By 22-psp

100

自动控制理论 A—作业 5

2024/10/17

（Due: Oct. 24, 2024）

1. (30’) 某伺服系统如图 1 所示，其中 L 为测速发电机的速度反馈系统，$J = 2kg \cdot m^2$为转动惯量。

   (1). 要保证该系统单位阶跃响应的超调量不超过 20%，峰值时间为 1 秒，则参数 K 和 L 应取何值？

   (2). 该值下，系统单位阶跃响应的调节时间（2%）为多少？

二阶系统单位阶跃响应

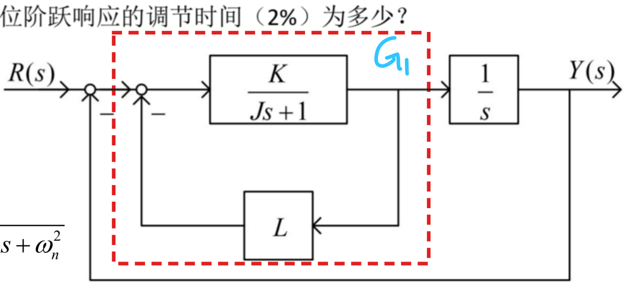
$T_r = \frac{\pi-\varphi}{\omega_d}$, $T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$,

$T_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ $T_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

$\sigma\% = e^{-\zeta\omega_n T_p} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

标准二阶系统传递函数

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



解.先化简系统的框图,获得传递函数.

$$G_1 = \frac{K/(Js+1)}{1+LK/(Js+1)} = \frac{K}{LK+Js+1}, \quad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 \cdot \frac{1}{s}}{G_1 \cdot \frac{1}{s}+1} = \frac{G_1}{G_1+s} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2+\frac{LK+1}{J}s+\frac{K}{J}}$$

与标准二阶系统的传递函数对比,得 $\omega_n^2 = \frac{K}{J}$, $2\zeta\omega_n = \frac{LK+1}{J}$, $\zeta = \frac{LK+1}{2J\omega_n}$

解之得 $K = J\omega_n^2$, $L = \frac{2J\zeta\omega_n - 1}{J\omega_n^2}$ 其中 $J = 2kg\ m^2$

(1) 峰值时间. $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1s$, 超调量 $\sigma\% = e^{-\zeta\omega_n T_p} = 0.2$, 则

$\zeta\omega_n = \frac{\ln 5}{T_p} = \ln 5 \Rightarrow LK = 2J\zeta\omega_n - 1 = 4\ln 5 - 1$, $\pi^2 = \omega_n^2 - (\omega_n\zeta)^2$

$\Rightarrow \omega_n^2 = \pi^2 + (\ln 5)^2 \Rightarrow K = 2\omega_n^2 \approx 24.92$, $L = \frac{4\zeta\omega_n - 1}{K} \approx 0.218$

(2) 调节时间的公式为 $T_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$ $T_s(5\%) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$. 从而 $T_s(2\%) \approx 2.4855$

2. (30’) 某系统结构如图 2 所示。

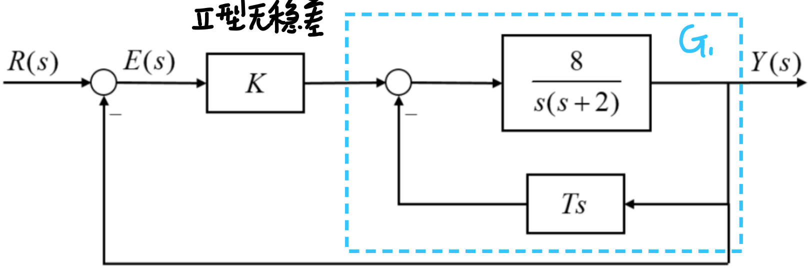
   (1). 当 $K = 2$, $T = 0$ 时，求系统的阻尼比 ζ 和无阻尼自然振荡频率 ω_n。此时，单位阶跃响应的稳态误差 e_{ss1} 是多少？

   $r(t) = 1(t)$
   I.II型无稳差

   (2). 当 $K = 2$ 时，求 T 的取值，使得系统的单位阶跃响应的超调量 $\sigma\% = 16.3\%$。此时，系统的峰值时间 T_p 为多少？

   (3). 在保证 $\zeta = 0.707$ 和单位斜坡输入时系统的稳态误差 $e_{ss2} = 0.25$ 的条件下，请确定 K 和 T 的取值。

   $r(t) = t$,
   II型无稳差



解:先化简框图 $G_1 = \frac{8/(s(s+2))}{1+Ts\,8/(s(s+2))} = \frac{8}{s^2+(2+8T)s}$,

开环传递函数 $KG_1 = \frac{8K}{s^2+(2+8T)s}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_1}{1+KG_1} = \frac{8K}{s^2+(2+8T)s+8K},$$

