主管领导审核签字

哈尔滨工业大学(深圳) 2024 学年秋季学期

自动控制理论 A 试 题（回忆版）

注：本卷由 Siri 回忆，答案来源于网络，不保证正确，如叙述有误等，恳请斧正。

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											
评分人											

考生注意：本次考试为闭卷考试，考试时间 120 分钟，满分 100 分。

注意行为规范 遵守考场纪律

一、填空题。（每空 2 分，共 10 分）

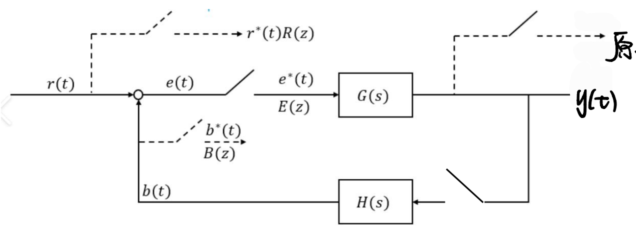
1.已知$\mathscr{L}\left(e^{-at}\right)=\frac{1}{s+a}$，$\mathscr{L}\left(sin\omega t\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$，则$\mathscr{L}\left(e^{-at}sin\omega t\right)=$$\underline{\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}}$。

2.某闭环系统在原处是零状态的，其单位阶跃响应为 $1-e^{-t}$，则该系统传递函数 $G(s)=$$\underline{\frac{1}{s+1}}$。

3.一个系统的开环传递函数为$G(s)=\frac{1}{s^2+5s}$，则在单位抛物输入$r(t)=t^2/2$ 下的稳态误差为$\underline{\infty}$。

4.时域信号$u(t)=\begin{cases}1(0\le t\le 2.2)\\0\ (t>2.2)\end{cases}$，对该信号每隔 0.5s 进行采样，则其 Z 变换的结果为 $Y(z)=$$\underline{\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}}$。注：z为Z的个人写法，下同

5.某离散系统结构图结构如下，该系统的输出 $Y(z)=\frac{R(z)G(z)}{1+G(z)H(z)}$。



原卷已改图

1. 拉氏变换 延迟性质：$F(s+a)=\mathscr{L}\left[e^{-at}\cdot f(t)\right]$

2. 零状态下，单位脉冲响应即为传递函数，对单位阶跃响应 $\mathscr{L}\left[1-e^{-t}\right]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s(s+1)}$ 求导即为 $G(s)=\frac{1}{s+1}$

3. 静态误差系数法：对 I 型系统抛物输入，稳态误差 ∞

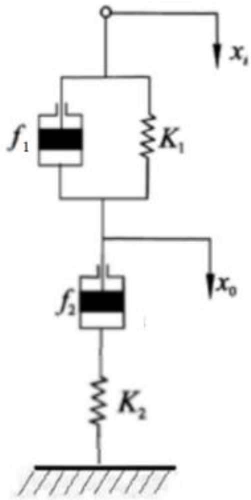
动态误差系数法：$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot G(s)\cdot R(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s^2+5s}\cdot\frac{1}{s^3}=\infty$

4. 5个采样点 0.1.2.3.4

$$\sum_{k=0}^{4}z^{-k}=\frac{1-(z^{-1})^5}{1-z^{-1}}$$

5. 注意开关位置，略。

二、计算下图机械系统的传递函数$G(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}$（6 分）



$$K_1(x_i-x_0)+f_1(\dot{x}_i-\dot{x}_0)=K_2x_0 \,//\, f_2\dot{x}_0$$

对上式拉氏变换：

$$K_1(X_i-X_0)+f_1s(X_i-X_0)=\frac{K_2f_2sX_0^2}{K_2X_0+f_2sX_0}$$

化简，有：

$$G(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{k_1+f_1s}{k_1+f_1s+\frac{k_2f_2s}{k_2+f_2s}}$$

$$=\frac{(k_1+f_1s)(k_2+f_2s)}{(k_1+f_1s)(k_2+f_2s)+k_2f_2s}$$

三、线性时不变系统转移状态矩阵为$\Phi(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$，试求该系统的系统矩阵 A 。（5 分）

