+ ×

− ÷

Chapter 2 控制系统的数学模型

一、微分方程

二、拉氏变换

1、拉氏逆变换求系数：

对于极点 $s_1, s_2 \cdots s_r$

$$C_r = \frac{1}{(r-1)!}\lim_{s\to s_r}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}(s-s_r)^{r-1}Y(s)$$ 其中N是极点的级数

三、传递函数 G(s)

1、定义：$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

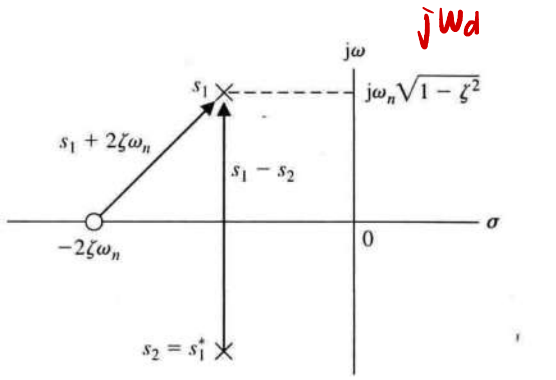
2、典型环节的传递函数

(1) 惯性环节

(2) 积分环节

(3) 振荡环节

$$G(s) = \frac{W_n^2}{s^2+2\xi W_n s + W_n^2} = \frac{W_n^2}{(s+P_1)(s+P_2)}$$



$$P_{1,2} = -\xi W_n \pm j W_n\sqrt{1-\xi^2}$$

(4) 微分环节

(5) 延迟环节

(6) 比例环节

3、输入信号 $r(t)=A\sin(wt)$

① 幅值：$A \to A|G(jw)|$

② f不变

③ 相角：$0 \to \angle G(jw)$

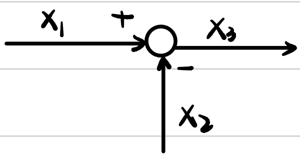
系统：
- 微分方程 ⇒ 时域
- 传递函数 $G(s)$ ⇒ 复数域
- 频率特性 $G(jw)$ ⇒ 频域

四、方框图模型

1、信号线

2、分支点

3、相加点



五、状态空间模型

1、状态空间表达
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\text{线性定常}} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{y}(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

2、状态变量：描述系统的所有变量构成一个极大线性无关组

3、A：系统的状态矩阵（系统矩阵）

B：控制矩阵（输入矩阵）

C：输出矩阵

D：前馈矩阵

4、由状态空间表达式求传递函数

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

2.8 线性离散系统的数学模型

一、差分方程

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \underline{y(k-i)} + \sum_{j=0}^{m} b_j \underline{r(k-j)} \qquad n \geq m \Rightarrow \text{因果效应}$$

输出值(历史)　　输入值

1、Z变换：对于时间序列 $x(k)$　$k=0,1,\cdots$

$$X(z) = Z[x(k)] = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

z^{-k} 表示第k次采样时刻，其中 z^{-1} 表示一个单位的延时

① $Z[x(k-n)] = z^{-n}X(z)$

② $Z[x(k+n)] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k}\right]$

2、脉冲传递函数（Z函数）

$$G(z) = \frac{Z[y^*(t)]}{Z[x^*(t)]} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

对 $G(s)$ 的单位脉冲响应序列 $g(t)$ 的采样序列 $g^*(t)$ 做Z变换得到 $G(z)$

① $G(z)$ 是关于z的复函数

② 只与系统的结构有关

3、求解：串联环节的 $G(z)$

① G_1 和 G_2 中没有同步采样环节

$$G(z) = G_1G_2(z) = Z(G_1G_2)$$

② 有同步采样环节

$$G(z) = G_1G_2(z) = Z(G_1)\cdot Z(G_2)$$

③ 与零阶保持器串联

2.8 线性离散系统数学模型

一、香农采样定理

1、内容：对具有有限频谱的信号 $(-w_h < w < w_h)$，采样频率 $w > 2w_h$ 时，离散的采样信号可以无损地恢复到原来的信号

2、信号的混叠：采样频率太低，高频信号被采集成低频信号

二、Z变换

1、定义：对于信号序列 $x(n)$，它的Z变换序列为 $X(Z)$

$$X(Z) = x(0) + x(1)Z^{-1} + x(2)Z^{-2} + x(3)Z^{-3} + \cdots$$

2、求Z变换的方法※

① 求和函数

eg1：全1序列 $x(t) = 1(t)$

解：$X(Z) = 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + \cdots + Z^{-n} + \cdots$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1(1-Z^{-n})}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1}$$

※推广结论：

$$Z(m^k) = \frac{Z}{Z-m}$$

eg2：$x(t) = e^{-at} \Rightarrow x(kT) = e^{-akT}$

解：$X(Z) = 1 + e^{-aT}Z^{-1} + e^{-2aT}Z^{-2} + \cdots$

$$= \frac{Z}{Z-e^{-aT}}$$

※重要结论：

$$Z(e^{-akT}) = \frac{Z}{Z-e^{-aT}}$$

eg3：$x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

解：$X(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT)Z^{-n}$

$$-\int \frac{X(Z)}{Z} = \int \sum_{n=1}^{\infty} -nZ^{-n-1} \cdot T$$

$$-\int \frac{X(Z)}{Z} = \sum_{n=1}^{\infty} TZ^{-n}$$

两侧求导：

$$X(Z) = (-Z)\cdot\left(\frac{T}{Z-1}\right)' = \frac{TZ}{(Z-1)^2}$$

② 部分分式展开＋结论：略

③ 留数法：略

3、Z变换的性质

①线性性质

②位移性质

$$Z[x(t-nT)] = z^{-n}X(z)$$

$$Z[x(t+nT)] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n} x(kT)z^{-k}\right]$$

③…

4、求Z的逆变换的方法

※ 对于 $X(z)$，只能得到 $x(kT)$ 和对应的冲激采样 $x^*(t)$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

①长除法

将分子分母都变为z的负次幂，得到各项系数

②部分分式法：

求得 $\frac{X(z)}{z}$ 的部分分式，然后查表

③留数法：略

△ $x^*(t)$ 写成冲激函数的集合 $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$

三、脉冲传递函数

(一)列式：从输出向前递推

(二)传递函数：①环节间有采样开关时，不合并：$G_1(z)G_2(z)$ 分别Z变换后相乘

②否则先相乘后作Z变换：$G_1G_2(z)$

③输入信号未经采样进入连续环节，一般写不出传递函数

常用的Z变换 ① $1(t) \overset{Z}{\Rightarrow} \frac{z}{z-1}$

② $a^k \overset{Z}{\Rightarrow} \frac{z}{z-a}$

第三章 控制系统的时域分析

3.1 基于传递函数的时域分析

※二阶系统的分析

△ 分析方法和步骤

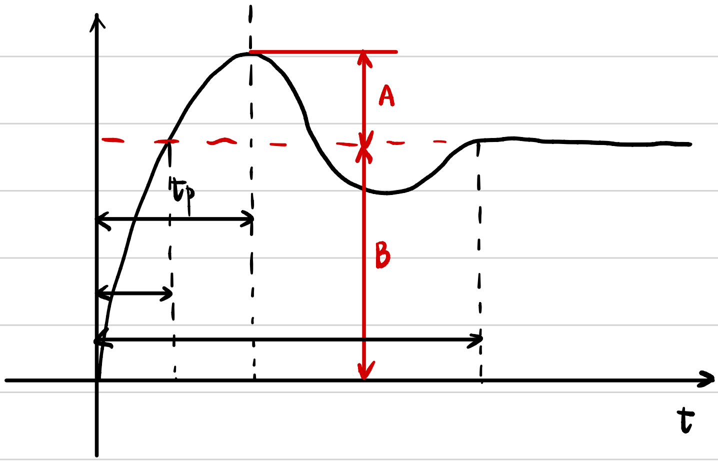
① 给出闭环控制系统的传递函数 $\Phi(s)$

② $Y(s) = \Phi(s) \cdot X(s)$

③ 得到 $Y(s)$ 后做拉氏逆变换，考察 $y(t)$

一、一阶系统的时域分析

1、性能指标



上升时间：…

※ 峰值时间 t_p：达到峰值所用时间

超调量：$A/B \cdot 100\%$

调节时间：误差达到稳态值带 2-5% 内所用的时间

2、阶跃信号响应

输入信号：阶跃信号 $W(s) = \frac{1}{s}$

① 传递函数：$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$ ⇒ T为调节时间，K是放大倍数

② 时间常数越小系统的响应速度越快

3、脉冲响应

注：①

输入信号：脉冲信号 $\delta(s) = 1$

① $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$

② 系统输出为 $Y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$

△ 性质：单位脉冲响应能反映系统的全部特征，
即单位脉冲响应与传递函数是拉氏变换对

二、二阶系统的时域分析

1、标准二阶系统传递函数

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

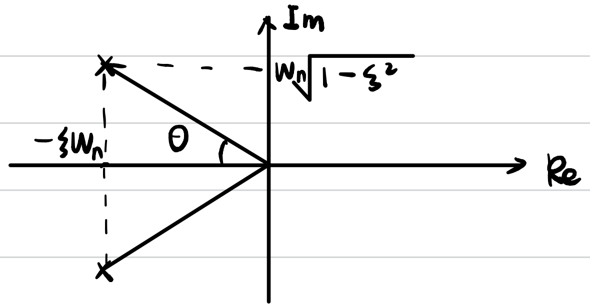
2、极点和特征根

$$s=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

无阻尼自然振荡角频率

阻尼系数

① $0<\xi<1$ 欠阻尼



$\xi=\arccos\theta$

② $\xi=1$ 临界阻尼：两个实根(相同)

③ $\xi>1$ 过阻尼：两个不等实根

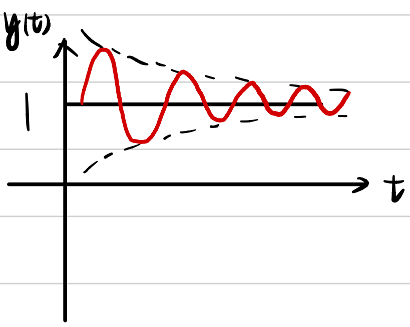
3、单位阶跃响应

$$Y(s)=G(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Downarrow L^{-1}(Y(s))$$

$$y(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\quad(t\geq 0)$$

① $0<\xi<1$ 欠阻尼



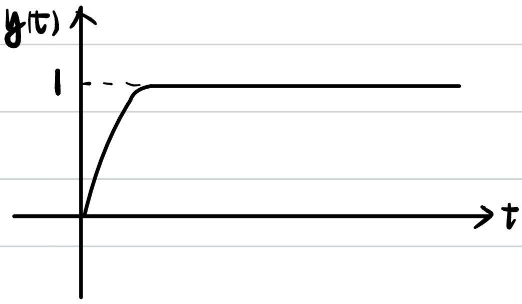
② $\xi=0$ 无阻尼

等幅振荡，超调100%

调节时间∞

③ 临界阻尼 $\xi=1$

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$



3. 欠阻尼瞬时响应特性

1) 峰值时间：响应曲线第一次到峰值时间 T_p

$$\frac{dy(t)}{dt}=0$$

由 $sY(s)=\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$ $\overset{L^{-1}}{\Longrightarrow}$ $\frac{dy(t)}{dt}=\frac{w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi w_n t}\sin w_d t=0$

即 $t=\frac{n\pi}{w_d}$ 其中 $w_d=w_n\sqrt{1-\xi^2}$

取 $n=1$ $\Rightarrow T_p=\frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$

2) 超调量 $\delta\%$

$$\delta\%\triangleq\frac{y(T_p)-y(\infty)}{y(\infty)}\times 100\%$$

$$\delta\%=e^{-\xi w_n T_p}=\exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\times 100\%$$

※只与阻尼比有关

3) 上升时间 T_r

$$T_r=\frac{\pi-\varphi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

其中 $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

4) 调节时间 T_s（由不等式推导得到）

$$T_s(2\%)=\frac{1}{\xi w_n}\left[4-\frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)\right]$$

$$T_s(5\%)=\frac{1}{\xi w_n}\left[3-\frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)\right]$$

eg：零点 $-z=-\frac{1}{\tau}$，添加零点1，则 $-z=1$

即 $\tau=-1$

三、有零点的二阶系统

1、传递函数

※添加零点时用 $G(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ 合适

闭环传递函数

$$G(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\quad (其中 \tau=\frac{1}{z})$$

2、动态性能指标

① 上升时间 $T_{rz}=T_r-\frac{\psi}{\omega_d}$

其中 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$，$\psi=\arctan\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{z-\xi\omega_n}$，$T_r$ 是标准无零点二阶系统 $T_r=\frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

② 峰值时间 $T_{pz}=T_p-\frac{\psi}{\omega_d}$

其中 $T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

③ 超调量 $\sigma_z\%=\frac{l}{z}e^{(\xi\psi/\sqrt{1-\xi^2})}\times\sigma\%$

其中 $l=\sqrt{z^2-2\omega_n\xi z+\omega_n^2}$　$\sigma\%=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

④ 调节时间 $T_{sz}=T_s-\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{l}{z}$

其中，$T_s(2\%)=\frac{1}{\xi\omega_n}[4-\frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)]$

$T_s(5\%)=\frac{1}{\xi\omega_n}[3-\frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)]$

$T_{sz}=T_s-\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{l}{z}$

五、系统的静态性能指标

1、高阶系统的分类

考虑开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K\prod_{i=1}^{m}(T_is+1)}{s^N\prod_{j=1}^{n-N}(\tau_js+1)}$

当 $N=0,1,2$ 时，对应的系统称为0型，1型，2型系统

2、稳态误差系数 k_p

$$k_p \triangleq \lim_{s\to 0} G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{k}{s^N}$$

① 0型系统 $k_p=\lim_{s\to 0}\dfrac{k}{s^0}=k$

② 1,2型系统 $k_p=\lim_{s\to 0}\dfrac{k}{s}=\infty$

3、稳态误差 e_{ss}

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)$$

	A、阶跃信号 $R(s)=\frac{1}{s}$	B、斜坡输入 $R(s)=\frac{1}{s^2}$	C、加速度信号 $R(s)=\frac{1}{s^3}$
0型系统	$e_{ss}=\frac{1}{1+k}$	∞	∞
1型系统	0	$\frac{1}{k}$	∞
2型系统	0	0	$\frac{1}{k}$

