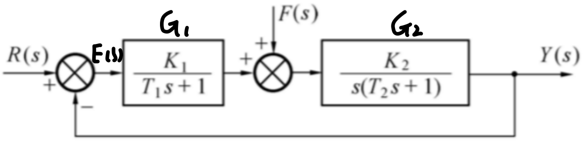
By 22-psp

100

自动控制理论 A 作业 9

2024 年 11 月 8 日

3.39 某控制系统方框图如题 3.39 图所示。已知 $r(t)=t$, $f(t)=-1(t)$，试计算该系统的稳态误差。



解. ① 先求 $r(t)=t$ 导致的稳差 静态误差系数法 （计算静态误差系数用的是开环传函）

开环传函 $G(s)=\dfrac{K_1K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ 为 I 型系统.

对应的特征方程为 $D(s)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2=0$

劳斯列表:

$$\begin{array}{lll} s^3 & T_1T_2 & 1 \\ s^2 & T_1+T_2 & K_1K_2 \\ s^1 & \dfrac{T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2}{T_1+T_2} & \\ s^0 & K_1K_2 & \end{array}$$

当满足以下条件时,系统稳定,讨论稳态误差

$$\begin{cases} T_1>0,\ T_2>0 \\ K_1K_2>0 \\ T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2>0 \end{cases}$$

$K_v=\lim\limits_{s\to0}sG(s)=K_1K_2$, $e_{ss1}=\dfrac{A}{K_v}=\dfrac{1}{K_1K_2}$

② 再求 $f(t)=-1$ 导致的稳差. 终值定理

$F(s)=\dfrac{-1}{s}$, 由 $E(s)=-Y(s)$, $Y(s)=G_2(s)[F(s)+G_1(s)E(s)]$ 知,

$$\Phi_f(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{-G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{-K_2(T_1s+1)}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2}$$

劳斯列表.

$$\begin{array}{lll} s^3 & T_1T_2 & 1 \\ s^2 & T_1+T_2 & K_1K_2 \\ s^1 & \dfrac{T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2}{T_1+T_2} & \\ s^0 & K_1K_2 & \end{array}$$

⇒ 稳定的条件同上

$$e_{ss2}=\lim_{s\to0}s\Phi_f(s)F(s)=\lim_{s\to0}\frac{K_2(T_1s+1)}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2}=\frac{1}{K_1}$$

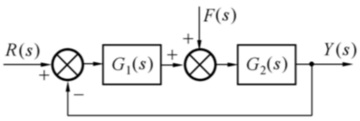
综上,由线性系统的叠加原理知: $e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}=\dfrac{1}{K_1K_2}+\dfrac{1}{K_1}$

3.40 某控制系统的方框图如题 3.40 图所示。当扰动信号分别为 $f(t)=1(t)$, $f(t)=t$ 时，试计算下列两种情况下系统响应扰动信号 $f(t)$ 的稳态误差：

(1) $G_1(s)=K_1 \quad G_2(s)=\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}$

(2) $G_1(s)=\dfrac{K_1(T_1s+1)}{s} \quad G_2(s)=\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)} \quad (T_1>T_2)$

只能用终值定理,
记得讨论稳定性



解:由上一题的分析知,开环传函 $G(s)=G_1(s)G_2(s)$, $\Phi_f(s)=\dfrac{E(s)}{F(s)}=\dfrac{-G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$

(1) $G(s)=\dfrac{K_1K_2}{s(T_2s+1)}$, 稳定 $\Phi_f(s)=\dfrac{E(s)}{F(s)}=\dfrac{-K_2}{T_2s^2+s+K_1K_2}$ 由 $T_2>0$, $K_1K_2>0$, 系统稳定

① $f(t)=1$, $F(s)=\dfrac{1}{s}$, $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}s\Phi_f(s)F(s)=-\dfrac{1}{K_1}$

② $f(t)=t$, $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$, $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}s\Phi_f(s)F(s)=-\infty$

(2) $G(s)=\dfrac{K_1K_2(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)}$, $\Phi_f(s)=\dfrac{E(s)}{F(s)}=\dfrac{-K_2s}{T_2s^3+s^2+K_1K_2T_1s+K_1K_2}$

