自动控制理论 A 期中考试

2019 秋季学期

一、填空题（每空 1 分，共 20 分）

1. 对自动控制系统的基本要求可以概括为四个方面，即 稳定性 、准确性 、快速性 、和 平稳性 。
“稳准快平”

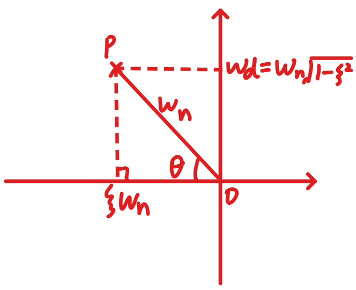
2. 线性系统在零初始条件下输出量与输入量的 拉普拉斯变换 之比，称为该系统的传递函数，一阶系统传函标准形式是 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ ，二阶系统传函标准形式是 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 。
惯性环节　振荡环节

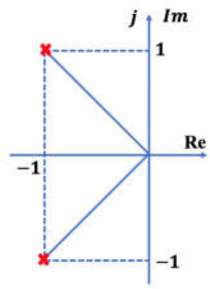
3. 控制系统的数学模型，取决于系统结构和参数，与外作用及初始条件无关。在古典控制理论中，系统数学模型有微分方程、传递函数等；离散控制系统的数学模型有差分方程、脉冲传递函数等；在现代控制理论中，系统状态空间描述形式由状态方程、输出方程构成。

4. 若某系统的单位脉冲响应为 $g(t)=10e^{-2t}+5e^{-0.5t}$，则该系统的传递函数 G(s) 为 $\dfrac{10}{s+2}+\dfrac{5}{s+0.5}$ 。
默认为零状态

5. 两个传递函数分别为 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 的环节，以并联方式连接，其等效传递函数为 $G(s)$，则 $G(s)$ 为 G1(s)+-G2(s) （用 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 表示）。

6. 典型二阶系统极点分布如图所示，则无阻尼自然频率 $\omega_n=\sqrt{2}$， 阻尼比 $\xi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.707$，该系统的特征方程为 $s^2+2s+2=0$，该系统的单位阶跃响应曲线为衰减振荡。
开环！





$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$

传递函数 $\xleftarrow[\text{系统的实现}]{\text{唯一转换}}$ 状态空间模型

能控标准型 $B=[0 \cdots 1]^T$

二、判断题（每题 1 分，共 8 分）

（ ✗ ） 1. 对一个系统，只能选取一组状态变量。

（ ✓ ） 2. 由一个状态空间模型可以确定唯一一个传递函数。

（ ✓ ） 3. 相比经典控制理论，现代控制理论的一个显著优点是可以用时域法直接进行系统的分析和设计。 指状态空间模型

（ ✓ ） 4. 由状态转移矩阵可以决定系统状态方程的状态矩阵，进而决定系统的动态特性。 $\Phi(t)=e^{At}$ A

$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$ 求A

$A=\left[\frac{d}{dt}e^{At}\right]_{t=0}=AI$

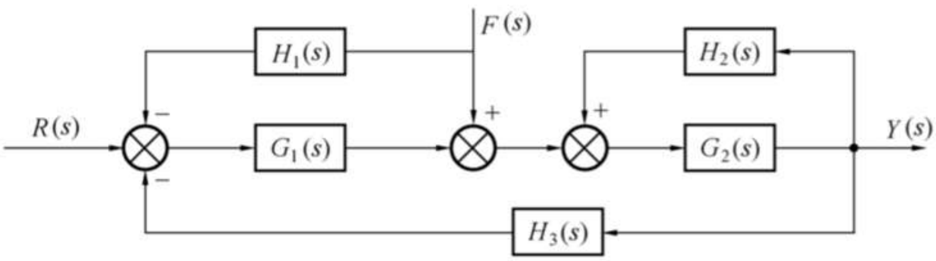
（ ✓ ） 5. 传递函数的状态空间实现不唯一的一个主要原因是状态变量选取不唯一。

（ ✓ ） 6. 对于欠阻尼二阶系统，阻尼系数越小，超调量越大，平稳性越差。 ξ $\sigma\%$

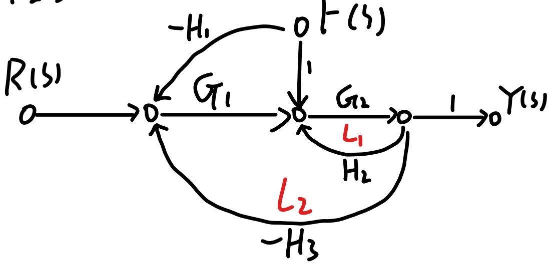
（ ✗ ） 7. 二阶欠阻尼系统的输出一定是有界的。没有说输入是什么

（ ✗ ） 8. 离散系统的脉冲传递函数与输入量和输出量的具体形式有关。 $G(z)$ 是系统的固有属性

三、(10 分) 画出如图所示系统的信号流图，利用梅森公式求 $Y(s)/R(s)$ 和 $Y(s)/F(s)$ 。



信号流图.