四、离散系统

(一) 阶跃信号

闭环传函为 $\Phi(z)=\dfrac{k\prod(z-z_i)}{\prod(z-p_i)}$

则阶跃信号下的响应 $Y(z)=\Phi(z)\cdot U(z)=\dfrac{k\prod(z-z_i)}{\prod(z-p_i)}\cdot\dfrac{z}{z-1}$

$$=\frac{Az}{z-1}+\sum_{i=1}\frac{B_i z}{z-p_i}$$

特征方程无重根

进行Z反变换得到 $y(kT)=A+\boxed{\sum_{i=1}^{n}B_i p_i^{k}}$ 与零、极点相关

1、实极点

第i个实极点对应的分量为 $y_i(kT)=B_i p_i^{k}$

根据极点和单位圆的相对位置，确定对应情况

△ 与连续系统不同(振荡时一定要有虚部)，离散系统极点在负半实轴上时会有振荡

2、复数共轭极点

对于一对共轭极点 $p_{i,i+1}=a\pm bj$ 产生对应分量为 $y_i(kT)=A_i\lambda_i^{k}\cos(k\theta_i+\phi_i)$

其中 $\lambda_i=\sqrt{a^2+b^2}$，$\boxed{\theta_i=\arctan\frac{b}{a}}$ 而 A_i 和 ϕ_i 是由部分分式展开的系数决定

弧度

① $\lambda_i<1$ 即极点在单位圆内部时，响应衰减振荡，振荡角频率为 θ_i/T

特别地，在实轴负半轴时，$\theta_i=\pi$，即振荡角频率为 π/T，在实轴正半轴时，$\theta_i=0$

(二) 阶跃响应的性能指标

得到闭环传函 ⟶ $\Phi(z)$ 乘以输入信号 $\frac{z}{z-1}$ ⟶ 对 $Y(z)$ 作Z逆变换(用长除法)

3.2 基于状态空间的时域分析

一、矩阵指数函数的性质

1、多项式逼近：$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\cdots$

2、运算性质：① $e^{At}|_{t=0}=I$

② $e^{(A+\tau)t}=e^{At}\cdot e^{\tau t}$

③ $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

④ 若$AF=FA$，$e^{(A+F)t}=e^{At}\cdot e^{Ft}=e^{Ft}\cdot e^{At}$

⑤ $de^{At}/dt=Ae^{At}$

⑥ $A=diag(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m)$ 则 $e^{At}=diag(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots)$

3、矩阵指数函数的计算

① 展开法：$e^{At}=I+(At)+\frac{1}{2!}(At)^2+\cdots$

② 特征根法

a) n个特征根均不相同

$e^{At}=P\cdot diag[e^{\lambda_1 t}\ e^{\lambda_2 t}\ e^{\lambda_3 t}\cdots]P^{-1}=Pe^{\lambda t}P^{-1}$

其中P是由每个特征根对应的特征向量构成的 $P=[v_1\ v_2\ v_3\cdots]$

△证明：任意具有n个互不相同的特征根的矩阵，可以做以下对角化：

$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$

由此得到 $A^2=P\Lambda^2P^{-1}$，$A^3=P\Lambda^3P^{-1}$

代入 $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\cdots$

得证

b) 具有重根：广义Jordan标准型

几何重数，代数重数，分块矩阵

对于A：$A=QBQ^{-1}$ $B=\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda_1 & 1 & 0 & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & & \lambda_1 & & \\ \hline & 0 & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & \lambda_2\end{array}\right]$

则：$e^{At}=Q\left[\begin{array}{ccc|cc}e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & & e^{\lambda_1 t} & & \\ \hline & & & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ & 0 & & & e^{\lambda_2 t}\end{array}\right]$

③ 预解矩阵法、拉氏变换法

$(S-a)^{-1}$ 的幂级数展开为 $(S-a)^{-1}=\frac{1}{S}+\frac{a}{S^2}+\frac{a^2}{S^3}+\cdots$

即对于矩阵A有：$(SI-A)^{-1}=\frac{1}{S}+\frac{A}{S^2}+\frac{A^2}{S^3}+\cdots$

有：$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(SI-A)^{-1}]$

二、系统的响应

(一) 零输入响应：$e^{At}x_0$

(二) 零状态响应：$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

一般线性系统的响应

$$\boxed{x(t)=x_{0u}+x_{0x}(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

1、A与特征根特征向量有关，对于特征值两两相异的n维系统

$$\boxed{e^{At}=\sum_{i=1}^{n}v_i\bar{v}_i e^{\lambda_i t}}$$

三、系统的状态转移矩阵

1、定义：将系统状态由 t_0 时刻转移到 t 时刻有：$x=\Phi(t,t_0)\cdot x_0$

其中 $\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$ 称为系统的状态转移矩阵

2、状态响应和输出响应

$$y(t)=Cx(t)+Du=C\Phi(t,0)x_0+C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+D$$

四、离散系统状态方程时域分析

1、线性系统离散化

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + Bu \\ y(t) = Cx + Du \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

其中 $G = e^{AT}$ $H = \left(\int_0^T e^{At} dt\right) B$

2、求转移矩阵 G^k

自控原理上半部分总结：ppt例题

<描述系统的方法>	连续系统	离散系统
	微分方程	差分方程
输出系统	传递函数	脉冲传递函数
	方框图	方框图 △显式传函的条件
	信号流图	
状态空间模型	$\dot{x}=Ax+Bu$	$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$
	$y=Cx+Du$	$y(k)=Cx(k)+Du(k)$

$\Downarrow$

得到系统的响应

$\Downarrow$

分析动静态指标　　△极点和系统行为的关系

1、为什么研究线性系统：泰勒展开，求解微分方程
2、拉氏变换，积分收敛条件
3、拉氏变换性质、终值定理(及条件)
4、拉氏变换对
5、拉氏变换求微分方程，分解：①有重根②无重根　　△公式？
6、传递函数初始值为0，与输入无关只取决于系统本身
7、传递函数环节：二阶系统振荡环节极点图 ※
8、传函和阶跃响应是拉氏变换对
9、前向，开闭环传函
10、负载效应的可忽略情况 $\Rightarrow$ 方框图下忽略负载
11、方框图化简技巧

12、用信号流图和梅森公式求复杂系统的传函

※求回路

不唯一

13、状态空间模型 ⇔ 微分方程

唯一转化

14、能控标准型

15、同个系统不同状态空间模型的关系

16、离散系统采样、采样定理（频率不失真 波形失真 为了防止信号混叠现象）A/D

17、$e^{Ts}=z$

18、零阶保持器 D/A

19、Z变换的定义，Z变换表

20、Z变换的性质、终值定理

21、Z逆变换 ①长除法 ②部分分式法

22、求解差分方程：Z变换

23、脉冲传函：输入是采样信号 △加入零阶保持器环节

24、同步采样开关影响合并

25、差分方程 → 离散方程

26、性能指标 （延迟时间不管）

27、二阶系统极点与ζ，ω_n关系

28、斜坡响应

29、主导极点与s倍关系 ⇒ 高阶系统降阶

补充：Jordan标准型

1、几何重数和代数重数：

①代数重数是特征根的重数

②几何重数是Jordan块的个数

③广义特征向量个数=代重-几重

2、将矩阵转化为Jordan标准型

利用特征向量构成的特征阵Q

$J = Q^{-1} A Q$

第4章 控制系统稳定性稳态误差

一、连续系统稳定性及劳斯判据

(一)稳定性的概念

从欠阻尼二阶系统响应得到

1、对于稳定的零状态系统，给系统一个脉冲扰动 $\delta(t)$ 特征方程零点实部位于左半复平面是稳定的

若 $t\to\infty$ 时，输出响应收敛到原来的零平衡状态

2、系统稳定的充要条件

闭环极点均具有负实部，或均位于左半平面（古典控制临界稳定归为不稳定）

△只取决于结构（几型系统）和参数（特征方程系数）

(二) 稳定性判据

$$D(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

1、必要条件： $a_i>0$

2、劳斯判据

①劳斯阵列：n阶系统共有n+1行

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \ \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \ \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
 & \vdots & & & \\
s^1 & & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{cases} b_1=(a_1a_2-a_0a_3)/a_1 \\ b_2=(a_1a_4-a_0a_5)/a_1 \\ \vdots \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1=(a_3b_1-a_1b_2)/b_1 \\ c_2=(b_1a_5-a_1b_3)/b_1 \end{cases}$$

② 第一列全部为正数 $\Longleftrightarrow$ 系统稳定

符号改变的次数是右根的个数

③ 说明：行同乘/除一个正数，结论不变

劳斯判据特殊情况 a)第一列出现0，但该行系数不为0 → 系统不稳定，用ε代替0，令ε→0

b)全零行，用上一行的元素构造辅助多项式，求导后得到新行

辅助方程的根也是特征方程的根，且一般为偶次方程，根成对出现

△特征方程 ①由全零行的上一行构建，且每隔2次取值，本身的根也是传函的极点

②根常以成对的纯虚根出现，对应稳定振荡频率

③求导后可以作为下一行的劳斯系数

(三) 利用劳斯判据确定参数的范围

$$G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{v}\prod_{j=1}^{k}(T_j s+1)\prod_{k=1}^{z}(T_k^2 s^2+2\zeta_k T_k s+1)}$$ 代表开环传函

①加零点问题　②开环增益问题

(四) 说明

1、开环系统和闭环系统稳定性没有关系

2、闭环零点决定系数，不影响稳定性

3、开环极点决定系数和稳定性

二、离散系统稳定性定义和劳斯判据

(一) S域到Z域的映射

$z=e^{sT}$　　$s=\sigma+j\omega$　$\Rightarrow$　$z=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T}$

则有 $|z|=e^{\sigma T}$　$\angle z=\omega T$

※ S域中的左半平面 $\sigma<0$，对应Z域中的单位圆内部

1、等σ线映射：

在S域中的等σ线对应了Z域中的半径为 $z=|e^{\sigma T}|$ 的同心圆

2、等ω线映射：

S：水平线 $\longrightarrow$ Z：射线

3、线性离散系统的稳定性充要条件

全部特征根都分布在单位圆内，即$|z_i|<1$

(二) 劳斯稳定判据

1、W变换与劳斯稳定判据

内容：将Z平面的单位圆内部映射到W平面左半平面

$z=(w+1)/(w-1)$　　$w=(z+1)/(z-1)$

设 $z=x+yj$，$w=u+vj$

$\Rightarrow$　$u=\dfrac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2}$，　$v=\cdots$ (不重要)

先用 $\frac{w+1}{w-1}$ 代替 z，再在w域中使用连续时的劳斯判据

2. K和T对系统稳定性的影响

① T一定时，增大K会使得系统不稳定

② K一定时，

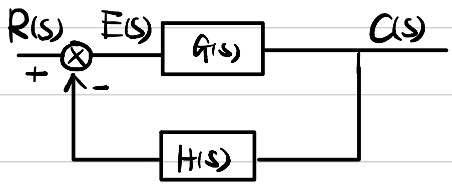
4.2 控制系统的稳态误差：在系统稳定的前提下，因此计算稳态误差前应先判断稳定性

阶跃输入下有原理误差的称为有差系统

稳定误差：由给定输入引起的误差是给定稳态误差

一、误差的定义

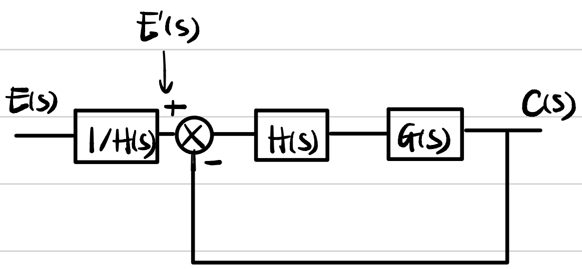
1、按输入端定义的误差（常用）



$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} R(s)$$

2、按输出端定义的误差



偏差函数 $\varepsilon(s)$，误差函数 $e(s)$

二、计算系统的误差（终值定理法）

1、判断系统的稳定性

2、得到误差传递函数 $\Phi(s) = \dfrac{1}{1+G(s)H(s)}$　　$\dfrac{前馈传函}{1+开环传函}$

3、根据输入 $R(s)$，得到 $E(s) = \Phi(s)R(s)$

4、判断终值定理的使用条件：$sE(s)$ 的极点都在左半平面（包括原点）

5、$e_{ss} = \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = \lim\limits_{t\to\infty} e(t)$

(三) 控制系统的型别

1、系统的开环传函记为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^v}\frac{\prod(\tau_j s+1)\prod(\tau_k^2 s^2+2\xi\tau_k s+1)}{\prod(T_j s+1)\prod(T_k^2 s^2+2\xi_k T_k s+1)}$$

有 $K = \lim_{s\to 0} s^v G(s)H(s)$

(四) 给定输入下的稳态误差 (静态误差系数法)

1、阶跃输入下的 e_{ss}，$R(s) = A/s$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{A}{1+\lim_{s\to 0}G(s)H(s)} = \frac{A}{1+K_p}$$

定义 K_p 为静态位置误差系数

$$e_{ss} = \begin{cases} \frac{A}{1+K_p}, & \text{0 型系统, 能跟踪, 但有误差} \\ 0, & \text{others, 能跟踪, 无误差} \end{cases}$$

2、斜坡信号下的 e_{ss}，$R(s) = A/s^2$

$$e_{ss} = \frac{A}{\lim_{s\to 0} G(s)H(s)} = \frac{A}{K_v}$$

定义 K_v 为静态速度误差系数

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-1}} \begin{cases} 0 & v=0 \\ K & v=1 \\ \infty & \text{others} \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & \text{0 型系统, 不能跟踪} \\ \frac{A}{K_v} & \text{1 型系统, 能跟踪, 但有误差} \\ 0 & \text{others, 能跟踪, 无误差} \end{cases}$$

3. 加速度输入下的e_{ss}，$R(s) = A/s^2$

同理有 $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$

定义K_a为静态加速度误差系数

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^{v-2}} \begin{cases} 0 & v=0,1 \\ K & v=2 \\ \infty & v=\text{others} \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & \text{0型，1型无法跟踪} \\ A/K & \text{2型系统} \\ 0 & \text{高阶系统} \end{cases}$$

4. 说明：

① 只有当输入型别和系统的型别相同时，误差才为常数

(五) 动态误差系数法

将传递函数 $\Phi(s)$ 用长除法，得到

$$\Phi(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \cdots$$

稳定误差则为 $e_{ss}(t) = C_0 r(t) + C_1 \cdot r'(t) + C_2 \cdot r''(t)$

得到的误差一般含有t，代表动态误差

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e_{ss}(t)$$

二、离散系统的稳态误差 $e_{ss}^*(\infty)$

(一) 一般方法(利用终值定理)