劳斯列表

$$\begin{array}{lll} s^3 & T_2 & K_1K_2T_1 \\ s^2 & 1 & K_1K_2 \\ s^1 & (T_1-T_2)K_1K_2 & \\ s^0 & K_1K_2 & \end{array}$$

由于 $T_1>T_2>0$, $K_1K_2>0$, 系统稳定

① $f(t)=1$, $F(s)=\dfrac{1}{s}$, $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}s\Phi_f(s)F(s)=0$

② $f(t)=t$, $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$, $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}s\Phi_f(s)F(s)=-\dfrac{1}{K_1}$

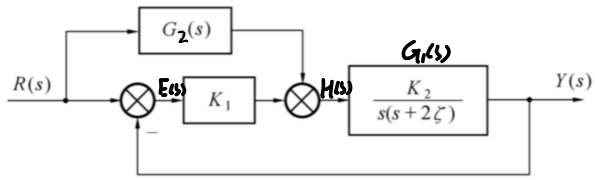
By 22-psp

3.41 设有控制系统，其方框图如题 3.41 图所示。为提高系统跟踪控制信号的准确度，要求系统由原来的 Ⅰ 型提高到 Ⅲ 型，为此在系统中增置了顺馈通道，设其传递函数为

系统的型别看的是开环传函

$$G_2(s) = \frac{\lambda_2 s^2 + \lambda_1 s}{Ts + 1}$$

若已知系统参数为 $K_1 = 2, K_2 = 50, \zeta = 0.5, T = 0.2$，试确定顺馈参数 λ_1 及 λ_2。



解：先求系统的闭环传函。

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - G_1(s)H(s) \\ Y(s) = G_1(s)H(s) \\ H(s) = K_1E(s) + R(s)G_2(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{(1-G_1(s)G_2(s))R(s)}{1+G_1(s)K_1},$$

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)(K_1+G_2(s))}{1+G_1(s)K_1} = \frac{\lambda_2K_2s^2+(K_1K_2T+\lambda_1K_2)s+K_1K_2}{Ts^3+(2\zeta T+1)s^2+(K_1K_2T+2\zeta)s+K_1K_2}$$

特征方程为 $D(s) = Ts^3+(2\zeta T+1)s^2+(K_1K_2T+2\zeta)s+K_1K_2$

$$= 0.2s^3+1.2s^2+21s+100$$

劳斯列表

s^3	0.2	21
s^2	1.2	100
s^1	$\frac{13}{3}$	
s^0	100	

法二：求根 $P_1=-5$, $P_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm 9.99j$

$\Rightarrow$ 系统稳定

由劳斯稳定判据知系统稳定

由闭环传函与开环传函的关系 $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ 知 (由于此处是单位负反馈)

由闭环求开环

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{\lambda_2K_2s^2+(K_1K_2T+\lambda_1K_2)s+K_1K_2}{Ts^3+(2\zeta T-\lambda_2K_2+1)s^2+(2\zeta-\lambda_1K_2)s} = \frac{50\lambda_2s^2+(20+50\lambda_1)s+100}{0.2s^3+(0.2-50\lambda_2+1)s^2+(1-50\lambda_1)s}$$

要使系统为Ⅲ型系统则必有 $\begin{cases} 1.2-50\lambda_2=0 \\ 1-50\lambda_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.02 \\ \lambda_2 = 0.024 \end{cases}$

7. 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2+2t+t^2$ 时，系统的稳态误差。

解：$G(s) = \frac{\frac{1}{10}(2s+1)}{s^2(\frac{1}{100}s^2+\frac{3}{50}s+1)}$ 为Ⅱ型系统。特征方程为 $D(s) = s^4+6s^3+100s^2+20s+10=0$