与标准传函对比,有: $\omega_n^2 = 8K$, $2\zeta\omega_n = 2+8T \Rightarrow T = \frac{\zeta\omega_n - 1}{4}$

标准二阶系统

$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

By 22-PSP

(1) 当 $K=2, T=0$ 时, $\omega_n^2=16$, $\xi\omega_n=1 \Rightarrow \omega_n=4, \xi=\frac{1}{4}$, 注 静态误差系数法用的是系统开环传函

$$e_{ss1}=\frac{A}{1+K_p},\ e_{ss2}=\frac{A}{K_v},\ e_{ss3}=\frac{A}{K_a}$$

从而开环传递函数 $H(s)=KG_1=\frac{16}{s^2+2s}=\frac{16}{s(s+2)}$, 为1型系统

1型系统的 $e_{ss1}=0$

(2) 已知 $K=2$, $\sigma\%=0.163 \Rightarrow \omega_n=4$,

由 $\sigma\%=e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}\times 100\%$ 可反解得 $\xi=\sqrt{\frac{\left(\frac{\ln\sigma}{\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{\ln\sigma}{\pi}\right)^2}}\doteq 0.50$

由 $2\xi\omega_n=2+8T$ 知 $T=0.25$, $T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\doteq 0.91s$

(3) 已知 $\xi=0.707$, $e_{ss2}=\frac{A}{K_v}=\frac{1}{K_v}=0.25 \Rightarrow K_v=4$

$K_v=\lim_{s\to 0} sKG_1=\lim_{s\to 0}\frac{8K}{s+2+8T}=\frac{8K}{2+8T}=4 \Rightarrow K=1+4T$ 代入,得 $\omega_n=8\xi$

$\Rightarrow \omega_n=4\sqrt{2}$, 从而 $K=\frac{\omega_n^2}{8}=4$, $T=\frac{\xi\omega_n-1}{4}=0.75$

3.　(5'+5'+10')　考虑一单位负反馈系统，其开环传递函数为

$$L(s)=G_c(s)G(s)=\frac{8}{s(s^2+6s+12)}$$

(1) 请求出该系统的闭环传递函数 $T(s)$.

(2) 请用一个二阶系统来近似 $T(s)$.

(3) 请用计算机绘制出原系统的单位阶跃响应 $y_1(t)$ ，和近似系统的单位阶跃响应 $y_2(t)$，试比较二者的相关性能指标。（注意：请附程序代码）

解. (1) $T(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}$, 代入, 得 $T(s)=\frac{8}{s^3+6s^2+12s+8}=\frac{8}{(s+2)^3}=\frac{1}{\frac{1}{8}s^3+\frac{3}{4}s^2+\frac{3}{2}s+1}$

(2) 理论依据:《现代控制系统》5.8, 线性系统的简化

设 $M(s)=1+d_1s+d_2s^2$, $\Delta(s)=1+\frac{3}{2}s+\frac{3}{4}s^2+\frac{1}{8}s^3$

$M^{(0)}(0)=1\quad M^{(1)}(0)=d_1,\ M^{(2)}(0)=2d_2,\ M^{(3)}(0)=0,\ M^{(4)}(0)=0$

$\Delta^{(0)}(0)=1\quad \Delta^{(1)}(0)=\frac{3}{2}\quad \Delta^{(2)}(0)=\frac{3}{2}\quad \Delta^{(3)}(0)=\frac{3}{4}\quad \Delta^{(4)}(0)=0$

定义 $M_{2q}=\sum_{k=0}^{2q}\frac{(-1)^{k+q}M^{(k)}(0)M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}$, $q=0,1,\cdots$

$\Delta_{2q}=\sum_{k=0}^{2q}\frac{(-1)^{k+q}\Delta^{(k)}(0)\Delta^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}$, $q=0,1,\cdots$

令 $M_{2q}=\Delta_{2q}$ 其中 $q=1$ 和 2, 建立方程

$q=1 \Rightarrow M_2=\Delta_2 \Rightarrow d_1^2-2d_2=\frac{3}{4}$

$q=2 \Rightarrow M_4=\Delta_4 \Rightarrow d_2=0.433,\ d_1=1.271$

$\Rightarrow$ 二阶系统传函为 $G_L(s)=\frac{1}{1+1.271s+0.433s^2}$

(3) 由图像和数据可以得出近似效果好

三阶系统性能指标 y_1(t):
超调量: -0.00%
调节时间: 3.76s
上升时间: 2.11s
近似二阶系统性能指标 y_2(t):
超调量: 0.00%
调节时间: 3.58s
上升时间: 2.10s