1、设 $G(z)$ 和 $H(z)$ 间没有采样开关

则 $GH(z) = Z[G(s)H(s)] = \frac{1}{(z-1)^v} GH_0(z)$

连续系统以极点为0的个数定义型别
对应离散系统以极点为1的个数定义
$z = e^{sT}|_{s=0} \Rightarrow z=1$

2、步骤

判断系统的稳定性

得到误差传递函数 $H(z) = \frac{E(z)}{R(z)}$

(二) 静态误差系数法 (适用于对误差采样的系统)

1、阶跃信号输入 $r(t) = A\cdot 1(t)$

$K_p = \lim_{z\to 1} GH(z)$　　$e_{ss}^*(\infty) = \frac{A}{1+K_p}$

2、斜坡信号输入

$K_v = \lim_{z\to 1} (z-1)GH(z)$　　$e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT}{K_v}$　　T是采样周期

3、加速度信号输入

$K_a = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 GH(z)$　　$e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT^2}{K_a}$　　T是采样周期

(三) 动态误差系数法

小结：计算系统误差

一、连续系统的误差

(一) 基本方法

1、判断系统的稳定性

使用劳斯判据判断稳定性 ⇒ 先算闭环传递函数，再得到特征方程

※ 开环传函应整理成 " $ks+1$ " 的形式，从而得到系统的型别和开环增益的 K

2、得到误差传递函数 Φ_{ef}

① 对于单位反馈系统，若其开环传递函数为 $G(s)$，则 $\Phi_{ef} = \frac{1}{1+G(s)}$

② 对于一般的系统，列出 $Y(s)$，$E(s)$，$R(s)$ 关系式，再利用 $E(s) = R(s) - Y(s)$ 消元

3. 判断使用终值定理的条件

$\lim\limits_{s\to 0} sE(s)$ 的所有极点都位于坐标系的左半平面（包括坐标原点）

4. 利用终值定理得到稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \cdot s\Phi_{ef} \cdot F(s) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

(二) 静态误差系数法

1、判断系统的稳定性

使用劳斯判据判断稳定性 ⇒ 先算闭环传递函数，再得到特征方程

2、系统对于输入的响应误差

$e(t)$	$E(s)$	误差	0	I	II
$A(t)$	A/S		$\frac{A}{1+K_p}$	0	0
At	A/S^2		∞	$\frac{A}{K_v}$	0
$\frac{1}{2}At^2$	A/S^3		∞	∞	$\frac{A}{K_H}$

$K_p = \lim\limits_{s\to 0} G(s)$

$K_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)$

$K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)$

注：① 输入信号为 $e(t) = t^2$ 时，$A=2$

② 将开环传函整理为标准形式后，分子的开环增益即为 K_p / K_v / K_a

二、离散系统的稳态误差

△ 采样开关在 $E(s)$ 处才能讨论稳态误差

(一) 一般方法

1、利用开环传函 $G(s)$ 做 Z 变换得到 $G(z)$ (与采样时间有关)

①

$G(s)$	$g(t)$	$G(z)$
$1/s$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$1/s^2$	$1/t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$2/s^3$	$1/t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

② 时移性质: $\begin{cases} \mathcal{L}(e(t-t_0)) = e^{-st_0}E(s) \\ Z(x(n-m)) = z^{-m}X(z) \end{cases}$

※ eg: $T=0.25$, $G(s) = \frac{2e^{-0.5s}}{s^2}$ 求 $G(z)$

$g(t) = \frac{1}{(t-0.5)} \xrightarrow[n延迟2点]{t延时0.5s} g(n) = \frac{1}{n-2}$

$G(z) = z^{-2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$

③ 零阶保持器

$$G(s) = \frac{1-e^{-nTs}}{s}$$

性质: $Z(G(s)H(s)) = (1-z^{-n}) \cdot Z\left(\frac{H(s)}{s}\right)$

2、利用终值定理计算

对于单位反馈系统, $\Phi_{ef}(z) = \frac{1}{1+G(z)}$

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1} (z-1) \cdot \Phi_{ef}(z) \cdot F(z)$$

(二) 静态误差系数法

1、判断系统的稳定性

得到特征方程, 利用 $z=\frac{w+1}{w-1}$ 替换, 再用劳斯判据

2、由 $G(s)$ 得到 $G(z)$, 从而得到系统的型别和开环增益

$z-1$ 的次数即为系统型数

3、系统的误差响应 (与采样周期有关)

输入 $r(t)$	0	I	II
A	$\frac{A}{1+K_p}$	0	0
At	∞	$\frac{AT}{K_v}$	0
$\frac{1}{2}At^2$	∞	∞	$\frac{AT^2}{K_a}$

$K_p = \lim_{z\to 1} G(z)$

$K_v = \lim_{z\to 1} (z-1)G(z)$

$K_a = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 G(z)$

4.3 根于根轨迹的稳定性分析法

一、根轨迹法的基本概念

1、根轨迹：当系统的某一参数变化时，闭环特征方程的根在s平面移动的轨迹

2、开环传递与闭环零极点的关系

① 闭环零点由前向通路零点和反馈通路极点构成

② 闭环极点与开环零点，开环极点和K^*有关

3、根轨迹方程：满足该方程的点都在根轨迹上

考虑单位反馈系数，$G(s)=\dfrac{K^*}{s-p}$

根轨迹方程则为 $G(s)+1=0$

$$\begin{cases}|G(s)|=\dfrac{K^*}{|s-p|}=1 \\ \angle G(s)=-\angle(s-p)=(2k+1)\pi\end{cases}$$

K^*变化范围是$(0,\infty)$，该条件总是满足的

满足相角条件是s在根轨迹上点的充要条件

一般情况下的根轨迹方程

$$\begin{cases}|G(s)H(s)|=\dfrac{\prod|s-z_i|}{\prod|s-p_i|}K^*=1 \\ \angle G(s)H(s)=\sum\angle(s-z_i)-\sum\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi\end{cases}$$

模值条件：用来求特定位置的K^*的值

相位条件

4、开环传函的两种表达形式

①根轨迹法

$$G(s)H(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

K^*是开环增益

② 一般形式

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^v}\frac{\prod(\tau_j s+1)\prod(\tau_k^2s^2+2\zeta\tau_k s+1)}{\prod(T_j s+1)\prod(T_k^2s^2+2\zeta_k T_k s+1)}$$

③ K和K^*之间的关系

$$K=K^*\cdot\frac{\prod|-z_i|}{\prod|-p_j|}$$

二、绘制根轨迹 ※

1、根轨迹的起点和终点：

根轨迹开始于开环极点，终止于开环零点；如果极点个数n>零点个数m，则有n-m条终止于∞

$$|G(s)H(s)|=1 \Rightarrow K^*=\frac{|s-p_i|}{\prod_{j=1}|s-z_j|}=\frac{s^{n-m}\,|1-\frac{p_i}{s}|\cdots|1-\frac{p_i}{s}|}{|1-\frac{z_i}{s}|\cdots|1-\frac{z_i}{s}|}$$

2、根轨迹的数目、连续性、对称性

①分支数＝开环极点的个数

②连续性＝根轨迹连续

③对称性＝对称于实轴

3、实轴上根的轨迹

从实轴上最右端算起，奇数零极点到偶数零极点间的区域一定是根轨迹

4、根之和：$\sum \lambda_i = C \quad (n-m\geq 2)$

开环根之和保持不变，n-m≥2时，闭环根之和为常数

△ 一般结论

定理：若系统有两个开环极点，1个开环零点，且复平面存在根轨迹，则该根轨迹一定为以该零点为中心的圆弧

5、渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m} & \text{是渐近线与x轴的交点} \\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} & \text{是渐近线与实轴的角度} \end{cases}$$

6、分离点d：$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ 没有零点时右侧为0

利用 $|G(s)|=1$ 得到对应的 k^* 的值，分离点重要，因为常常是振荡始终点

7、与虚轴的交点：①系统临界稳定点 → [I] 劳斯判据全零行

②$s=jw$是$D(s)$的根 → [II] 代入方程得到 $D(jw)=0$，可以求得 w 和 k^*

由实部和虚部均为0得到两个方程

8、入射角和出射角：$\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)}_{\text{与零点所成角度和}}-\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_m)}_{\text{与极点所成角度和}}$

△ 一般结论：若开环零极点为偶数个，且它们关于一条平行与虚轴的直线对称，则根轨迹一定关于该直线对称

4.6 特殊根轨迹：除K^*外其它函数变化时的系统根轨迹

1、构造等价传递函数 $G^*(s)$

① 应满足 $n>m$

② 应使变化的量位于分子处

△ 当参数以倒数的形式存在时，令根轨迹反向即可

2、零度根轨迹

① 幅值条件不变，相角条件变为 $\sum\angle(s-z_j)-\sum\angle(s-p_i)=2k\pi$

② 改变的法则：实轴上的根轨迹 → 从右到左偶数零极点与奇数零极点间

渐近线 → 交点不变，$\varphi_e=\dfrac{2k\pi}{n-m}$

入/出射角 → $\sum\angle(s-z_j)-\sum\angle(s-p_i)=2k\pi$

小结：根轨迹的画法

一、基本规律（设有m个开环极点，n个开环零点）

(一) 共有 $m-n$ 条根轨迹终结于无穷处

(二) 根轨迹开始于极点终止于零点

(三) 实轴上奇数零极点和偶数零极点间是根轨迹

△ 由相位规律推导得到，当系统是单位正反馈时规律相反

(四) 分支数：开环极点的数目

(五) 根之和：实轴上根之和不变 $(n-m\geq 2)$

△ 开环根之和始终不变，但当 $n-m\geq 2$ 时，闭环根之和＝开环根之和＝常数

(六) 渐近线

$$\sigma = \frac{\text{所有极点和} - \text{所有零点和}}{n-m}$$

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$ 一般取 $k=0,-1$

△ 由相位规律推导得到，当系统是单位正反馈时 $\alpha = \frac{2k\pi}{n-m}$ 一般取 $k=0$

(七) 与虚轴交点

利用 $D(jw)=0$ 得到实部为0虚部为0两个方程 ⇒ 得到k和w

(八) 分离点

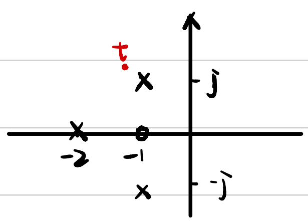
$$\sum \frac{1}{d-p_i} = \sum \frac{1}{d-z_j}$$ 当没有零点时，右侧为0

(九) 出射/入射角

取目标极点附近一个点 ⇒ $\sum(s-z_j) - \sum(s-p_j) = (2k+1)\pi$

其中角度是从其它点看这个点

eg:



$90° - (\theta + 45° + 90°) = -180°$

$\Rightarrow \theta = 135°$

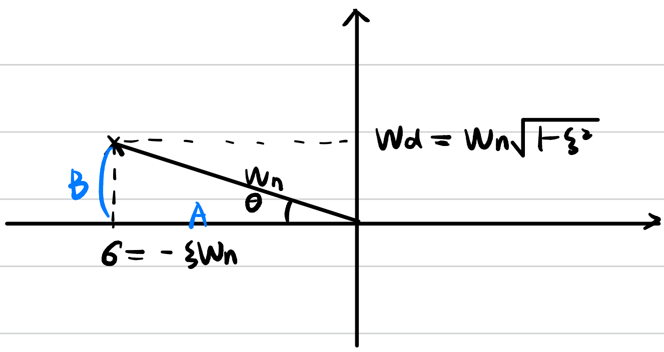
定理：若仅有两个极点和一个零点，则根轨迹一定是以零点为圆心的圆

二、根轨迹和系统性质关系

1、二阶系统的根

$$\phi(s)=\frac{w_n^2}{s^2+2w_n\xi s+w_n^2} \Rightarrow S_{1,2}=-\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2-1}$$

讨论欠阻尼时有：$\xi\in(0,1)$



2、动态指标

① 峰值时间 $t_p=\frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{B}$

② 超调量 $\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-\cot\theta\cdot\pi}$

③ 调节时间 $\begin{cases} t_s=\frac{3}{\xi w_n}\ (\Delta=0.05)=\frac{3}{A} \\ t_s=\frac{4}{\xi w_n}\ (\Delta=0.02)=\frac{4}{A}\end{cases}$

3、系统性质与根位置的关系

① 无超调量：实轴上根轨迹

② 具有欠阻尼特性：左平面除实轴上的部分

4.4 基于状态空间表达的稳定性分析

一、Lyapunov 稳定性定义

(一) 平衡状态

针对所有t满足 $\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$ 的状态的 x_e 称为平衡状态(即 $Ax=0$ 方程的解 x_e)

△ 当A是奇异矩阵时具有无穷多个平衡状态，A是非奇异矩阵时具有唯一位于状态空间原点的解

(二) Lyapunov 意义下的稳定性

(三) 渐近稳定性(经典控制理论中的稳定性定义)

不仅具有 Lyapunov 稳定性，且有 $\lim_{t\to\infty} \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| = 0$

当极限过程与初始时间 t_0 无关时，称为一致稳定性

(四)(全局)大范围渐近稳定性

当极限过程与初始位置 x_0 无关时，- - - -

注：对于线性定常系统而言，所有平衡点稳定性相同，故只研究零点即可

对于线性定常系统，一个系统渐近稳定，则它一定大范围稳定

二、Lyapunov 第一法(间接法)

定理1：对于线性定常系统，$\dot{x}=Ax$，$x(0)=x_0$，$t\geq 0$，系统在唯一平衡状态 $x_e=0$ 是渐近稳定的充分必要条件是A的所有特征根具有负实部

$|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow$ 特征根

三、Lyapunov 第二法(直接法)

(一) 构造能量函数 $V(x)$，$V(x)>0$ 因此为正定函数，常用二次型 $x^T P x$，P是实对称矩阵

1、正定性：除了原点外任意点有 $f(x)>0$ 且 $f(0)=0$

2、半正定性：除了原点和若干点满足 $f(x)=0$ 外，任意点有 $f(x)>0$

(二) 大范围渐近稳定性判别定理1　$\dot{V}(x)<0$ 指能量衰减

$V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负定，则原点渐近稳定，进而若 $\|x\|\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$，则全局渐近稳定

(三) 大范围渐近稳定性判别定理2

$V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 半负定 则原点稳定，进而若 $\dot{V}(x)$ 除原点外轨迹不恒为0，原点渐近稳定