劳斯列表

s^4	1	100	10
s^3	6	20	
s^2	$\frac{290}{3}$	10	
s^1	$\frac{562}{29}$		
s^0	10		

由劳斯稳定判据知系统稳定

$K_s=\infty$, $K_v=\infty$, $K_a=\lim_{s\to 0} s^2G(s)=\frac{1}{10}$

① 输入 $r(t)=2t$ 时，由 $K_v=\infty$ 知 $e_{ss}=0$

② 输入 $r(t)=2+2t+t^2$ 时，

$$e_{ss} = \underbrace{\frac{A_1}{1+K_s}}_{0} + \underbrace{\frac{A_2}{K_v}}_{0} + \underbrace{\frac{A_3}{K_a}}_{2\times 10} = 20$$

法二：动态误差系数法 (次数从小到大排列)

误差闭环传函 $\Phi_e = \frac{1}{1+G} = \frac{100s^2+6s^3+s^4}{10+20s+100s^2+6s^3+s^4}$

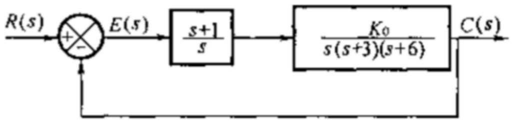
$\Phi_e = 10s^2 + \cdots$

$C_0 = C_1 = 0$, $C_2 = 10$

$r''(t) = 2$

$\Rightarrow e_{ss} = 20$

9. 已知系统结构图如题9图所示，要求系统在 $r(t)=t^2$ 作用时，稳态误差 $e_{ss}<0.5$，试确定满足要求的开环增益 K 的范围。



① 系统需稳定
② 满足误差条件

解：系统的开环传函为 $G(s)=\dfrac{K_0(s+1)}{s^2(s+3)(s+6)}=\dfrac{\frac{K_0}{18}(s+1)}{s^2(\frac{1}{3}s+1)(\frac{1}{6}s+1)}$ 为Ⅱ型系统，开环增益 $K=\dfrac{K_0}{18}$

特征方程为 $D(s)=s^4+9s^3+18s^2+K_0s+K_0=0$

劳斯表

s^4	1	18	K_0
s^3	9	K_0	
s^2	$18-\frac{K_0}{9}$	K_0	
s^1	$\frac{81K_0-K_0^2}{162-K_0}$		
s^0	K_0		

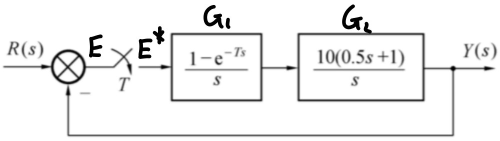
由劳斯稳定性判据，要使系统稳定

$$\begin{cases}18-\dfrac{K_0}{9}>0\\ \dfrac{81K_0-K_0^2}{162-K_0}>0\\ K_0>0\end{cases}\Rightarrow 0<K_0<81$$

$r(t)=t^2$，$A=2$，$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)=\dfrac{K_0}{18}=K$，故 $e_{ss}=\dfrac{A}{K_a}=\dfrac{36}{K_0}<0.5\Rightarrow K_0>72$

综上，有 $72<K_0<81\Rightarrow 4<K<4.5$

6.21 离散系统如题6.21图所示，采样周期 $T=0.2$ s。判断系统的稳定性，并求 $r(t)=1+t+\dfrac{t^2}{2}$ 时系统稳态误差的终值 $e_{ss}(\infty)$。



解：设 $G(s)=\dfrac{10(0.5s+1)}{s^2}$，由 $E(z)=R(z)-G_1G_2(z)E(z)$，$Y(z)=G_1G_2(z)E(z)$ 知

$\Phi(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2(z)}$，$\Phi_E(z)=\dfrac{E(z)}{R(z)}=\dfrac{1}{1+G_1G_2(z)}$　　$e^{-Ts}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\delta(t-T)\xrightarrow{Z}z^{-1}$

其中 $G_1G_2(z)=Z[(1-e^{-Ts})G(s)]=(1-z^{-1})Z[G(s)]=(1-z^{-1})\sum\limits_i Res\left[\dfrac{10(0.5s+1)}{s^2}\cdot\dfrac{z}{z-e^{sT}}\right]$