回路 $L_1=G_2H_2$, $L_2=-G_1G_2H_3$

$\Delta=1-L_1-L_2=1+G_1G_2H_3-G_2H_2$

(1) $Y(s)/R(s)$ · 前向通路 $P_1=G_1G_2$ $\Delta_1=1$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H_3-G_2H_2}$$

(2) $Y(s)/F(s)$ 前向通路 $P_1=G_2$, $\Delta_1=1$, $P_2=-H_1G_1G_2$, $\Delta_2=1$

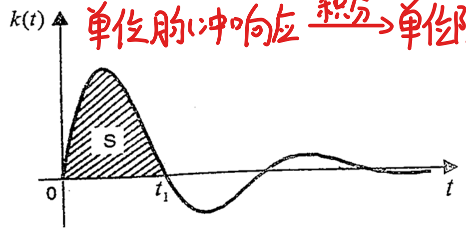
$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{G_2-H_1G_1G_2}{1+G_1G_2H_3-G_2H_2}$$

公式: $T_r=\frac{\pi-\varphi}{\omega_d}$, $T_p=\frac{\pi}{\omega_d}$, $T_s(5\%)=\frac{3}{\xi\omega_n}$, $T_s(2\%)=\frac{4}{\xi\omega_n}$

$\sigma\%=e^{-\xi\omega_n T_p}=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

四、(10 分)二阶定常线性系统 $\Phi(s)=\frac{m}{s^2+ns+m}$ 的单位脉冲响应如图所示，其中 m、n 为大于零的实常数，图中阴影部分 S 的面积为 1.163，时刻 $t_1=0.7255$ 秒。求该系统单位阶跃响应的调节时间 t_s（$\Delta=0.05$）.

单位脉冲响应 $\xrightarrow{\text{积分}}$ 单位阶跃响应



解: $T_p=0.7255s=\frac{\pi}{\omega_d}$

$\Rightarrow \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=4.33$ ①

$\sigma\%=e^{-\xi\omega_n T_p}=0.163$

故 $\xi\omega_n=\frac{-\ln 0.163}{0.7255}=2.5$ …②

由①②知 $\xi=0.5$, $\omega_n=5$

从而 $T_s(5\%)=\frac{3}{\xi\omega_n}=1.2s$

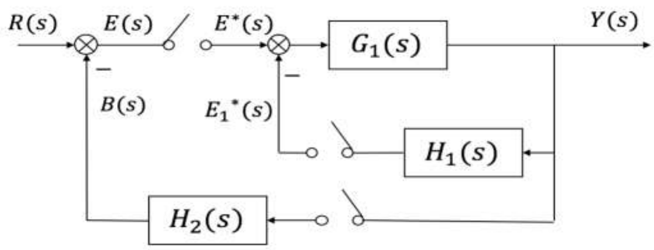
解：

$$1.163=1+\sigma_p$$

$$t_p=0.7255$$

$$t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}$$

五、(10 分)某离散系统如下图所示，求该系统从输入到输出的闭环脉冲传递函数。



解：

$$C(z)=G_1(z)\cdot[E(z)-E_1(z)]$$

$$\left.\begin{aligned}&E_1(z)=G_1H_1(z)\cdot[E(z)-E_1(z)]\\&[1+G_1H_1(z)]\cdot E_1(z)=G_1H_1(z)\cdot E(z)\end{aligned}\right\}\ E_1(z)=\frac{G_1H_1(z)}{[1+G_1H_1(z)]}\cdot E(z)$$

$$=G_1(z)\left[1-\frac{G_1H_1(z)}{1+G_1H_1(z)}\right]\cdot E(z)=\frac{G_1(z)\cdot E(z)}{1+G_1H_1(z)}$$

$$E(z)=R(z)-B(z)=R(z)-H_2(z)\cdot C(z)$$

$$C(z)=\frac{G_1(z)\cdot[R(z)-H_2(z)\cdot C(z)]}{1+G_1H_1(z)}$$

$$\left[1+\frac{G_1(z)H_2(z)}{1+G_1H_1(z)}\right]C(z)=\frac{G_1(z)\cdot R(z)}{1+G_1H_1(z)}$$