法一： 由 $\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$

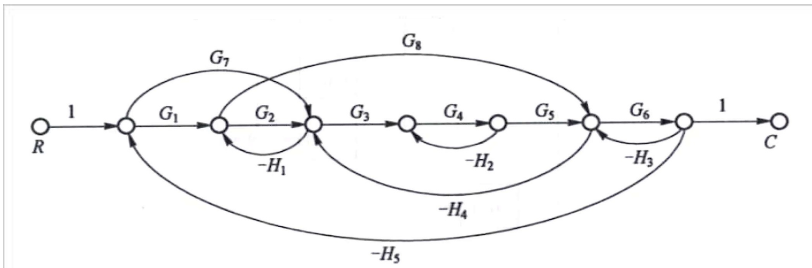
$$\therefore (sI-A)^{-1}=\mathcal{L}\left[\Phi(t)\right]=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=sI-(s+1)(s+2)\cdot\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

法二： $\Phi'(t)=A\Phi(t)$ 且 $\Phi(0)=I$

$$\therefore A=\Phi'(t)\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\\ 2e^{-t}-4e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

四、某系统信号流图如下，使用梅森公式求出该系统闭环传递函数$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$。（12 分）要求写出详细的计算过程。



系统中单独回路有九个，即：

$$\sum L_1 = -G_2H_1 - G_4H_2 - G_6H_3 - G_3G_4G_5H_4 - G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_5 - G_1G_8G_6H_5$$
$$- G_7G_3G_4G_5G_6H_5 + G_7H_1G_8G_6H_5 + G_8H_4H_1$$

两个不接触回路有六组，即：

$$\sum L_2 = G_2H_1G_4H_2 + G_2H_1G_6H_3 + G_4H_2(G_6H_3 - G_1G_8G_6H_5 + G_7H_1G_8G_6H_5 + G_8H_4H_1)$$

三个互不接触的回路有一组，即：

$$\sum L_3 = -G_2H_1G_4H_2G_6H_3$$

所以信号流图的特征式为：

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 = \text{略}$$

前向通路有4条，其通路增益以及余因子式分别为：

$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6$， $\Delta_1 = 1$

$P_2 = G_7G_3G_4G_5G_6$， $\Delta_2 = 1$

$P_3 = G_1G_8G_6$， $\Delta_3 = 1 + G_4H_2$

$P_4 = -G_7H_1G_8G_6$ $\Delta_4 = 1 + G_4H_2$

因此，系统的传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_i\Delta_i}{\Delta} = \text{略略略}\ldots$$

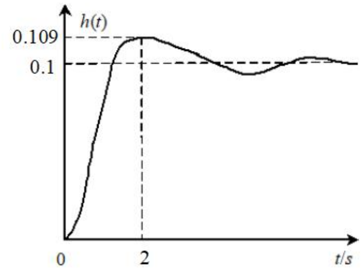
五、某弹簧-质量-阻尼系统的状态空间模型如下（12 分）：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = [1/m \ \ 0]\, x(t)$$

对该系统输入$r(t) = 2 \cdot 1(t)$，得到的响应结果如图所示，其稳态误差 $e_{ss} = 0$。

（1）请求解该系统的参数 m，f，k。（9 分）

（2）计算该系统的调节时间 $t_s(2\%)$。（3 分）



(1) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B$

$$= \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + (f/m)s + k/m}$$

由图：$\sigma\% = \frac{0.109-0.1}{0.1} = 9\%$ $\quad \therefore \zeta = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma\%)}\right)}} = 0.6$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} = 2\,s \qquad \therefore \omega_n = 1.96$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot R(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + (f/m)s + k/m} = \frac{2}{k} = 0.1 \qquad \therefore k = 20$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 = (1.96)^2 = 3.84 \qquad \therefore m = 5.2$$

$$\frac{f}{m} = 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.6 \times 1.96 = 2.352 \qquad \therefore f = 12.23$$

(2)

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx 3.4\,s$$

六、两个系统的特征方程如下，分别计算判断系统是否稳定，并计算在 s 平面右半平面根的个数和纯虚根。（10 分）

（1）$D(s)=s^5+2s^4-s-2$（5 分）

（2）$D(s)=s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50$（5 分）

(1) Routh

s^5	1	0	-1
s^4	2	0	-2
s^3	8	0	
s^2	ε	-2	
s^1	$\frac{16}{\varepsilon}$		
s^0	-2		

辅助方程：$2s^4-2=0$

求导：$8s^3=0$

第一列元素变号一次，有一个正实部根位于 s 右半平面，系统不稳定。

由辅助方程 $2s^4-2=0$ 可解出纯虚根 $\pm j$。

(1) Routh

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	
s^2	24	-50	
s^1	$\frac{338}{3}$		
s^0	-50		

