

版权归张宏伟所有，仅供哈工大深圳课堂使用



哈爾濱工業大學(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

# 自动控制理论 A

## (Principles of Automatic Control)

主讲人：张宏伟、张颖

机电工程与自动化学院  
哈尔滨工业大学(深圳)

2023.08.29 (Tue)



# 任课教师及助教

## 主讲教师：

**张宏伟 (1-9周)**

办公室: A506B

电 邮: [hwzhang@hit.edu.cn](mailto:hwzhang@hit.edu.cn)

**张 颖 (10-17周)**

办公室: A504

电 邮: [zhangyinghit@hit.edu.cn](mailto:zhangyinghit@hit.edu.cn)

## 实验课教师：

**葛亚明 (K325)**

电 邮: [geyaming@hit.edu.cn](mailto:geyaming@hit.edu.cn)





# 任课教师及助教

## 助教 (1-9周):

**王 宁:** [825810167@qq.com](mailto:825810167@qq.com)

**薄舒文:** [2228735565@qq.com](mailto:2228735565@qq.com)

**李金路:** [17790997401@163.com](mailto:17790997401@163.com)

## 助教 (10-17周):

**姜博涛 :** [3028660989@qq.com](mailto:3028660989@qq.com)

**张嘉灏 :** [1584746540@qq.com](mailto:1584746540@qq.com)

**龙飞雄 :** [1337408747@qq.com](mailto:1337408747@qq.com)

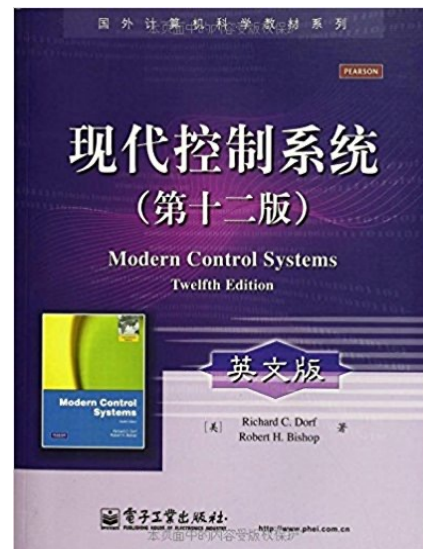


## 参考书目:

影印版:

现代控制系统 (第12 or 13版).

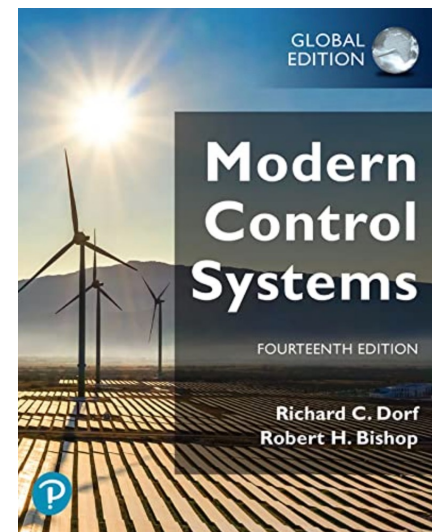
电子工业出版社



原版:

Dorf & Bishop, Modern Control Systems,

12<sup>th</sup> / 13<sup>th</sup> / 14<sup>th</sup> edition





# 教材及参考书

## 参考书目：

- K. Ogata. Modern Control Engineering, 5<sup>th</sup> edition, Prentice Hall, 2010.  
(影印版：现代控制工程(第5版)，电子工业出版社)
- Franklin *et al.* Feedback Control of Dynamic Systems, 7<sup>th</sup> edition, Pearson, 2014.  
(影印版：自动控制原理与设计，电子工业出版社)



# 教材及参考书

## 参考书目：

- 吴麒, 自动控制原理. 清华大学出版社
- 胡寿松, 自动控制原理. 科学出版社
- 裴润, 宋申民, 自动控制原理. 哈尔滨工业大学出版社
- 黄家英, 自动控制原理. 高等教育出版社
- 李友善, 自动控制原理. 国防工业出版社
- 王燕舞, 自动控制原理. 高等教育出版社



# 课程安排

- 课程总学时：76
- 授课学时：64
- 实验学时：8（4次）
- 上机学时：4（2次）
- 课程学分：4.5



# 考核及课堂纪律

## 考核方式：

期末(70%) + 作业(13%) + 上机(4%) + 实验(8%)  
+ 课堂表现(5%)

## 课堂纪律：

**No 作 No Die**

- 做一个诚信的人
- 作业：抄袭和被抄袭者，本次作业均判零分
- 无故缺勤：每次从课堂表现成绩中扣1分
- 课堂不准交头接耳



# 课程QQ群



HITSZ-自控A[2023]

群号: 897132005



1. 课件
2. 作业
3. 教科书、参考书
4. 延伸阅读
5. 实验、上机



# 0 绪论之前

## 什么是 控制?

Open a window and look at nature  
You may not see it but control is there

熟悉 又 陌生?

Hidden Technology



Feedback  
and Control for  
Everyone

Pedro Albertos · Iven Mareels

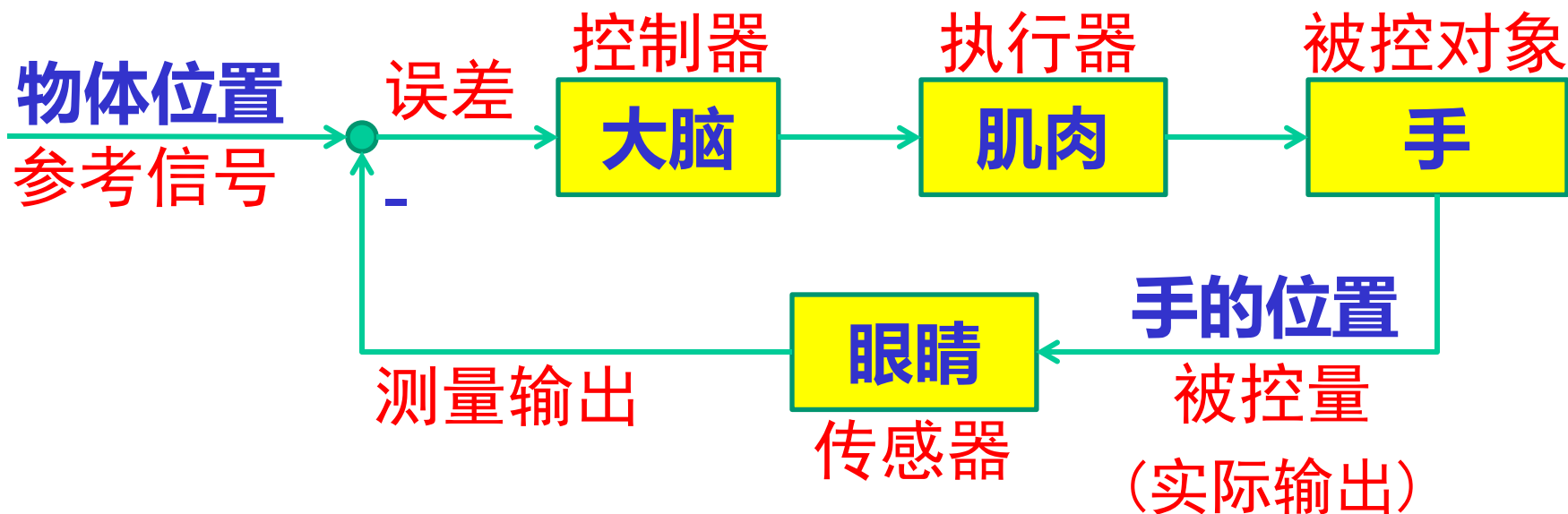
 Springer





# 0 绪论之前

## • 抓取物体



- 温度控制器
- 生态平衡
- 马桶
- 等等……
- 驾车



# 0 绪论之前

## 什么是 自动控制?

通过控制装置使被控对象的被控量按照预定的规律变化

控制器

(controller)

执行器

(actuator)

传感器

(sensor)

系统

(system)

(plant)

(process)

输出

(output)

参考输入

(reference)



版权归张宏伟所有，仅供哈工大深圳课堂使用

# 0 绪论之前



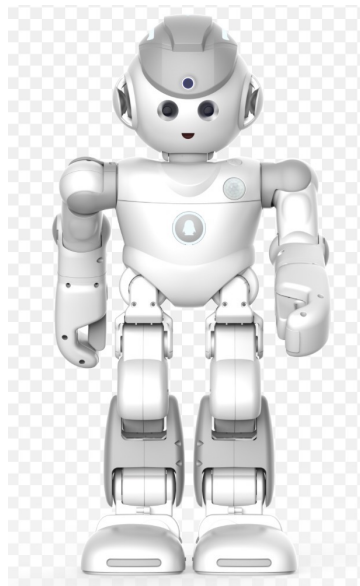
## 为什么要学习 自动控制







# 0 绪论之前





# 0 绪论之前

自动化专业不能干什么？

This is a hard question

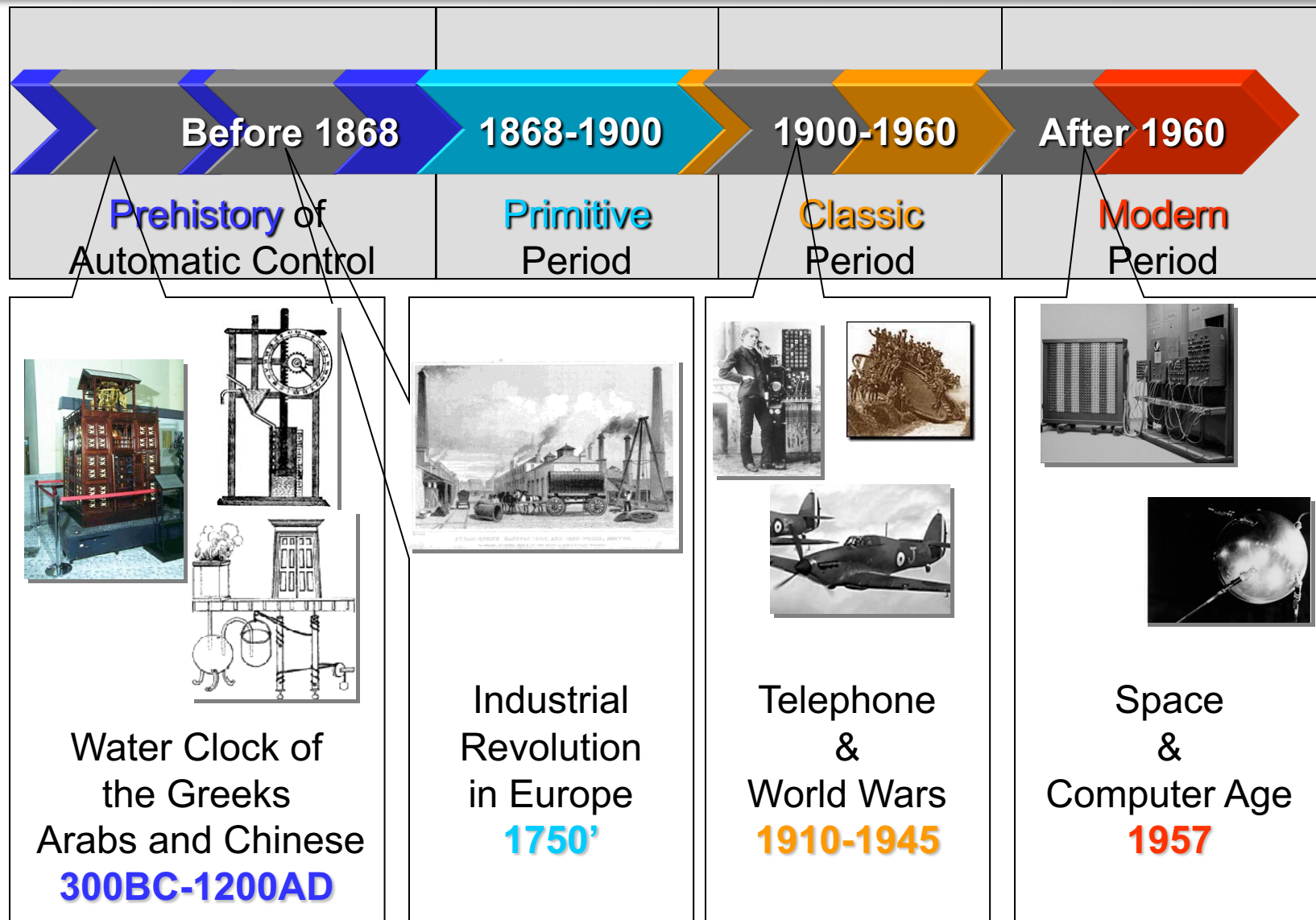


# 第一章 绪论

- 1.1 控制理论与技术发展简况
- 1.2 控制系统的基本形式
- 1.3 控制系统的分类
- 1.4 控制系统举例
- 1.5 对控制系统的基本要求与研究内容
- 1.6 设计流程及实例



# 1.1 控制理论与技术发展简况



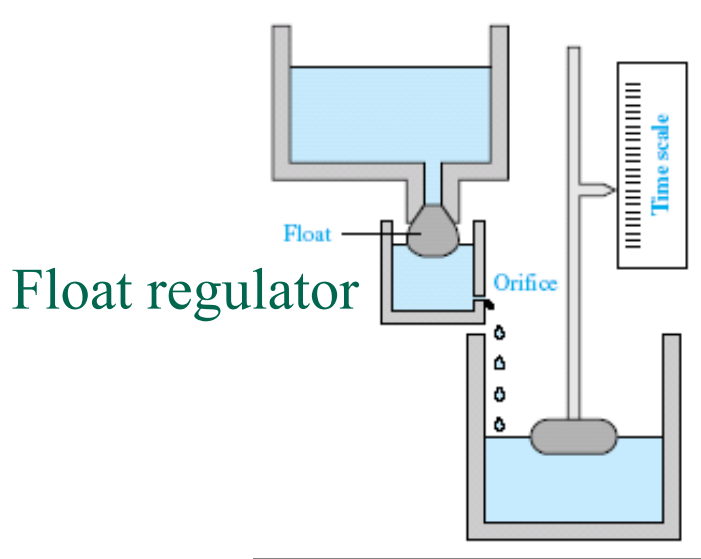




# 1.1 控制理论与技术发展简况

## Before 1868 Prehistory of Automatic Control

- 300BC 古希腊人发明的浮球调节装置;
- 800AD 古代阿拉伯人利用浮球进行水钟控制;
- 1086AD 北宋 苏颂 韩公廉 发明的水运仪象台;



Water Clock



水运仪象台





# 1.1 控制理论与技术发展简况

Before 1868

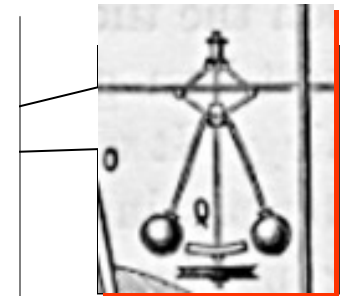
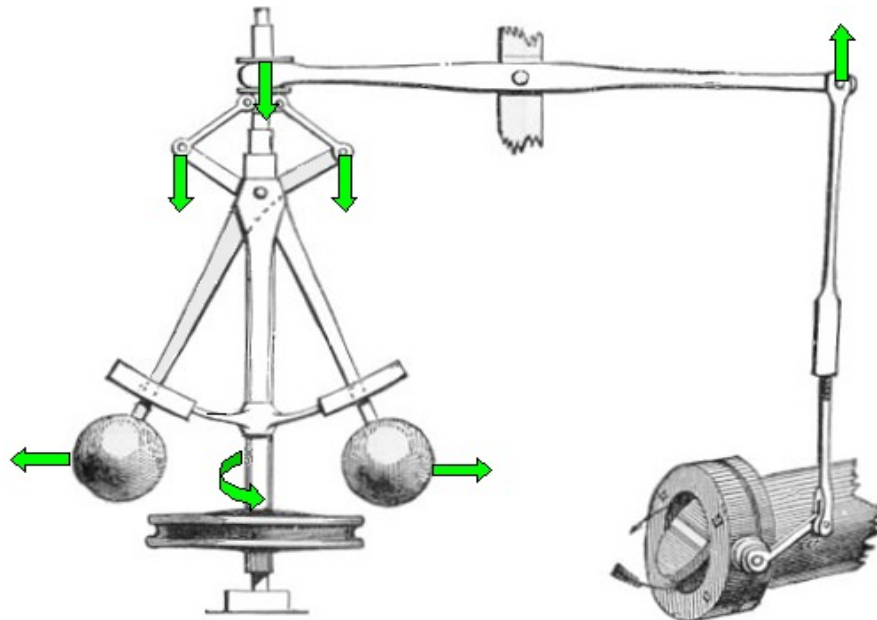
1868 - 1900



- 1788 英国 J. Watt (机械工程师)  
用离心式调速机构控制蒸汽机的速度;



Windmill  
Fantail 1750



Centrifugal  
Fly-ball  
Governor

Steam Engine T. |



# 1.1 控制理论与技术发展简况

Before 1868

1868 - 1900

- 1840 英国 G.B. Airy (数学家、天文学家)  
首次用微分方程研究控制系统  
讨论了反馈系统的不稳定性  
(天文望远镜指向系统的振荡  $\rightarrow$  instability)



- 1868 英国 J.C. Maxwell (数学物理学家)  
发表了 “On Governors”, 系统分析了  
反馈控制系统的稳定性  
(Watt's flyball governor, characteristic equation)  
控制系统理论正式建立





# 1.1 控制理论与技术发展简况

Before 1868

1868 - 1900

- 1877 英国 E. J. Routh (数学家)  
1895 德国 A. Hurwitz (数学家)  
分别建立了 “Routh-Hurwitz Stability Criteria”  
(数值方法判定 特征方程的根是否位于左半平面)
- 1892 俄国 A.M. Lyapunov (数学家、物理学家)  
PhD论文 “论运动稳定性的一般问题” 1960's



Routh



Hurwitz



Lyapunov



# 1.1 控制理论与技术发展简况

1868 - 1900

1900 - 1960

- 1927 美国 H.S. Black 提出了负反馈放大器;
- 1932 美国 H. Nyquist 提出了基于极坐标图的频率域的稳定性判据;
- 1938 美国 H.W. Bode 引入了对数坐标系,使控制系统的频率域响应方法更适于工程应用;
- 1948 美国 W.R. Evans 提出了根轨迹法;



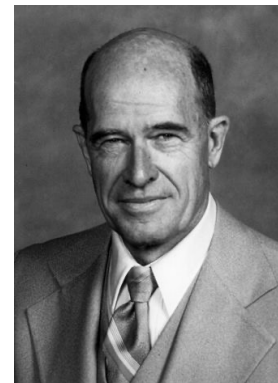
Black



Nyquist



Bode



Evans



# 1.1 控制理论与技术发展简况

1868 - 1900

1900 - 1960

建立在频率法和根轨迹法上的理论，通常称为**经典控制理论**(Classic Control).

经典控制理论：

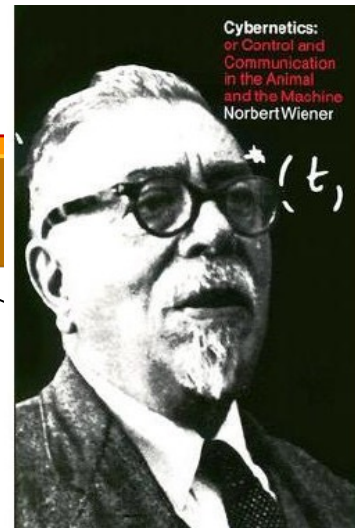
- 一个函数——传递函数；
- 两种方法——频率响应法，根轨迹法；



# 1.1 控制理论与技术发展简况

1868 - 1900

1900 - 1960



- 1948 美国 N. Wiener 出版了

“Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine”

《**控制论**—或关于在动物与机器中控制和通讯的科学》

首先提出了**控制论 (cybernetics)** 这个词，  
被认为是经典控制理论的辉煌总结





# 1.1 控制理论与技术发展简况

1868 - 1900

1900 - 1960

经典控制理论的局限性：

1. 限于线性定常系统 (Linear time-invariant system);
2. 限于标量系统或单回路反馈系统——单输入单输出(SISO)系统; (系统内部动态行为?)

现代控制.....



# 1.1 控制理论与技术发展简况

1900 — 1960

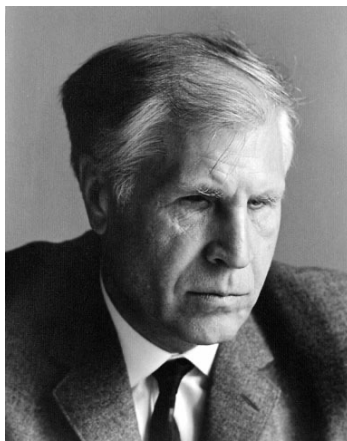
After 1960

## 现代控制 (Modern Control)

- 1957 美国 R. Bellman 动态规划理论;
- 1956 前苏联 L.S. Pontryagin 极大值原理;
- 1960 美国 R. Kalman 多变量系统最优控制、能控性和能观性、最优滤波理论;



Bellman  
贝尔曼  
(1920-1984)



Pontryagin  
庞特里亚金  
(1908-1988)



Kalman  
卡尔曼  
(1930-2016)





# 1.1 控制理论与技术发展简况

1900 — 1960

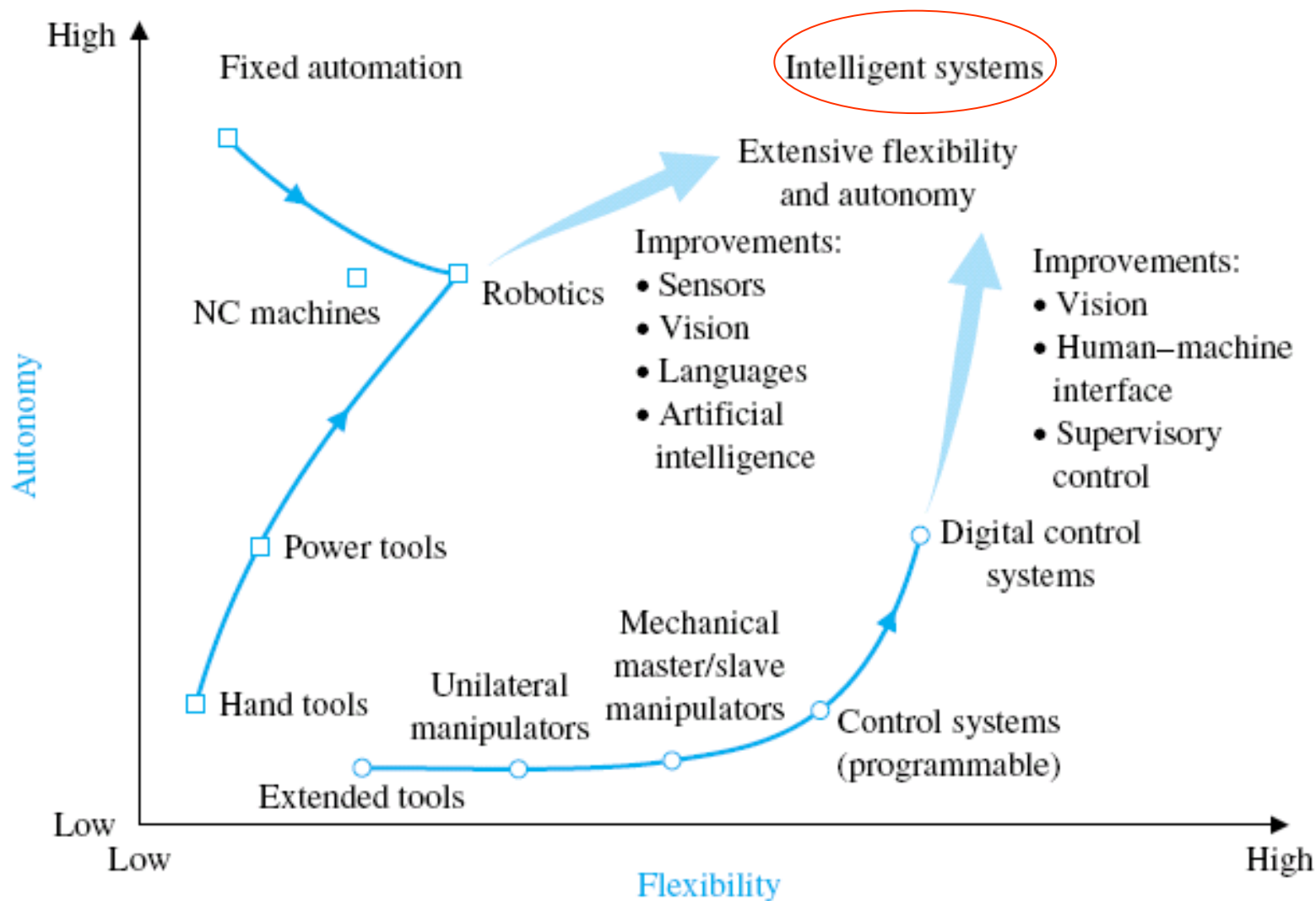
After 1960

- 预测控制
- 自适应控制
- 优化控制
- 鲁棒控制
- 智能控制
- 非线性控制
- 多智能体系统协调控制
- .....



# 1.1 控制理论与技术发展简况

## 控制系统前瞻





# 1.1 控制理论与技术发展简况

## 控制系统前瞻

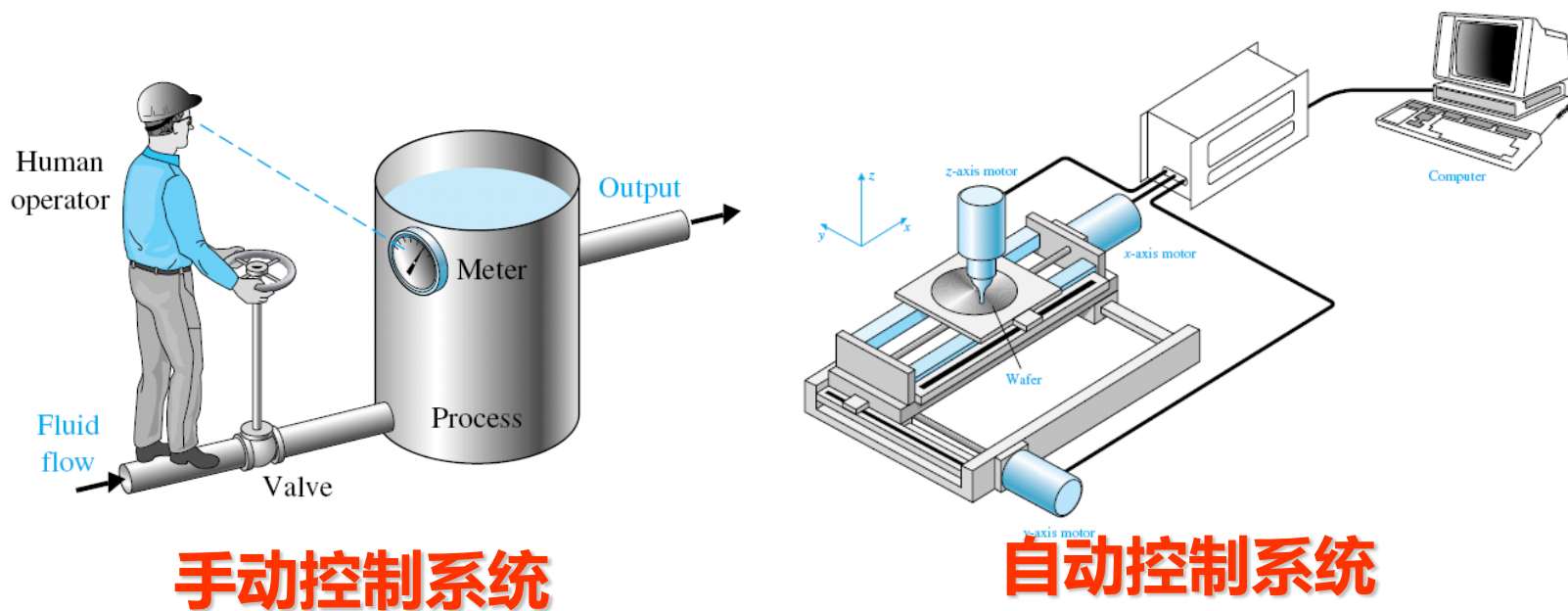
- 具有符号和连续动态的系统的控制
- 在分布式、异步网络环境中的控制
- 高级协作与自主控制
- 控制算法的自动综合
- 由不可靠的部件建立可靠的系统



## 1.2 控制系统的基本形式

### 控制系统(Control System):

由相互关联的部件按照一定的结构构成,它能够提供预期的系统响应.