进而若 $V(x)$ 在 $x\to\infty$ 时 $V(x)\to\infty$，则原点全局渐近稳定

(四) 不稳定判别定理：$V(x)$ 和 $\dot{V}(x)$ 都正定

四、线性定常系统的稳定性判别

1、状态方程 $\dot{x}=Ax$，取二次型 $V(x)=x^TPx$

$\dot{V}(x)=x^T(A^TP+PA)x=-x^TQx$

定义 $Q=-(A^TP+PA)$　　△ 由定理知 Q 是正定时，即 $\dot{V}(x)$ 负定时，原点渐近稳定

2、定理：

线性定常系统原点稳定的充要条件：对任意正定矩阵 Q，有唯一正定 P 使 $A^TP+PA=-Q$

常取 Q 为单位阵 I

五、线性定常离散系统

系统：$x(k+1)=\Phi x(k)$　$(x(0)=x_0)$　Φ 是非奇异矩阵

充要条件：

① Φ 的所有特征值模小于 1

② 离散的 Lyaponuv 方程：$\Phi^TP\Phi-P=-Q$，P 是正定矩阵

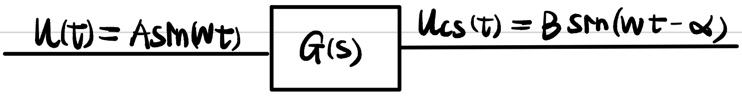
阶段性作业整理

第五章 线性系统的频域分析法（讨论幅值和相角随频率的变化关系）

5.1 频率特性的表示形式和几何表示法

引入：正弦输入RC系统时系统的输出

△ 不能用终值定理和静态误差系数法



$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$

1、振幅比 $|G(j\omega)|=\frac{B}{A}$

2、相位差 $\angle G(j\omega)=-\alpha=-\arctan(\omega T)$

3、频率特性的定义：

(1) 物理意义：$G(j\omega)=|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$

幅频特性为 $|G(j\omega)|=\left(\sqrt{1+\omega^2T^2}\right)^{-1}$

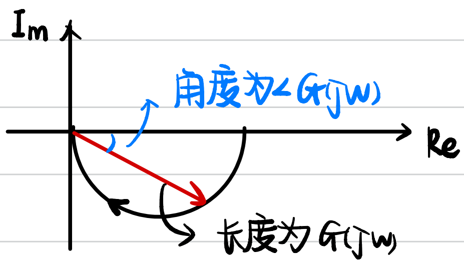
相频特性为 $\angle G(j\omega)=\underbrace{\angle C_s(t)}_{\text{输出相角}}-\underbrace{\angle r(t)}_{\text{输入相角}}=-\arctan(\omega T)$

(2) 数学定义：$G(j\omega)=G(s)|_{s=j\omega}$

$G(j\omega)=\frac{1}{Ts+1}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1+j\omega T}$

△ 说明：频率特性由稳态分量确定，但体现的是动态特性

一、几何表示法：幅相频率特性Nyquist图



① $KG(s)$ 的幅相频率特性：幅值变为K倍相角不变

② 点到原点的距离，对应了幅度$|G(j\omega)|$

二、波特图

1、对数幅频

$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|$

$KG(j\omega)\rightarrow 20\lg|KG(j\omega)|=20\lg|G(j\omega)|+20\lg|K|$ 平移

$20\lg|G_1(j\omega)\cdot G_2(j\omega)|=20\lg|G_1(\omega)|+20\lg|G_2(\omega)|$

2、相频特性

$\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)$

5.2 典型环节的频率特性图

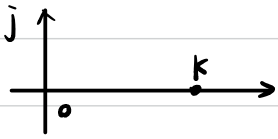
一、最小相位环节

1、定义：幅频特性相同的系统，其中相位变化较小的称为···

2、最小相位环节没有位于右半平面的零极点，也没有延迟环节

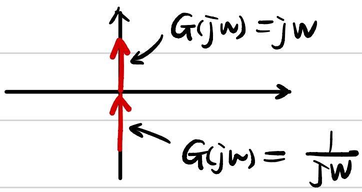
二、典型环节的幅相频率特性

(1) 比例环节 $G(s)=K$

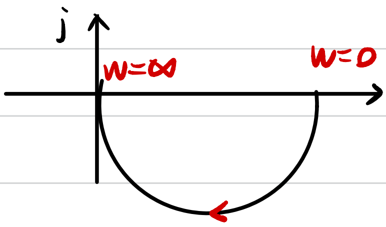


一个点

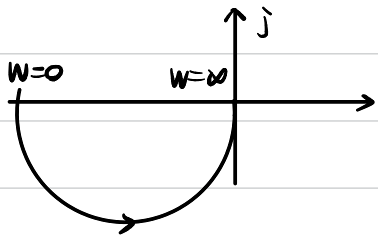
(2) 微分环节 $G(s)=s$　　积分环节 $G(s)=s^{-1}$



(3) 惯性环节 $G(s)=\frac{1}{Ts+1}$



(4) 不稳定惯性环节 $G(s)=\frac{1}{Ts-1}$



$$\angle G=-\arctan\frac{wT}{-1}$$
$$=-(180^\circ-\arctan wT)$$

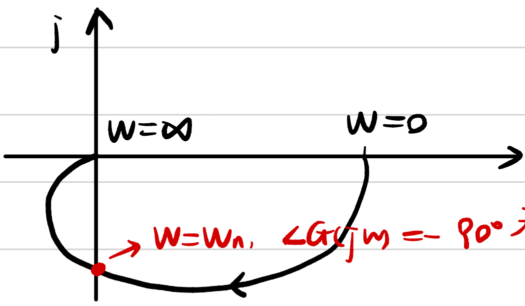
(5) 一阶微分 $G(s)=Ts+1$

$\angle G=\arctan wT$

$\Delta G(s)=Ts-1$，$\angle G(jw)=180^\circ-\arctan wT$

(6) 振荡环节

$$G(s)=\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}=\frac{w_n^2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$$



$w=w_n$，$\angle G(jw)=-90^\circ$ 称为转折点

$$\Rightarrow G(jw)=\frac{1}{1-\frac{w^2}{w_n^2}+j2\zeta\frac{w}{w_n}}$$

$$|G(jw)|=\left(\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{w}{w_n}\right)^2}\right)^{-1}$$

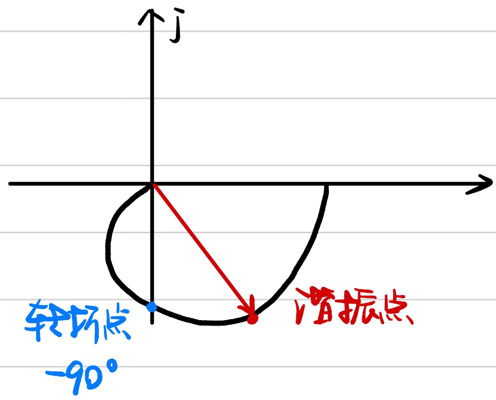
$$\angle G=\begin{cases}-\arctan\dfrac{2\zeta\frac{w}{w_n}}{1-\frac{w^2}{w_n^2}} & w<w_n \text{ 时}\\ -90^\circ & w=w_n \text{ 时}\\ -180^\circ+\arctan\cdots & w>w_n \text{ 时}\end{cases}$$

振荡环节的谐振现象

① 幅值的最大值点称为谐振点（点到原点的距离最大）

对应频率为 $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

对应峰值为 $M_r = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$



② N曲线与虚轴交点称为转折点

对应频率为 $\omega = \omega_n$

对应峰值为 $|G(j\omega)| = 1/2\xi$

对应相角为 $\angle G(j\omega) = -90°$

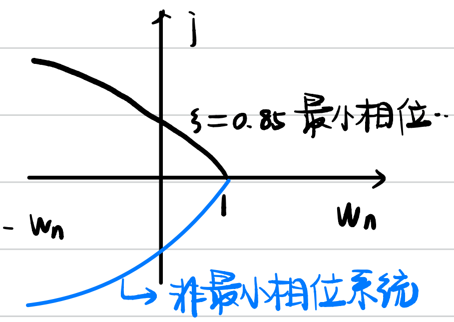
③ 存在的条件： $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$　　$\cos\theta = \xi$

(a) $\xi > \sqrt{2}/2$ 即 $\theta < 45°$ 时 不存在 ω_r

(b) $\xi = \sqrt{2}/2$ 即 $\theta = 45°$ 时 $\omega_r = 0$，$M_r = 1$

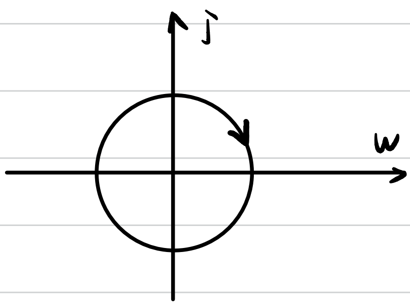
(c) ··

(7) 二阶微分　$G(s) = T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$



ξ越小，曲线越接近实轴

(8) 延迟环节　$G(s) = e^{-\tau s}$　将时域信号延迟时间 τ



是非最小相位系统

三、根据开环传递函数求 Nquist 图

起点：　$K\angle 0^\circ$　　$\infty\angle -90^\circ v$　（$v>0$ 时）

终点：　$0\angle -90^\circ(n-m)$　　（$n>m$ 时）

四、波特图

(一) 坐标特点：　$20\lg|G(j\omega)|$

1、dec：十倍频程，代表两个相差十倍的 w 间距离（3cm）

2、变量是 w，但用 $\lg w$ 刻度

3、20dB（1cm）　90°（1cm）

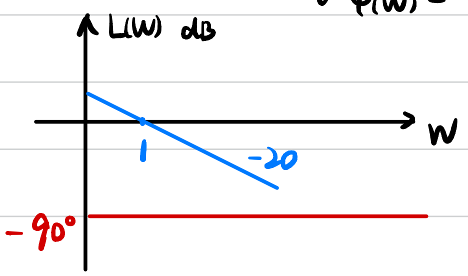
(二) 典型环节的波特图

(1) 比例环节：
$$\begin{cases} L = 20\lg K \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

(2) 微分环节
$$\begin{cases} L(w) = 20\boxed{\lg w} \\ \varphi(w) = 90^\circ \end{cases}$$

图象以 $\lg w$ 刻度，但变量为 w

(3) 积分环节
$$\begin{cases} L(w) = -20\lg w \\ \varphi(w) = -90^\circ \end{cases}$$



(4) 惯性环节 $G(jw)=\frac{1}{1+jwT}$

$L(w)=-20\lg\sqrt{1+(wT)^2}$ ⇒ 斜率为 $-20dB$/十倍频

$\angle G(w)=-\arctan wT$

① 在 $w=\frac{1}{T}$ 时, $L(w)=-3dB$, 此处简化误差最大

② 在 $w=\frac{1}{T}$ 时, $\angle G(w)=-45°$

(5) 一阶微分 $G(jw)=1+jwT$ 与惯性环节关于w对称

(6) 二阶环节 $G(jw)=\left[1-(\frac{w}{w_n})^2+2j\xi\frac{w}{w_n}\right]^{-1}$

$L(w)=-20\lg\sqrt{(1-\frac{w}{w_n})^2+(2\xi\frac{w}{w_n})^2}$

$\angle G(jw)=-\arctan\left[2\xi\frac{w}{w_n}/(1-\frac{w}{w_n})\right]$

① 谐振频率

$w_r=w_n\sqrt{1-2\xi^2}$

在 $\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时才会有 w_r

(7) 二阶微分 $G(jw)=\cdots$ 与二阶环节关于w轴对称

(8) 延迟环节 $G(s)=e^{-\tau s}$

$L(w)=20\lg 1=0$

$\angle G(jw)=\underbrace{-57.3°}_{\text{弧度转角度}}\times\tau w$

△ 相角最终趋近于 $-90°(n-m)$

最右端的斜率为 $-20°(n-m)$

只给幅频特性

Nyquist 稳定性判据（频域稳定性判据）

引理：幅角定理

复平面一条不经过零极点的封合曲线，包含 Z 个零点 P 个极点

当 s 沿曲线顺时针转一圈时，对应映射曲线 |F(s)| 绕平面原点转 $R=P-Z$ 圈（逆时针）

一、辅助函数 F(s)

设 GH(s) 是系统的开环传函，则取 $F(s)=1+GH(s)$

1、F(s) 的极点是开环极点

2、F(s) 的零点是闭环极点

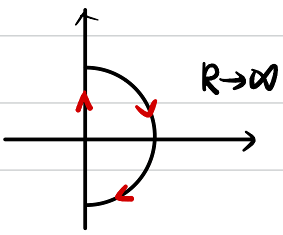
3、$F(j\omega)=1+G(j\omega)H(j\omega)$

△ $F(j\omega)$ 绕原点 $R=P-Z$ 圈，相当于 $G(j\omega)H(j\omega)$ 在全频段转 $(-1, j0)$ 转 R 圈

二、Nyquist 稳定性判据

1、$Z=P-R$ 是闭环不稳定极点的数量

Γ_s



$Z=P-R$

P ↓ 开环极点

R → Nyquist 曲线绕 (-1, 0) 逆时针圈数的2倍 $(0\to\infty)$

2、Nyquist 稳定性判据 $Z=P-2N$

Z：右半平面闭环极点

P：

N：

三、Nyquist 图和波特图的对应关系

1、Nyquist 单位圆对应 0dB 线，圆外对应线上，圆内对应线下

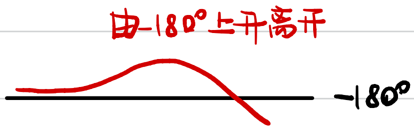
△ Nyquist 曲线与负实轴交点在 $(-1, j0)$ 左侧时对应 Bode 图在 0dB 以上

2、负实轴和相频曲线 -180° 对应

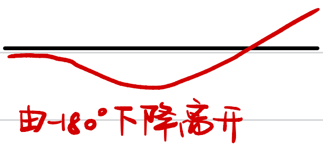
3、$(-1, j0)$ 左侧负实轴对应 ① $L(\omega)>0$ ② 相频 -180°

四、对数稳定性判据

$Z = P - 2N$ 其中 $N = N^+ - N^-$ 正穿越 − 负穿越



$N^+ = 0.5$ $N^- = 1$



$N^+ = 1$ $N^- = 0.5$

注：1、有积分环节时补充 Nyquist 曲线上的大圆，$\theta = 90^\circ \cdot \nu$

五、非最小相位系统

考虑穿越 $(2k+1)\pi$ 的次数

第一章 基本概念

第二章 控制系统的数学模型

- 线性时不变系统
  - 输入输出模型
    - 微分方程
    - 传递函数
    - 方框图
  - 状态空间模型

一、微分方程

(一) 定义：$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty j}^{\sigma+\infty j}F(s)e^{st}\,ds$$