辅助方程：$2s^4+48s^2-50=0$

求导：$8s^3+96s=0$

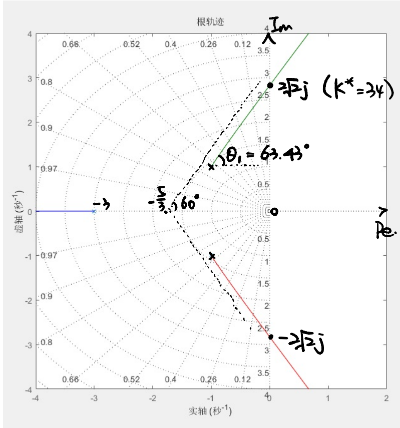
第一列元素变号一次，有一个正实部根位于 s 右半平面，系统不稳定。

由辅助方程 $2s^4+48s^2-50=2(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)=0$ 可解出纯虚根 $\pm 5j$。

七、某系统开环传递函数$G(s)=\frac{K^*}{(s+3)(s^2+2s+2)}$ 。（12 分）

（1）绘制根轨迹。（6 分）

（2）若要求超调量 $\sigma\%\leqslant25\%$ ，调节时间 $t_s\leqslant10s$ ，试确定满足的 K^*值。（6 分）**编者注：此题在考场中补充调节时间允许误差为 2%。**



(1) 默认为闭环系统，绘制180°根轨迹

$p_1=-3 \quad p_{2,3}=-1\pm j$

① 实轴根轨迹 $(-\infty,-3]$

② 渐近线 $\sigma_a=\frac{-3-1-1}{3-0}=-\frac{5}{3}$

$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3-0}=\pm60°,\ 180°$

③ 出射角 $0-[\theta_1+90°+\arctan0.5]=-180° \qquad \theta_1\approx63.43°$

④ 虚轴 $D(s)=s^3+5s^2+8s+6+K^*=0 \quad D(j\omega)=-j\omega^3-5\omega^2+8j\omega+6+K^*=0$

$\begin{cases}Re[D(j\omega)]=6+K^*-5\omega^2=0\\ Im[D(j\omega)]=8\omega-\omega^3=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\omega=\pm2\sqrt{2}\\ K^*=34\end{cases}$

(2) ① $\sigma\%=\exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\leqslant25\%$ $\quad\therefore$ 此时 $\zeta\geqslant0.404$

由根之和：$2\zeta\omega_n+\lambda_3=-5$ 即 $\lambda_3=-5+2\zeta\omega_n$

则 $D(s)=s^3+5s^2+8s+6+K^*=(s-\lambda_3)(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2)$

对比系数 $\begin{cases}\omega_n^2=4(\zeta\omega_n)^2-10\zeta\omega_n+8\\ K^*=\omega_n^2(5-2\zeta\omega_n)-6=-8(\zeta\omega_n)^3+40(\zeta\omega_n)^2-66\zeta\omega_n+34\end{cases}$

将$\zeta=0.404$代入上式，得：$\omega_n=0.199$ 则 $\zeta\omega_n=0.199\zeta\geqslant0.0804$

② $t_s(2\%)\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}\leqslant10s$ 此时 $\zeta\omega_n\geqslant0.4$

随K^*增大 $\zeta\omega_n$(复根实部)减小 在$\zeta\omega_n$最小值时可确定K^*最大值

考虑满足①②两个条件，$\zeta\omega_n$最小值为0.4，此时$K^*_{max}=13.488$

故 $0<K^*<13.488$

八、（1）叙述离散时间系统的李雅谱诺夫稳定的判定定理。（6 分）

（2）试用李雅谱诺夫判定法，判定系统$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.5 & -1\\ 0 & -0.2\end{bmatrix}x(k)$的稳定性。（7 分）

(1) 对于离散时间系统 $x(k+1)=\Phi x(k)$. 其中 A 是 $n\times n$ 的常数矩阵. 系统在平衡点 $x=0$ 处渐近稳定的充分必要条件是：对于任意给定的正定对称矩阵 Q 存在一个正定对称矩阵 P. 使得离散时间李雅普诺夫方程：

$\Phi^T P\Phi - P = -Q$ 成立. 并且 系统的一个李雅普诺夫函数是 $V(x)=x^TPx$

(2) 取 $Q=I$ $\because \Phi=\begin{bmatrix}0.5 & -1\\ 0 & -0.2\end{bmatrix}$ 设 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$

$$\Phi^T P\Phi - P = \begin{bmatrix}0.25p_{11} & -0.5p_{11}-p_{12}\\ -0.5p_{11}-p_{12} & p_{11}+5p_{12}+4p_{22}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