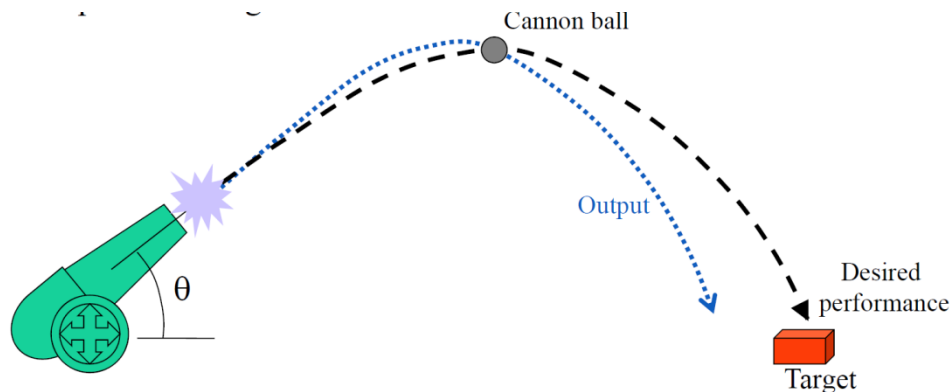




## 1.2 控制系统的基本形式

### 开环控制系统(Open-Loop Control System):

在没有反馈的情况下,利用执行机构直接控制受控对象的控制系统.

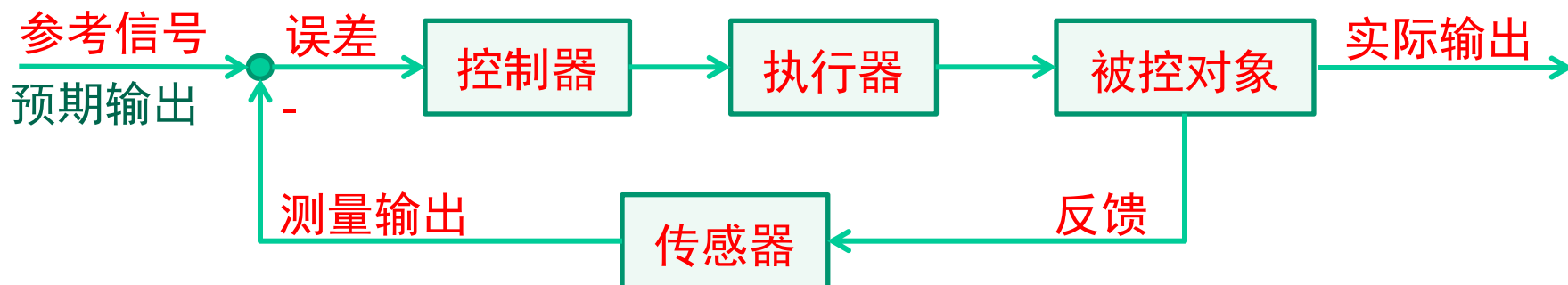




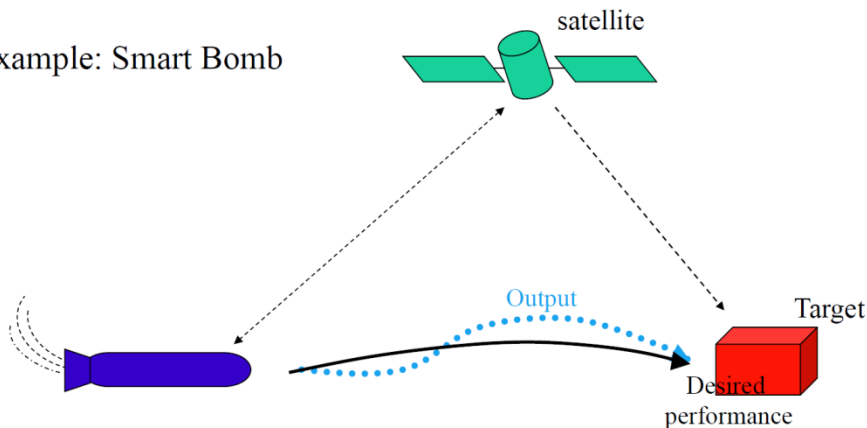
# 1.2 控制系统的基本形式

## 闭环控制系统(Closed-Loop Control System):

对输出进行测量, 将此测量信号反馈, 并与预期的输入(参考或指令输入)进行比较的系统.



Example: Smart Bomb





# 1.2 控制系统的基本形式

表 1.1

	开环控制系统	闭环控制系统
优点	结构简单 价格便宜 调试简单	准确、精度高 反应灵敏、快速 元件变化影响小,抗干扰 稳定性好
缺点	准确性差 反应慢 不抗干扰 元件变化影响大	结构复杂 成本高 调试复杂



## 1.2 控制系统的基本形式

### 自动控制系统的基本构成

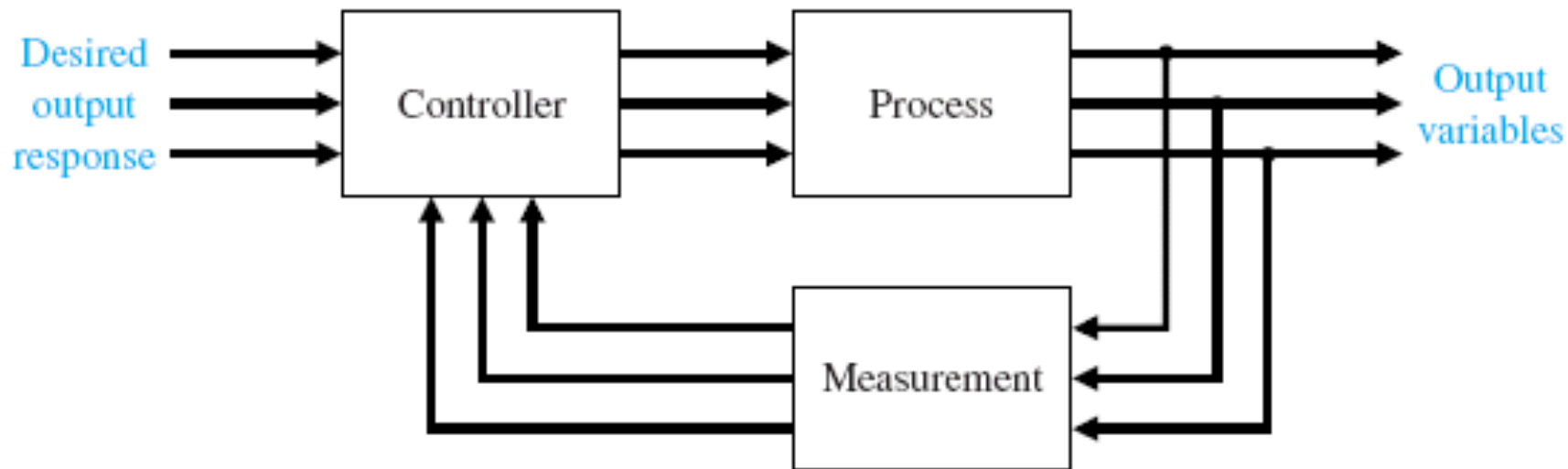
1. **(控制)对象**: 被控制的设备、装置或控制过程
2. **输出量**: 被控制量
3. **输入量(给定量)**: 反映控制系统要求, 预先给定的信号
4. **控制器**: 根据系统要求按一定规则产生控制作用
5. **检测环节**: 测量输出量, 并根据需要进行物理量的转换
6. **比较环节**: 比较给定输入与反馈信号的差值, 产生**偏差信号**
7. **扰动**





## 1.2 控制系统的基本形式

**多变量控制系统(Multivariable Control System):**  
有多个输入变量或/和多个输出变量的控制系统.





# 1.3 控制系统的分类

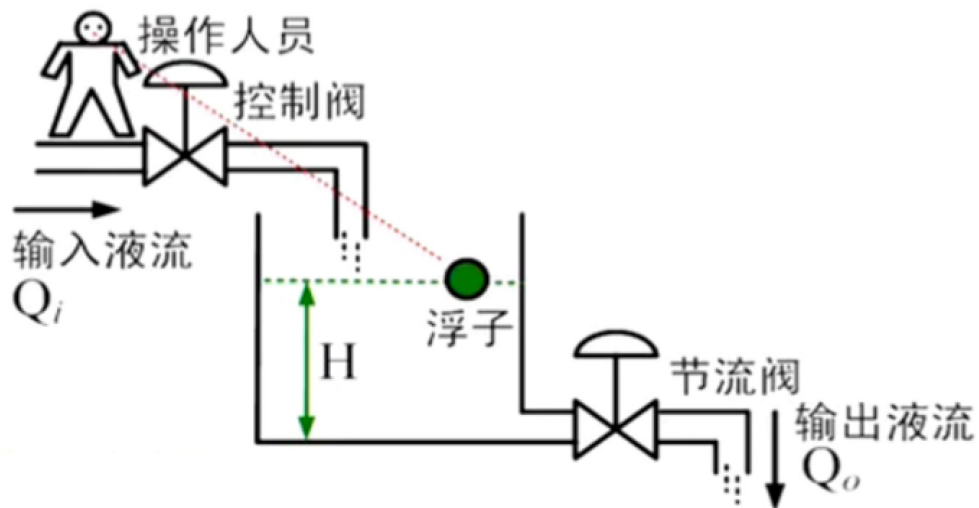
## 1. 按照参考输入特征(运行方式)

- 恒值控制系统 (调节器、regulator):  
参考输入为定值，控制输出保持在恒定的要求值(克服扰动)。分析和设计重点是研究各种扰动的影  
响。

### 水箱中的水位控制

控制目标：水位保持一定高度

控制手段：调节控制阀的开度

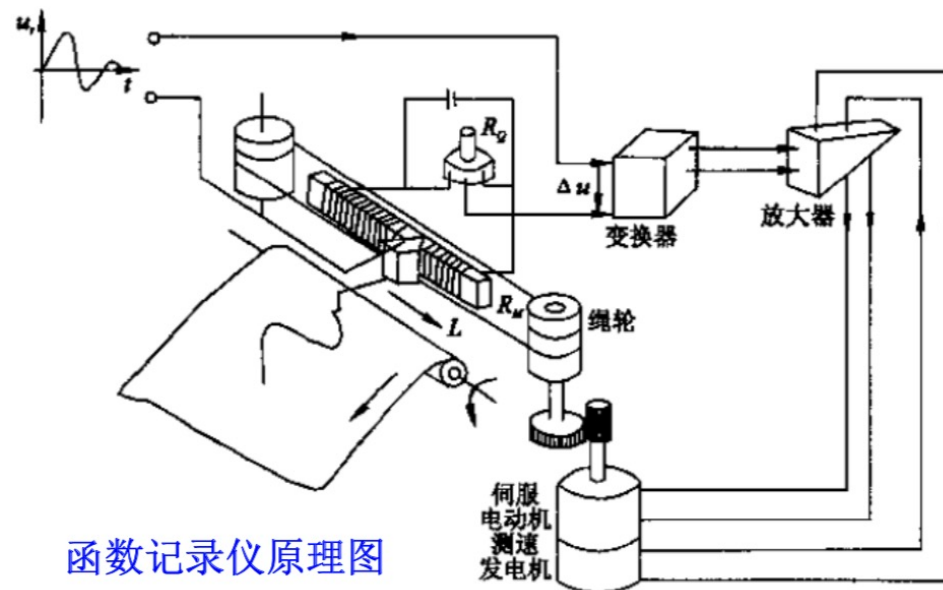




# 1.3 控制系统的分类

## 1. 按照参考输入特征(运行方式)

- 随动控制系统(自动跟踪系统)(tracking control):  
参考输入预先未知，随时间变化；控制输出以尽可能小的误差跟随输入的变化。主要研究跟踪的快速性和准确性。





# 1.3 控制系统的分类

## 2. 按照数学模型的特征——系统的本质分类

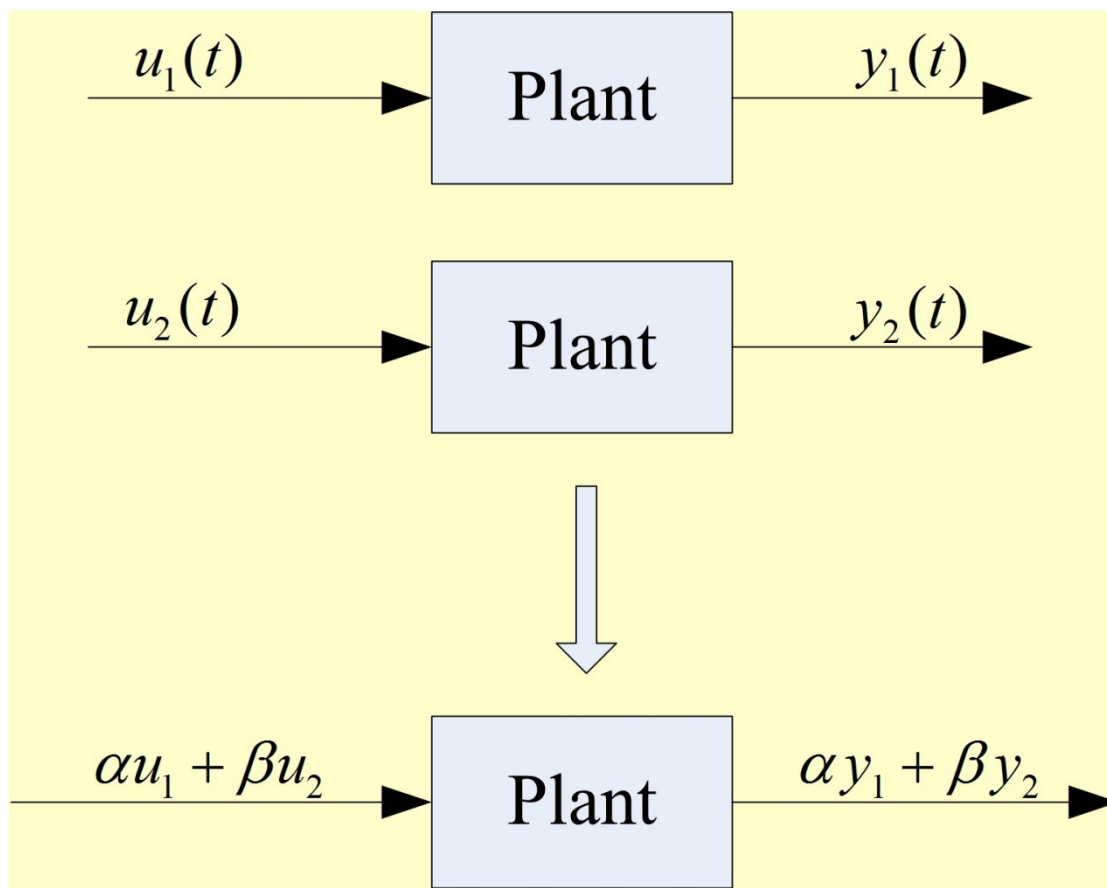
- 线性系统与 非线性系统
- 连续系统与 离散系统
- 确定性系统与 随机系统
- 单入单出(SISO)系统与多入多出(MIMO)系统
- 集中参数系统与 分布参数系统
- .....



# 1.3 控制系统的分类

## 线性系统

## 叠加性





## 1.3 控制系统的分类

判断下述系统是否为线性系统： $x(t)$ 输入， $y(t)$ 输出

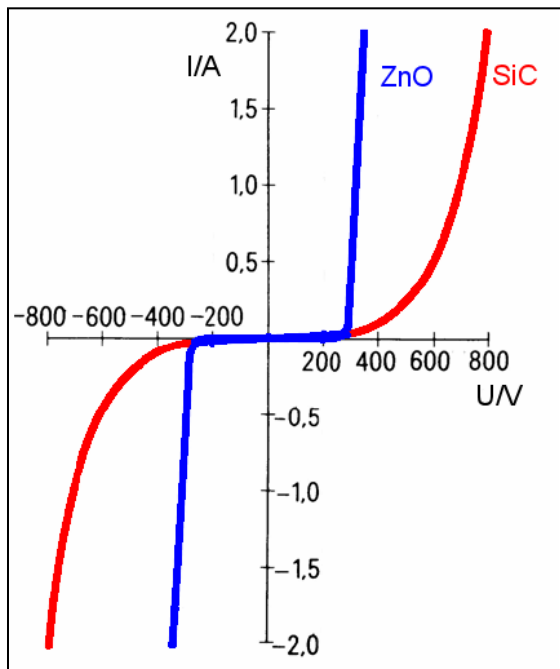
$$y(t) = 2x(t)$$

$$y(t) = x^2(t)$$

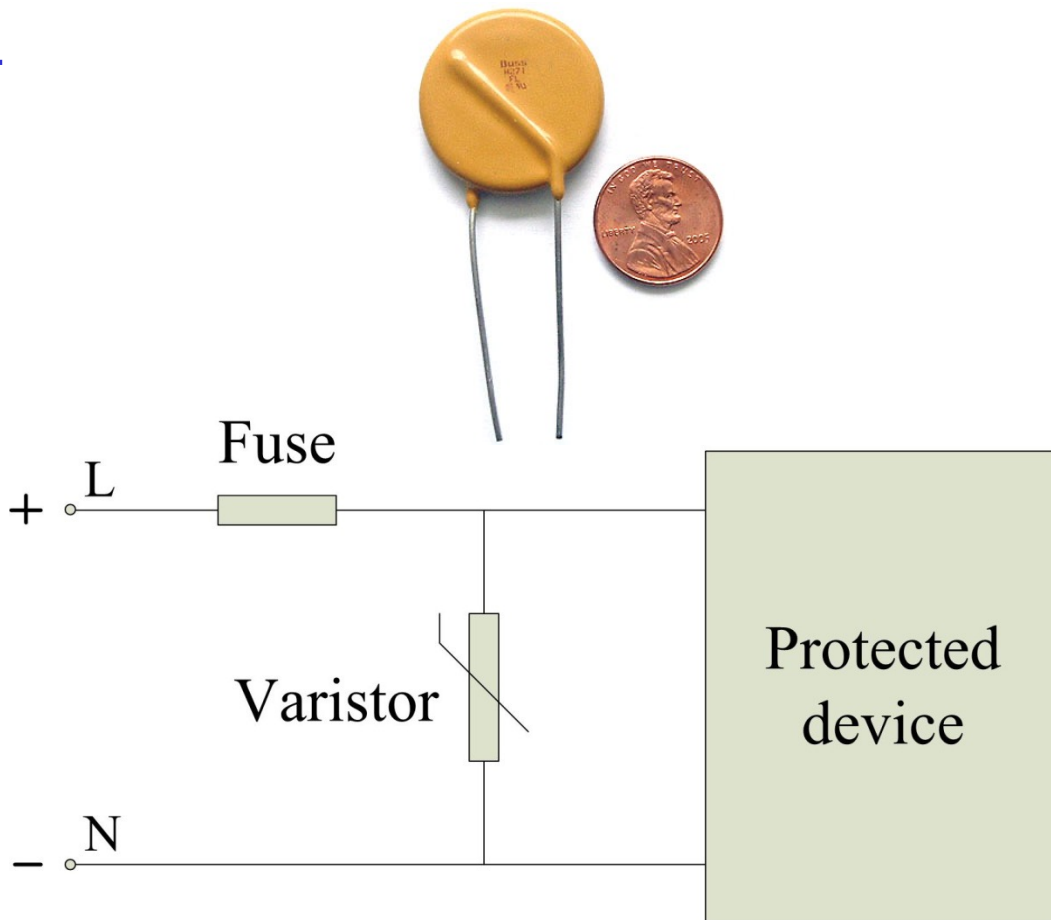


# 1.3 控制系统的分类

## 非线性原件—压敏电阻



$$i = f(u) \neq ku$$





# 1.3 控制系统的分类

## 3. 按照组成系统的元件分类

- 电气
- 机械
- 液动
- 气动
- 生物学
- 经济学
- 社会学
- .....