$=10(z-1)\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{0.5s+1}{z-e^{sT}}\right]=10(z-1)\dfrac{0.5(z-1)+T}{(z-1)^2}=\dfrac{5z-5+10T}{z-1}=\dfrac{5z-3}{z-1}$

从而特征方程 $D(z)=6z-4=0$，代入 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$，有 $2w+10=0$，由劳斯稳定判据知系统稳定

由 $r(t)=1+t+\dfrac{t^2}{2}$ 知 $R(z)=\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{Tz}{(z-1)^2}+\dfrac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$

$e_{ss}(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\Phi_E(z)R(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(z-1)^2}{2}\left[\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{Tz}{(z-1)^2}+\dfrac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}\right]=\infty$

法二：静态误差系数法

开环传函 $G_1G_2(z)=\dfrac{5z-3}{z-1}$ 为Ⅰ型系统，$K_a=0$，$e_{ss}(\infty)=\infty$

注：求 $G_1G_2(z)$ 的部分分式法　$1\longrightarrow\dfrac{z}{z-1}$，$t\longrightarrow\dfrac{zT}{(z-1)^2}$

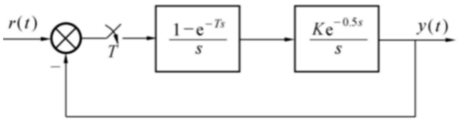
$G_1G_2(z)=Z\left[(1-e^{-Ts})\dfrac{5s+10}{s^2}\right]=(1-z^{-1})Z\left(\dfrac{5}{s}+\dfrac{10}{s^2}\right)$

$=\dfrac{z-1}{z}\left[\dfrac{5z}{z-1}+\dfrac{10zT}{(z-1)^2}\right]$

$=5+\dfrac{2}{z-1}=\dfrac{5z-3}{z-1}$

By 22-psp

6.24　已知系统结构如题 6.24 图所示，采样周期 $T = 0.25$ s。当 $r(t) = 2\cdot 1(t) + t$ 时，欲使稳态误差小于 0.5，试求 K 的值。



$\delta(t) \xrightarrow{Z} 1$

$\delta(t-kT) \xrightarrow{Z} z^{-k}$

$e^{-0.5s} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \delta(t-0.5) \xrightarrow[T=0.25]{Z} z^{-2}$

$\frac{1}{s^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} t \xrightarrow{Z} \frac{zT}{(z-1)^2}$

解：设 $G(s) = \frac{Ke^{-0.5s}}{s^2}$，$G_1G_2(z) = Z[(1-e^{-Ts})G(s)] = (1-z^{-1})Z[G(s)] = (1-z^{-1})Kz^{-2}Z\left[\frac{1}{s^2}\right]$

$= K(1-z^{-1})z^{-2}\frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{TK}{z^2(z-1)}$　I型系统

特征方程 $D(z) = z^3 - z^2 + TK = 0$ 代入 $z = \frac{w+1}{w-1}$ $\Rightarrow TKw^3 + (2-3TK)w^2 + (4+3TK)w + 2 - TK = 0$

劳斯表

w^3	$0.25K$	$4+0.75K$
w^2	$2-0.75K$	$2-0.25K$
w^1	$\frac{-0.5K^2-2K+8}{2-0.75K}$	
w^0	$2-0.25K$	

其中 $-0.5K^2-2K+8>0$ 的解为 $-2-2\sqrt{5}<K<-2+2\sqrt{5}$

假设第一列全为正 $\Rightarrow$ $0<K<-2+2\sqrt{5}$

假设第一列全为负 $\Rightarrow$ 无解

从而系统稳定的条件为 $0<K<-2+2\sqrt{5}$

$K_p = \lim_{z\to 1} G_1G_2(z) = \infty$, $K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)G_1G_2(z) = 0.25K$

$e_{ss}^*(\infty) = \frac{2}{1+K_p} + \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K} < 0.5 \Rightarrow K>2$

综上，$2<K<2\sqrt{5}-2$

离散 $\frac{A}{1+K_p}$, $\frac{AT}{K_v}$, $\frac{AT^2}{K_a}$