解得：$p_{11}=\frac{4}{3}$ $p_{12}=-\frac{20}{33}$ $p_{22}=\frac{515}{264}$ 即 $P=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{20}{33}\\ -\frac{20}{33} & \frac{515}{264}\end{bmatrix}$

$\because p_{11}>0$ $\det(P)>0$ 故 P 是正定

综上所述：该系统是渐近稳定的

九、一个系统开环传递函数为$G(s)=\frac{10}{s(s+1)(s^2+1)}$ 。（10 分）

概略绘制该系统的幅相频率特性曲线并用奈奎斯特法判断该系统的稳定性。

$$G(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega+1)(1-\omega^2)}$$

$$|G(j\omega)|=\begin{cases}\dfrac{10}{\omega(1-\omega^2)\cdot\sqrt{\omega^2+1}} & (\omega<1)\\[2ex] \dfrac{10}{\omega(\omega^2-1)\cdot\sqrt{\omega^2+1}} & (\omega>1)\end{cases}$$

$$\angle G(j\omega)=\begin{cases}-90^\circ-\arctan\omega & (\omega<1)\\ -90^\circ-\arctan\omega-180^\circ & (\omega>1)\end{cases}$$

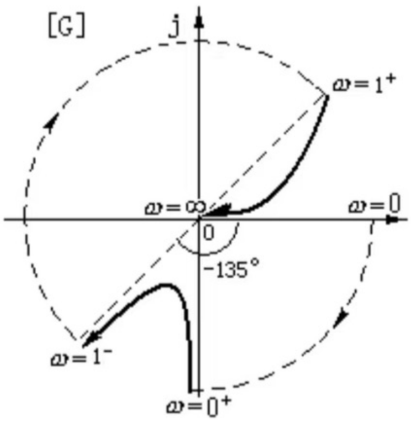
$\omega=0\to\omega$ 时 . $\nu=1$

$G(j0^+)=\infty\ \angle -90^\circ$

$G(j1^-)=\infty\ \angle -135^\circ$

$G(j1^+)=\infty\ \angle 315^\circ$

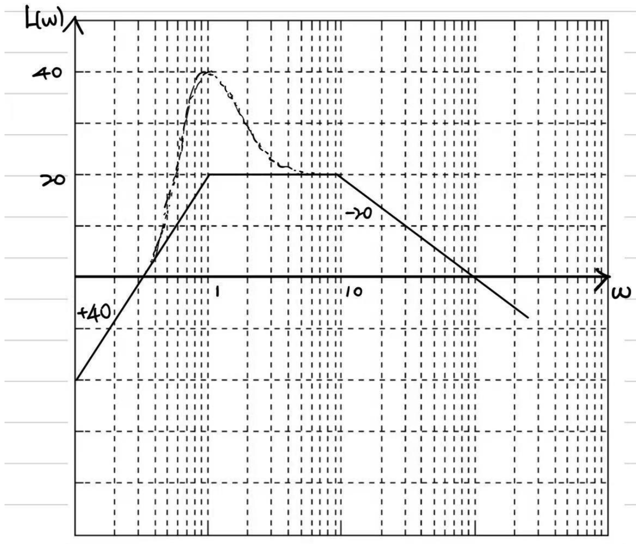
$G(j\infty)=0\ \angle -360^\circ$



右半平面无开环极点，$P=0$　绕$(-1,j0)$点，$N=-1$

$Z=P-2N=0-2(-1)=2>0$ 故系统不稳定

十、已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如图所示，试求取该系统的开环传递函数。（10 分）



由图. 积分环节. 二阶振荡. 和惯性环节

设 $G(s) = \dfrac{Ks^2}{\left(\dfrac{s^2}{\omega_1^2} + 2\xi\dfrac{s}{\omega_1} + 1\right)\left(\dfrac{s}{\omega_2} + 1\right)}$

$20\lg K = 20 \quad \therefore K = 10 \quad \omega_1 = 1 \quad \omega_2 = 10$

$20\lg\dfrac{1}{2\xi} = 20 \quad \xi = 0.05$

故 $G(s) = \dfrac{10s^2}{(s^2 + 0.1s + 1)(0.1s + 1)}$