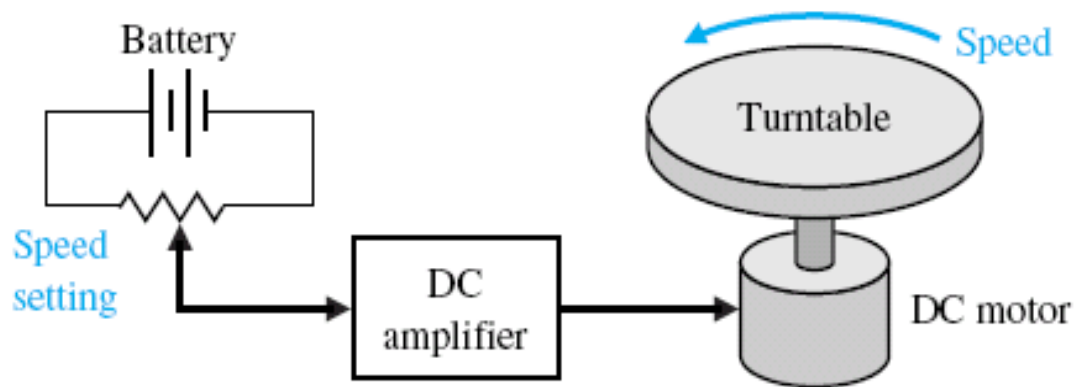
2023. 8. 31

THU

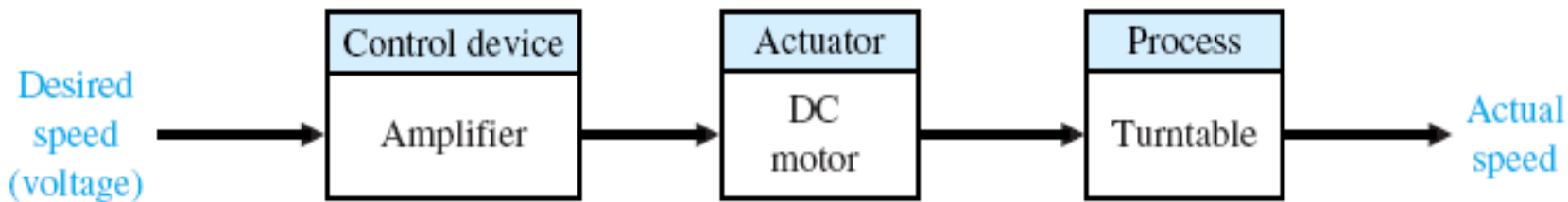


# 1.4 控制系统举例

## ● 开环控制系统 (Open-Loop Control System)



(a) Open-loop Control of the speed of a turntable

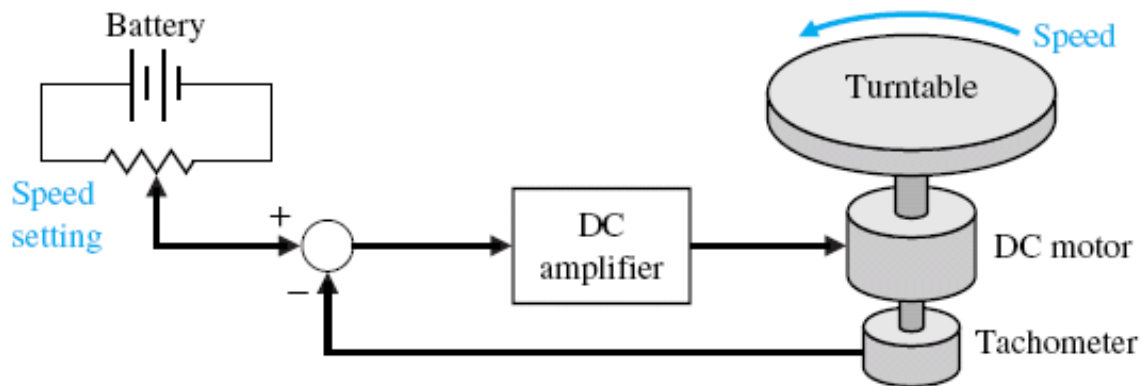


(b) Block Diagram

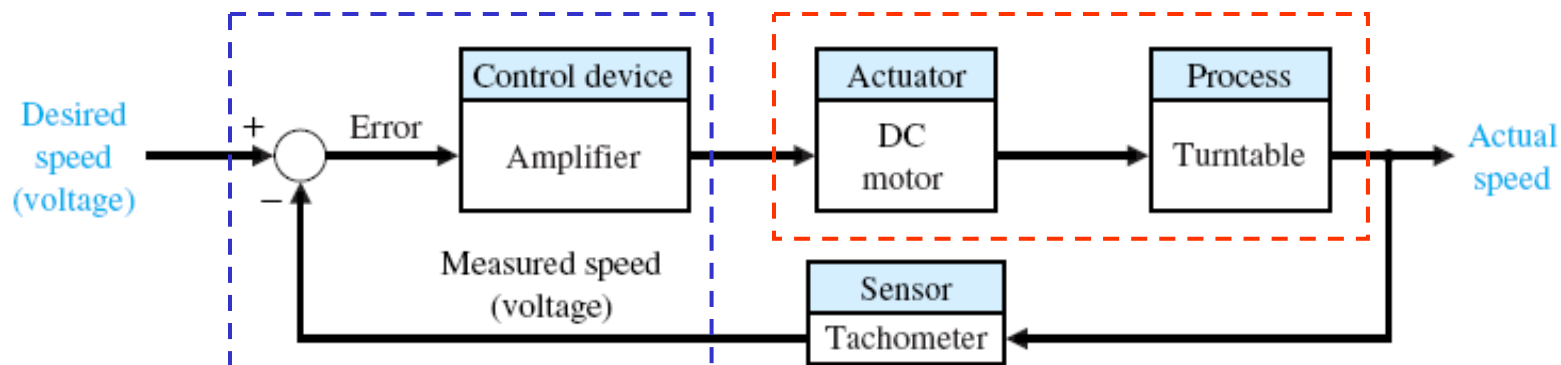


# 1.4 控制系统举例

## ● 闭环控制系统 (Closed-Loop Control System)



(a) Close-loop Control of the speed of a turntable

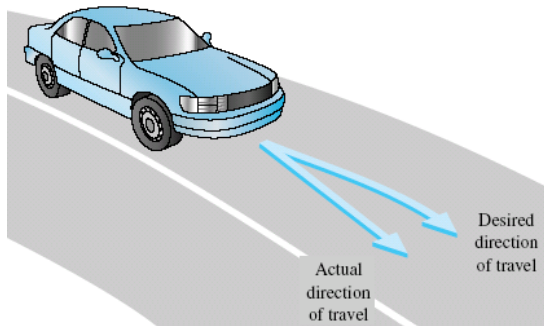


(b) Block Diagram

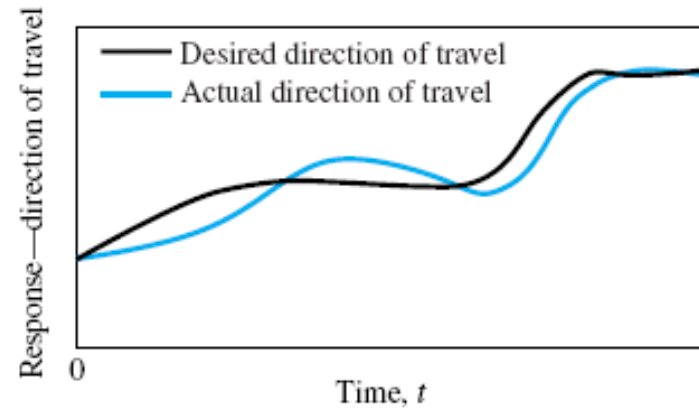


# 1.4 控制系统举例

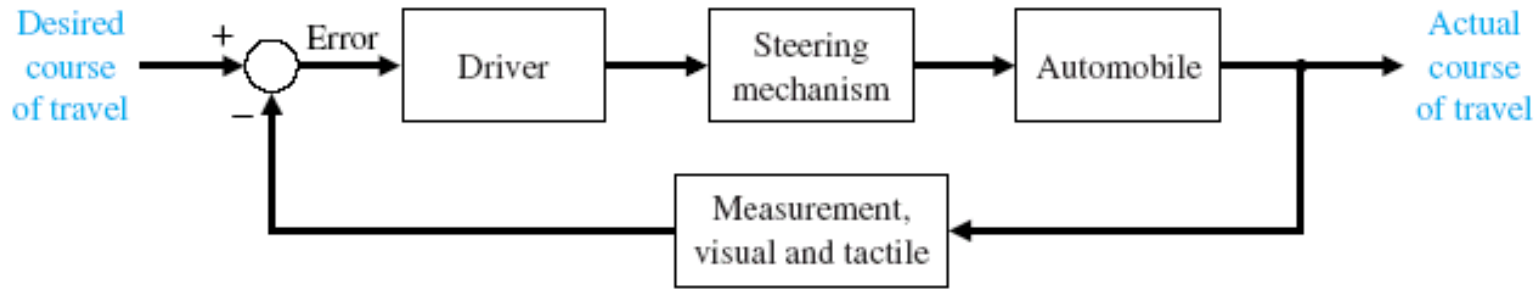
## Automobile Steering Control System



(b) Measure of Error



(c) Typical direction-of-travel response

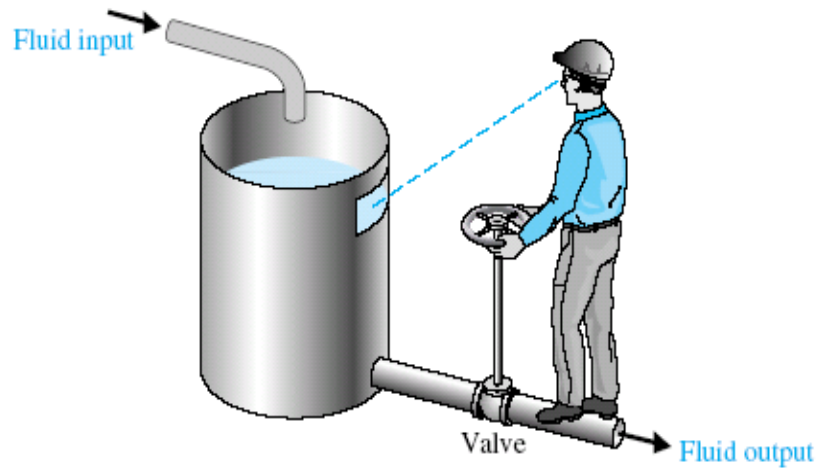


(a) Block Diagram

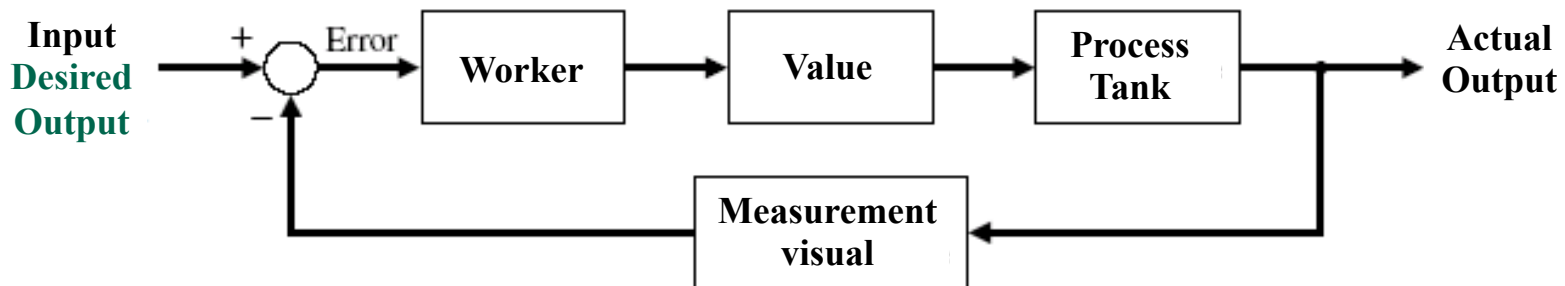


# 1.4 控制系统举例

## ● Liquid Level Manual Control System



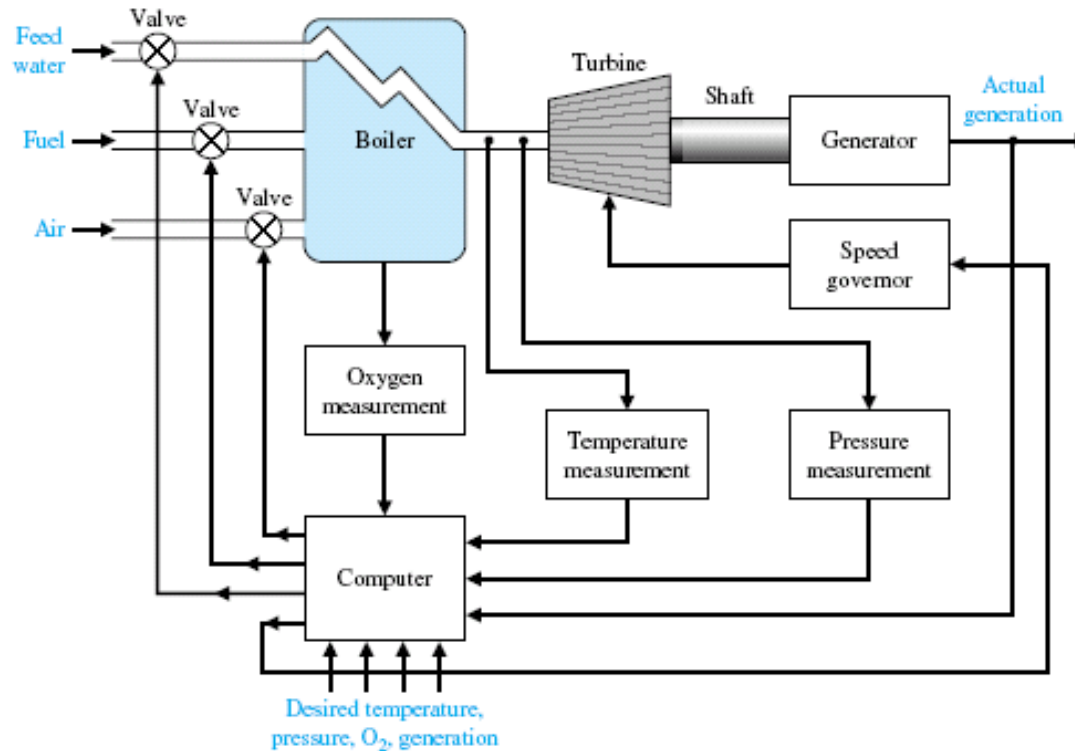
(a) Manual Control System



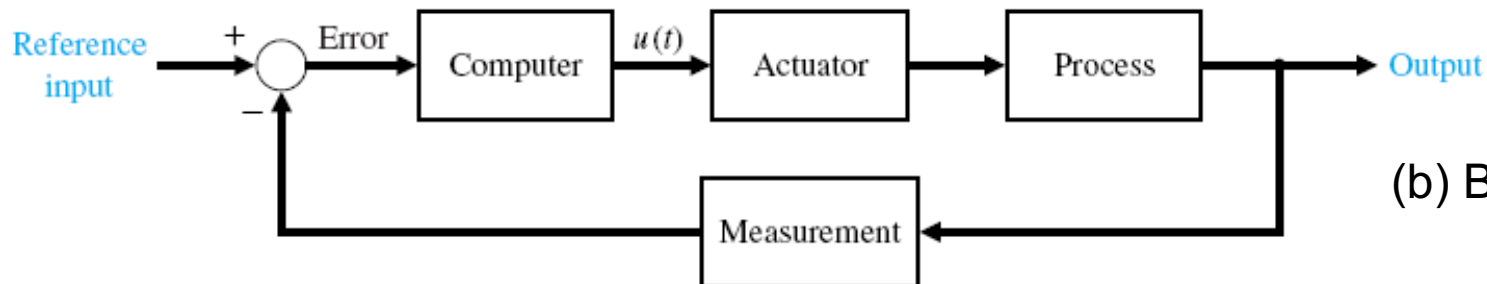
(b) Block Diagram

# 1.4 控制系统举例

## Coordinated Control System 多入多出系统



(a) Coordinated Control System for Boiler Generator



(b) Block Diagram



# 1.5 对控制系统的基本要求与研究内容

## 1. 基本要求

**稳**定性：初始值的影响、扰动的影响

**准**确性：稳态响应

**快**速性：动态响应

## 2. 研究内容

**系统分析**：已知系统的结构和参数，分析**典型**输入信号下系统的响应及指标

**系统设计(系统综合)**

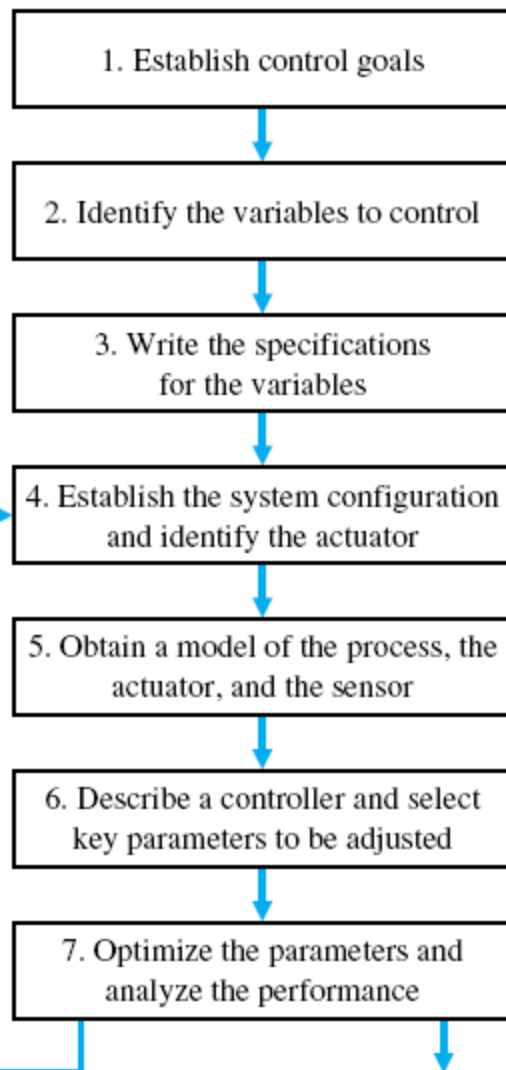
- (1) 阶跃信号
- (2) 斜坡信号
- (3) 脉冲信号
- (4) 正弦信号



# 1.6 设计流程

(阅读：教材1.5节)

- 确定控制目标
- 辨识确定受控变量
- 系统性能指标要求
- 进行系统配置
  - ★ 执行结构
  - ★ 传感器
  - ★ 控制器
- 调节系统参数
  - ★ 得到期望性能



If the performance does not meet the specifications, then iterate the configuration and the actuator.

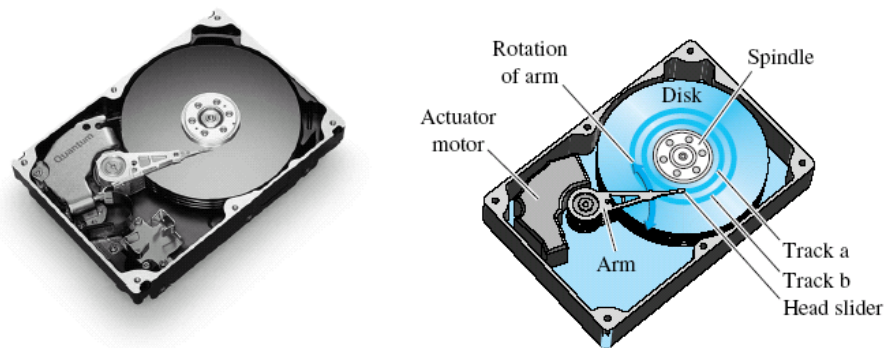
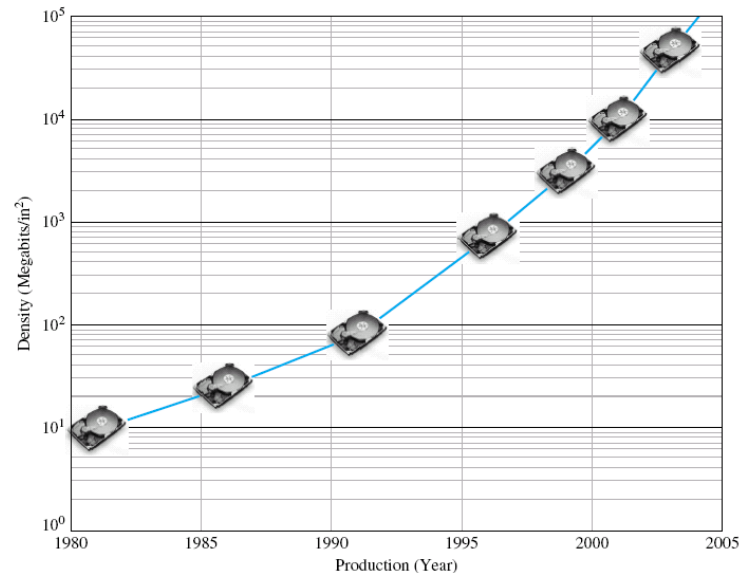
If the performance meets the specifications, then finalize the design.





# 1.6 设计实例

- 控制目标
  - ★ 磁头准确定位
- 控制变量
  - ★ 磁头的精确位置
- 设计指标
  - ★ 位置精度  $1\mu\text{m}$
- 系统配置
  - ★ 闭环控制系统
    - 执行器
    - 传感器
    - 控制器



A disk drive and a diagram



# 小结

- 控制理论与技术的发展简况
- 控制系统的基本形式和基本组成环节
- 控制系统的主要分类
- 对控制系统的基本要求与研究内容



# 课程体系结构

## 自动控制理论A: 自动控制系统模型与分析

系统数学  
模型描述

离散系统模型  
状态空间模型  
传递函数模型  
微分方程模型

控制系统  
时域分析

基于状态方程的分析  
基于脉冲传函数的分析  
基于传函数的分析

系统稳定  
性分析

稳态误差分析  
基于根轨迹的稳定性  
基于状态空间的稳定性  
基于传函数的稳定性

系统频域  
分析

闭环系统稳定性分析  
控制系统的频率特性  
频率特性



# 课程体系结构

## 自动控制理论B: 自动控制系统综合

频率响应  
法

传递函数  
法

状态空间  
法

非线性控  
制系统



# 课程体系结构

## 自动控制理论A+B: 自动控制系统 分析与综合

线性定常  
连续系统

线性定常  
离散系统

非线性控  
制系统

建模 + 分析 + 综合



## 课外阅读

1. Albertos & Mareels: “*Feedback and Control for Everyone*”, Springer, 2010.
2. Astrom & Kumar: “Control : A perspective”
3. Frank L. Lewis: “A brief history of feedback control”
4. S. Bennett: “A brief history of automatic control”
5. 陈关荣: “维纳-昔日神童和数学家”

版权归张宏伟所有，仅供哈工大深圳课堂使用



哈爾濱工業大學(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

# 自动控制理论 A

## (Principles of Automatic Control)

主讲人：张宏伟、张颖

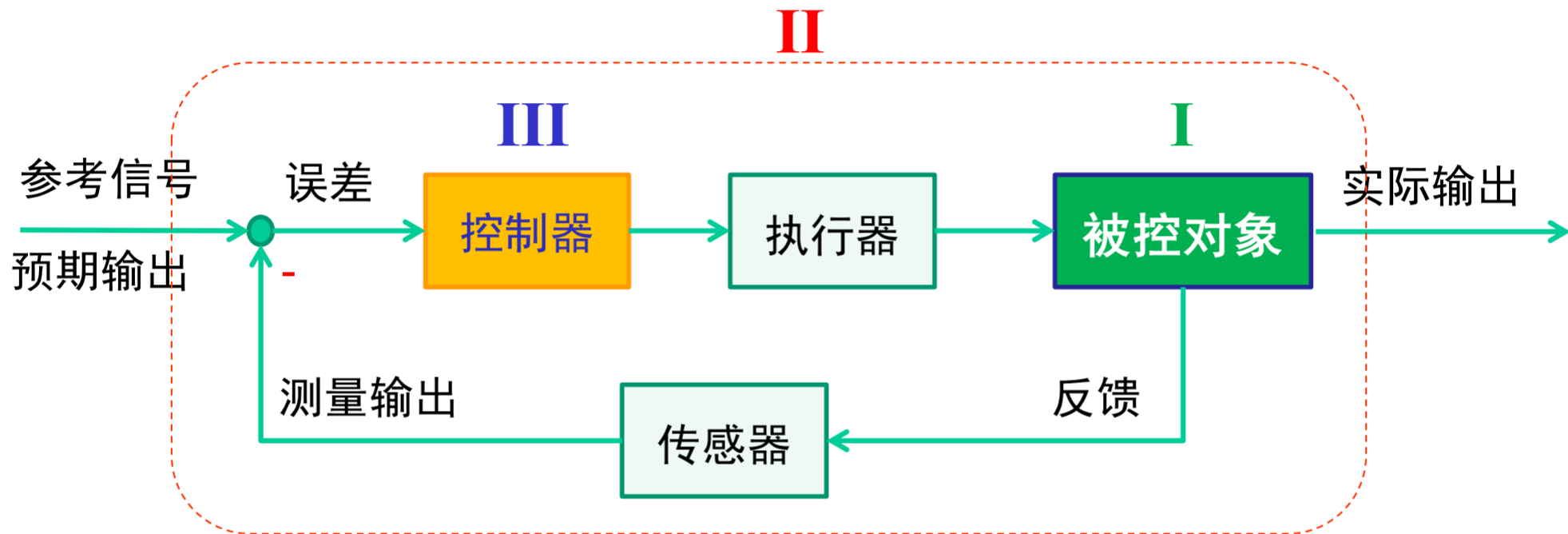
机电工程与自动化学院  
哈尔滨工业大学(深圳)

2023.08.31 THU





# 第二章 控制系统的数学模型



I: 系统建模  
 II: 系统分析  
 III: 系统设计/综合

I: Modeling  
 II: Analysis  
 III: Design/Synthesis



## 第二章 控制系统的数学模型

- 2.1 引言
- 2.2 时域数学模型—微分方程
- 2.3 Laplace变换
- 2.4 复数域数学模型—传递函数
- 2.5 方框图模型
- 2.6 信号流图
- 2.6 状态空间模型
- 2.7 输入输出模型与状态空间模型之间的转换
- 2.8 线性离散系统的数学模型
- 2.9 系统数学模型举例



## 2.1 引言

分析、设计控制系统的第一步是建立系统的数学模型，然后用数学方法处理。

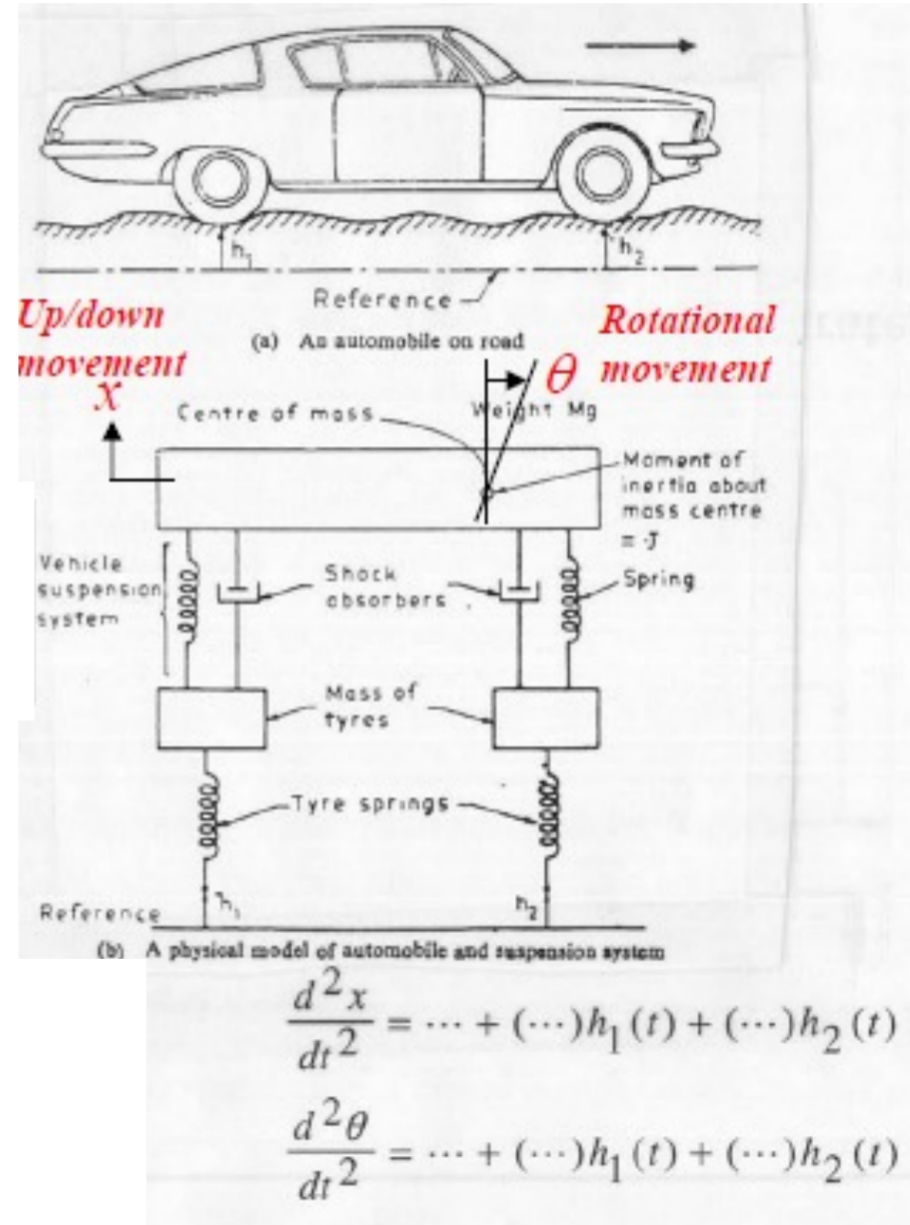
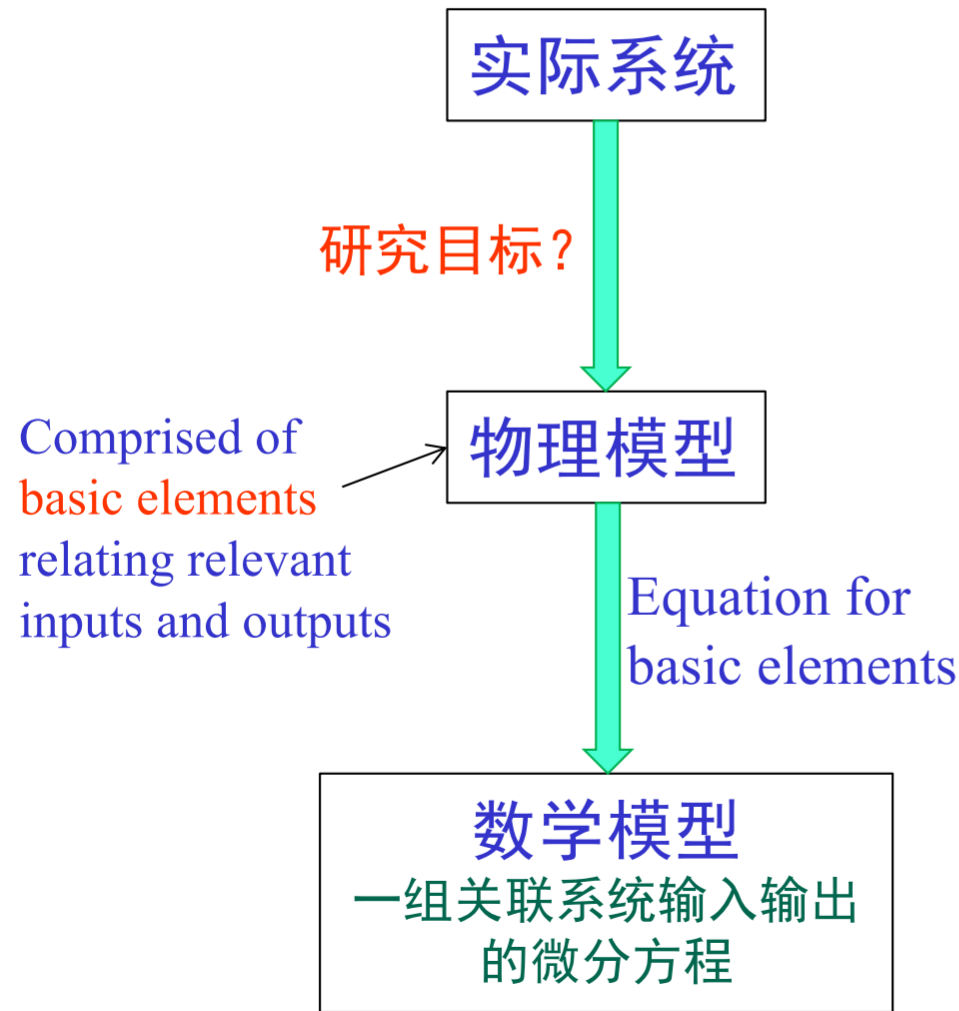
- **数学模型**是描述系统各物理量（或变量）之间关系的数学表达式或图形表达式或数字表达式。
- **数学模型**是实际物理系统的抽象与近似，是对实际物理系统作简化假设的结果。
- **同一个物理系统可以由若干不同的模型描述**，这些模型对应着不同的、待研究的系统特性。
- **不同的实际物理系统可以对应同一个模型。**

**控制系统性能分析与设计的效果取决于系统数学模型的优劣**



# 2.1 引言

## 汽车减震系统建模过程



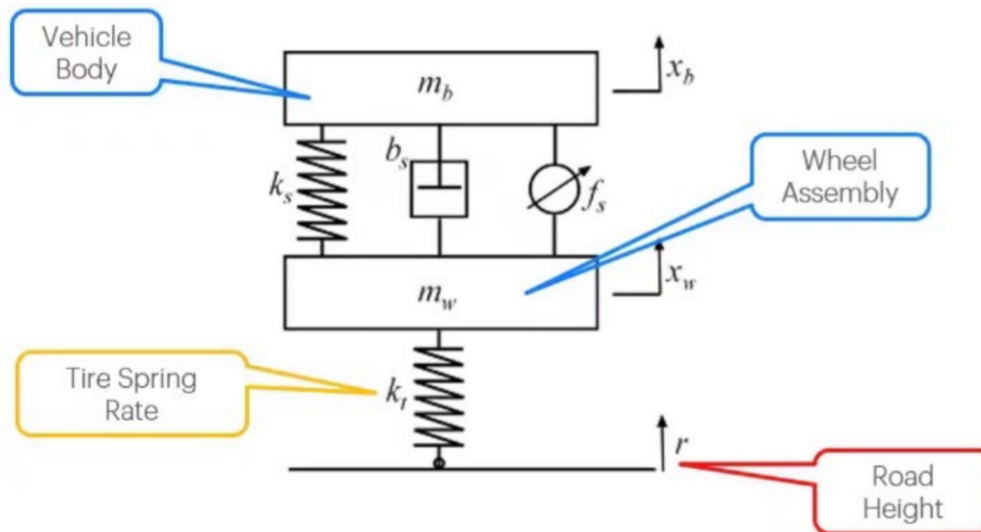


# Basics of active suspension control

## Quarter-Car Model

A typical quarter car model to study active suspension [1]

Rattle



Linear state-space model

$$m_b \ddot{x}_b = -k_s(x_b - x_w) - b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) + f_s$$

$$m_w \ddot{x}_w = k_s(x_b - x_w) + b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) - k_t(x_w - r) - f_s$$

Matlab中的模型

Quarter-Car Model

Acknowledge to

Dr. Yu Jiang

[1] Robust Control of Active Suspension, MathWorks Documentation  
 [2] D. Karnopp, et. al., Vibration Control Using Semi-Active Force Generators, 1974  
 © 2022 ClearMotion Inc.