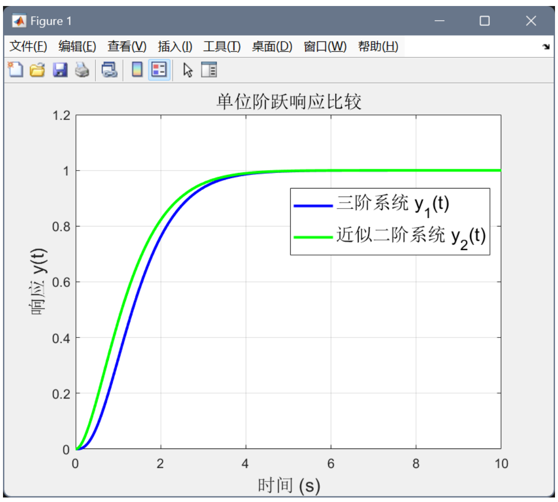
```
clear; clc; close all;
t = 0:0.01:10;

% 原三阶系统 T(s) = 8 / (s + 2)^3
sys1 = tf(8, [1 6 12 8]);
[y1, t1] = step(sys1, t); % 计算单位阶跃响应

% 近似二阶系统 G_L(s) = 1 / (1 + 1.271s + 0.433s^2)
sys2 = tf(1, [0.433 1.271 1]);
[y2, t2] = step(sys2, t); % 计算单位阶跃响应

% 计算性能指标
overshoot1 = (max(y1) - 1) * 100; % 超调量 ( %)
settling_time1 = stepinfo(sys1).SettlingTime; % 稳定时间
rise_time1 = stepinfo(sys1).RiseTime; % 上升时间

overshoot2 = (max(y2) - 1) * 100; % 超调量 ( %)
settling_time2 = stepinfo(sys2).SettlingTime; % 稳定时间
rise_time2 = stepinfo(sys2).RiseTime; % 上升时间
```



By 22- psp

4. (20') 考虑一个二阶规范系统 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$，其中 $\zeta=0.7$, $\omega_n=1$，添加一个右半平面的闭环零点 $z=1$，请用计算机绘制出原系统的单位阶跃响应和增加零点后的系统的单位阶跃响应，试就瞬态性能和稳态性能进行比较。 非最小相位系统

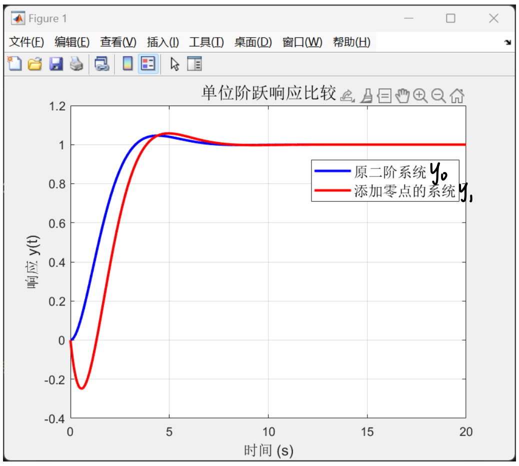
原系统 $G(s)=\dfrac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$，添加闭环零点 $z=1$ 后，为了使稳态值一致，加上 $(z-s)$ 这一项，

变为 $F(s)=\dfrac{(z-s)w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$

```
% 系统参数
ksi = 0.7;
wn = 1;

% 原二阶系统 G(s) = wn^2 / (s^2 + 2*ksi*wn*s + wn^2)
sys1 = tf(wn ^ 2, [1, 2 * ksi * wn, wn ^ 2]); % 创建传递函数

% 添加右半平面零点的系统
z = 1; % 右半平面零点
sys2 = tf(wn ^ 2 * [-1, z], [1, 2 * ksi * wn, wn ^ 2]); % 创建传递函数
t = 0:0.01:20;
% 计算单位阶跃响应
[y1, t1] = step(sys1, t);
[y2, t2] = step(sys2, t);
```



原二阶系统性能指标:

超调量: 4.60%

稳态误差: 0.00

调节时间: 5.98s

峰值时间: 4.41s

添加零点的系统性能指标:

超调量: 5.74%

稳态误差: 0.00

调节时间: 6.75s

峰值时间: 4.93s

由上表以及曲线可知，原二阶系统的峰值时间、调节时间均更小，其瞬态性能较优，而添加零点后，$y_1(t)$ 初始时先下降后上升，两者的稳态误差均为零