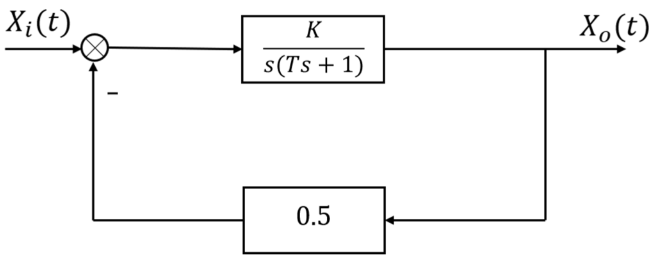
$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)}{1+G_1H_1(z)+G_1(z)H_2(z)}$$

六、（12 分）系统的结构如图所示，其中 $K=8, T=0.25$。

(1) （4 分）输入信号 $X_i(t)=1(t)$，求系统的响应；

(2) （4 分）计算系统的性能指标 t_r、t_p、$t_s(5\%)$、σ_p；

(3) （4 分）若要求将系统设计成二阶最佳 $\xi=0.707$，应该如何改变 K 值。



解：

$$X_0(s)=\phi(s)\cdot X_i(s)=\frac{K}{Ts^2+s+0.5K}\cdot\frac{1}{s}=\frac{8}{s(0.25s^2+s+4)}$$
$$=\frac{32}{s(s^2+4s+16)}=\frac{2}{s}+\frac{-2s-8}{(s^2+4s+16)}$$

(1)：

$$X_0(t)=2\cdot 1(t)-2\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+12}+\frac{2}{(s+2)^2+12}\right]$$
$$=2\cdot 1(t)-2e^{-2t}\cos 2\sqrt{3}t-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin 2\sqrt{3}t$$

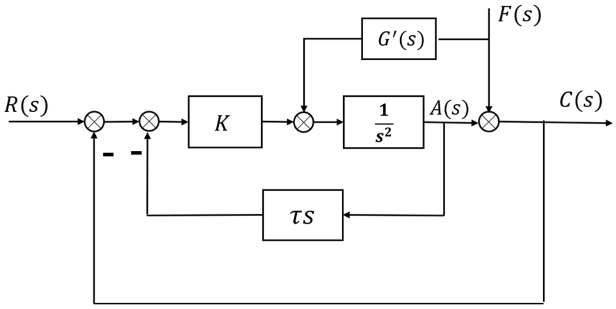
(2)：

$$\phi(s)=\frac{8}{0.25s^2+s+4}=2\cdot\frac{16}{s^2+2\cdot{}^{1}/_{2}\cdot 4s+4^2}$$
$$\therefore \xi=\frac{1}{2},\quad \omega_n=4$$
$$\therefore \theta=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}=1.047$$
$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.605s,\ t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.907s,\ t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}=1.5s$$
$$\sigma_p=e^{\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}\times 100\%=16.3\%$$

(3)：

$$\phi'(s)=\frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{1}{2T}K}$$
$$\begin{cases}\frac{1}{T}=2\times 0.707\cdot\omega_n\\ {\omega_n}^2=\frac{K}{2T}=2K\end{cases}$$
$$\therefore K=4.001$$

七、（10 分）考虑如图所示的控制系统：



(1) （5 分）设 f(t) = 0，要求系统在r(t) = 1(t)作用下，$\sigma_p = 25\%$，调整时间 $t_s = 2s$（按 2%误差计算），求 K 和$\boxed{\tau}$

(2) （5 分）当$\boxed{f(t) \neq 0}$ 时，为使系统输出 c(t)不受 f(t)的影响，求顺馈环节 $G'(s)$的传递函数。

解：(1) $f(t) > 0, r(t) = 1(t), \sigma_p = 25\%, t_s = 2$

开环传递函数：$G(s) = \dfrac{\frac{K}{s^2}}{1+\frac{K}{s^2}\tau s} = \dfrac{K}{s^2+\tau Ks}$