# 2.1 引言

## 理想原件的 微分方程 (Dolf 12<sup>th</sup> 表2.2)

**Table 2.2 Summary of Governing Differential Equations for Ideal Elements**

Type of Element	Physical Element	Governing Equation	Energy $E$ or Power $\mathcal{P}$	Symbol
Inductive storage	Electrical inductance	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	
	Translational spring	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	
	Rotational spring	$\omega_{21} = \frac{1}{k} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	
	Fluid inertia	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} IQ^2$	
Capacitive storage	Electrical capacitance	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v_{21}^2$	
	Translational mass	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v_2^2$	
	Rotational mass	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega_2^2$	
	Fluid capacitance	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2$	
Thermal capacitance	$q = C_t \frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t \mathcal{T}_2$		
Energy dissipators	Electrical resistance	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
	Translational damper	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b v_{21}^2$	
	Rotational damper	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b \omega_{21}^2$	
	Fluid resistance	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$	
	Thermal resistance	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	





## 2.1 引言

### 性质不同的系统用不同的数学工具描述其模型

- 线性定常系统：常系数线性 常微分方程  
(线性时不变系统) 传递函数  
脉冲响应 (FIR, IIR)  
状态空间
- 线性时变系统：变系数线性 常微分方程
- 非线性系统：非线性 常微分方程
- 分布参数系统：偏微分方程
- 离散系统：差分方程

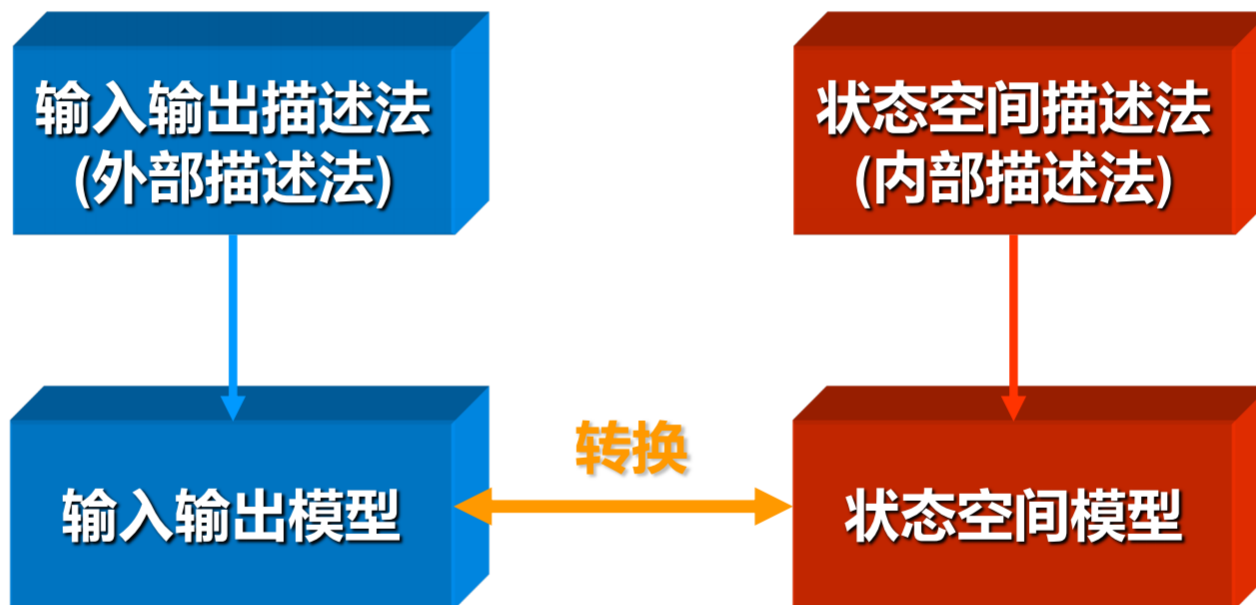
什么是：  
常微分方程 ODE  
偏微分方程 PDE  
差分方程 DE  
阶数





## 2.1 引言

### 线性控制系统描述方法

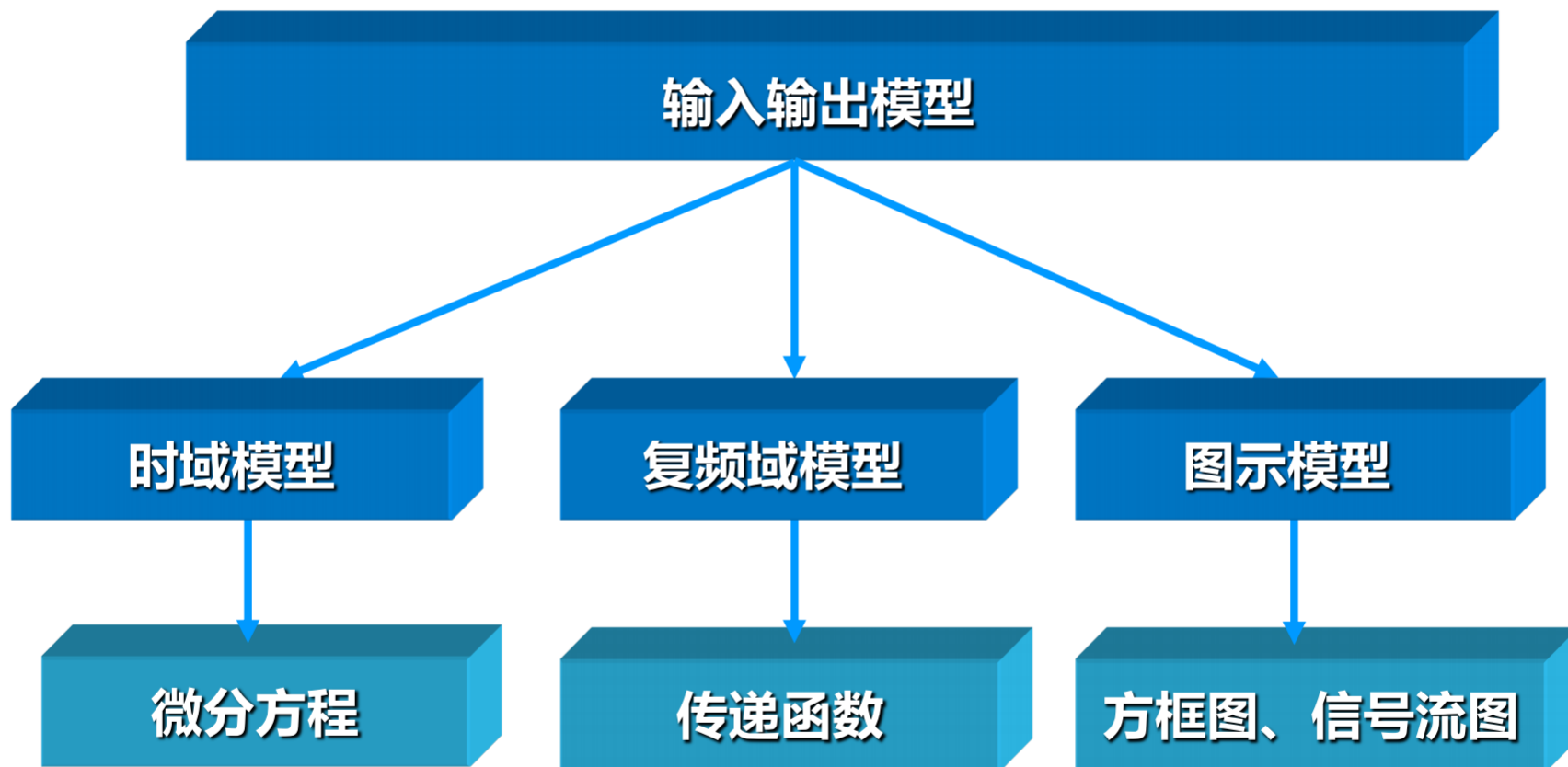


### 线性控制系统数学模型



## 2.1 引言

### 线性控制系统输入输出数学模型





## 2.1 引言

### 建立系统数学模型的方法

- 机理分析法（白箱模型）

根据基本的物理规律、化学规律及能量守恒定律等，动态系统可用微分方程描述

- 试验法/测试法（黑箱模型）

经典辨识（脉冲响应、阶跃响应）

- 综合法（灰箱模型）

一般通过机理分析建立模型结构，然后通过系统辨识确定模型参数

数学模型的合理性：

在模型简化性和分析结果的准确性之间，折衷考虑

# Great minds on modeling



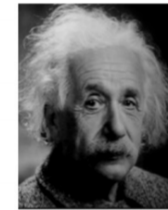
Our acceptance of models should thus be guided by 'usefulness' rather than 'truth.'  
- Lennart Ljung

True 真



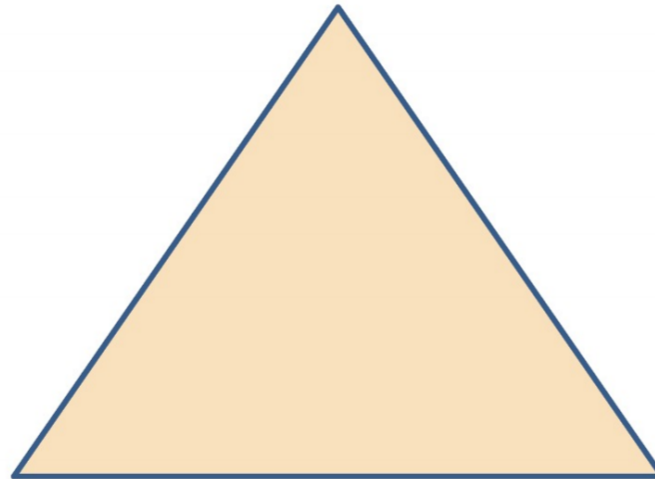
1. Get the physics right
2. After that, it is all mathematics.

- Rudolf E Kalman

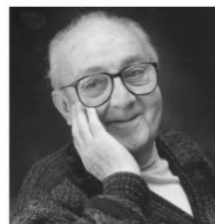


Make things as simple as possible, but not simpler.  
- Albert Einstein

Useful 益



Simple 朴



All models are wrong, some are useful.  
- George E P Box

Acknowledge to:  
Prof. Xiaohua Xia





## 2.2 时域中的数学模型—微分方程

### ● 系统数学模型举例

#### 机械系统的数学模型

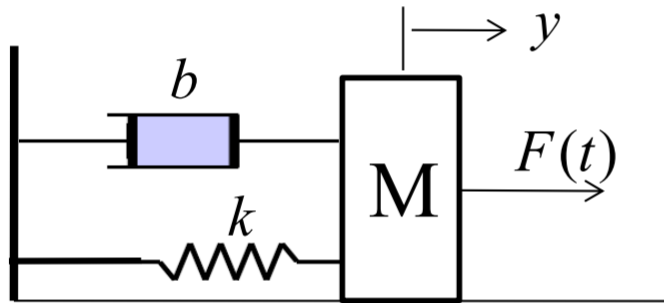


Fig. 2.2 弹簧-质量块-阻尼系统

牛顿定律

- $F = ma$
- $\tau = I\ddot{\theta}$

输入:  $F$       输出:  $y$

$$M\ddot{y} + ky + b\dot{y} = F(t)$$

$$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

输入:  $F$       输出:  $v$

$$M\dot{v} + bv + k \int_0^t v(\tau) d\tau = F(t)$$



# 2.2 时域中的数学模型—微分方程

## 电气系统的数学模型

基尔霍夫电流定律 KCL  
基尔霍夫电压定律 KVL

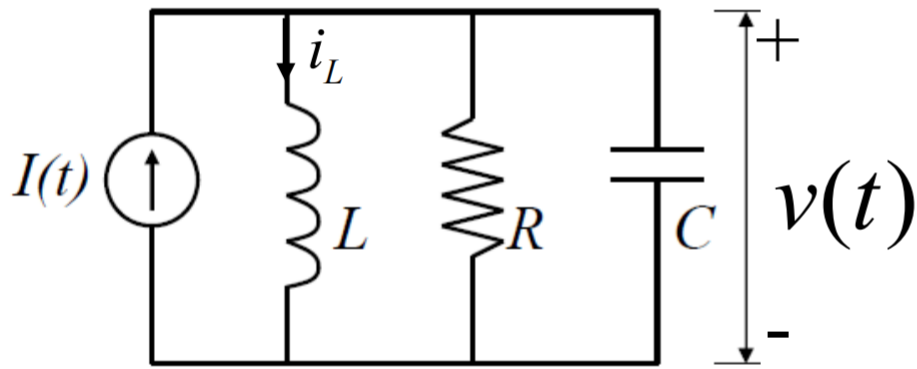


Fig. 2.3 RLC 电路

输入:  $I$     输出:  $v(t)$

$$C\dot{v} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau = I(t)$$

输入:  $I$     输出:  $x(t)=i_L$

$$CL\ddot{x} + \frac{L}{R}\dot{x} + x = I(t)$$

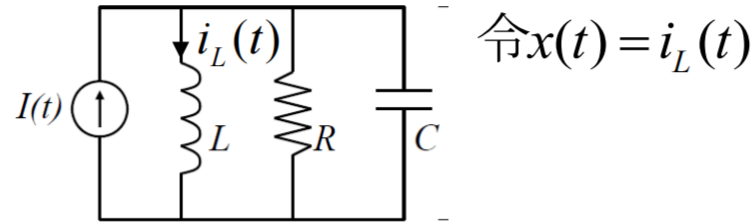
电容  $i_c(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$      $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)d\tau$

电感  $v = L\frac{di_L}{dt}$      $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$



# 2.2 时域中的数学模型—微分方程

电气系统



令  $x(t) = i_L(t)$

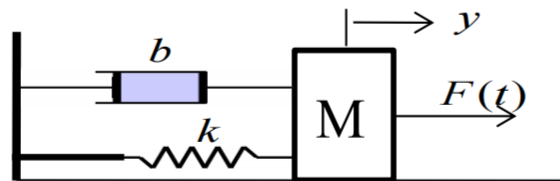
$$CL\ddot{x} + \frac{L}{R}\dot{x} + x = I(t)$$

相似变量：  
电感电流---位移

相似系统

$$\frac{M}{k}\ddot{y} + \frac{b}{k}\dot{y} + y = F(t)$$

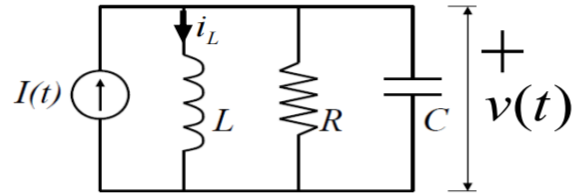
机械系统





# 2.2 时域中的数学模型—微分方程

电气系统



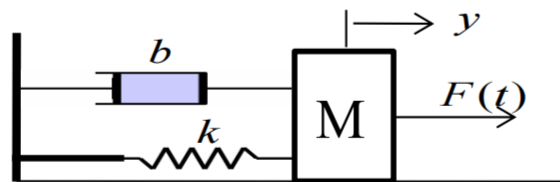
$$C\dot{v} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau = I(t)$$

相似变量：  
电压--速度

相似系统

$$M\dot{v} + bv + k\int_0^t v(\tau)d\tau = F(t)$$

机械系统



透过现象看本质

道

可以构建A系统来研究B系统





**例 2.1.3** 一个由弹簧 - 质量 - 阻尼器组成的机械平移系统如图 2.1.3 所示。 $m$  为物体质量,  $k$  为弹性系数,  $f$  为粘性阻尼系数, 外力  $F(t)$  为输入量, 位移  $y(t)$  为输出量。列写系统的运动方程。

**解** 取垂直向下为力和位移的正方向。当  $F(t) = 0$  时, 物体的平衡位置为位移  $y$  的零点。该物体受到四个力的作用: 外力  $F(t)$ 、弹簧的弹力  $F_k$ 、粘性摩擦力  $F_B$  及重力  $mg$ 。

$$F(t) - F_k - F_B + mg = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$F_B = f \frac{dy(t)}{dt}$$

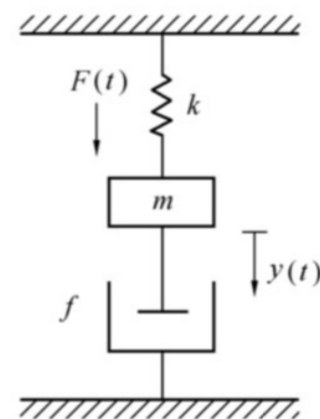
$$F_k = k[y(t) + y_0]$$

$$mg = ky_0$$



$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k} F(t)$$

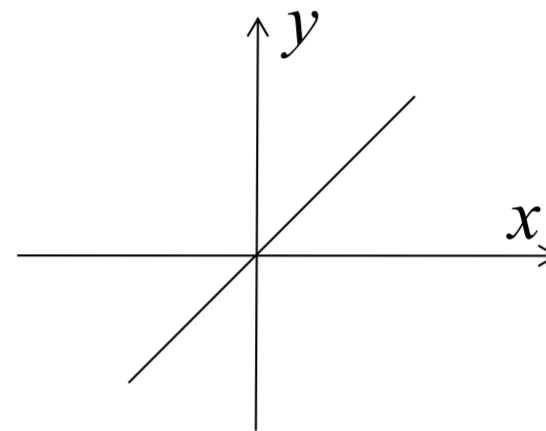
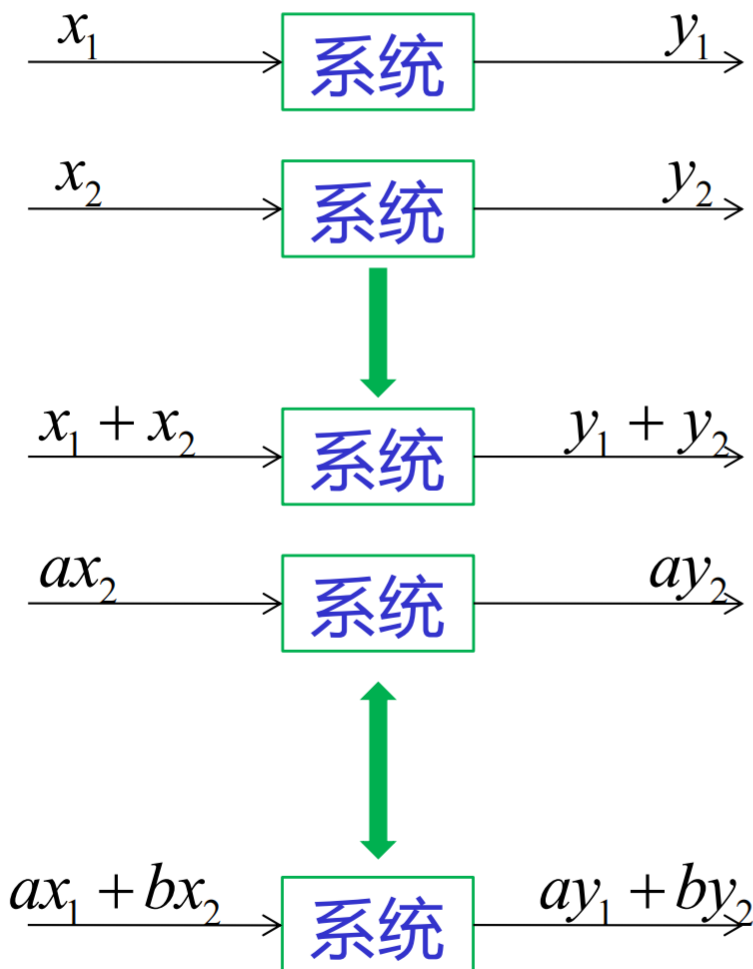


**二阶线性  
定常系统**



# 2.2 时域中的数学模型—微分方程

## 线性系统



叠加性

齐次性

线性系统

线性时变系统  
(LTV)

线性时不变系统  
(LTI)



## 2.2 时域中的数学模型—微分方程

### ● 描写线性定常(LTI)系统的微分方程

linear time-invariant  
(LTI)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

$a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 、 $b_j (j = 0, 1, \dots, m)$ 均为实数

输入： $r$   
输出： $y$



建立微分方程的一般步骤:

1. 确定输入 $r(t)$ 和输出 $y(t)$ ;
2. 列写各环节的微分方程;
3. 消去中间变量, 求得输入/输出关系

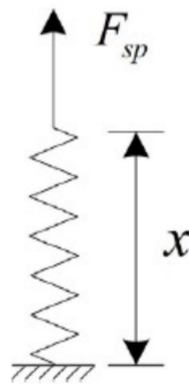
思考:

1. 为什么叫动态系统  
dynamic systems
2.  $n$  与  $m$  的关系?



# 2.2 时域中的数学模型—微分方程

几乎所有的物理系统均是非线性系统！

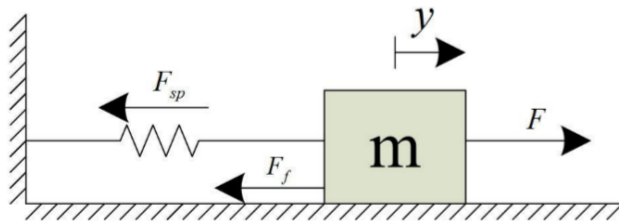


非线性弹簧  
硬化弹簧  
软弹簧

$$F_{sp} = x^2$$

$$F_{sp} = k(1 + a^2 x^2)x = kx + ka^2 x^3$$

$$F_{sp} = k(1 - a^2 x^2)x = kx - ka^2 x^3$$



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k\alpha^2 y^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

Duffing equation

$$m\ddot{y} = F - F_{sp} - F_f$$

where  $F = \gamma \cos(\omega t)$  external force

$F_{sp} = k(1 + \alpha^2 y^2)y$  hardening spring

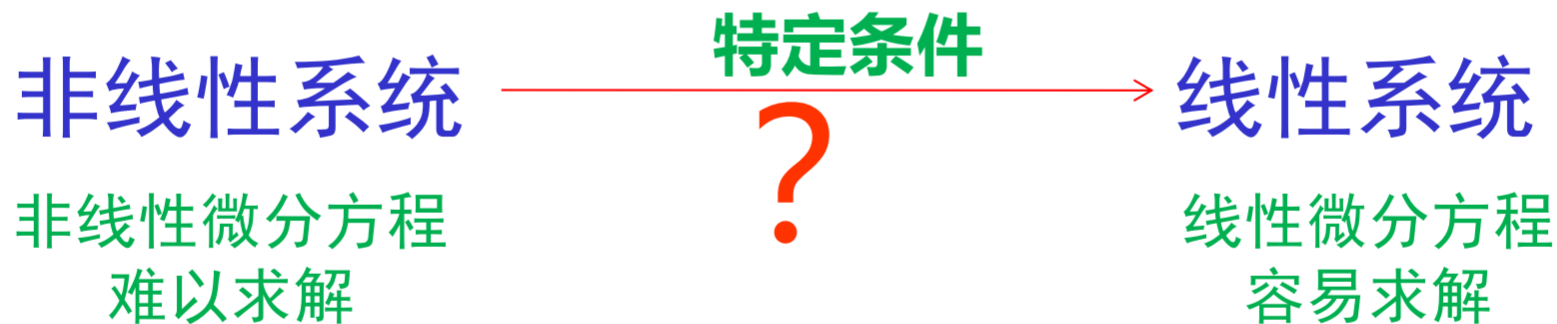
$F_f = c\dot{y}$  friction force due to velocity



## 2.2 时域中的数学模型—微分方程

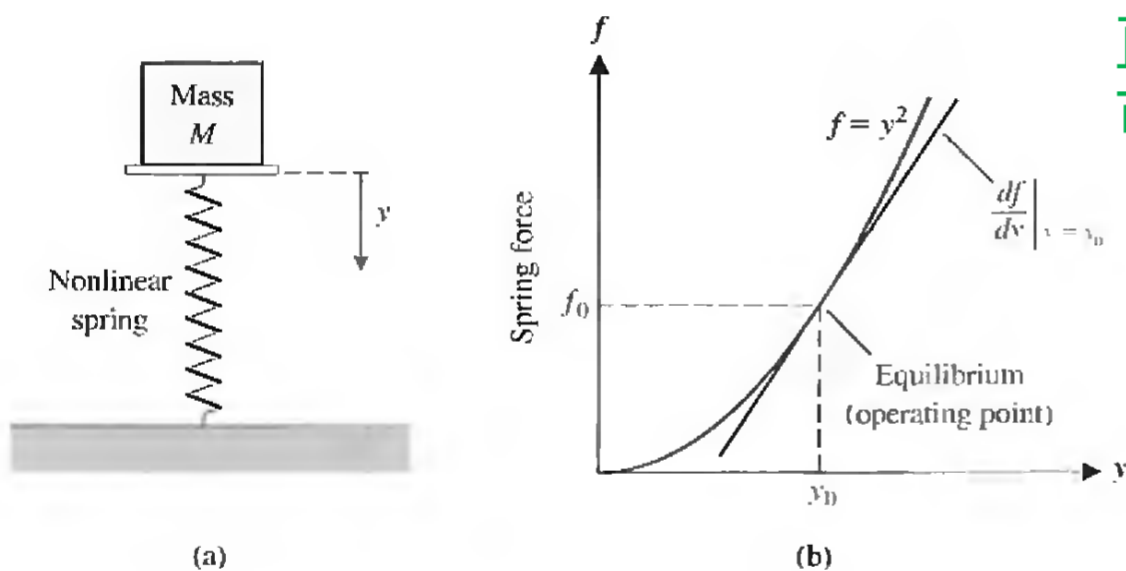
几乎所有的物理系统均是非线性系统！

为什么还要研究线性系统??



## 2.2 时域中的数学模型—微分方程

特定条件：系统运行在工作点附近，即“小信号”假设



直观：曲线在平衡点邻域内可用直线来逼近

$$f - f_0 = \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0} (y - y_0)$$

$$\Delta f = m \Delta y$$

(Dolf) Fig.2.5 非线性弹簧工作点附近的线性化

地球是圆的 ← 大范围  
地球是平的 ← 小范围



## 2.2 时域中的数学模型—微分方程

理论依据：泰勒展开 (Taylor Expansion)

$$f(y) = f(y_0) + \frac{df}{dy}\bigg|_{y_0} (y - y_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dy^2}\bigg|_{y_0} (y - y_0)^2 + \overset{\text{高阶项}}{h.o.t.}(y - y_0)$$

当  $y - y_0$  非常小时

$$f(y) \approx f(y_0) + \frac{df}{dy}\bigg|_{y_0} (y - y_0)$$

$$f(y) - f(y_0) \approx m(y - y_0)$$

非线性函数在工作点附近小邻域内的线性化



## 2.2 时域中的数学模型—微分方程

**理论依据：泰勒展开 (Taylor Expansion)**

多元函数  $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$

在工作点(平衡点)  $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$  附近的线性化

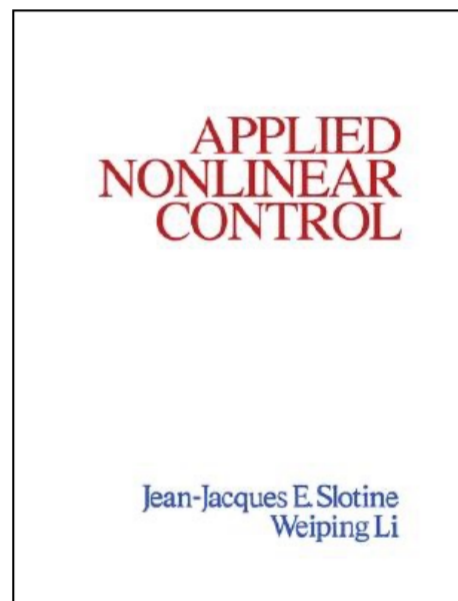
$$y = g(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x=x_0} (x_1 - x_{1_0}) \\ + \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{x=x_0} (x_2 - x_{2_0}) + \dots + \left. \frac{\partial g}{\partial x_n} \right|_{x=x_0} (x_n - x_{n_0})$$





## 2.2 时域中的数学模型—微分方程

当非线性系统在较大范围内运行时，则不能近似为线性系统



自控原理：线性时不变系统 (Linear Time-Invariant System, LTI)

输入输出关系不随时间改变  
线性微分方程的系数为常数



---

9.5 (Tue)

第3讲



## 2.3 Laplace变换

研究线性系统  $\longrightarrow$  求解微分方程 复杂

参考书: Boyce & DiPrima,  
*Elementary Differential Equation and  
Boundary Value Problems* (QQ群)

Laplace变换

$f(t)$

$F(s)$

求解代数方程 简单

Laplace变换 (Laplace Transform) (参考Franklin第3.1.1节)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (s = \sigma + j\omega)$$

推荐: MIT公开课 "Differential Equation" by Prof. Authur Mattuck

积分变换收敛  $\longrightarrow$   $f(t)$ 可变换

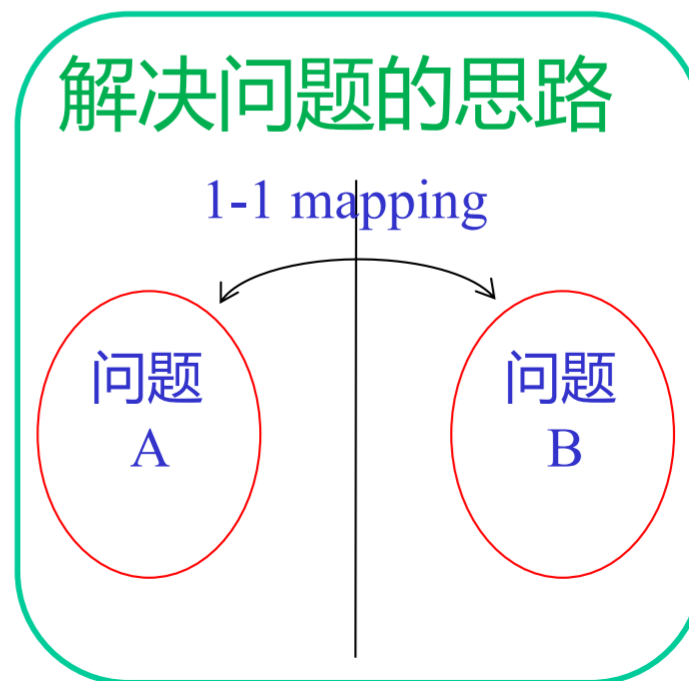
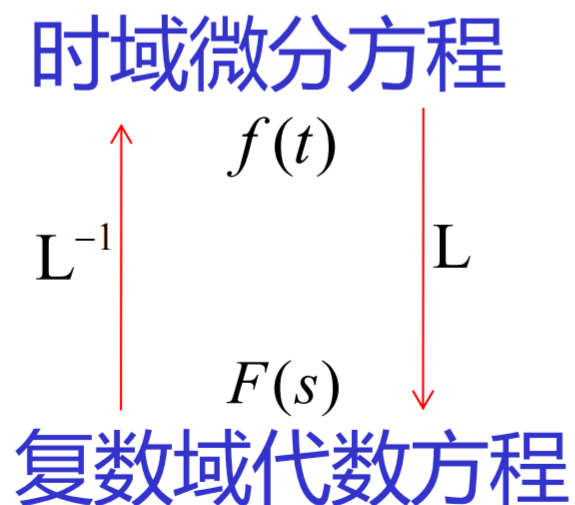
物理可实现的信号通常都是可变换的



