ \frac{1}{M}[r(t) - b(x_4 - x_2) - k(x_3 - x_1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{b}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & \frac{b}{M} & -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} r(t)$$

$y(t) = [0 \ 0 \ 1 \ 0]x$

即 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{b}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & \frac{b}{M} & -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1 \ 0], D = 0$

(c) 由 $\dot{x} = Ax + Br, Y = Cx + Dr \Rightarrow X = (sI - A)^{-1}BR \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$

其中 $sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & \frac{k}{M} & s + \frac{b}{M} \end{bmatrix}, [C(sI - A)^{-1}B] = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} m_{34}$

只需要求 $[sI - A]^{-1}$ 的第 [3,4] 个元素 m_{34} , 由 $[sI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$ 知,

$$\text{adj}(sI - A)_{34} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{vmatrix} = s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}$$

$$|sI - A| = s \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{k}{m} \end{vmatrix} = s \left[s \begin{vmatrix} s + \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{vmatrix} \right] + s \begin{vmatrix} s + \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{b}{m} & \frac{k}{m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{vmatrix}$$

$$= s^4 + \left(\frac{b}{m} + \frac{b}{m}\right)s^3 + \left(\frac{k}{m} + \frac{k}{m}\right)s^2$$

$$[sI - A]_{34}^{-1} = \frac{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}{s^4 + \left(\frac{b}{m} + \frac{b}{m}\right)s^3 + \left(\frac{k}{m} + \frac{k}{m}\right)s^2}$$

故 $G(s) = \frac{1}{M} [sI - A]_{34}^{-1} = \frac{ms^2 + bs + k}{Mms^4 + b(m+m)s^3 + (m+m)ks^2}$

结果与作业-第 5.2 题一致

1. 余子式:
 定义: A 关于第 i 行第 j 列的余子式 (记作 M_{ij}) 是去掉 A 的第 i 行第 j 列之后得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵的行列式。
 2. 代数余子式:
 定义: A 关于第 i 行第 j 列的代数余子式是:
 $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
 3. 余子矩阵:
 定义: A 的余子矩阵是一个 $n \times n$ 的矩阵 C, 使得其第 i 行第 j 列的元素是 A 关于第 i 行第 j 列的代数余子式。
 4. 伴随矩阵:
 定义: 矩阵 A 的伴随矩阵是 A 的余子矩阵的转置矩阵:
 $\text{adj}(A) = C^T$

By 22-PSP

For function and derivatives all starting at zero

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s)$$

2. (10'+10') 假设以下两个系统的传递函数分别为

(a) $G(s) = \frac{8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \frac{W(s)}{U(s)}$$

分子 分母

(b) $G(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 10}$

注意B的型式

能控标准型: $G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_0 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}] \quad D = 0$$

请分别写出上述系统的状态空间表达式 (能控标准型)。

解: 设输入为 $U(s)$, 输出为 $Y(s)$

(a) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{Y(s)}{W(s)} \frac{W(s)}{U(s)}$, 其中 $\begin{cases} U(s) = (s^3 + 7s^2 + 14s + 8)W(s) & \text{①} \\ Y(s) = 8W(s) & \text{②} \end{cases}$

令 $x_1 = w, x_2 = w', x_3 = w''$, 则

① 反变换 $u(t) = w^{(3)}(t) + 7w^{(2)}(t) + 14w'(t) + 8w(t)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} w'' \\ w' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

② 反变换 $y(t) = 8w(t)$

$$y = [8 \ 0 \ 0] x + 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [8 \ 0 \ 0], D = 0$$

(b) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 10} = \frac{Y(s)}{W(s)} \frac{W(s)}{U(s)}$, 其中 $\begin{cases} U(s) = (s^3 + 2s^2 + 3s + 10)W(s) & \text{①} \\ Y(s) = (s^2 + 2s + 5)W(s) & \text{②} \end{cases}$

令 $x_1 = w, x_2 = w', x_3 = w''$, 则

①. 反变换, $u(t) = w^{(3)}(t) + 2w^{(2)}(t) + 3w'(t) + 10w(t)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} w'' \\ w' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

② 反变换 $y(t) = w^{(2)}(t) + 2w'(t) + 5w(t)$

故 $y = [5, 2, 1] x$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [5, 2, 1], D = 0$$

3. (10') 什么是拉普拉斯变换、z变换、傅里叶变换? 这三者之间有什么联系?

1. 拉普拉斯变换 将实数域上的函数 $f(t)$ 变换为复平面 s 上的函数 $F(s)$

主要用于连续时间信号的分析, 形式 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

其中 s 是复数, $s = \sigma + j\omega$ 拉氏变换可以将微分方程转化为代数方程

2. z变换 将离散时间序列 $x(k)$ 映射到复平面上的函数 $X(z)$, 形式 $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

z变换可以简化差分方程的求解

3. 傅里叶变换 将一个函数在时域的表现转换成该函数在频域的表现, 可应用于连续信号和离散信号

对于连续信号, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

关系: 拉普拉斯变换 $\xrightarrow{\sigma=0}$ 傅里叶变换
 离散形式 $z = e^{sT}$ \rightarrow z变换

能控标准型: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \frac{W(s)}{U(s)}$

$x = [w \ w' \ \dots]$ 为系统状态。

4. (10') 求下面函数的初值和终值

连续 $f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
 离散 $x(0) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z)$ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$

$$X(z) = \frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 1.0259z^{-1} + 0.473z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

解 ① 定理

z变换初值定理: $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

z变换终值定理 若 $(z-1)X(z)$ 全部极点位于单位圆内, $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