(二) 性质：

1、时移：$\mathcal{L}(f(t-t_0))=F(s)\cdot e^{-t_0 s}$

2、相移：$\mathcal{L}[e^{At}f(t)]=F(S-A)$

3、微分：① $\mathcal{L}[f'(t)]=sf(s)-f(0)$

② $\mathcal{L}[f''(t)]=s^2f(s)-sf(0)-f'(0)$

4、积分：略

4、初值定理 $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sf(s)$

5、终值定理：$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sf(s)$

△注意：当终值存在时才能用

(三) 常用变换

	$f(t)$	$F(s)$
	$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
	t	$1/s^2$
	t^2	$2!/s^3$
	1	$1/s$
	t^n	$n!/s^{n+1}$
	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

△题型 使用 Laplace 变换解微分方程

注：①注意初值条件

eg：$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y=2+t$

$\stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}$ $sY(s)-y(0)+\frac{1}{2}Y(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}$

即 $Y(s)=y(0)\cdot(\frac{1}{2}+s)^{-1}+\frac{1}{s^2}$

$\Rightarrow y(t)=y(0)e^{-\frac{1}{2}t}+t$

②Laplace 反变换

△留数法有应用条件，应该用待定系数法

二、传递函数G(s)

(一) G(s)和单位脉冲响应

时域： 复频域

单位冲激响应 $\xrightarrow{\text{Laplace}}$ SF(s)

求导 ↑↓ 积分 ↑

单位阶跃响应 $\xrightarrow{\sim}$ F(s)

(二) 典型环节

1、比例： $G(s) = K$

2、积分： $G(s) = \frac{1}{Ts}$

3、微分： $G(s) = Ts$

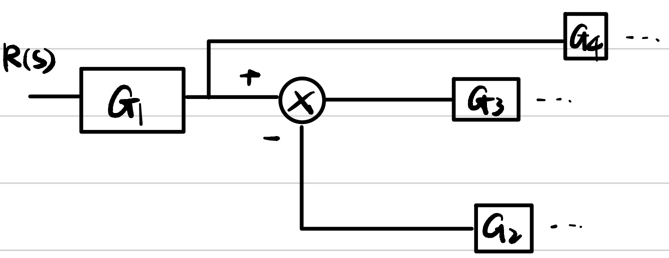
4、一阶惯性： $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

5、振荡环节： $G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2w_n \zeta s + w_n^2}$

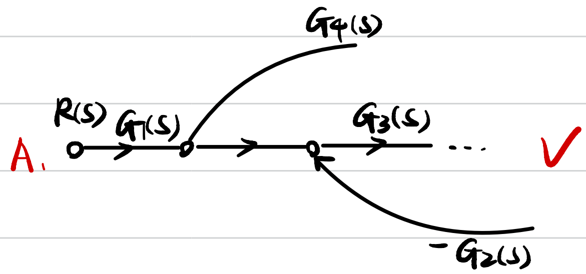
三、方框图、信号流图

△题型：由方框图求信号流图

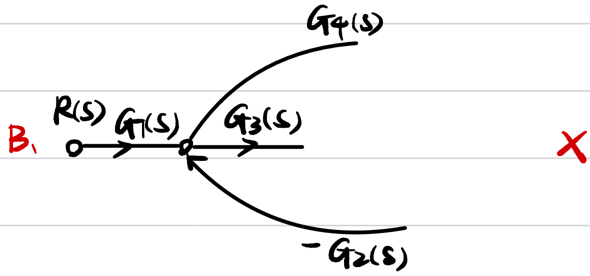
1、信号流图的引出点对应的信号应单独列出



⇒



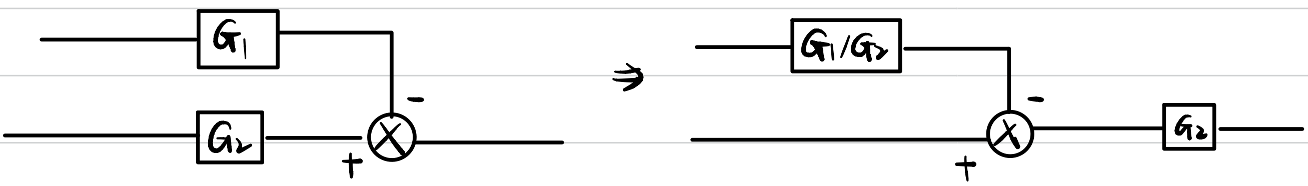
2、反馈记得加符号



△题型：化简方框图

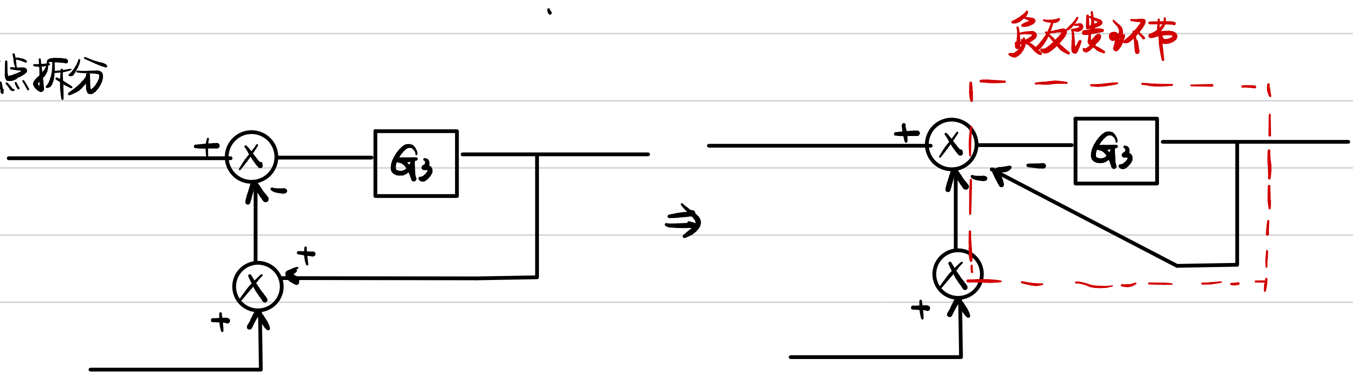
1、原则：先化简相邻的比较点/引出点，只有比较点和相邻点交替排列时才考虑分离

eg：相加点前移，除，相加点后移，乘



⋮

2、比较点拆分



△题型：利用梅森公式求P

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum P_K\Delta_K$$

1、数回路个数 ① 从反馈开始处走路径

② 前馈处没有闭环

$$\Delta = 1-\sum L_a+\sum L_aL_b-\sum L_aL_bL_c+\cdots$$

互不接触两回路增益积

2、数前向通路个数

$P_i=$ 前向增益　　$\Delta_i=$ 与前向通路所有不接触回路列写 Δ

求从干扰为输入的P：① 注意是否引入新回路　② 是否引入新前向通路

四、状态空间模型

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$$

A：状态矩阵　B：输入矩阵

C：输出矩阵　D：前馈矩阵

△题型：根据实际物理系统选取状态变量并写状态空间表达式

利用力学和运动学公式建立微分方程，选取一阶导或位移作为状态变量（个数任意）

△题型：由状态空间模型得到传递函数

Laplace ⇒ $\begin{cases}SX(S)=AX(S)+BU(S)\\ Y(S)=CX(S)+DU(S)\end{cases}$

得：$X(S)=(SI-A)^{-1}BU(S)$

$\Rightarrow Y(S)/U(S)=C(SI-A)^{-1}B+D$

即 $G(S)=C(SI-A)^{-1}B+D$

△题型：由传递函数求状态空间模型

A、分子为常数，分母多项式

eg: $G(s) = \dfrac{8}{s^3+7s^2+14s+8} = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

①交叉相乘取反变换：　$y'''(t)+7y''(s)+14y'(t)+8y(t)=8u(t)$

②取n-1个状态变量：　x_3　x_2　x_1

有：
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-14&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

③　$y = [1\ 0\ 0][x_1\ x_2\ x_3]^T$

B、分子为m次多项式，分母是m次多项式

eg: $G(s) = \dfrac{s^2+2s+5}{s^3+2s^2+5s+10}$

①用中间变量替代从而消去分子效应

令 $\dfrac{X(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^3+2s^2+5s+10}$　　则有 $Y(s) = X(s)\cdot(s^2+2s+5)$ ①

②沿用A情况：令 $x_1 = x(t)$　$x_2 = x'(t)$　$x_3 = x''(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-10&-5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

③对①使用反变换：

$y(t) = x''(t) + 2x'(t) + 5x(t)$

即：$y = [5\ \ 2\ \ 1][x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T$

C. 由部分分式求（无重根）

$$G(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s-2}+\frac{3}{s-4}$$

① 设 $X_i=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s)$

设 $X_1(s)=\frac{1}{s-1}U(s)$ $X_2(s)=\frac{1}{s-2}U(s)$ $X_3(s)=\frac{1}{s-4}U(s)$

② $Y(s)=X_1(s)+2X_2(s)+3X_3(s)$

$\Rightarrow y=[1\ \ 2\ \ 3][x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T$

③ 移位，反变换：$sX_i(s)=\lambda_i X_i(s)+U(s)$

$x_i'(t)=\lambda_i x_i(t)+u(t)$

从而有：$x_1'(t)=x_1(t)+u(t)$

$x_2'(t)=2x_2(t)+u(t)$

$x_3'(t)=4x_3(t)+u(t)$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\x_3'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u(t)$$

D. 由分部分式求（有重根）

eg：$G(s)=\frac{4}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{(s-1)}+\frac{13}{(s-4)}$

① 对于非重根：设 $X_1(s)=\frac{1}{s-4}U(s)$

$X_2(s)=\frac{1}{s-1}U(s)$

对于重根：设 $X_3(s)=\frac{1}{s-1}X_2(s)$

$X_4(s)=\frac{1}{s-1}X_3(s)$

② $y(t)=4x_4(t)+2x_3(t)+x_2(t)+13x_1(t)$

③
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

离散系统 $\begin{cases} \text{输入输出模型} \begin{cases} \text{差分方程} \\ \text{脉冲传函} \end{cases} \\ \text{状态空间模型} \end{cases}$

傅里叶变换 $\begin{cases} \text{离散} \\ \text{连续} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{拓展}}$ $\begin{matrix} \text{Z变换} \\ \text{拉氏变换} \end{matrix}$

一、Z变换

1、定义：$Z(x(n)) = x(0) + x(1)Z^{-1} + \cdots + x(n)Z^{-n}$

2、性质： 移位性质 $\begin{cases} Z[x(t-nT)] = Z^{-n}X(Z) \\ Z[x(t+nT)] = Z^{n}[X(Z) - \sum_{k=0}^{n-1} X(kT)\cdot Z^{-k}] \end{cases}$

3、Z变换公式表 $x(t) \xrightarrow[\text{Z变换}]{t=kT\text{采样}} X(Z)$

e^{-at} $\quad \dfrac{Z}{Z-e^{-aT}}$

t $\quad \dfrac{TZ}{(Z-1)^2}$

1 $\quad \dfrac{TZ}{(Z-1)}$

a^t $\quad \dfrac{Z}{Z-a}$

二、Z反变换和 $x(t)$，$x^*(t)$ 间关系

1、已知原信号 $x(t) \xrightarrow{\text{以T周期采样}} x(kT) \xrightarrow{\text{Z变换}} X(Z)$

已知原信号 $x(n) \xrightarrow{\text{Z变换}} X(Z)$

eg：$x(t) = t \ (t\geq 0)$

$Z(x(t)) = Z(x(kT)) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)\cdot Z^{-k}$

$\dfrac{X(Z)}{-Z} = T(\sum(-k)Z^{-k-1}) = T(\sum Z^{-k})'$

$= \cdots\cdots$

2、已知Z变换后信号 $G(Z) \xrightarrow{\text{Z反变换}} x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$

※求反变换应先得到 $X(kT)$，再外加求和符号拓展

三、差分方程

△题型：使用Z变换解差分方程

1、$Z[x(k+n)] = z^n\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} \cdot x(k)\right]$　※初值条件

① $Z[x(k+2)] = z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$

② $Z[x(k+1)] = z[X(z) - x(0)z^0]$

2、Z反变换后应写成 $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$ 的形式

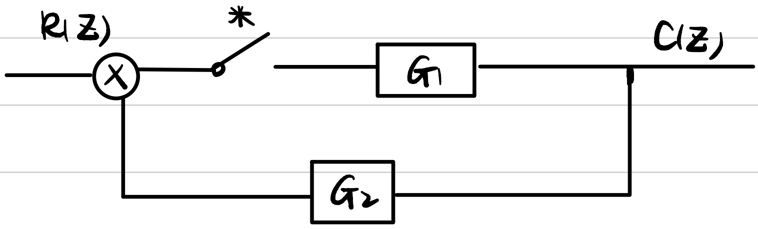
四、脉冲传函

△题型：根据框图写系统传函

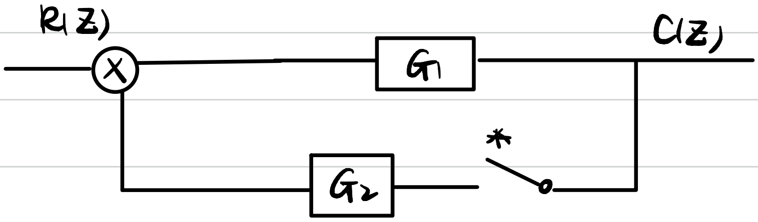
※取决于环节间是否有采样开关

若误差处没有采样开关，则不能写出脉冲传函

eg:



$\Rightarrow \Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}$



$\Rightarrow C(z) = \frac{RG_1(z)}{1+G_1G_2(z)}$　不可分离R(z)

△题型：差分方程和离散状态方程间相互转化

与连续系统类似

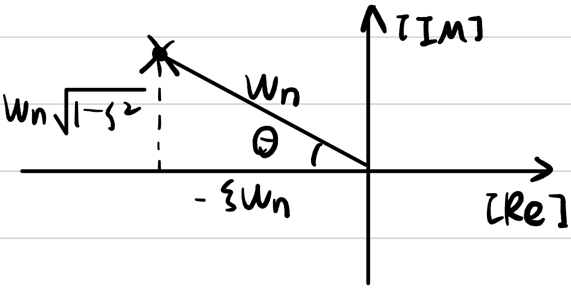
$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

第三章 系统的响应和分析 [基于传函]

一、二阶系统无零点阶跃响应

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$　　闭环传函 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n\xi+\omega_n^2}$