## 2.3 Laplace变换

### Laplace逆变换 (Inverse Laplace Transform)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \triangleq \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{+st} ds$$





## 2.3 Laplace变换

### Laplace变换的一些性质 (参考Franklin 第3.1.4节)

(a) Superposition of functions  $f_1(t)$  and  $f_2(t)$

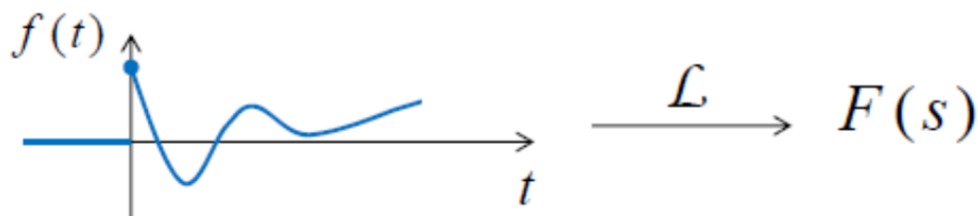
线性变换

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

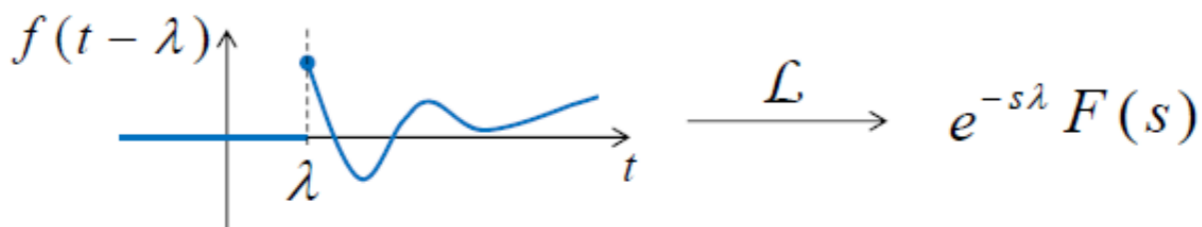
(b) Time Delay (Function shift to right by duration  $\lambda > 0$ )

$$\mathcal{L}[f(t - \lambda)] = e^{-s\lambda} F(s)$$

Given



Then



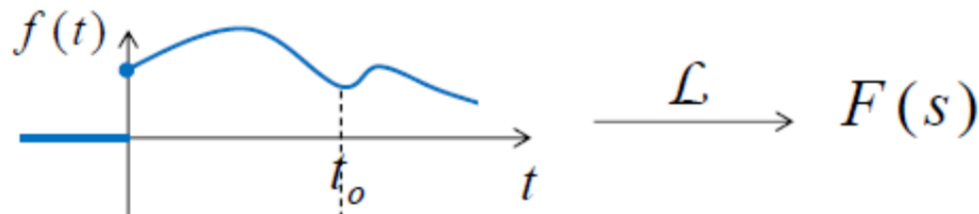


## 2.3 Laplace变换

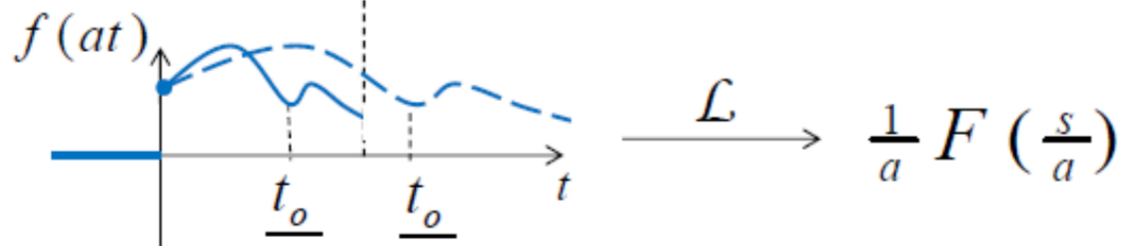
(c) Time Scaling (Expansion/contraction of time axis)

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

Given



Then



$a > 1$   
Contraction  
of time axis

$a < 1$   
Extension  
of time axis

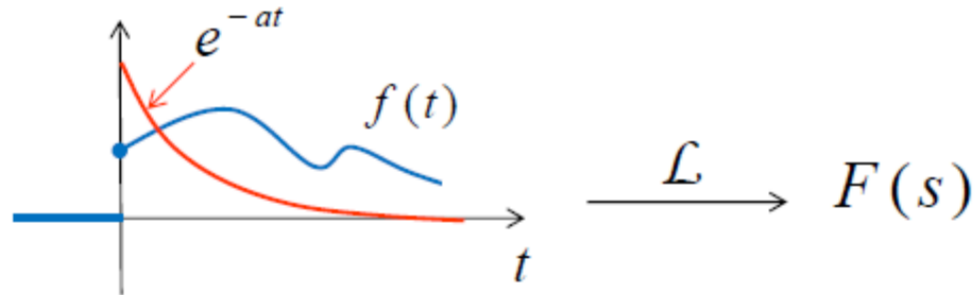


## 2.3 Laplace变换

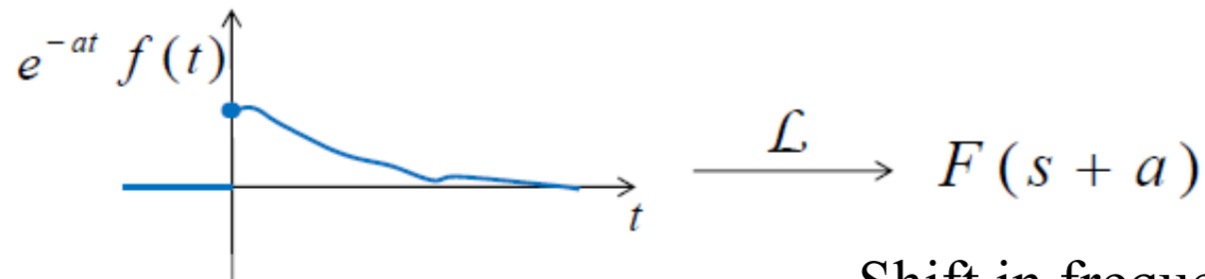
(d) Modulation by Exponential factor

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

Given



Then



Shift in frequency



## 2.3 Laplace变换

(e) Differentiation of a function

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0^-)$$

- Generalization

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} \underbrace{f(0^-)}_{\substack{\text{Value of } f(t) \\ \text{at } t = 0^-}} - s^{n-2} \underbrace{\dot{f}(0^-)}_{\substack{\text{Value of } \frac{d}{dt} f(t) \\ \text{at } t = 0^-}} - \dots - \underbrace{f^{(n-1)}(0^-)}_{\substack{\text{Value of } \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) \\ \text{at } t = 0^-}}$$

- For function and derivatives all starting at zero

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s)$$

(f) Integration of a function

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{F(s)}{s}$$





## 2.3 Laplace变换

### (g) Convolution Theorem

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s)$$

where “convolution” of function  $f_1(t)$  and  $f_2(t)$  defined as:

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &\equiv \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

### (h) Time product

$$\mathcal{L}\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$



## 2.3 Laplace变换

(i) Multiplication by time

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$$

(j) Initial value theorem (初值定理)

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

(k) Final value theorem (终值定理)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

成立条件：Y(s)不能在虚轴和右半平面存在极点，原点处不能有多重极点 (原点处允许有一个极点)



## 2.3 Laplace变换

(i) Multiplication by time

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$$

(j) Initial value theorem (初值定理)

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

(k) Final value theorem (终值定理)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

成立条件：Y(s)不能在虚轴和右半平面存在极点，原点处不能有多重极点 (原点处允许有一个极点)



## 2.3 Laplace变换



<例2.1> 求解阶跃函数的拉氏变换  $L\{1\}$

解: 
$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{0-1}{s} = \frac{1}{s} \quad \text{当 } s > 0.$$

Exercise: 求解  $L\{e^{-at}\}$

Exercise: 求解  $L\{f'(t)\}$



# 2.3 L

## Dorf 表2.3 Laplace变换对

Table 2.3 Important Laplace Transform Pairs

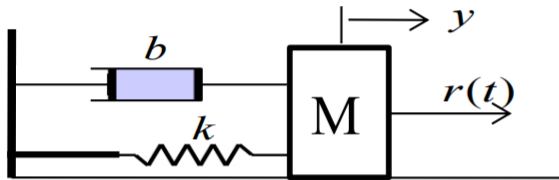
$f(t)$	$F(s)$
Step function, $u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}$	$s^k F(s) - s^{k-1} f(0^-) - s^{k-2} f'(0^-) - \dots - f^{(k-1)}(0^-)$
$\int_{-\infty}^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(t) dt$
Impulse function $\delta(t)$	1
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega} [(\alpha - a)^2 + \omega^2]^{1/2} e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$ , $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a}$	$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \zeta < 1$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
$\frac{1}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-at} \sin(\omega t - \phi)$ , $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{-a}$	$\frac{1}{s[(s+a)^2 + \omega^2]}$



## 2.3 Laplace变换



**<例2.2>** 用拉氏变换求解微分方程  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = r(t)$   
其中  $r(t) = 0, y(0^-) = y_0, \dot{y}(0^-) = 0$



解：对微分方程  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = r(t)$  进行Laplace变换，得到

$$(s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)) + 3(sY(s) - y(0^-)) + 2Y(s) = R(s)$$

在初始条件下，有  $s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) - (s+3)y_0 = 0$ ，即

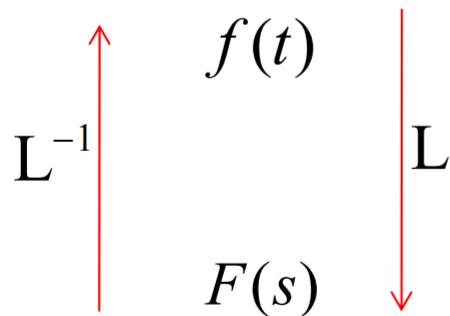
$$Y(s) = \frac{(s+3)y_0}{s^2 + 3s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{2y_0}{s+1} - \frac{y_0}{s+2} \quad ?$$

利用Laplace逆变换可得

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2y_0}{s+1} - \frac{y_0}{s+2}\right\} \\ &= 2y_0e^{-t} - y_0e^{-2t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

时域微分方程



复数域代数方程

系统的零输入响应



## 2.3 Laplace变换



课堂练习  
5min

$$Y(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)} \xrightarrow{?} y(t)$$

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3}$$

$$C_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=0} = \frac{8}{3}$$

$$C_2 = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)}\Big|_{s=-1} = -\frac{3}{2}$$

$$C_3 = (s+3)Y(s)\Big|_{s=-3} = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)}\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

$$y(t) = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

部分分式分解

Partial fraction decomposition



## 2.3 Laplace变换

部分分式分解法 (Partial fraction decomposition)

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

**□A(s)=0无重根**

$$F(s) = \frac{c_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{c_i}{s - s_i} + \cdots + \frac{c_n}{s - s_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - s_i}$$

$$c_i = \left. \frac{B(s)}{A(s)} (s - s_i) \right|_{s=s_i}$$





## 2.3 Laplace变换

□  $A(s)=0$  有  $r$  重根  $s_1$

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s-s_1)^r (s-s_{r+1}) \cdots (s-s_n)}$$

$$= \frac{c_r}{(s-s_1)^r} + \cdots + \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_{r+1}}{s-s_{r+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n}$$

$$c_r = \lim_{s \rightarrow s_1} (s-s_1)^r F(s)$$

$$c_{r-j} = \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(j)}}{ds^j} [(s-s_1)^r F(s)]$$

课下  
思考

$$c_1 = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(r-1)}}{ds^{r-1}} [(s-s_1)^r F(s)]$$

$c_{r+1}, \dots, c_n$

计算方法按照无重根系数求解方法。

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

$$= \left[ \frac{c_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{c_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + c_2 t + c_1 \right] e^{s_1 t} + \sum_{i=r+1}^n c_i e^{s_i t}$$



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

### ● 传递函数 (Transfer Function) 的定义



系统的传递函数: 
$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{r(t)\}} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

注意:

1. 传递函数仅描述输入输出的关系, 不反映系统的内部信息
2. 输入输出变量的初值假定为0

$$L\{y^{(n)}(t)\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

$$L\{r^{(m)}(t)\} = s^m R(s) - s^{m-1} r(0) - s^{m-2} r'(0) - \dots - r^{(m-1)}(0)$$



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

弹簧-质量块-阻尼系统  
(spring-mass-damper system)  
的传递函数

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = r(t)$$

↓ Laplace变换

$$M(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + kY(s) = R(s)$$

↓ 零初始条件  $y(0)=0, y'(0)=0$

$$(Ms^2 + bs + k)Y(s) = R(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

系统的传递函数

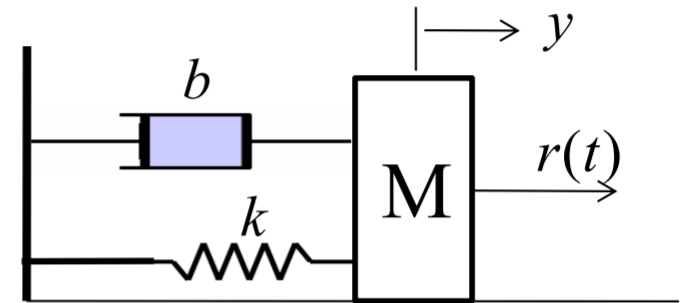


Fig. 2.2 弹簧-质量块-阻尼系统



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

### ● 线性定常系统(LTI)的传递函数

#### 线性定常系统的微分方程模型

$$\begin{aligned}
 & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\
 & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)
 \end{aligned}$$

where  $a_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, \dots, n)$ ,  $b_j \in \mathbb{R} (j = 0, 1, \dots, m)$

Laplace变换

(零初始条件)

$$L\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s)$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) R(s)$$



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

### 线性定常系统的传递函数

$$G(s) \triangleq \left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\text{零初始}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$



- 传递函数反映系统“零状态”响应的传递关系；
- 表明了系统数学模型的阶次 $n$ ，它表征着系统的固有特性(如系统的结构与参数等)，与输入 $r(t)$ 的形式无关；
- 传递函数是研究线性系统动态特性的重要工具。利用Laplace变换给出的传递函数 $G(s)$ 是最常见的形式



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

传递函数 $G(s)$ 也常用以下形式表示:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + 1}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + 1} = K \frac{\prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (t_j s + 1)}$$

其中,  $K$ —系统增益 或 传递系数 或 静态增益

$T_i, t_j$  ----时间常数

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{s^m + h_{m-1} s^{m-1} + \dots + h_1 s + h_0}{s^n + l_{n-1} s^{n-1} + \dots + l_1 s + l_0} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

其中,  $z_i$ —系统零点       $p_j$ —系统极点



## 2.4 复数域中的数学模型——传递函数

传递函数的几点说明:

1. 复域数学模型( $s$ 为复数), 与微分方程——对应
2. 只取决于系统或元件的结构和参数, 与系统输入无关
3. 与输入、输出信号的位置有关
4. 分子和分母是  $s$  的降幂有理多项式, 系数是实数, 传递函数的零点和极点是实数或共轭复数
5. 分母阶次大于或等于分子阶次
6. 不反映系统及元件的物理结构
7. 令分母多项式等于零得到系统的特征方程
8. 传递函数与系统的单位脉冲响应成拉氏变换对





## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

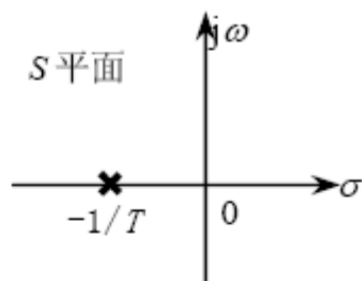
### 典型环节的传递函数

#### 1. 惯性环节

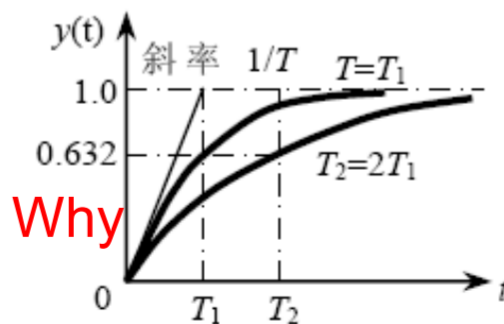
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

其中,  $T$ —惯性环节时间常数

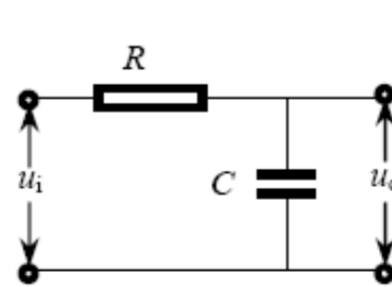


(a) 零极点分布



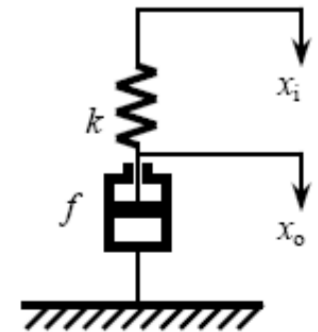
(b) 单位阶跃响应曲线

$$1 - e^{-1} = 0.632$$



$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$T = RC$$



(d) 弹簧-阻尼器系统



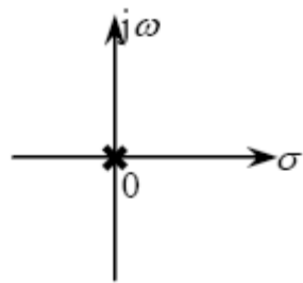


## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

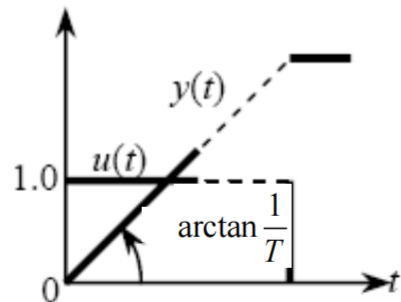
### 2. 积分环节

$$T \frac{dy(t)}{dt} = r(t)$$

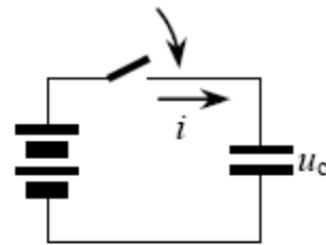
$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$



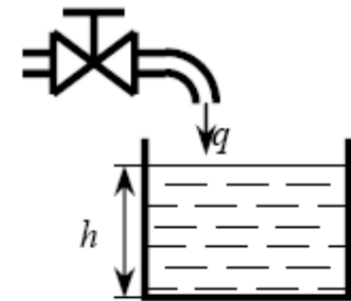
(a) 零极点分布



(b) 单位阶跃响应曲线



(c) 电容器充电  $\frac{U_c(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$



(d) 水箱  $\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Cs}$



---

9.7 (Thu)

第4讲



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

通常包含两种不同的储能元件

### 3. 振荡环节

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2Tz \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t), \quad 0 < z < 1$$

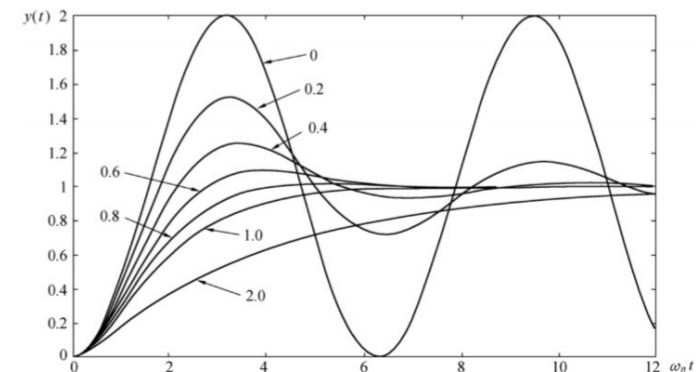
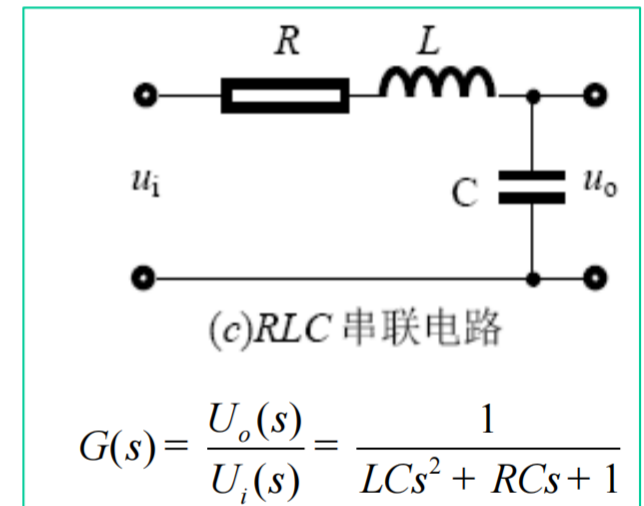
$$G(s) = \frac{1}{Ts^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

其中：

$T$ 为时间常数，

$\zeta$ 为阻尼比， $0 < z < 1$  Damping ratio

$\omega_n = \frac{1}{T}$ 为无阻尼自然振荡角频率  
Undamped natural frequency

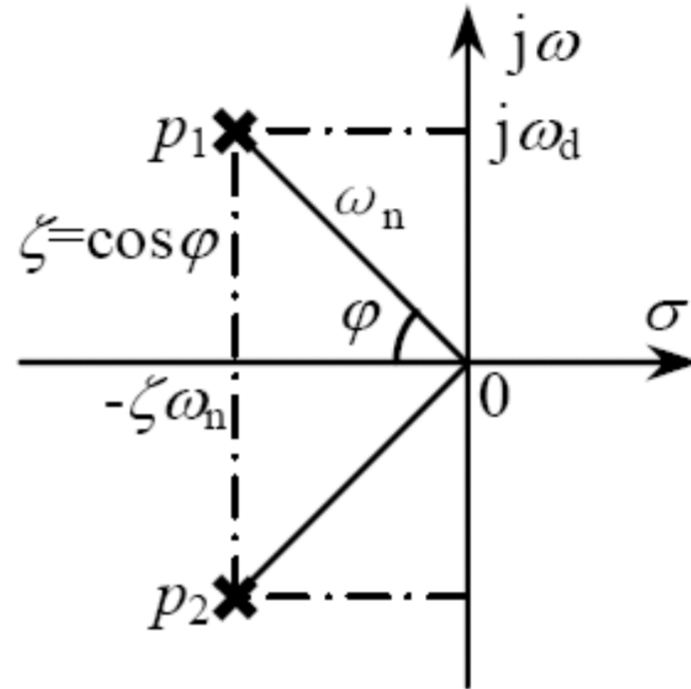


不同阻尼比下的单位阶跃响应



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{Ts^2 + 2\zeta Ts + 1} \\
 &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
 &= \frac{\omega_n^2}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad \omega_n = \frac{1}{T}
 \end{aligned}$$



传函极点  $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

(注意阻尼比的取值)

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



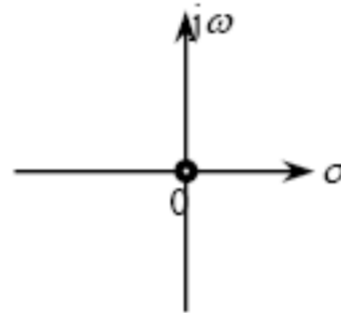
## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

### 4. 微分环节

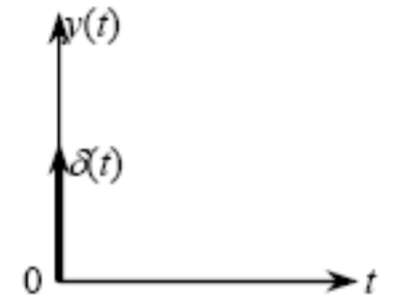
$$y(t) = T_d \frac{dr(t)}{dt}$$

$$G(s) = T_d s$$

原点处零点



(a) 零极点分布



(b) 单位阶跃响应曲线

?