② 初值 $X(z) = \frac{0.2385z^2 + 0.2089z}{(z^2 - 1.0259z + 0.473)(z-1)}$

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$$

③ 终值 $(z-1)X(z) = \frac{0.2385z^2 + 0.2089z}{z^2 - 1.0259z + 0.473}$

极点令 $z^2 - 1.0259z + 0.473 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 0.51295 \pm 0.458j$

检查可得 $z_{1,2}$ 均在单位圆内

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \approx 1.00067$$

求z变换

5. (10') 试求以下信号的z变换, 并写出闭式。需给出收敛区间

① 定义法 $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$

1) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, 其中 $u(n)$ 为单位阶跃序列。→ 对于序列, 可认为采样周期是1

② 部分分式+背诵法

2) 单位斜坡函数 $x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ → 对于连续函数, 需设采样周期为 T 求解

③ 留数法 $X(z) = \sum \text{Res}[X(s) \frac{z}{z-e^{sT}}]$

解 z变换定义: $X(z) = Z[x^*(t)] = Z[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$ 记 $z \cdot a^k \xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}$

1) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, 单位阶跃序列 $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ $t \xrightarrow{z} \frac{zT}{(z-1)}$

故 $x(0) = 1, x(1) = \frac{1}{2}, x(2) = \frac{1}{4}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$$
 首项为1, 公比为 $\frac{1}{2z}$ 的等比级数

等比级数收敛条件 当 $|\frac{1}{2z}| < 1$ 时, 即 $|z| > \frac{1}{2}$ 时有

$$X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2z}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2z}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z-1}$$

2) 使用z变换方法——留数法

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \text{Res} \left[X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=s_i}$$

$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[t] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2}$, $X(s)$ 在 $s=0$ 处有 $r=2$ 重极点,

故 $X(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{sT}} (s-0)^2 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{z}{z - e^{sT}} \right]$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{zTe^{sT}}{(z - e^{sT})^2} = \frac{zT}{(z-1)^2}$

注: $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} kT\delta(t-kT)$ $\delta(t-kT) \xrightarrow{z} z^{-k}$

$X(z) = Z[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k}$ ← (等差 × 等比) 数列

乘一次公比 $z^{-1}X(z) = Tz^{-2} + 2Tz^{-3} + \dots + (n-1)Tz^{-n} + nTz^{-n+1} + \dots$ 转换为等比数列 首项 z^{-1} , 公比 z^{-1}

$\Rightarrow (1-z^{-1})X(z) = Tz^{-1} + Tz^{-2} + \dots + Tz^{-n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} T(z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n}) = T \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$

$\Rightarrow X(z) = \frac{Tz^{-1}}{z^{-1}(1-z^{-1})^2} = \frac{zT}{(z-1)^2}$ 收敛条件: $|z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$

6. (15') 假设连续函数 $x(t)=0, \forall t < 0$, 且其 z 变换为 $X(z)$ 。试证明

$$Z[x(t+nT)] = z^n X(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k}$$

定义: $X(z) = Z[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$, 其中 $z = e^{sT}$

证明超前定理

$$\begin{aligned} Z[x(t+nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT) z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} x[(k+n)T] z^{-(k+n)}, \quad \text{令 } m=k+n \\ &= z^n \sum_{m=n}^{\infty} x(mT) z^{-m} = z^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} x(mT) z^{-m} \right] \\ &= z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right], \quad \text{得证} \end{aligned}$$

7. (15') 用 z 变换法求解下面的差分方程

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = u(k)$$

其中 $u(k)=1(k)$, 初始条件 $y(0)=0, y(1)=0$.

解: 已知 $X(z) = Z[x(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$

$$Z[x(k-n)] = z^{-n} X(z)$$

$$Z[x(k+n)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right] = z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1} x(1) - \dots - z^1 x(n-1)$$

故对差分方程两边求 z 变换

$$\text{左: } [z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1)] - 3[z Y(z) - z y(0)] + 2 Y(z) \quad \text{右: } \frac{z}{z-1}$$

代入 $y(0)=0, y(1)=0$, 有

$$z^2 Y(z) - 3z Y(z) + 2 Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$x(kT) = \sum \text{Res}[X(z) z^{k-1}] \quad \text{即} \quad Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

法一: 使用留数计算 $y(k)$: 此时 $z=0$ 不会成为极点

$Y(z)$ 有三个极点, $z_1=1, r_1=2, z_2=2, r_2=1$

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum \text{Res}[Y(z) z^{k-1}] = \sum_{i=1}^l \frac{1}{(r_i-1)!} \frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}} \left[(z-z_i)^{r_i} Y(z) z^{k-1} \right] \Big|_{z=z_i} \\ &= \left[(z-2) Y(z) z^{k-1} \right]_{z=2} + \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 Y(z) z^{k-1} \right]_{z=1} \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} + \frac{d}{dz} \left[\frac{z^k}{z-2} \right]_{z=1} = 2^{k-1} - k-1 \end{aligned}$$

$$\text{法二: } Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = z \left[\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} \right]$$

$$\Rightarrow A=1, B=-1, C=-1$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} \quad \text{由于} \quad \begin{matrix} t \leftarrow \frac{z}{z-1} \rightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ a^k \leftarrow \frac{z}{z-1} \rightarrow \frac{z}{z-a} \end{matrix} \rightarrow k \leftarrow \frac{z}{z-1} \rightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\text{故 } y(k) = 2^k - 1^k - k = 2^k - k - 1$$

$$\text{故 } y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} [2^k - k - 1] \delta(t-kT)$$

$$y(k+1) \xrightarrow{z} zY(z) - zy(0)$$

$$y(k+2) \xrightarrow{z} z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1)$$

对比:

$$y'(t) \xrightarrow{s} sY(s) - y(0)$$

$$y''(t) \xrightarrow{s} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	1
e^{-ks}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$