根为: $s=-\xi\omega_n\pm\sqrt{\xi^2-1}\cdot\omega_n$



1、欠阻尼: 动态性能指标 $(0<\xi<1)$

① 超调量: $\sigma\%=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%$

② 峰值时间: 第一次到达最大值的时间 $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

③ 调节时间: $T_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}$ (2%)

$T_s=\dfrac{3}{\xi\omega_n}$ (5%)

④ 上升时间: $T_r=\dfrac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$　　其中 $\varphi=\arccos\xi$

2、临界阻尼　$(\xi=1)$　等幅振荡

3、过阻尼　$(\xi>1)$　不振荡

4、负阻尼　$(\xi<0)$　发散振荡

二、二阶有零点系统阶跃响应

1、零点加入方式: $G(s)=\dfrac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\omega_n\xi s+\omega_n^2}=\dfrac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2+2\omega_n\xi s+\omega_n^2)}$　即 $\tau=\dfrac{1}{z}$

eg: 加入右侧平面零点 $z=1$ ⇒ $G(s)=\dfrac{\omega_n^2(s-1)}{(-1)(s^2+2\omega_n\xi s+\omega_n^2)}$

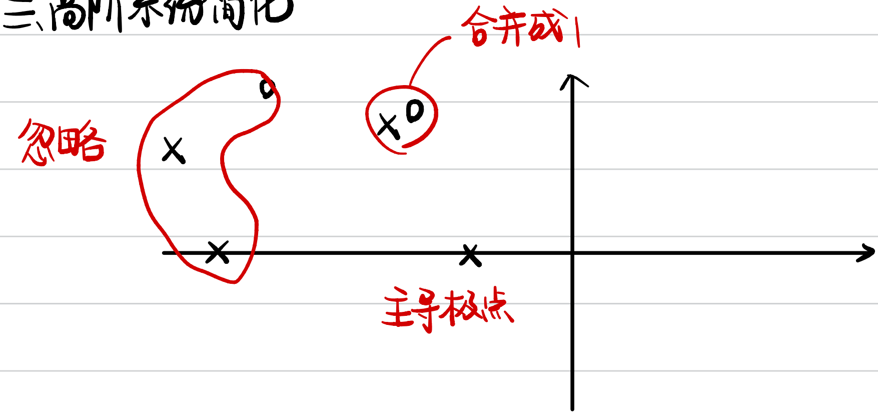
2、动态性能指标: 引入 $l=\sqrt{z^2-2\xi\omega_n z+\omega_n^2}$　　$\psi=\arctan\left(\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{z-\xi\omega_n}\right)$

① $\sigma\%=\boxed{\frac{l}{z}e^{\frac{\psi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}\cdot e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%$

② $t_p=\dfrac{\pi-\psi}{\sqrt{1-\xi^2}\cdot\omega_n}$　　③ $t_r=\dfrac{\pi-\varphi-\psi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$　　$\varphi=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

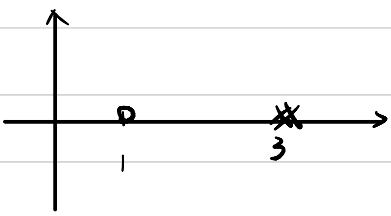
④ $t_s=\dfrac{3}{\xi\omega_n}-\dfrac{1}{\xi\omega_n}\ln\dfrac{l}{z}$　　$t_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}-\dfrac{1}{\xi\omega_n}\ln\dfrac{l}{z}$

三、高阶系统简化



四、离散系统

※加零点问题:



$$\Rightarrow G(s)=\frac{K(-s+1)}{(-s/3+1)^2}$$

便用尾1加入零点

第三章 系统时域响应分析【基于状态空间】

连续

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

一、解方程：Laplace 变换

$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$

$\Rightarrow \quad X(s) = (sI-A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$

二、零输入响应：$u(t)=0$ 即 $\dot{x}(t) = Ax(t)$

令 $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$，称为指数矩阵

三、系统转移矩阵 $\Phi(t) = e^{At}$

定义：$x(t) = \Phi(t)\cdot x(t_0)$

△题型：求系统的转移矩阵 $\Phi(t) = e^{At}$

① $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

② 特征值分解法

△题型：求连续系统的输出（已知A，B）

$X(s) = (sI-A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$

$\downarrow$ 拉氏逆变换

$x(t)$

离散

$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$

$y(k+1) = Cx(k) + Du(k)$

一、解方程：Z变换

$zX(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z)$

$\Rightarrow \quad X(z) = (zI-G)^{-1}[zx(0) + HU(z)]$

二、对应关系：$\begin{cases} G = e^{AT} \\ H = \left(\int_0^T e^{At}dt\right)B \end{cases}$

△题型：系统离散方程

$G = e^{AT} \qquad H = \left(\int_0^T e^{At}dt\right)B$

$\Rightarrow y(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$

△题型：求离散系统输出（已知A，B）

①由 A，B 求G，H

② $x(k) = (zI-G)^{-1}[zx(0) + HU(z)]$

$\downarrow$ Z逆变换

$x(kT)$

系统的稳定性：Routh判据

一、LTI系统

1、充要条件：系统的所有闭环极点位于虚轴左侧

2、必要条件：特征方程所有系数大于0

3、Routh判据

① 首项为0其余不为0行：不稳定

利用 $\varepsilon>0$ 代替0，正常列写，再令 $\varepsilon\to0$，观察变号次数⇒确定极点个数

② 全零行：临界稳定

利用上一行构造特征方程 $\xrightarrow{求导}$ 系数作为下一行系数

→ 解为一对复数根 ⟶ 虚部对应振荡频率

③ 求位于 $s=-1$ 右侧极点个数：用 $s=z-1$ 替代原方程

④ ※计算顺序

$$\begin{array}{llll} s^3 & a & b & c \\ s^2 & d & e & f \\ s & \bigcirc & & \\ 1 & & & \end{array} \qquad \bigcirc = \frac{cd-af}{d}$$

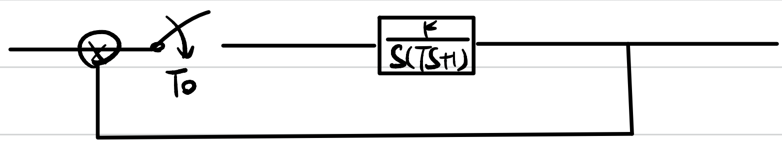
二、离散系统的Routh判据

1、充要条件：闭环脉冲传函所有极点位于单位圆内

2、Routh判据：

① 对 $G(s)$ 进行Z变换获得 $G(z)$　△注意采样周期 T_0

eg:



$$G(z)=ZG(s)=K\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T_0/T}}\right)$$

② 利用 $z=\frac{w+1}{w-1}$ 进行映射

③ 同线性系统

④ 对于同一个框图，连续和离散系统稳定性没有联系

3、增益和采样周期对离散系统稳定性的影响：K大T大稳定性差

小结：计算系统误差　**先判断稳定性**

一、连续系统的误差

(一) 基本方法

1、判断系统的稳定性

使用劳斯判据判断稳定性 ⇒ 先算闭环传递函数，再得到特征方程

※ 开环传函应整理成 " $ks+1$ " 的形式，从而得到系统的型别和开环增益的 K

2、得到误差传递函数 Φ_{ef}

①对于单位反馈系统，若其开环传递函数为 $G(s)$，则 $\Phi_{ef}=\frac{1}{1+G(s)}$

②对于一般的系统，列出 $Y(s)$，$E(s)$，$R(s)$ 关系式，再利用 $E(s)=R(s)-Y(s)$ 消元

3、判断使用终值定理的条件

$\lim\limits_{s\to0} sE(s)$ 的所有极点都位于坐标系的左半平面（包括坐标原点）

4、利用终值定理得到稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}\cdot s\Phi_{ef}\cdot F(s)=\lim_{s\to0} sE(s)$$

(二) 静态误差系数法

1、判断系统的稳定性

使用劳斯判据判断稳定性 ⇒ 先算闭环传递函数，再得到特征方程

2、系统对于输入的响应误差

$e(t)$	$E(s)$	误差	0	I	II
$A(t)$	A/S		$\frac{A}{1+K_p}$	0	0
At	A/S^2		∞	$\frac{A}{K_v}$	0
$\frac{1}{2}At^2$	A/S^3		∞	∞	$\frac{A}{K_H}$

$K_p=\lim\limits_{s\to0} G(s)$

$K_v=\lim\limits_{s\to0} sG(s)$

$K_a=\lim\limits_{s\to0} s^2G(s)$

注：①输入信号为 $e(t)=t^2$ 时，$A=2$

②将开环传函整理为标准形式后，分子的开环增益即为 K_p / K_v / K_a

二、离散系统的稳态误差

△ 采样开关在 $E(s)$ 处才能讨论稳态误差

(一) 一般方法

1、利用开环传函 $G(s)$ 做 Z 变换得到 $G(Z)$ (与采样时间有关)

①

$G(s)$	$g(t)$	$G(Z)$
$1/s$	$u(t)$	$\frac{Z}{Z-1}$
$1/s^2$	$1/t$	$\frac{TZ}{(Z-1)^2}$
$2/s^3$	$1/t^2$	$\frac{T^2Z(Z+1)}{(Z-1)^3}$

② 时移性质：$\begin{cases} \mathcal{L}(e(t-t_0)) = e^{-St_0}E(s) \\ Z(x(n-m)) = e^{-m}X(Z) \end{cases}$

※ eg: $T=0.25$, $G(s) = \frac{2e^{-0.5s}}{s^2}$ 求 $G(Z)$

$g(t) = \frac{1}{(t-0.5)} \xrightarrow[n延迟2点]{t延时0.5s} g(n) = \frac{1}{n-2}$

$G(Z) = Z^{-2} \cdot \frac{Z}{(Z-1)^2}$

③ 零阶保持器

$G(s) = \frac{1-e^{-nTs}}{s}$

性质：$Z(G(s)H(s)) = (1-Z^{-n}) \cdot Z \cdot \left(\frac{H(s)}{s}\right)$

2、利用终值定理计算

对于单位反馈系统，$\Phi_{ef}(Z) = \frac{1}{1+G(Z)}$

$e_{ss} = \lim_{Z \to 1} (Z-1) \cdot \Phi_{ef}(Z) \cdot F(Z)$

(二) 静态误差系数法

1、判断系统的稳定性

得到特征方程，利用 $Z = \frac{W+1}{W-1}$ 替换，再用劳斯判据

2、由 $G(s)$ 得到 $G(Z)$，从而得到系统的型别和开环增益

$Z-1$ 的次数即为系统型数

3、系统的误差响应 (与采样周期有关)

输入 $r(t)$	0	I	II
A	$\frac{A}{1+K_p}$	0	0
At	∞	$\frac{AT}{K_v}$	0
$\frac{1}{2}At^2$	∞	∞	$\frac{AT^2}{K_a}$

$K_p = \lim_{Z \to 1} G(Z)$

$K_v = \lim_{Z \to 1} (Z-1)G(Z)$

$K_a = \lim_{Z \to 1} (Z-1)^2 G(Z)$

补：动态误差系数法

[连续系统]

$$e_{ss}(t) = C(0) + C(1)r'(t) + C(2)r''(t) + \cdots$$

其中 $C(n)$ 用长除法得到

eg: $G(s) = \dfrac{100}{s(0.1s+1)}$ $\quad r(t) = 1(t) + 2t + t^2$，求 $e_{ss}(t)$

解：误差传函为 $\Phi_e(s) = \dfrac{s(0.1s+1)}{s(0.1s+1)+100}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.01s + 0.0009s^2 + \cdots \\ \hline 100+s+0.1s^2 & s + 0.1s^2 \\ & \underline{s + 0.01s^2 + 0.001s^3} \\ & \quad 0.09s^2 - 0.001s^3 \\ & \quad \underline{0.09s^2 + 0.0009s^3 + 0.00009s^4} \\ & \qquad\qquad 0.0001s^3 - 0.00009s^4 \end{array}$$

即 $C(0) = 0 \quad C(1) = 0.01 \quad C(2) = 0.0009$

$\Rightarrow e_{ss} = 0 \cdot r(t) + 0.01 \cdot (2+2t) + 0.0009 \times 2 = 0.0218 + 0.02t$

[离散系统]

$$e_{ss}(kT) = C_0 \cdot r(kT) + C_1 r'(kT) + C_2 r''(kT) + \cdots$$

其中：$C_n = \dfrac{1}{n!} \dfrac{d^n \Phi_e^*}{dt^n}(s) \Big|_{s=0}$

eg: 误差传函 $\Phi_e(z) = \dfrac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 - z + 0.632}$，$r(t) = \frac{1}{2}t^2$

$$\Phi_e^*(s) = \Phi_e(z)\big|_{z=e^{Ts}} = \frac{e^{2Ts} - 1.368e^{Ts} + 0.368}{e^{2Ts} - e^{Ts} + 0.632} \quad (T=1)$$

$C(0) = \Phi_e^*(s)\big|_{s=0} = 0$

$C(1) = (\Phi_e^*(s))'\big|_{s=0} = 1$ $\qquad \Rightarrow e_{ss}(kT) = 0 \cdot r(kT) + r'(kT) + \frac{1}{2}r''(kT)$

$C(2) = \frac{1}{2!}(\Phi_e^*(s))''\big|_{s=0} = \frac{1}{2}$ $\qquad = kT + 0.5$

小结:根轨迹的画法

一、基本规律(设有m个开环极点,n个开环零点)

(一) 共有 $m-n$ 条根轨迹终结于无穷处

(二) 根轨迹开始于极点终止于零点

(三) 实轴上奇数零极点和偶数零极点间是根轨迹

△ 由相位规律推导得到,当系统是单位正反馈时规律相反

(四) 分支数:开环极点的数目

(五) 根之和:实轴上根之和不变 $(n-m\geq 2)$

△ 开环根之和始终不变,但当 $n-m\geq 2$ 时,闭环根之和 = 开环根之和 = 常数

(六) 渐近线

$$\sigma = \frac{\text{所有极点和} - \text{所有零点和}}{n-m}$$

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$ 一般取 $k=0,-1$

△ 由相位规律推导得到,当系统是单位正反馈时 $\alpha = \frac{2k\pi}{n-m}$ 一般取 $k=0$

(七) 与虚轴交点

利用 $D(jw)=0$ 得到实部为0虚部为0两个方程 ⇒ 得到 k 和 w

(八) 分离点

① $\sum \frac{1}{d-p_i} = \sum \frac{1}{d-z_j}$ 当没有零点时,右侧为0 将分离点代入 $D(s)$ 得到 K

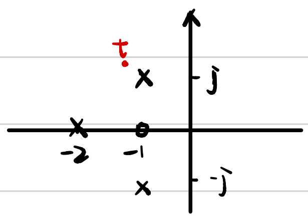
② $d(D(s))/ds = 0$ 当分母仅有 k 时适用

(九) 出射/入射角

取目标极点附近一个点 ⇒ $\sum \angle(s-z_j) - \sum \angle(s-p_j) = (2k+1)\pi$

其中角度是从其它点看这个点

eg:



$90° - (\theta + 45° + 90°) = -180°$

$\Rightarrow \theta = 135°$

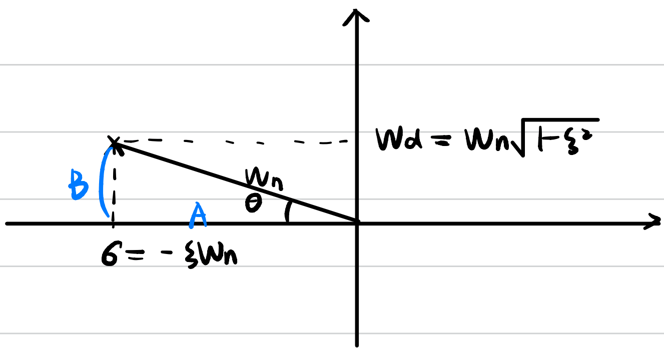
定理:若仅有两个极点和一个零点,则根轨迹一定是以零点为圆心的圆

二、根轨迹和系统性质关系

1、二阶系统的根

$$\phi(s)=\frac{W_n^2}{s^2+2W_n\xi s+W_n^2} \Rightarrow S_{1,2}=-\xi W_n \pm W_n\sqrt{\xi^2-1}$$

讨论欠阻尼时有：$\xi\in(0,1)$



2、动态指标

① 峰值时间 $t_p=\frac{\pi}{W_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{B}$

② 超调量 $\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-\cot\theta\cdot\pi}$

③ 调节时间 $\begin{cases} t_s=\frac{3}{\xi W_n} \ (\Delta=0.05)=\frac{3}{A} \\ t_s=\frac{4}{\xi W_n} \ (\Delta=0.02)=\frac{4}{A}\end{cases}$

3、系统性质与根位置的关系

① 无超调量：实轴上根轨迹

② 具有欠阻尼特性：S平面除实轴上的部分

4、利用根之和求系统特定值时的K $(n-m\geq 2)$

① 使用根之和得到 $-2\xi W_n+Root=Const$

$\Rightarrow Root=C+2\xi W_n$

② 闭环改写成

$$\frac{1}{(S^2+2\xi W_n s+W_n^2)(S-Root)}=0$$

③ $D(s)=(S^2+2\xi W_n S+W_n^2)(S-Root)$

对应项相等 $\Rightarrow W_n$

eg：PPT 13-2 P21题

三、零度根轨迹（单位正反馈）

改变：渐近线的角度 $\theta=\frac{2k\pi}{n-m}$，由于是射线，最终走向会改变

入射角和出射角 $\angle z-\angle p=2k\pi$，由于出发点和相角条件变化，出发点和出射角都变

Lyapunov 稳定性

一、概念

1、稳定性：对平衡状态 x_e，最后收敛于 $S(\varepsilon)$

2、渐近稳定性：最后收敛于 x_e

△一致渐近稳定性：一致指的是与时间无关

3、全局(大范围)渐近稳定性：初始状态扩展到全空间

线性系统：
- 稳定 ⟶ 一致稳定
- 渐近稳定 ⟶ 全局渐近稳定 ⟶ 全局渐近一致稳定

二、系统的稳定性　定常　※均对于平衡位置是原点而言

(一) 第一法：$\dot{x}=Ax$ 线性系统渐近稳定 ⟺ A所有特征值有负实部

(二) 第二法：

1、对于非线性定常系统构造 $V(x)$

① $V(x)$ 正定
② $\dot{V}(x)$ 负定
} 原点渐近稳定
③ $\|x\|\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$
} 全局渐近稳定

2、对于非线性定常系统构造 $V(x)$

① $V(x)$ 正定
② $\dot{V}(x)$ 半负定
} 稳定
③ 除原点外不恒为0
} 渐近稳定
④ $\|x\|\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$
} 全局渐近稳定

3、对于非线性定常系统构造 $V(x)$

① $V(x)$ 正定
② $\dot{V}(x)$ 正定
} 不稳定

(三) 线性系统构造 $V(x)$：

$A^Tp+pA=-E$，E是单位阵

p 正定 ($\lambda_i>0$) 则渐近稳定

三、Summary 渐近稳定的充要条件

线性定常系统

- 所有特征值具有负实部
- 构造 $A^TP+PA=-E$ 后，P 正定

线性定常离散系统

- 所有特征值模小于1
- 构造 $\Phi^TP\Phi-P=-E$ 后，P 正定

频域分析

一、画非典型环节的Nyquist图：

所有零点角度-极点角度

$w=0$时，① $|G(jw)| = G(s)|_{s=0}$ 一般$n>m$时为∞ ② $\angle G(jw) = \angle Z - \angle P$

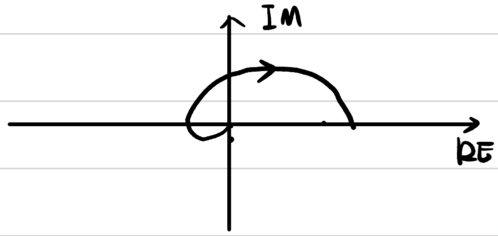
$w=0^+$时 ① $|G(jw)| = G(s)|_{s=0}$ 一般$n>m$时为∞ ② $\angle G(jw) = -90^\circ \cdot v$

$w=\infty$时 ① $|G(jw)|$ 一般为0 ② $\angle G(jw) = -90^\circ \cdot (n-m)$

eg: $G(s) = \dfrac{s^3}{(s+0.2)(s+1)(s+5)}$

$w=0$：$|G(jw)| = 0$，$\angle G(jw) = -90^\circ \times (-3) = 270^\circ$

$w=\infty$：$|G(jw)| = 1$，$\angle G(jw) = 0^\circ$



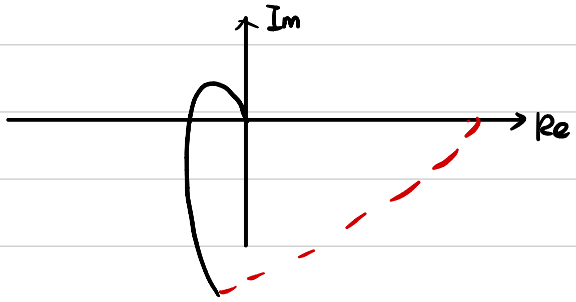
分别由G(jw)实部虚部为0可以得到交点

eg: $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{s(0.5s+1)(s^2+0.9s+1)}$

$w=0$：$|G(jw)| = \infty$ $\angle G(jw) = 0^\circ$

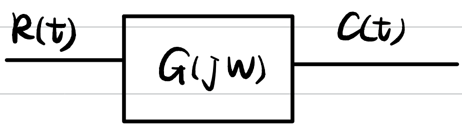
$w=0^+$：$|G(jw)| = \infty$ $\angle G(jw) = -90^\circ$

$w=\infty$：$|G(jw)| = 0$ $\angle G(jw) = -270^\circ$



二、G(jw)的意义：

由闭环传递函数 $G(s)$ 令 $s=jw$ 得到 $G(jw)$



1、$|G(jw)| = \dfrac{B}{A}$，输出的幅值和输入的幅值比值

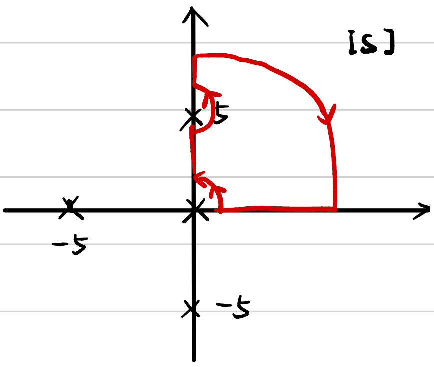
2、$\angle G(jw) =$ 输出信号的相角－输入信号的相角

※计算 $G(jw)$：注意实部为负数时加入180°补偿

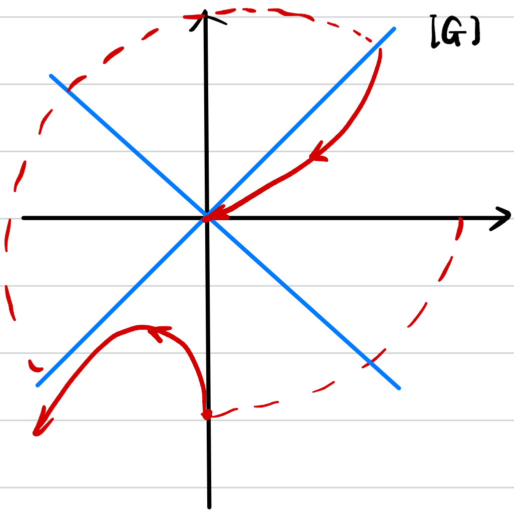
eg: $G(s) = \dfrac{1}{Ts-1} \Rightarrow G(jw) = -(180^\circ - \arctan wT) = -180^\circ + \arctan wT$

eg: $G(s)=\dfrac{1000}{s(s^2+25)(0.2s+1)}$

※有虚轴极点时相角跃变

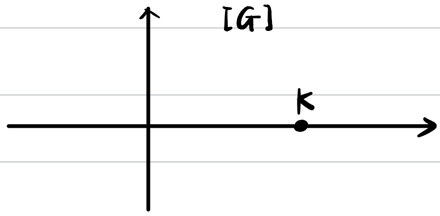


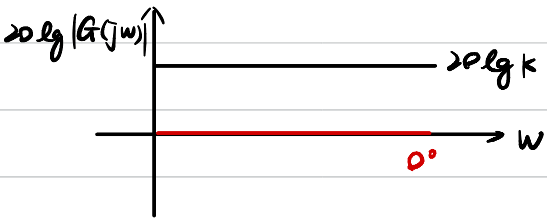
ω	$\angle G(j\omega)$	$\lvert G(j\omega)\rvert$
$\omega=0$	$\angle G(j\omega)=0^\circ$	∞
$\omega=0^+$	$\angle G(j\omega)=-90^\circ$	∞
$\omega=5^-$	$\angle G(j\omega)=-135^\circ$	∞
$\omega=5^+$	$\angle G(j\omega)=-315^\circ$	∞
$\omega=\infty$	$\angle G(j\omega)=-360^\circ$	0



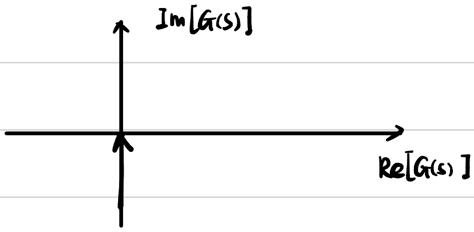
典型环节

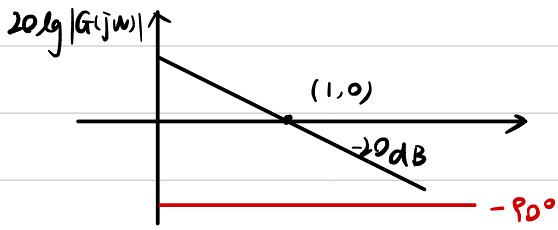
1、比例环节：$G(s)=K$　$G(jw)=K$　$\begin{cases}|G(jw)|=K\\ \angle G(jw)=0^\circ\end{cases}$



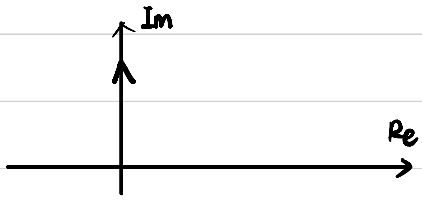


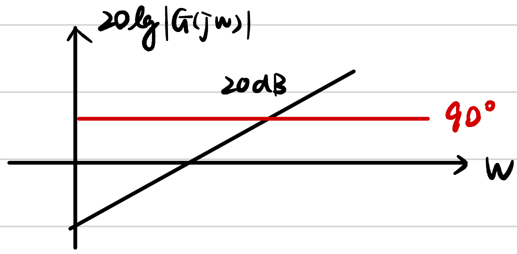
2、积分环节：$G(s)=\frac{1}{s}$　$G(jw)=\frac{1}{jw}$　$\begin{cases}|G(jw)|=\frac{1}{w}\\ \angle G(jw)=-90^\circ\end{cases}$



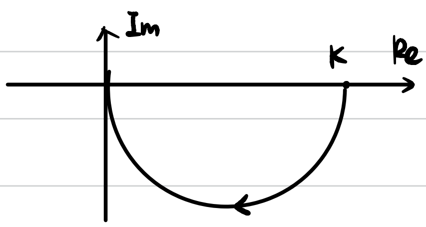


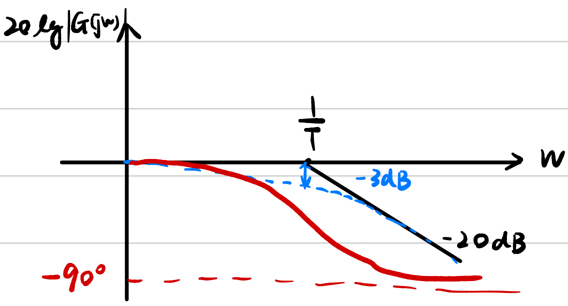
3、微分环节 $G(s)=s$　$G(jw)=jw$　$\begin{cases}|G(jw)|=w\\ \angle G(jw)=90^\circ\end{cases}$





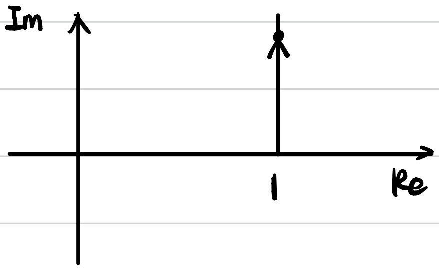
4、一阶惯性环节 $G(s)=\frac{K}{Ts+1}$　$G(jw)=\frac{K}{1+jwT}$　$\begin{cases}|G(jw)|=\frac{K}{\sqrt{1+(wT)^2}}\\ \angle G(jw)=-\arctan(wT)\end{cases}$