理想微分环节的传递函数不是真有理分式，  
**工程实现较为困难**

$$\left. \frac{dr(t)}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + Dt) - r(t_0)}{Dt}$$



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

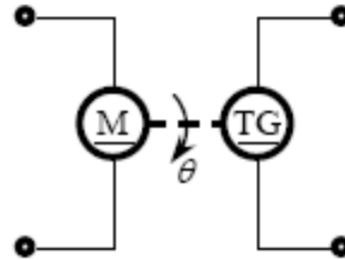
工程上常采用具有惯性环节的微分环节

$$G(s) = \frac{T_1 s}{T_2 s + 1}$$

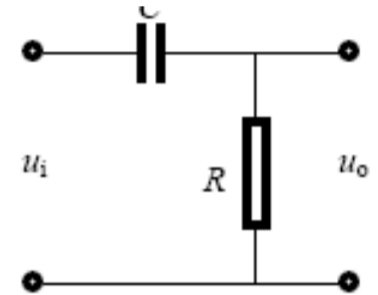
$$s = s + j\omega \quad \text{低频近似}$$

$$\omega \ll 0$$

$$G(s) \approx T_3 s$$



(c) 安装在电动机轴上的测速发电机



(d) RC 电路

$$v_o = iR = RC \frac{d(v_i - v_o)}{dt}$$

$$CR \dot{v}_o = v_o + CR \dot{v}_o$$

$$CRs V_o(s) = (CRs + 1)V_i(s)$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{CRs}{CRs + 1}$$



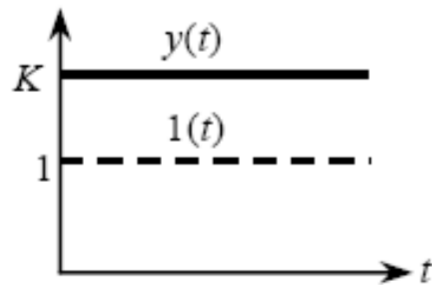
## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

### 5. 比例环节

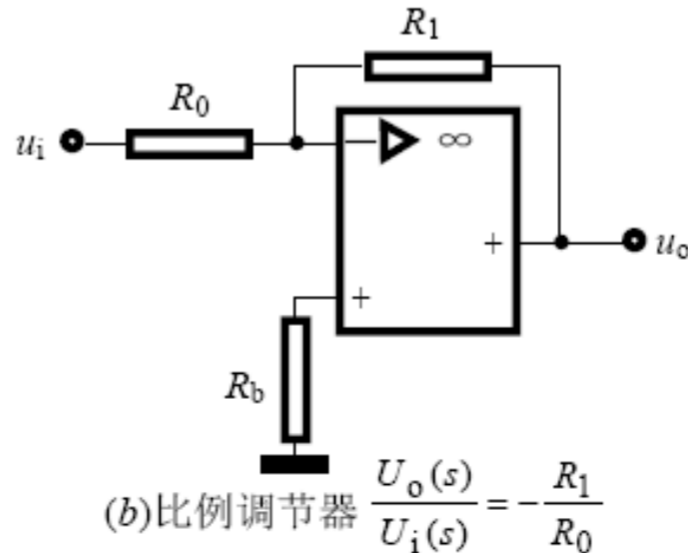
$$G(s) = K_p$$

$$y(t) = K_p r(t)$$

其中,  $K_p$  为比例系数 (增益)



(a) 单位阶跃响应曲线



(b) 比例调节器  $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{R_0}$

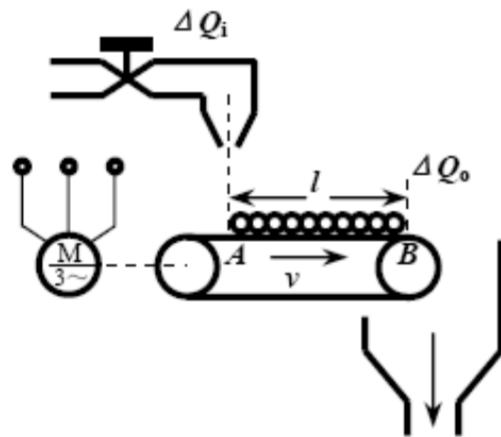


## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

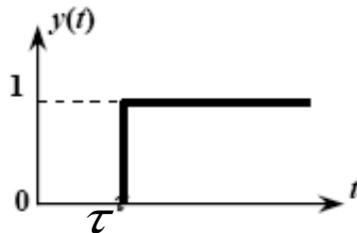
### 6. 时滞/延迟环节

$$y(t) = r(t - t)$$

$$G(s) = e^{-\tau s}$$



(a) 带式运输机系统



(b) 单位阶跃响应曲线

实际控制系统的传递函数均可视为上述典型环节的某种组合,因此熟悉和掌握典型环节对于分析研究系统是很基本的,也是很重要的





## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

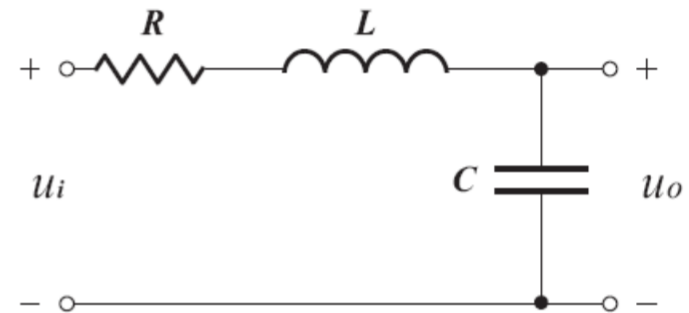
推导电网络的传递函数时,可直接通过电路元件的复阻抗  
根据电路定律获得



### <例 2.3> 求解系统传递函数

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_C(s)}{Z_R(s) + Z_L(s) + Z_C(s)}$$

$$= \frac{1/Cs}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$V_L(s) = LsI_L(s)$$

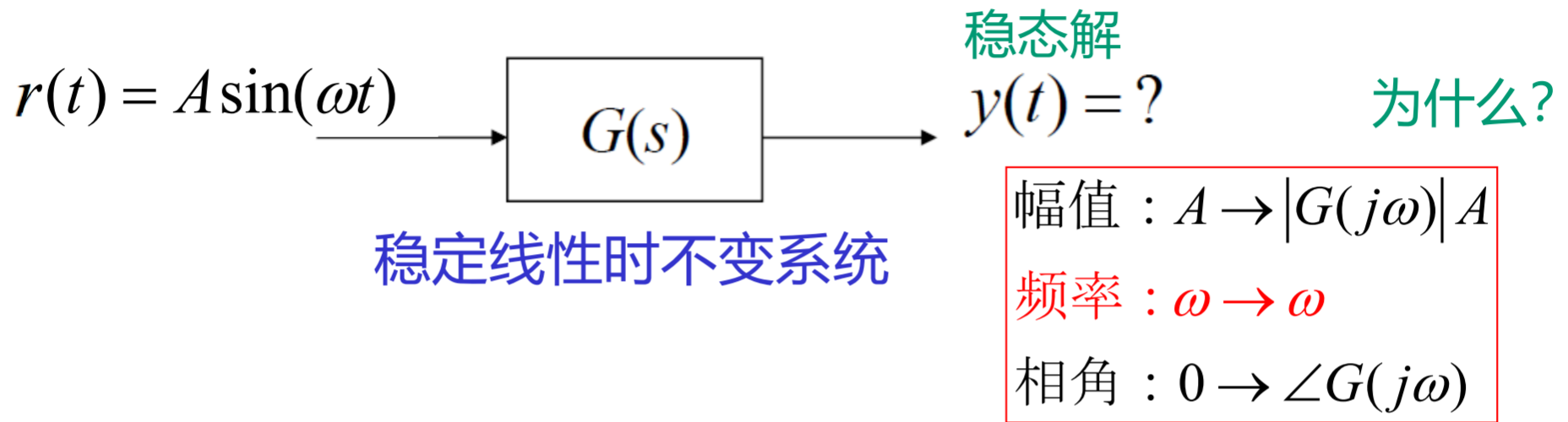
$$I_c(s) = CsV_c(s)$$

复阻抗  $Z_L(s) = \frac{V_L}{I_L} = Ls$

$$Z_c(s) = \frac{V_c}{I_c} = \frac{1}{Cs}$$



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数



### 频率特性:

在正弦输入信号作用下，系统输出的稳态分量与输入量的复数之比，用 $G(j\omega)$ 表示。

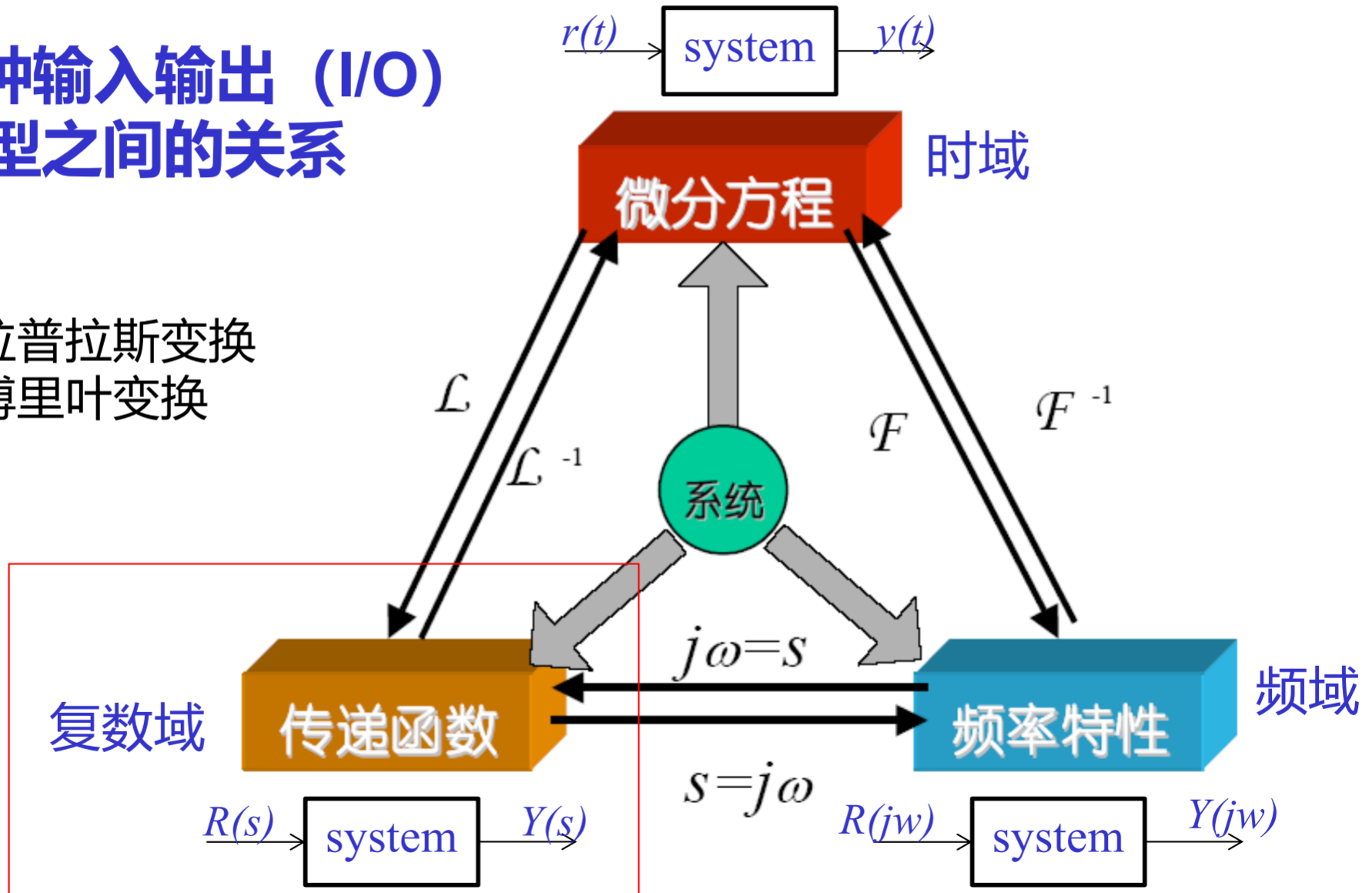
$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$



## 2.4 复数域中的数学模型—传递函数

### 三种输入输出 (I/O) 模型之间的关系

L 拉普拉斯变换  
F 傅里叶变换



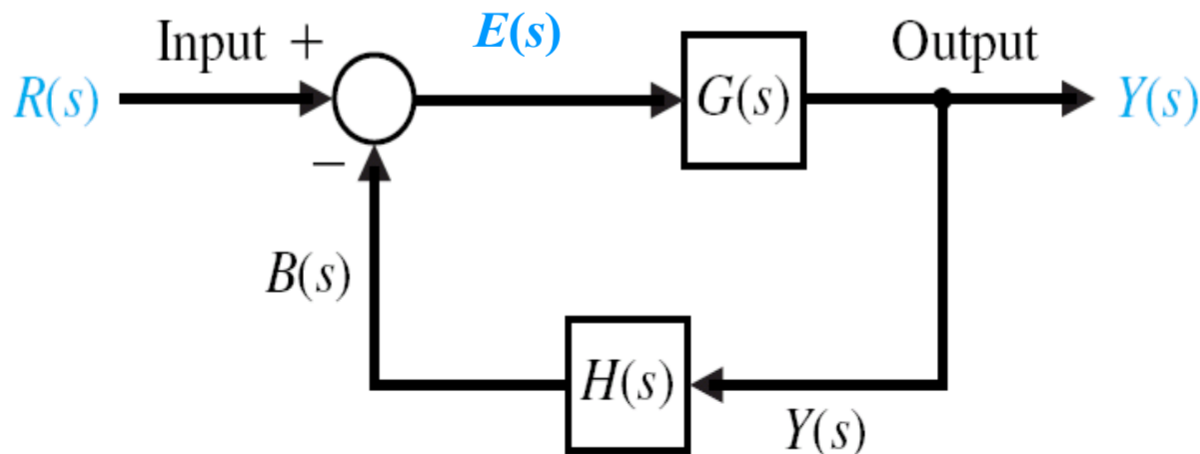


## 2.5 方框图模型

### ● 系统方框图模型 (Block diagram)

是系统中各环节的传函功能和信号流向的图解表示，是一种图形化的数学模型。也称作：系统结构图、方块图。

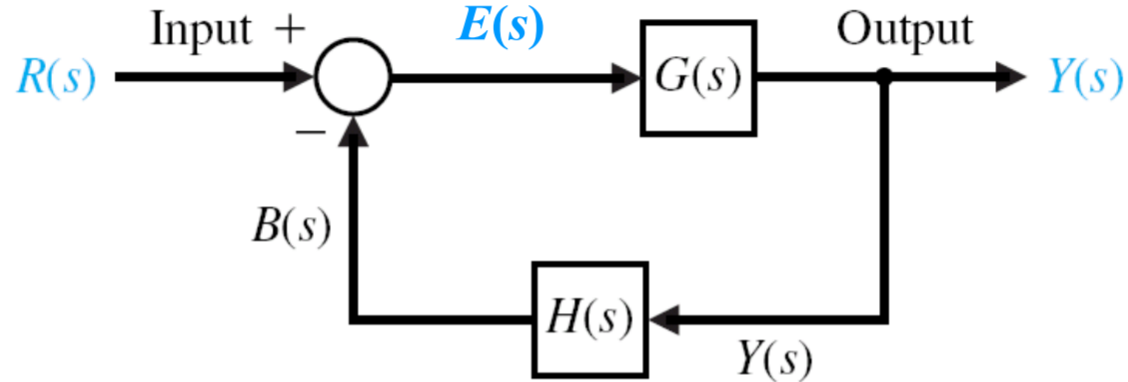
每个环节用方框图表示，框中表明其传函，根据信号的传递关系将各环节框图连接起来，如





## 2.5 方框图模型

### 负反馈控制系统的典型结构图



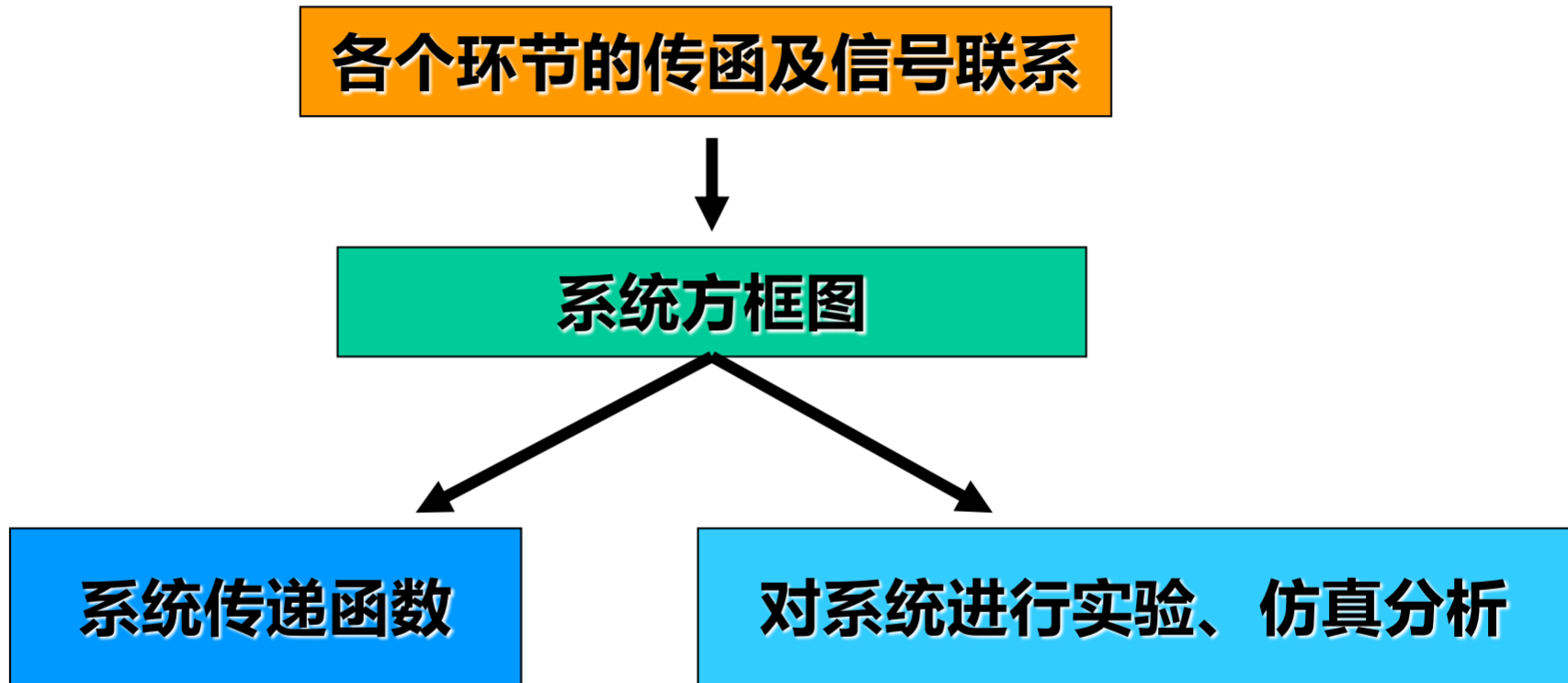
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \text{称为闭环传递函数}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) \quad \text{称为前向传递函数}$$

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad \text{称为开环传递函数}$$



## 2.5 方框图模型

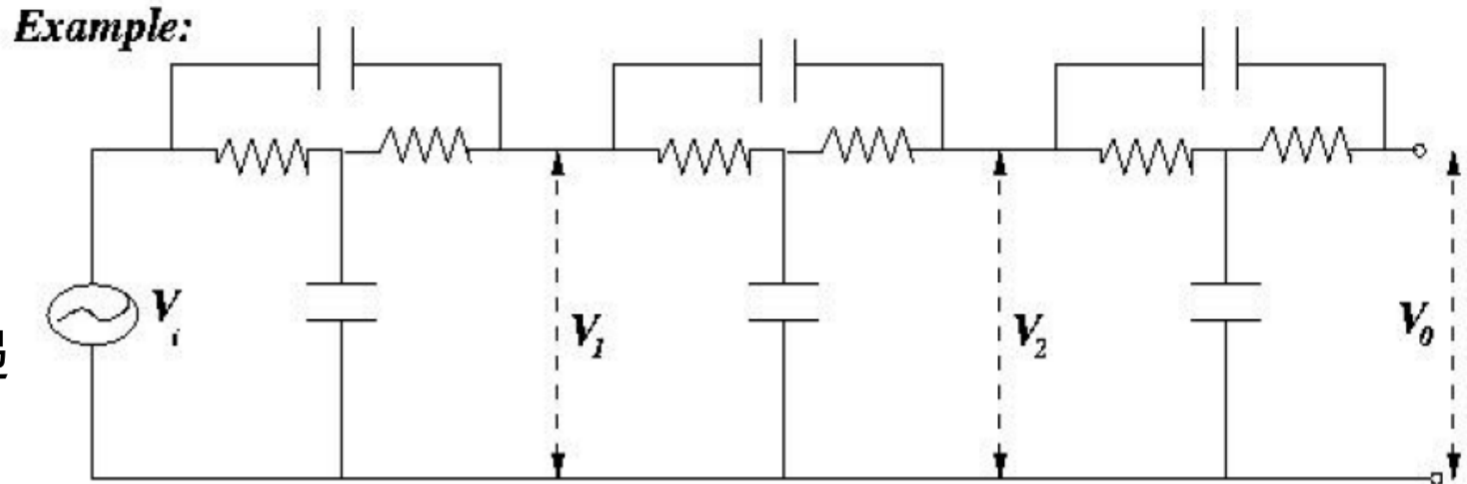




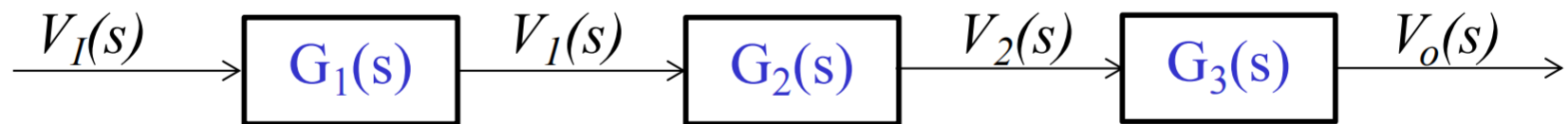
## 2.5 方框图模型

利用方框图模型研究系统模型的便利性

求此系统的传递函数  $V_o(s)/V_I(s)$



方法1：根据KVL, KCL直接寻找  $G(s) = V_o(s)/V_I(s)$



方法2：分别求解

$$\left. \begin{aligned} G_1(s) &= V_1(s)/V_I(s), \\ G_2(s) &= V_2(s)/V_1(s), \\ G_3(s) &= V_o(s)/V_2(s) \end{aligned} \right\}$$

假设负载效应可以忽略

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) G_3(s)$$

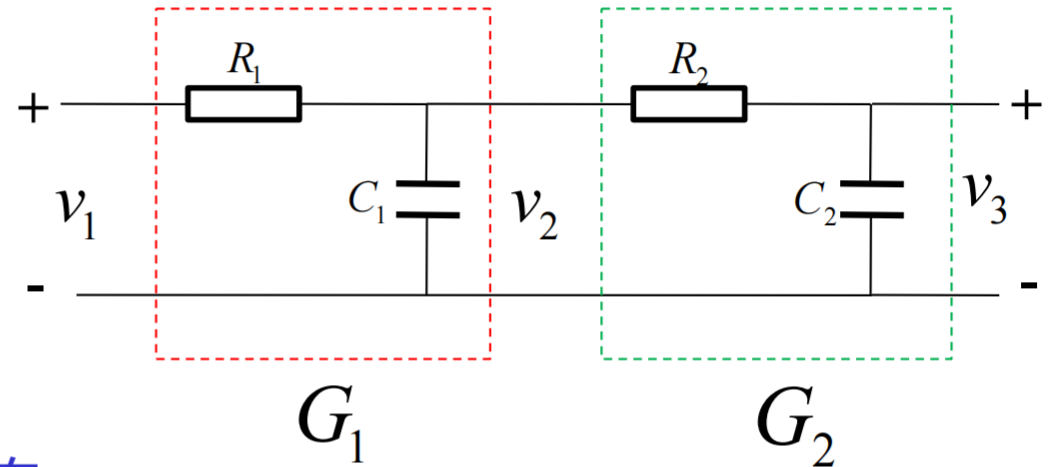


## 2.5 方框图模型

课下思考：  
如果负载效应不可忽略

求此系统的传递函数

$$G = V_3(s)/V_1(s)$$



Case 1: 如果两个环节没有相连

$$G_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \quad G_2 = \frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \quad \longrightarrow \quad G = \frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1}$$

Case 2: 如果两个环节直接相连

$$G_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

$$G_2 = \frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$

$$G = \frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

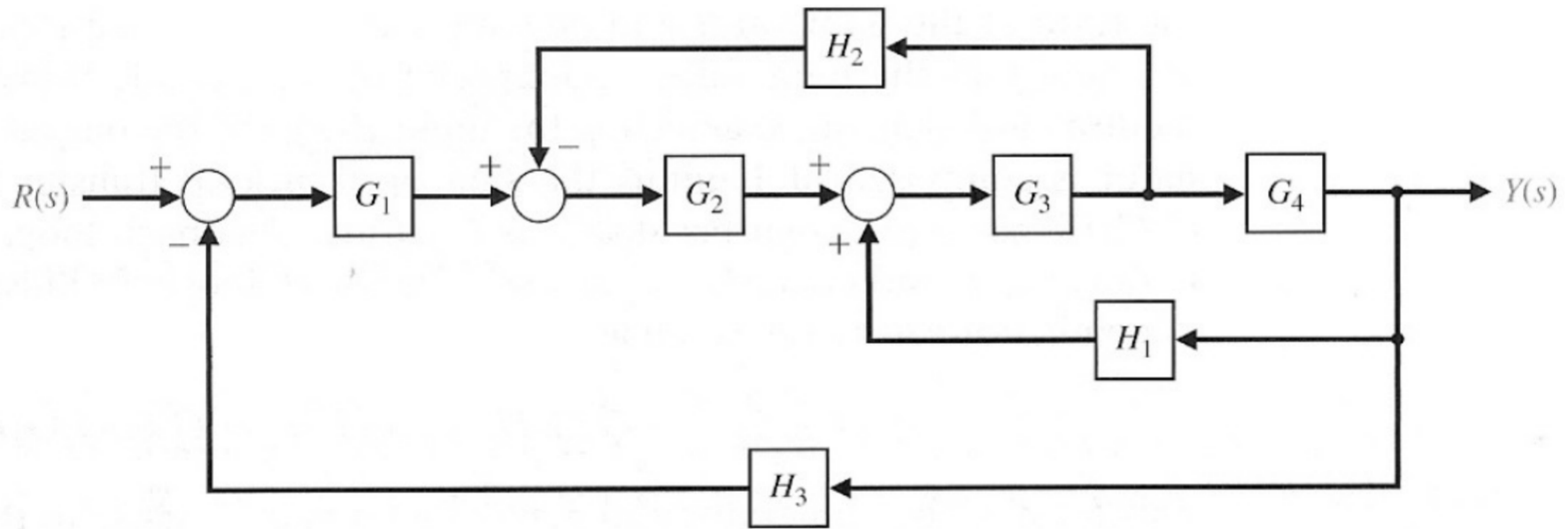




## 2.5 方框图模型

利用方框图模型研究系统模型的便利性

假设负载效应可以忽略



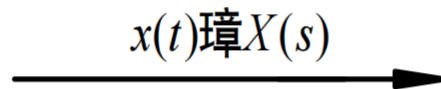
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} ?$$



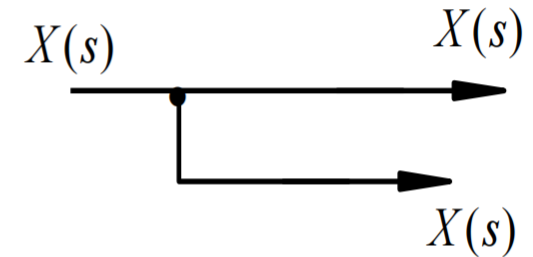
## 2.5 方框图模型

方框图包含有四种基本单元：

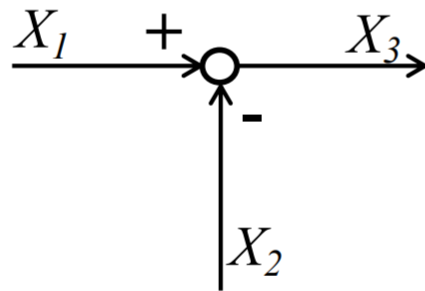
1. 信号线



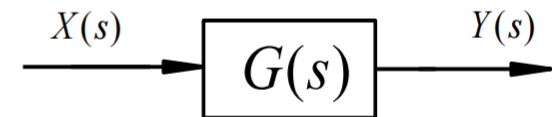
2. 分支点  
(引出点、  
测量点)



3. 相加点  
(比较点、  
综合点)



4. 方框  
(环节)





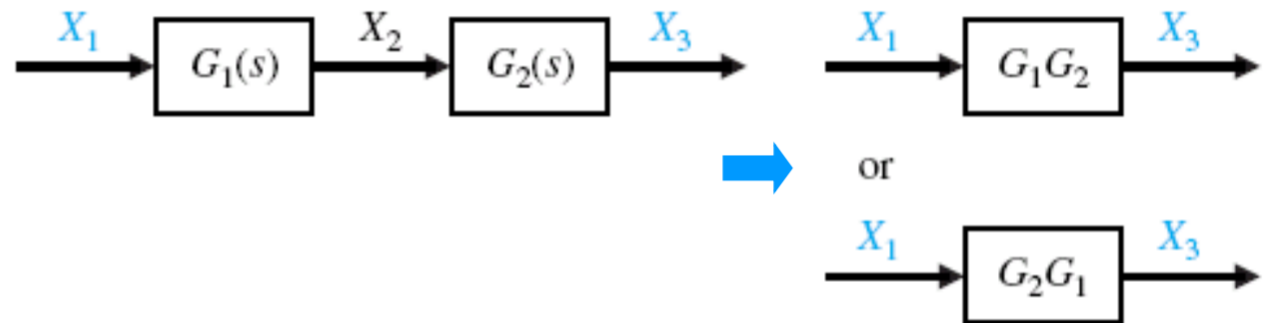
## 2.5 方框图模型

### 框图的基本变换

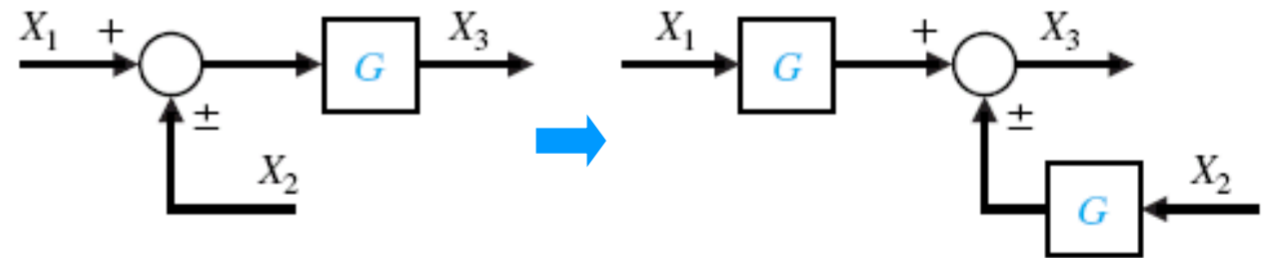
(Dorf书表2.6)