闭环传递函数：$\Phi(s) = \frac{K}{s^2+K\tau s+K}$,

$$\sigma_p = 25\% \Rightarrow \zeta = 0.4,$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \Rightarrow K\tau = 2\zeta\omega_n = 4, \omega_n = 5, \mathrm{K} = 25, \tau = 0.16$$

(2) 如图$C(s) = F(s) + A(s)$

$$A(s) = [-C(s)K - A(s)\tau Ks + G'(s)F(s)]\frac{1}{s^2}$$

$$A(s) = \frac{-K}{s^2 + \tau Ks}C(s) + \frac{G'(s)F(s)}{s^2 + \tau Ks}$$

$$\left(\frac{s^2 + \tau Ks + K}{s^2 + \tau Ks}\right)C(s) = \frac{G'(s)}{s^2 + \tau Ks}F(s) + F(s)$$

$$G'(s) = -(s^2 + 2Ks) = -(s^2 + \tau s)$$

$$G'(s) = -s^2 - \tau Ks$$

八、（10 分）计算以下各题：

(1) （3 分）系统的微分方程为 $y^{(3)}+3y^{(2)}+8y^{(1)}+2y=10u^{(2)}+5u^{(1)}+5u$，写出系统的传递函数。

(2) （3 分）已知系统状态空间实现为 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$，求系统的传递函数。

(3) （4 分）计算线性定常系统 $x=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}u$ 的状态转移矩阵 $\phi(t)$ 。

解：(1) $(s^3+3s^2+8s+2)Y(s)=(10s^2+5s+5)U(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10s^2+5s+5}{s^3+3s^2+8s+2}$$

(2) $G(s)=C(s)[sI-A]^{-1}B(S)$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s+1}$$

推导. $sX(s)=AX(s)+BU(s)$

$\Rightarrow X(s)=[sI-A]^{-1}BU(s)$

$\Rightarrow Y(s)=C[sI-A]^{-1}BU(s)+DU(s)$

$\Rightarrow G(s)=C[sI-A]^{-1}B+D$

注意对角阵的逆有很好的性质

对 $D=\begin{bmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{bmatrix}$，有 $D^{-1}=\begin{bmatrix}d_1^{-1} & & & \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^{-1}\end{bmatrix}$

(3) $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$$=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2}\\ \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(2e^{-t}-e^{-2t}) & (-2e^{-t}+2e^{-2t})\\ (e^{-t}-e^{-2t}) & (-e^{-t}+2e^{-2t})\end{bmatrix}$$

推导. 由 $sX(s)-x_0=AX(s)$

$(sI-A)X(s)=x_0$

$X(s)=(sI-A)^{-1}x_0$

$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]x_0$

故 $\phi(t)=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

法二：特征值法. A的所有特征值与特征向量为

$\lambda_1=-1 \longrightarrow P_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=-2 \longrightarrow P_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

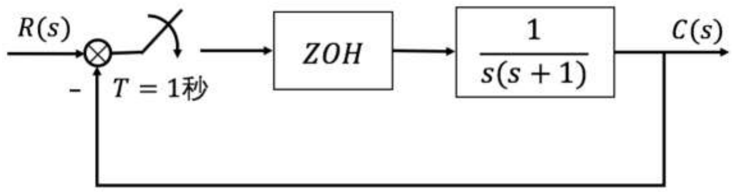
$P=[P_1\ P_2]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$e^{At}=Pe^{At}P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & \\ & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2e^{-t} & e^{-2t}\\ e^{-t} & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & -2e^{-t}+2e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$

九、（10 分）求 $r(t)=1(t)$ 时，下图所示的系统输出响应 $c^*(kT)$ 序列的表达式，并画出 $\boxed{kT \le 5T}$ 的时间响应曲线。（保留小数点后两位有效数字）



解：

ZOH: $G(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$
$$=\frac{z-1}{z}\left(-\frac{z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-e^{-T}}\right)$$
$$=-1+\frac{1}{z-1}+\frac{z-1}{z-e^{-1}}$$
$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$
$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$
$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+G(z)}=\frac{e^{-1}z^2+(1-2e^{-1})z}{z^3-2z^2+(2-e^{-1})z+(e^{-1}-1)}$$
$$=\frac{0.368z^2+0.264z}{z^3-2z^2+1.632z-0.632}$$

长除法求得

$$C(z)=0.368z^{-1}+1.000z^{-2}+1.399z^{-3}+1.399z^{-4}+1.147z^{-5}$$

说明 $c(0)=0$, $c(T)=0.368$, $c(2T)=1.000$, …

$T=1s$