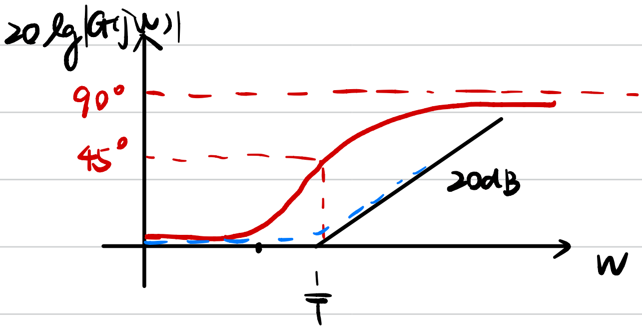




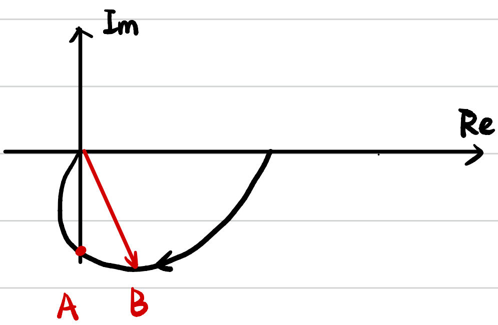
5、微分环节 $G(s)=Ts+1$ $\quad G(jw)=Tjw+1$

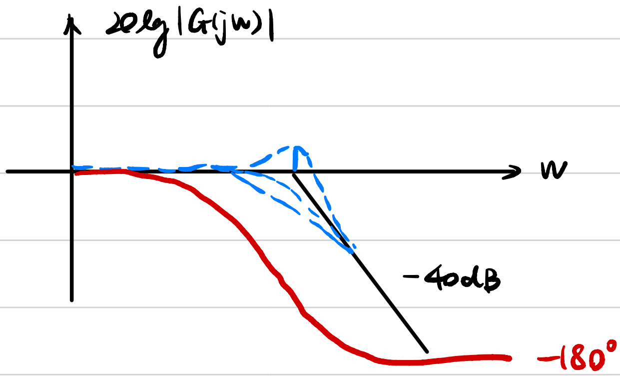
$$\begin{cases} |G(jw)| = \sqrt{(wT)^2+1} \\ \angle G(jw) = \arctan(wT) \end{cases}$$





6、振荡环节 $G(s)=\dfrac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$ $\quad G(jw)=\dfrac{1}{1-(\frac{w}{w_n})^2+2j\zeta\frac{w}{w_n}}$





A: $\begin{cases} \text{转折频率} w_n \\ \text{相位延迟} \angle G(jw) = -90° \\ |G(jw)| = \dfrac{1}{2\zeta} \end{cases}$

修正曲线：谐振点和谐振时 $|G(jw)|$

转折频率时有 $20\lg|G(jw)| = 20\lg\left|\dfrac{1}{2\zeta}\right|$

B: $\begin{cases} \text{谐振频率} w_r = w_n\sqrt{1-2\zeta^2} \\ |G(jw)| = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases}$

△ 由波特图确定传递函数

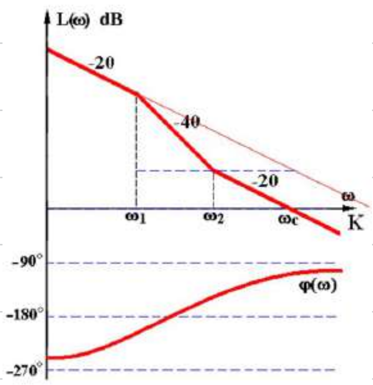
1、确定各转折频率，写典型特性

※振荡环节：$\dfrac{1}{\left(\frac{S^2}{W_n^2}+\frac{2\xi}{W_n}S+1\right)}$ 转折频率和S下的数是平方关系

2、确定增益K：分段忽略其中部分项，利用和w轴交点算

3、利用相频关系确定是否是最小相位环节

eg：



$$G(s)=\frac{K\left(\frac{S}{W_2}\pm 1\right)}{S\left(\frac{S}{W_1}\pm 1\right)}$$

① 利用 W_c 求 K

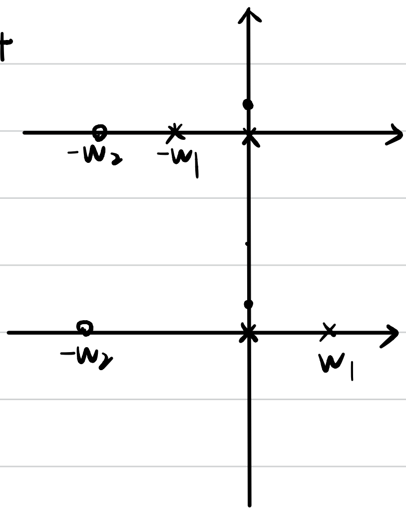
由于 $W_c \gg W_2 \gg W_1 \Rightarrow |G(jW_c)|=\dfrac{K\cdot\frac{W_c}{W_2}}{W_c\cdot\frac{W_c}{W_1}}=1$

得 $K=\dfrac{W_2W_c}{W_1}$

② 确定最小相位系统

a、＋ ＋

b、＋ －



c、略

$W=0^+$ 时 $\angle Z-\angle P=0^\circ-(0^\circ+90^\circ)=-90^\circ$

$W=0^+$ 时 $\angle Z-\angle P=0^\circ-(180^\circ+90^\circ)=-270^\circ$

综上：$G(S)=\dfrac{\frac{W_2W_c}{W_1}\cdot\left(\frac{S}{W_2}+1\right)}{S\left(\frac{S}{W_1}+1\right)}$

△ 由传递函数图波特图

[幅度] 1、列出分段点

2、画初始基准线：斜率为 -20ν，恒过点 $(1, 20\lg K)$

3、修正：{ 谐振点 $w_r = w_n\sqrt{1-2\zeta^2}$
幅值 $M_r = 20\lg\left(\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$ (相较于基准线)

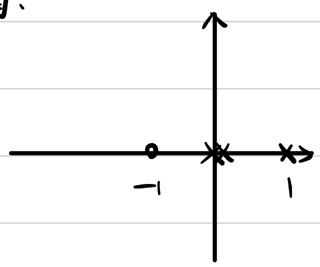
[相角] 1、列写表达式

2、分段画图后叠加

3、低频段积分环节补充 $90^\circ \cdot \nu$

eg：画 $G(s) = \frac{6(s+1)}{s^2(s-1)}$ 的波特图、奈斯特图

A. Nyquist 图：

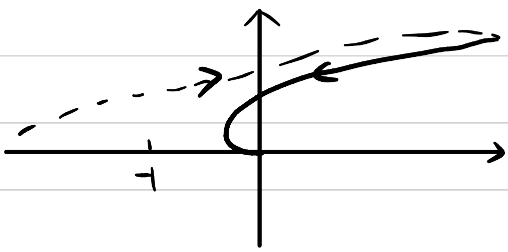


$w=0$ 时，$\angle G(jw) = 0-(180^\circ) = -180^\circ$，$|G(jw)| = \infty$

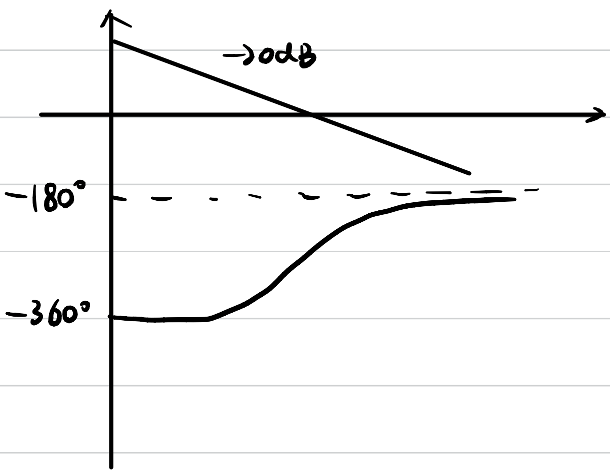
$w=0^+$ 时，$\angle G(jw) = 0-(90^\circ+90^\circ+180^\circ) = -360^\circ$，$|G(jw)| = \infty$

$w=\infty$ 时，$\angle G(jw) = 90^\circ-(90^\circ+90^\circ+90^\circ) = -180^\circ$，$|G(jw)| = 0$

⇒



B. Bode 图



$\angle G(jw) = \arctan wT - (2\times\frac{\pi}{2} + 180^\circ - \arctan wT)$

$= 2\arctan w - 2\pi$

Nyquist 稳定性判据：关键在于画开环Nyquist 曲线

[I] $Z = P - 2N$

P：开环不稳定极点个数（不包括原点）

N：开环 Nyquist 图绕 (-1, 0) 的圈数，顺时针为负，逆时针为正

Z：闭环不稳定极点个数

系统稳定的充要条件 ⇌ $Z=0$

[II] $Z = P - 2(N^+ - N^-)$

N^+：开环 Nyquist 在 (-1, 0j) 左侧正穿越次数（从上向下）

N^-：开环 Nyquist 在 (-1, 0j) 左侧负穿越次数（从下向上）

△ 起始或终止于 (-1, j0) 左侧，记为半次穿越

eg：上页中 $G(s) = \dfrac{6(s+1)}{s^2(s-1)}$

有：$P=1$，由图：$N = -\frac{1}{2}$，$N^- = \frac{1}{2}$，则 $Z = 1-2\times(-\frac{1}{2}) = 2$，不稳定

对数稳定性判据：

$Z = P - 2(N^+ - N^-)$

N^+：$L(\omega) > 0$ 部分正穿越 $\pm(2k+1)\pi$ 的次数（从下向上）

N^-：$L(\omega) > 0$ 部分负穿越 $\pm(2k+1)\pi$ 的次数（从上向下）

△ 起始或终止于 $\pm(2k+1)\pi$ 的算半次穿越

易错点

1、离散化模型时:

$$\begin{cases} G = e^{AT} \\ H = \left(\int_0^T e^{At}\,dt\right) B \end{cases}$$

其中若 e^{At} 含有 e^{t}/e^{-t} 项时,积分下限会产生一个常数!

2、对线性模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

状态转移矩阵为 $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

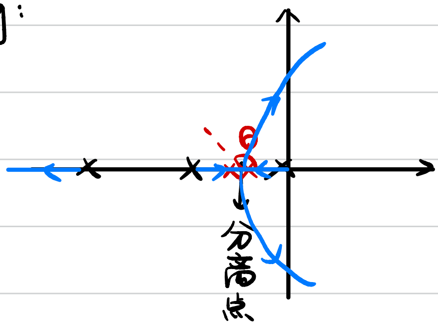
对离散模型

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Dx(k+1) \end{cases}$$

状态转移矩阵为 $G^k = Z[(zI-G)^{-1}z]$

3、画分离点的入/出射角时:开环极点应相应移动

eg:



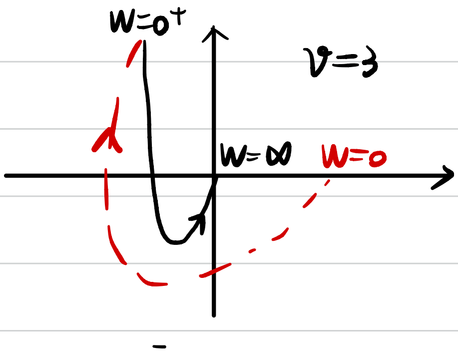
$0° - (2\theta + 0°) = -180°$

$\Rightarrow \theta = 90°$

4、Nyquist 图补虚线的方向:

由于积分环节在分母,减小的角应为顺时针

eg:

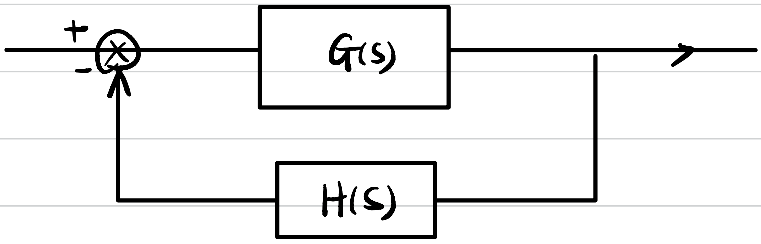


$w=0$: 积分环节不起作用

$w=0^+$: 相比于 $w=0$ 少了 $90° \cdot v$ 角度

$w=\infty$: 最终为 $-90°(n-m)$

5.



$G(s)$：前向通路传函

$H(s)$：反馈通路传函

$GH(s)$：开环传递函数

稳态误差系数法是由 $GH(s)$ 得出且表示为尾1

6. 解微分方程/差分方程有初值问题：

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z[f(t-nT)] = z^{-n}F(z) \\ Z[f(t+nT)] = z^{n}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\cdot z^{-k}\right] \end{cases}$$

7. 建模时写微分方程应写成输出 = 输入形式

8. 化简方框图①分母没有二次项②注意是反馈还是并联

9. 利用梅森公式时别忽略两两不接触的回路：先乘积后相加

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_a L_b - \sum L_a L_b L_c \cdots$$

10. 已知 $X(z)$，仅能得到 $x(kT)$ 从而得到 $x^*(t)$ 冲激串，称为Z反变换结果

① $x(t)$ 对应唯一的 $X(z)$

② $x^*(t)$ 对应不唯一的 $X(t)$

11.
$$\begin{cases} \sigma = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \\ t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \\ t_r = \dfrac{\pi - \arccos\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \\ t_s = \dfrac{3}{\xi\omega_n}\ (\Delta=5\%) \quad \dfrac{4}{\xi\omega_n}\ (\Delta=2\%) \end{cases}$$

12、二阶系统加入零点后超调量增加，峰值时间提前

13、计算稳态误差前判断稳定性

(一) $K_v=\lim\limits_{s\to 0} s^{v}\cdot GH(s)$ $\qquad$ $K_v=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^{v}\cdot GH(z)$

※

	连续				离散（采样周期为T）		
	零	I	II		零	I	II
A	$\frac{A}{1+K_p}$	0	0	A	$\frac{A}{1+K_p}$	0	0
At	∞	$\frac{A}{K_v}$	0	At	∞	$\frac{AT}{K_v}$	0
$\frac{1}{2}At^2$	∞	∞	$\frac{A}{K_a}$	$\frac{1}{2}At^2$	∞	∞	$\frac{AT^2}{K_a}$

型别由 s^v 判定 $\qquad$ 型别由 $(z-1)^v$ 判别

(二) 终值定理

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot R(s)\cdot \Phi_{ef}(s) \qquad e_{ss}(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot R(z)\cdot \Phi_{ef}(z)$$

14、加入零点时应采用添加尾1的形式

15、二阶系统标准形式：

$$G(s)=\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}$$

注意 s^2 下面是 ω_n^2