**原则：** 输出、输入信号不变  
(端口条件不变)

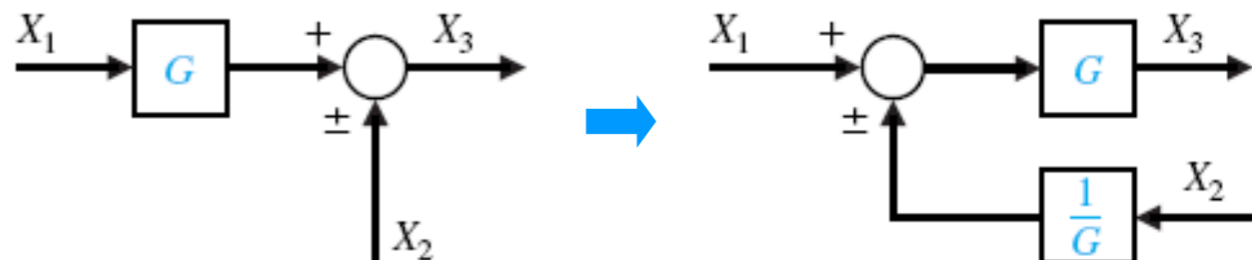
T1: 合并串联方框



T2: 相加点后移



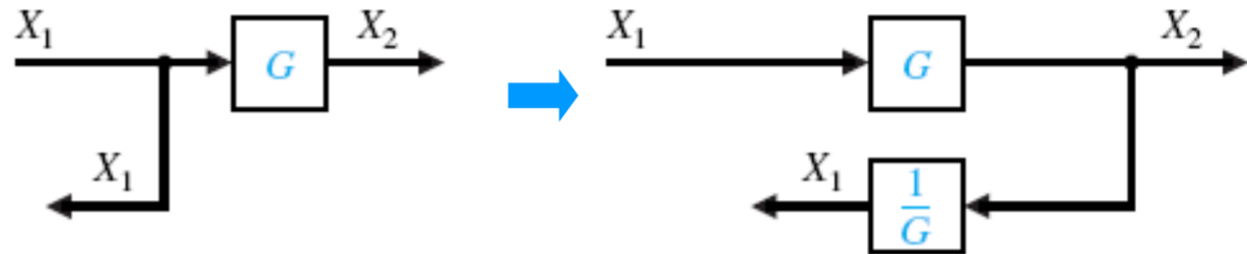
T3: 相加点前移



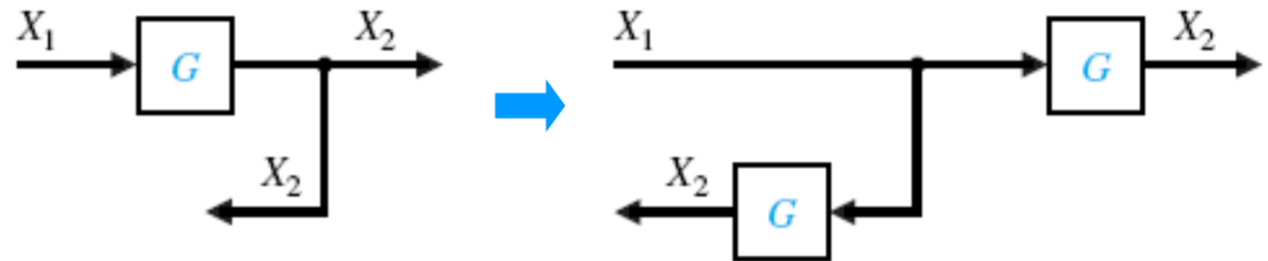


## 2.5 方框图模型

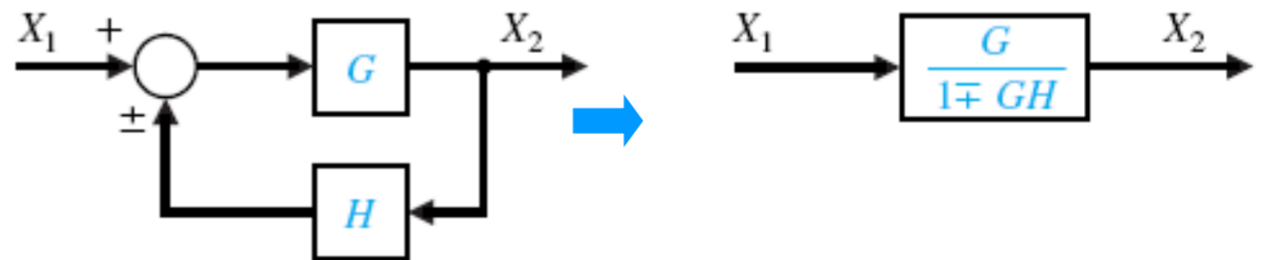
T4: 分支点后移



T5: 分支点前移



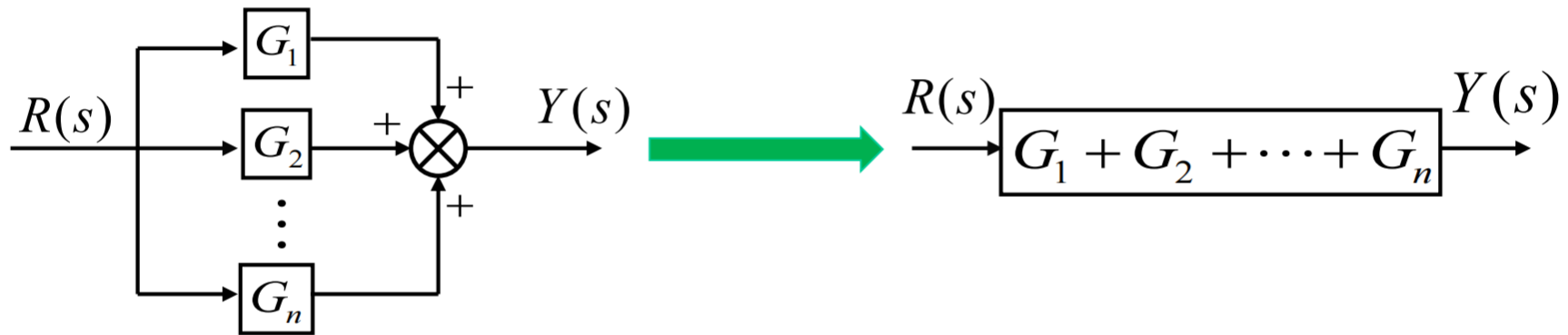
T6: 消去反馈回路



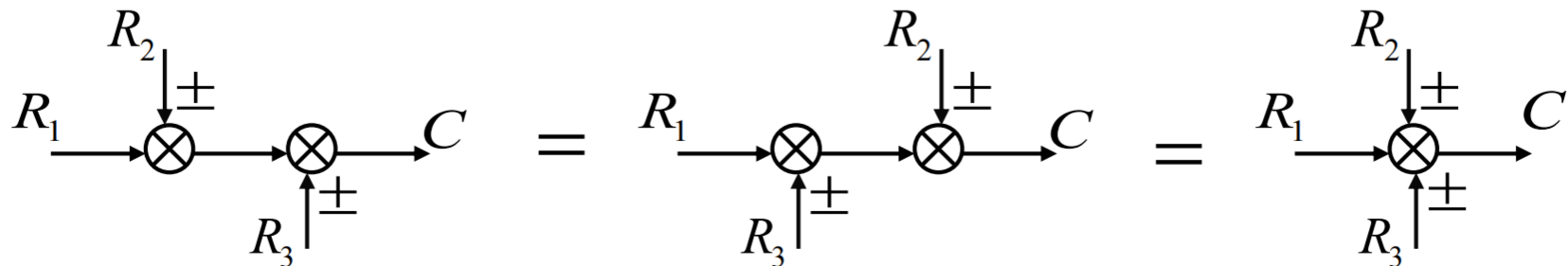


## 2.5 方框图模型

T7: 并联方框



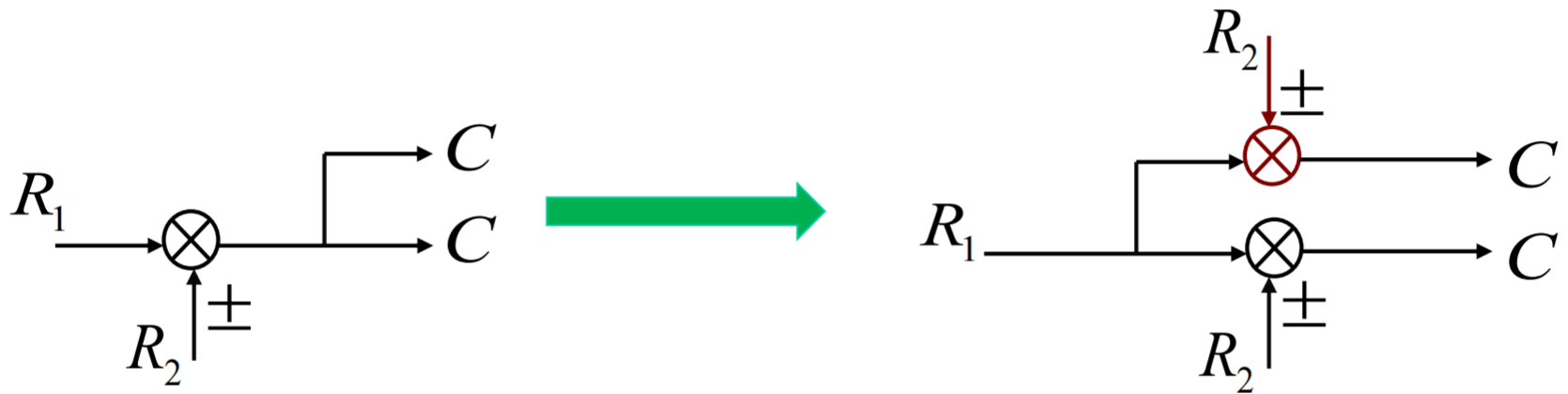
T8: 相邻相加点之间的移动





## 2.5 方框图模型

T9: 相加点与分支点交换位置



注意：相加点和分支点之间交换位置，往往会使结构图变复杂，一般尽量避免使用。

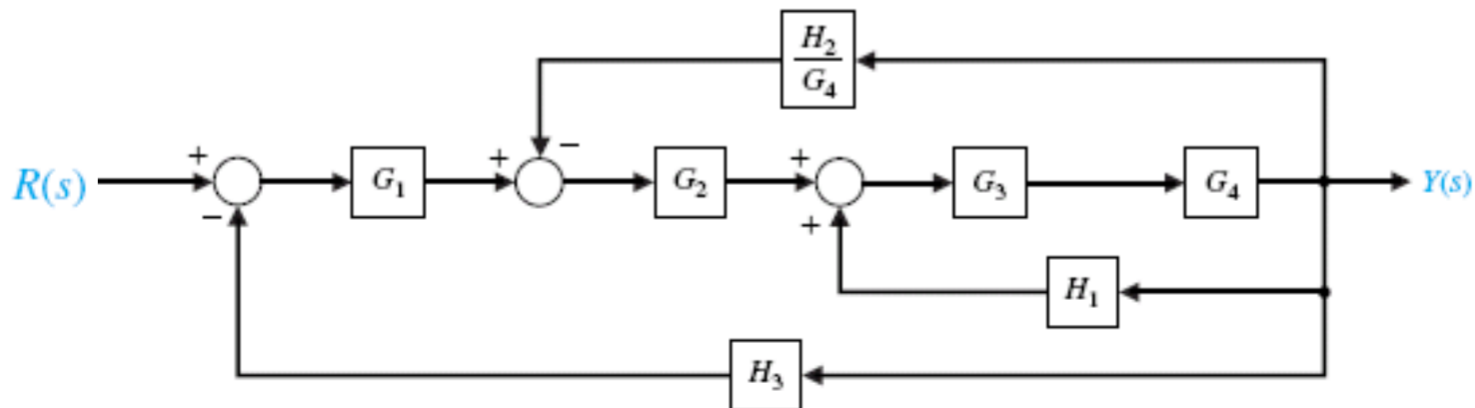
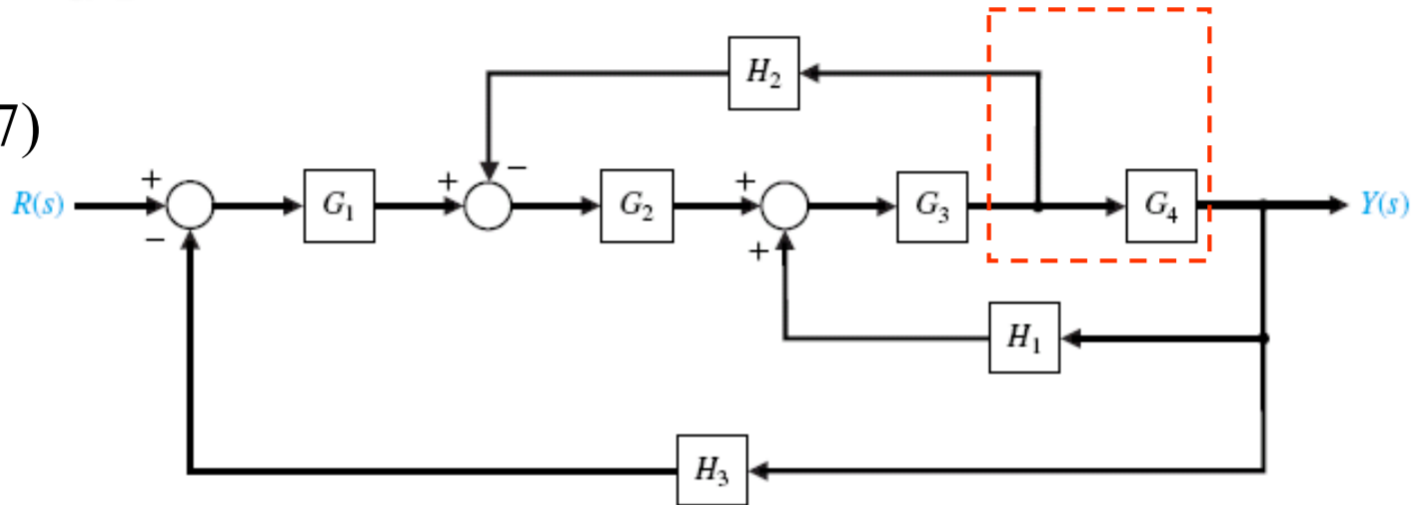


## 2.5 方框图模型



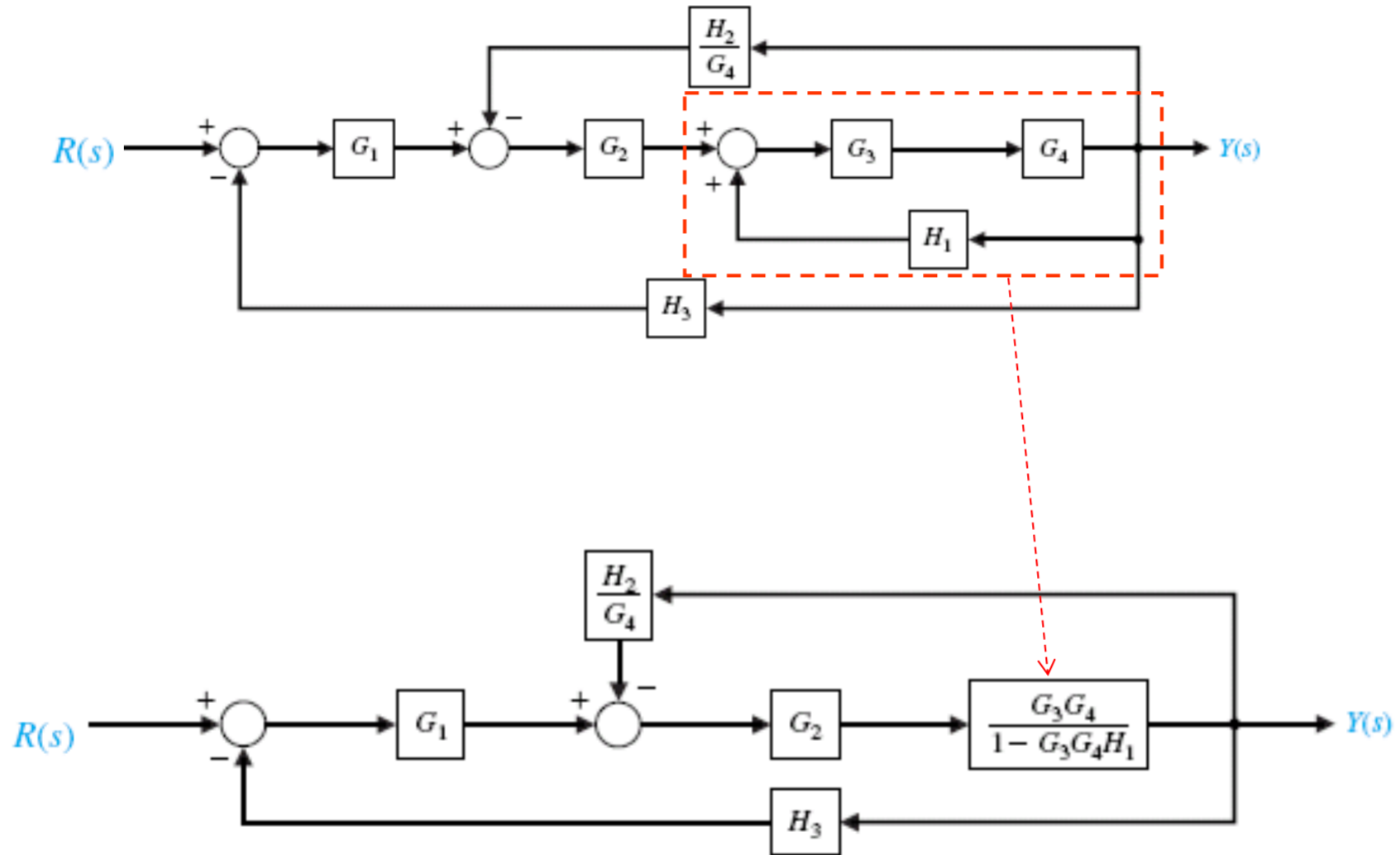
### <例2.4> 化简下方框图

(Dorf 例2.7)





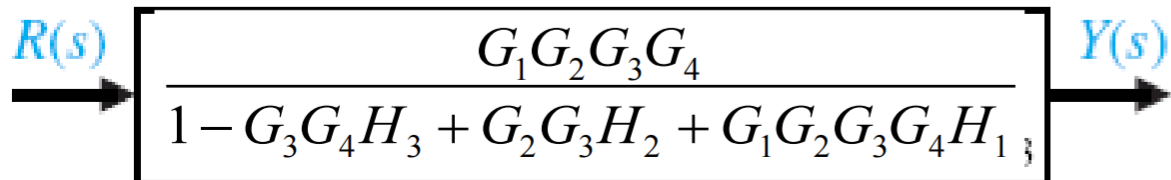
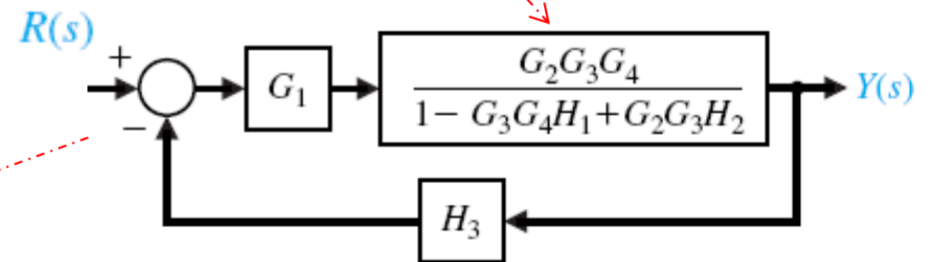
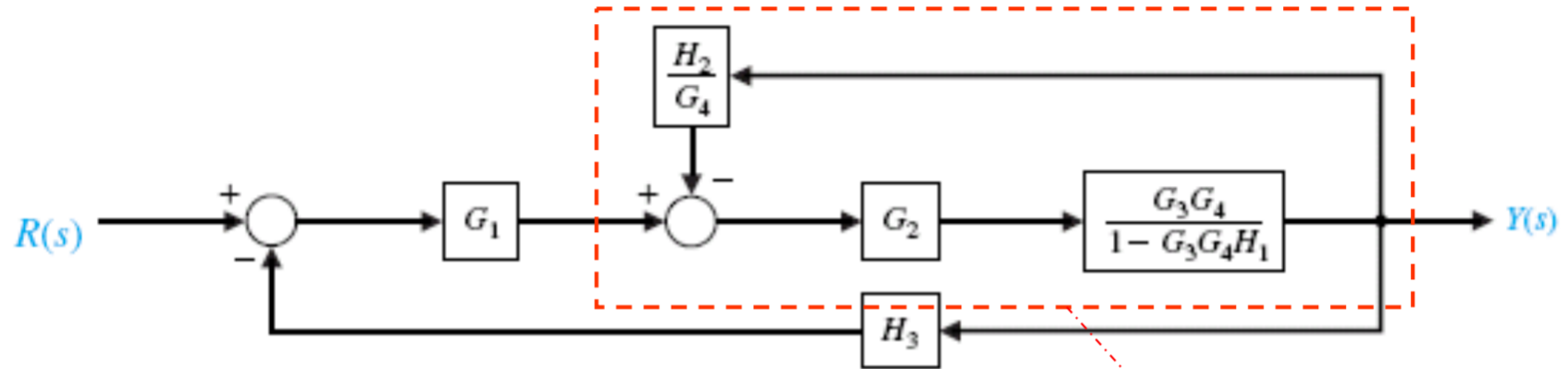
## 2.5 方框图模型







## 2.5 方框图模型



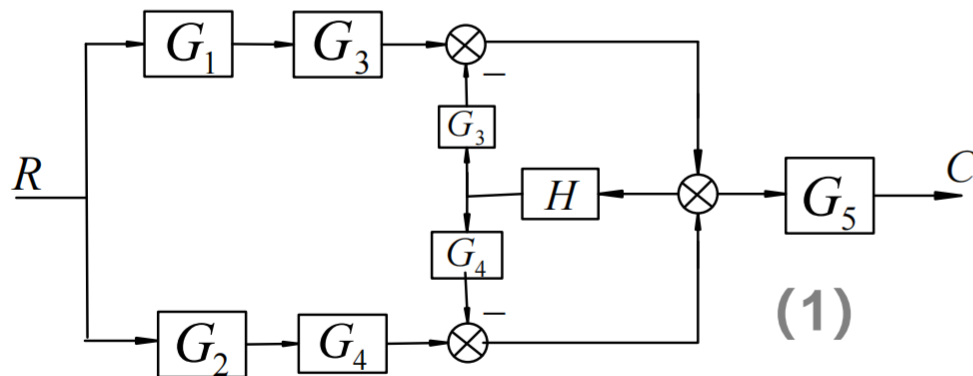
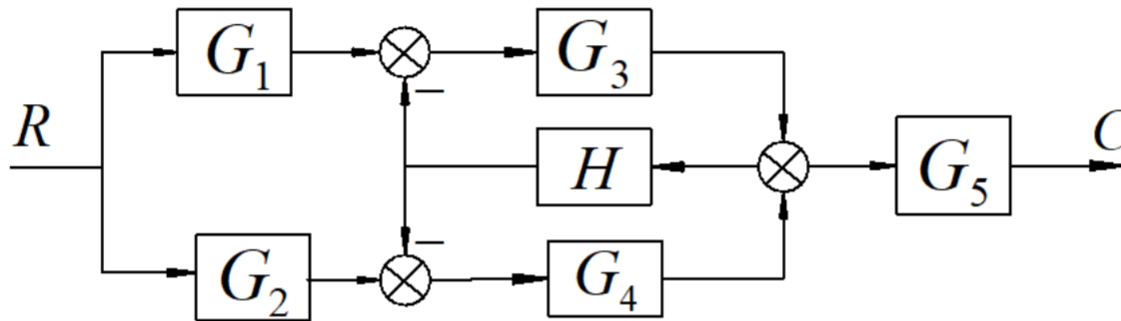


## 2.5 方框图模型

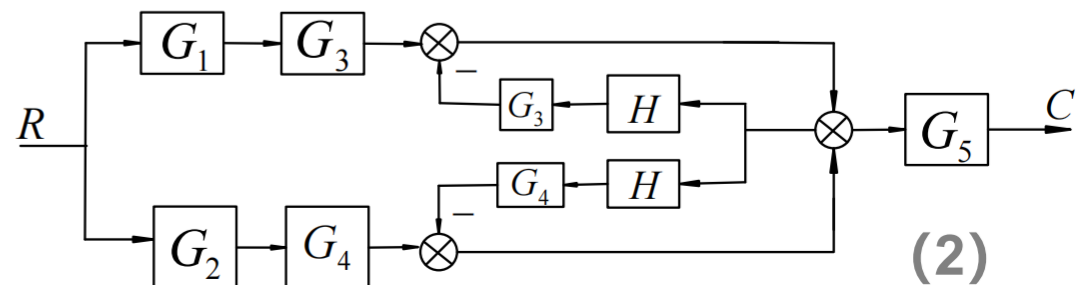


<例2.5> 化简以下方框图

课堂练习：  
5min

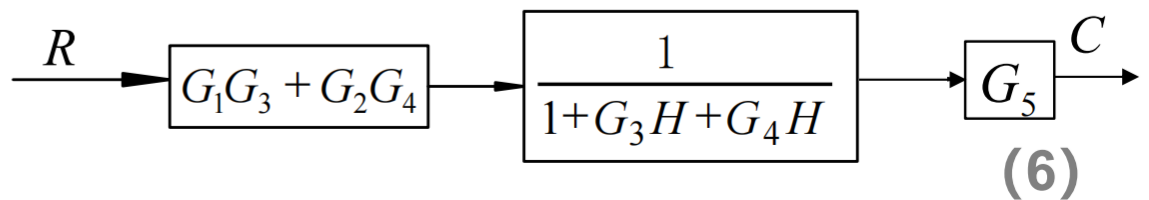
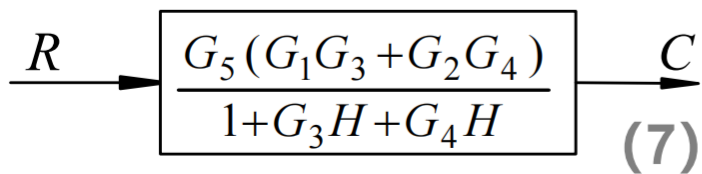
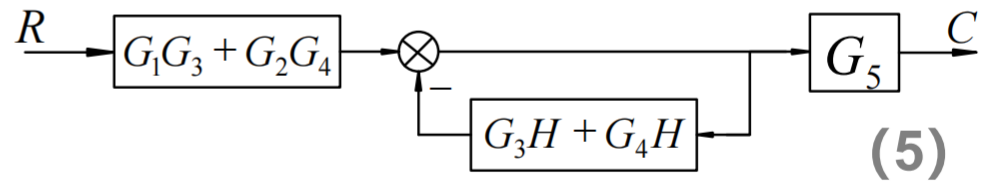
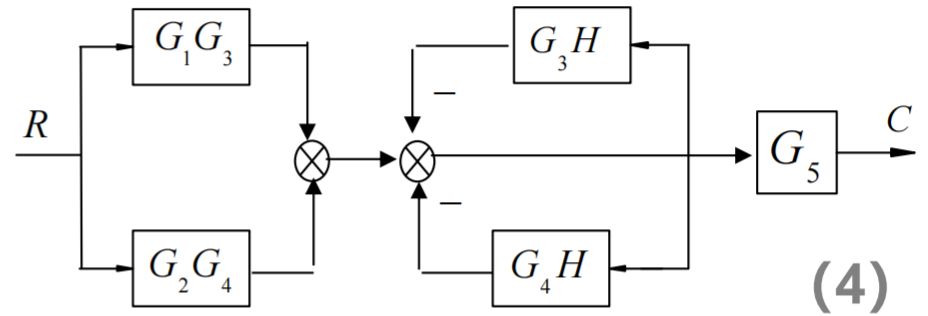
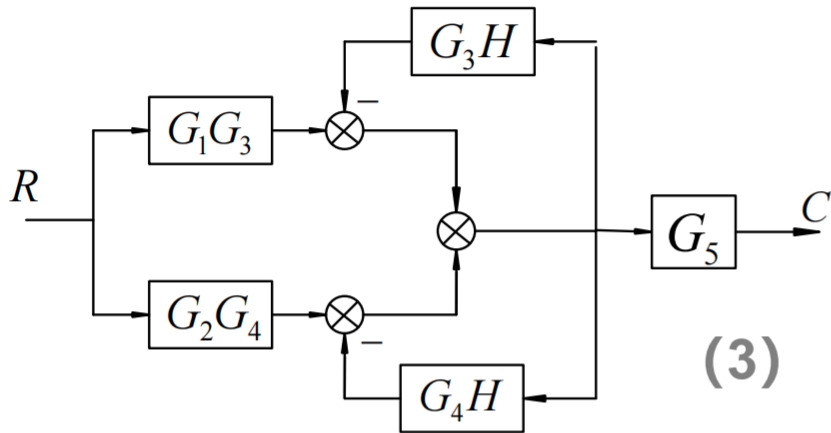


相加点后移





## 2.5 方框图模型





---

9.12 (Tue)

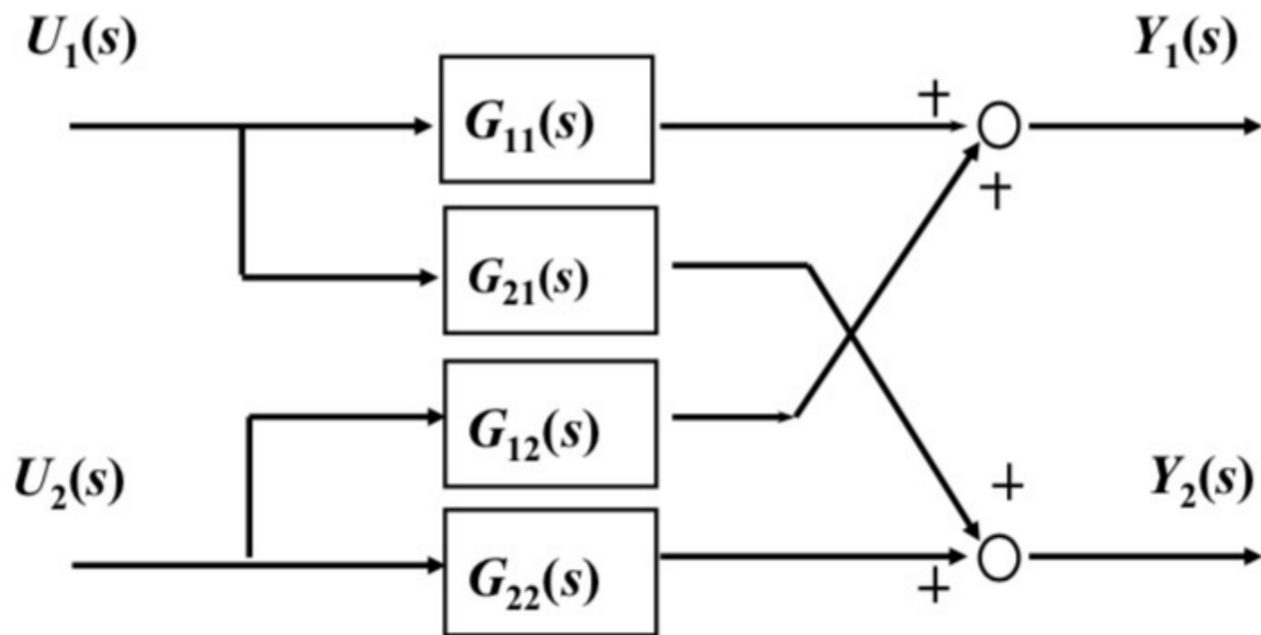
第5讲



## 2.5 方框图模型

### 课后拓展：多变量系统的传函矩阵

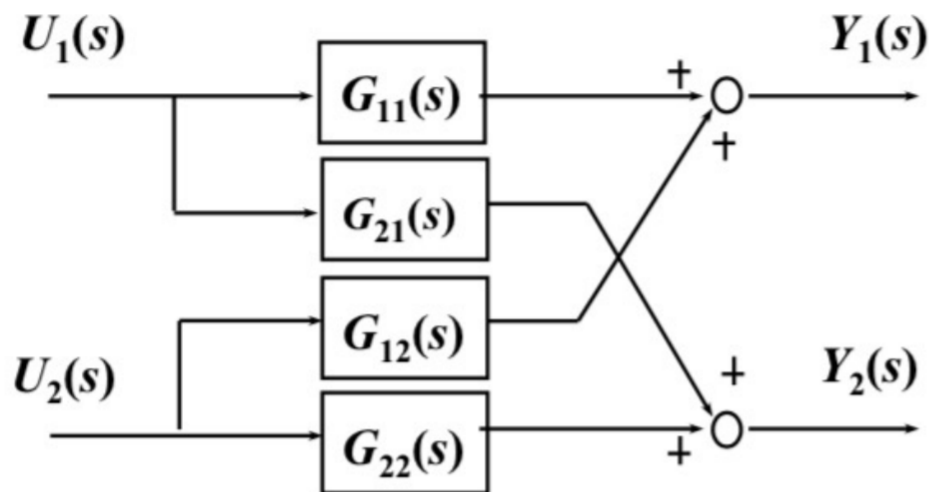
将描述单输入单输出系统的动态特性的传递函数概念推广到多输入多输出系统，就可用**传递函数矩阵**来描述多变量系统的动态特性。



如图所示两变量系统，当初始条件为零时， $Y_1=?$ ， $Y_2=?$



## 2.5 方框图模型



写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

当初始条件为零时, 可以用拉氏变换式表示:

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

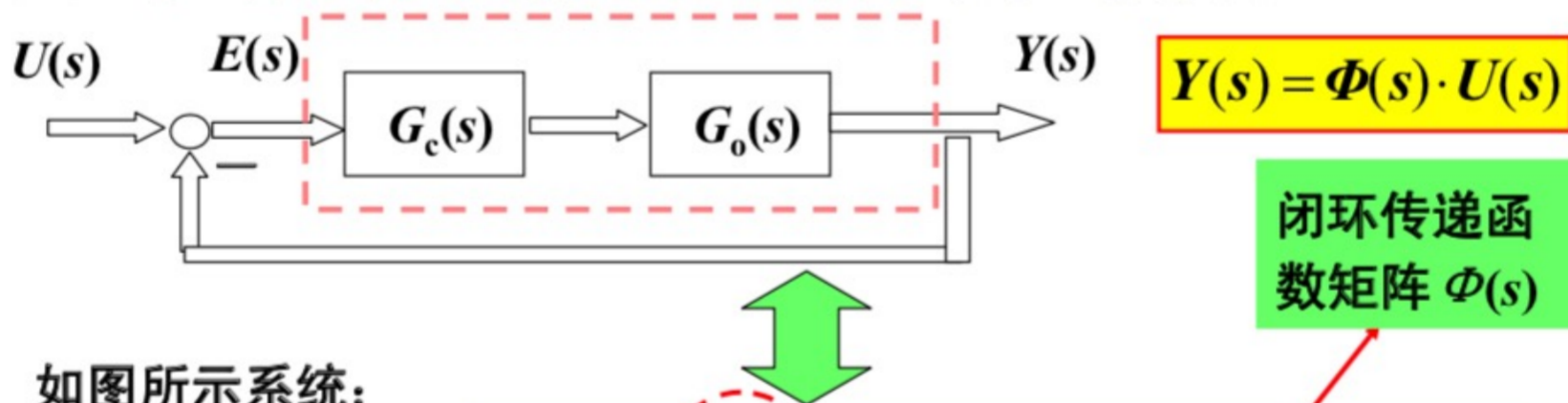
传递函数矩阵

传递函数矩阵 $G(s)$ 拓宽了传递函数的概念, 它适用于 $r$ 个输入、 $m$ 个输出的系统, 这时的 $G(s)$ 为 $m \times r$ 维矩阵, 其元素 $G_{ij}(s)$ 表示第 $j$ 个输入对第 $i$ 个输出的传递函数。



## 2.5 方框图模型

对于多变量系统的方块图运算，特别要注意在计算时**必须按照矩阵运算的规则**进行，乘法的前后顺序不能颠倒。



如图所示系统：

$$Y(s) = G(s)E(s) = G_o(s)G_c(s)E(s)$$

$$E(s) = U(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)[U(s) - Y(s)]$$

$$Y(s) = [I + G(s)]^{-1}G(s)U(s)$$

$G(s)$ 称为系统的开环传递函数矩阵

注意：计算时要从输出端开始，逆着箭头方向，顺序不能变换。

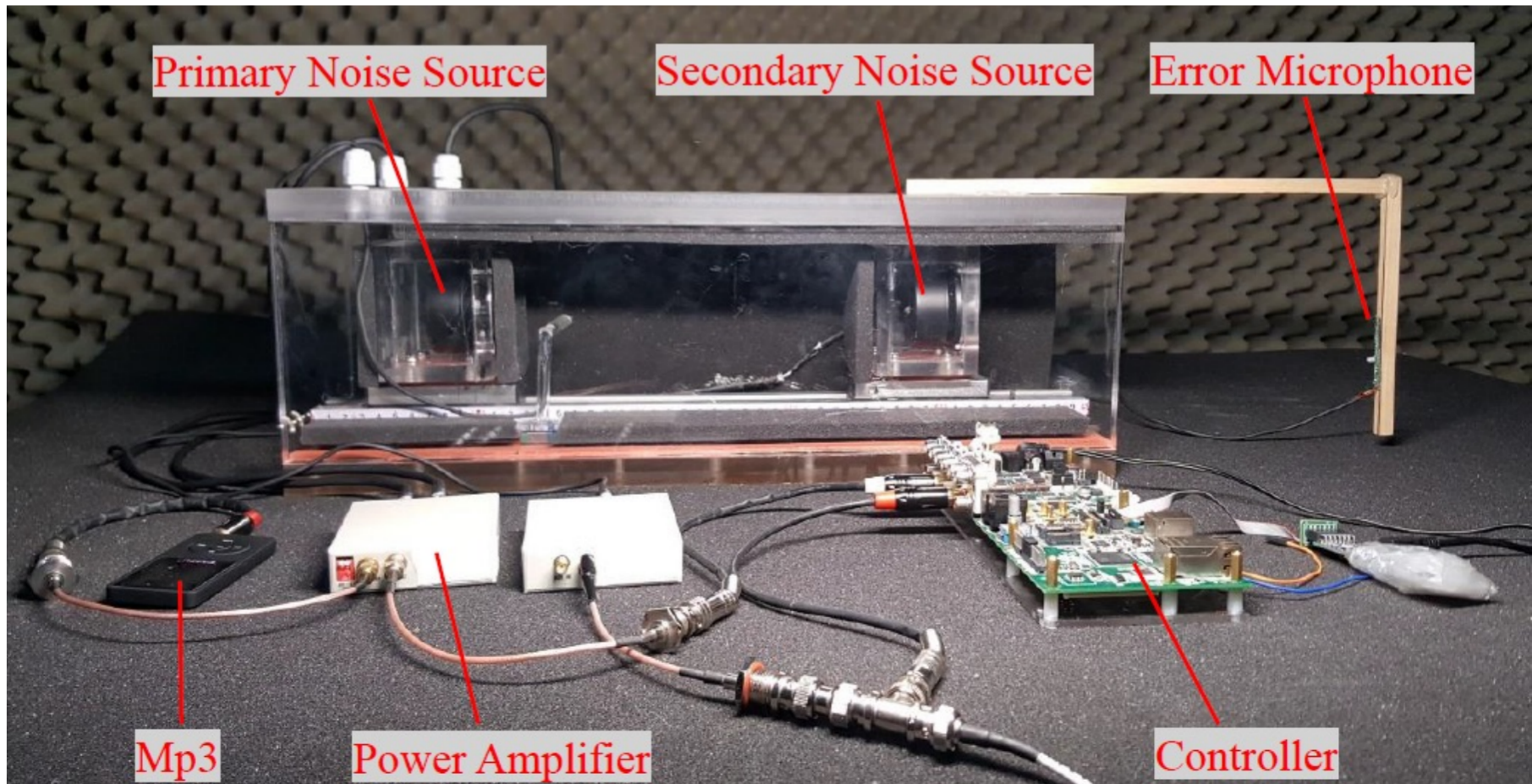




## 2.5 方框图模型

The advantages of the block diagram representation of a system are that it is easy to form the overall block diagram for the entire system by merely connecting the blocks of the components according to the signal flow and that it is possible to evaluate the contribution of each component to the overall performance of the system.

主动噪声控制实例分析







## 2.5 方框图模型

### 主动噪声控制 实例分析

Chang C Y, Siswanto A, Ho C Y, et al. Listening in a noisy environment[J]. IEEE Consumer Electronics Magazine, 2016, 5(4): 34-43.

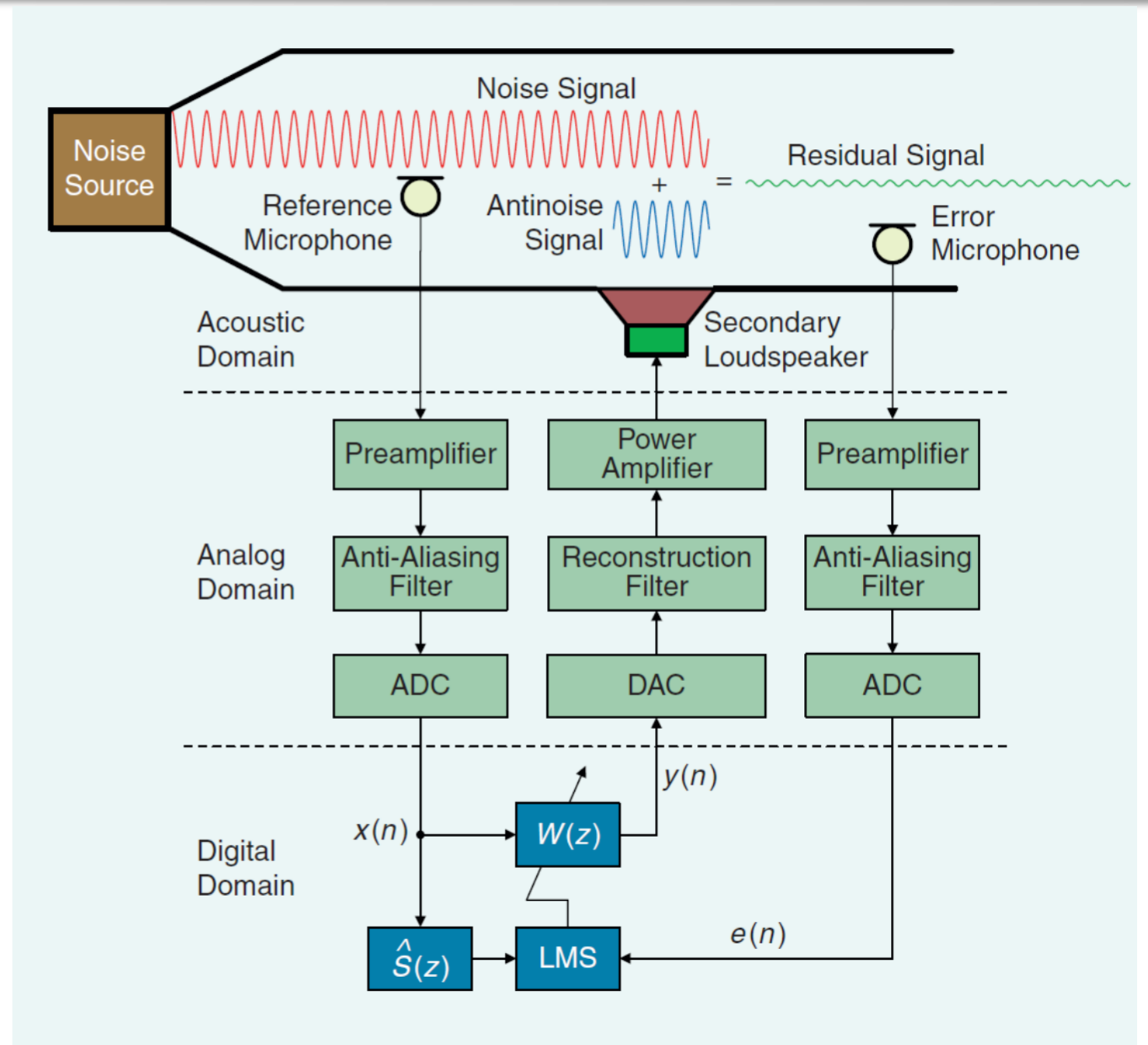
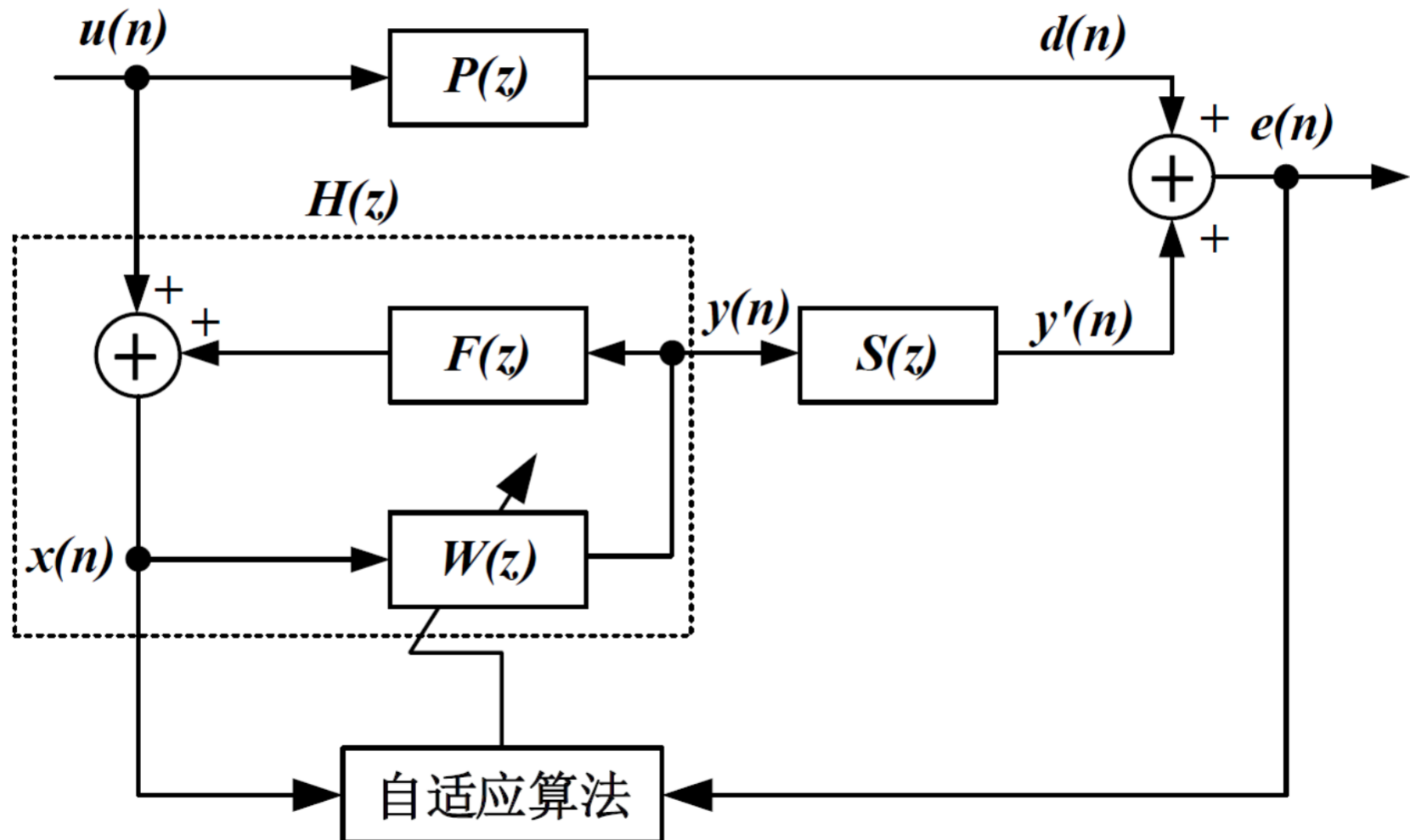


FIGURE 1. A block diagram of the feedforward ANC system.



## 2.5 方框图模型

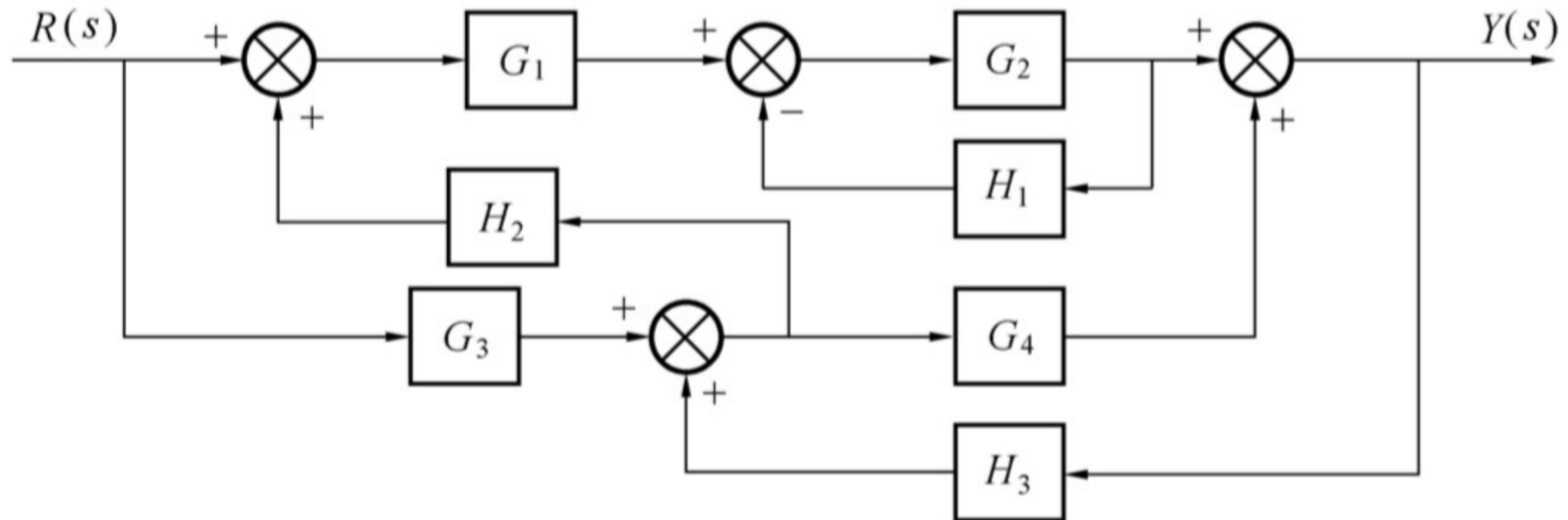
### 带次级声反馈的主动噪声控制系统框图





热身小练习：用方框图化简法，求传递函数  $Y(s)/R(s)$

8min





## Why do we need signal-flow graph models?

Block diagrams are adequate for the representation of the interrelationships of controlled and input variables. However, for a system with reasonably complex interrelationships, the block diagram reduction procedure is cumbersome and often quite difficult to complete.



## 2.6 信号流图

---

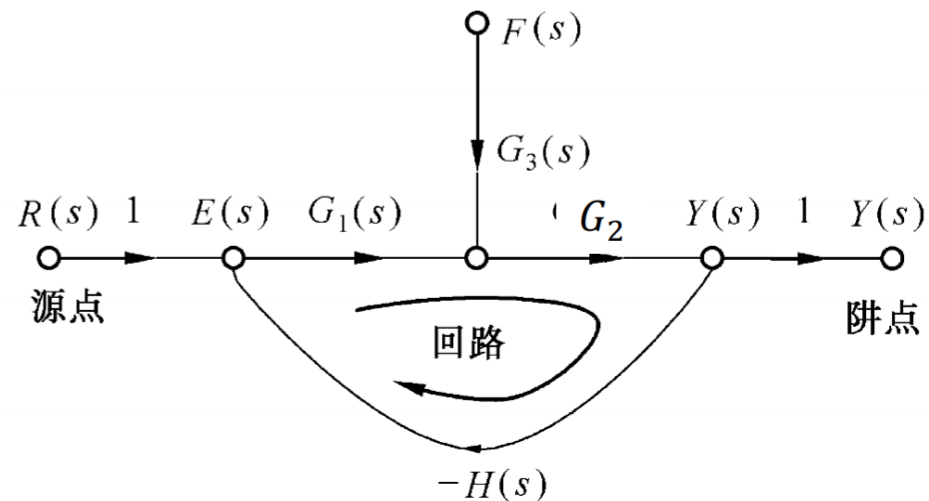
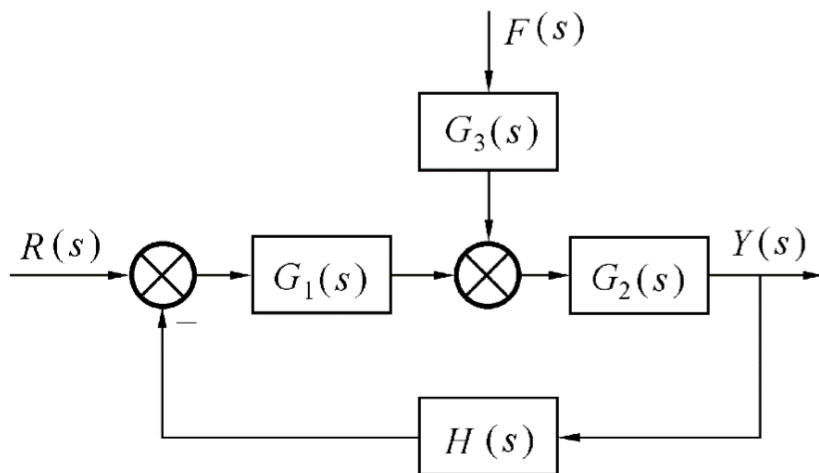
- 基于信号流图模型，就不再必须使用方框图化简方法来计算系统变量之间的关系
- 利用信号流图分析方法可以处理复杂系统的方框图模型
- 什么是信号流图？



## 2.6 信号流图

**信号流图**：系统中各变量间相互关系以及信号传递的一种图解方法

- ▶ **节点 (node)**：表示系统的变量，用  $\circ$  表示。  $R(s) \circ \xrightarrow{G(s)} \circ Y(s)$
- ▶ **支路 (branch)**：相当于乘法器，信号流经支路时，被乘以支路增益（即传递函数）而变换为另一信号。
- ▶ 信号在支路上只能沿箭头单向传递。

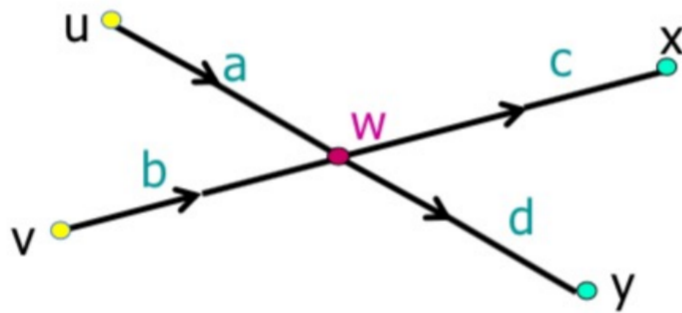




## 2.6 信号流图

➤ 节点具有两种作用:

- (1) 对所有来自于流入支路的信号作加法运算;
- (2) 将流入信号之和传输给所有的流出支路。



$$w = au + bv$$

$$x = cw = c(au + bv)$$

$$y = dw = d(au + bv)$$



## 2.6 信号流图

### 相关术语:

**输入节点(源点):** 输入信号对应的节点。只有输出支路, 无输入支路

**输出节点(阱点):** 输出信号对应的节点, 常用传输为1的支路引出。只有输入, 没有输出支路。

**混合节点:** 既有输入支路, 又有输出支路。

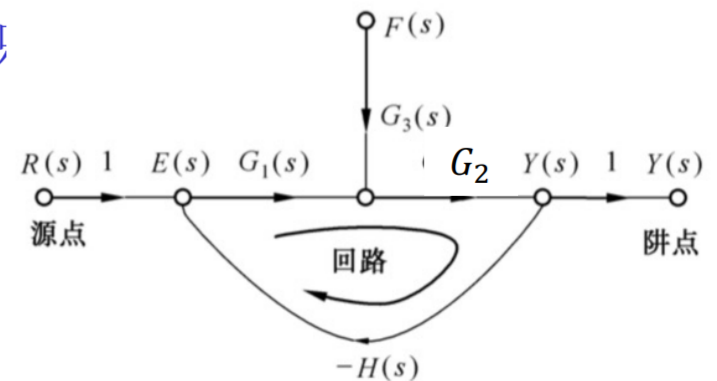
**通路 (path):** 沿箭头所指方向从一个节点穿过各相连支路到另一个节点

**前向通路:** 当信号从输入节点至输出节点传递时, 每个节点只通过1次的通路。

**回路(loop):** 起点和终点是同一节点, 而且信号通过每个节点不多于1次的闭合通路。

**回路/通路增益:** 回路/通路中所有支路增益的乘积

**不接触回路:** 之间没有公共节点的回路。







## 2.6 信号流图

- 根据系统微分方程（拉氏变换）绘制，也可由系统的方框图按照对应关系得出。

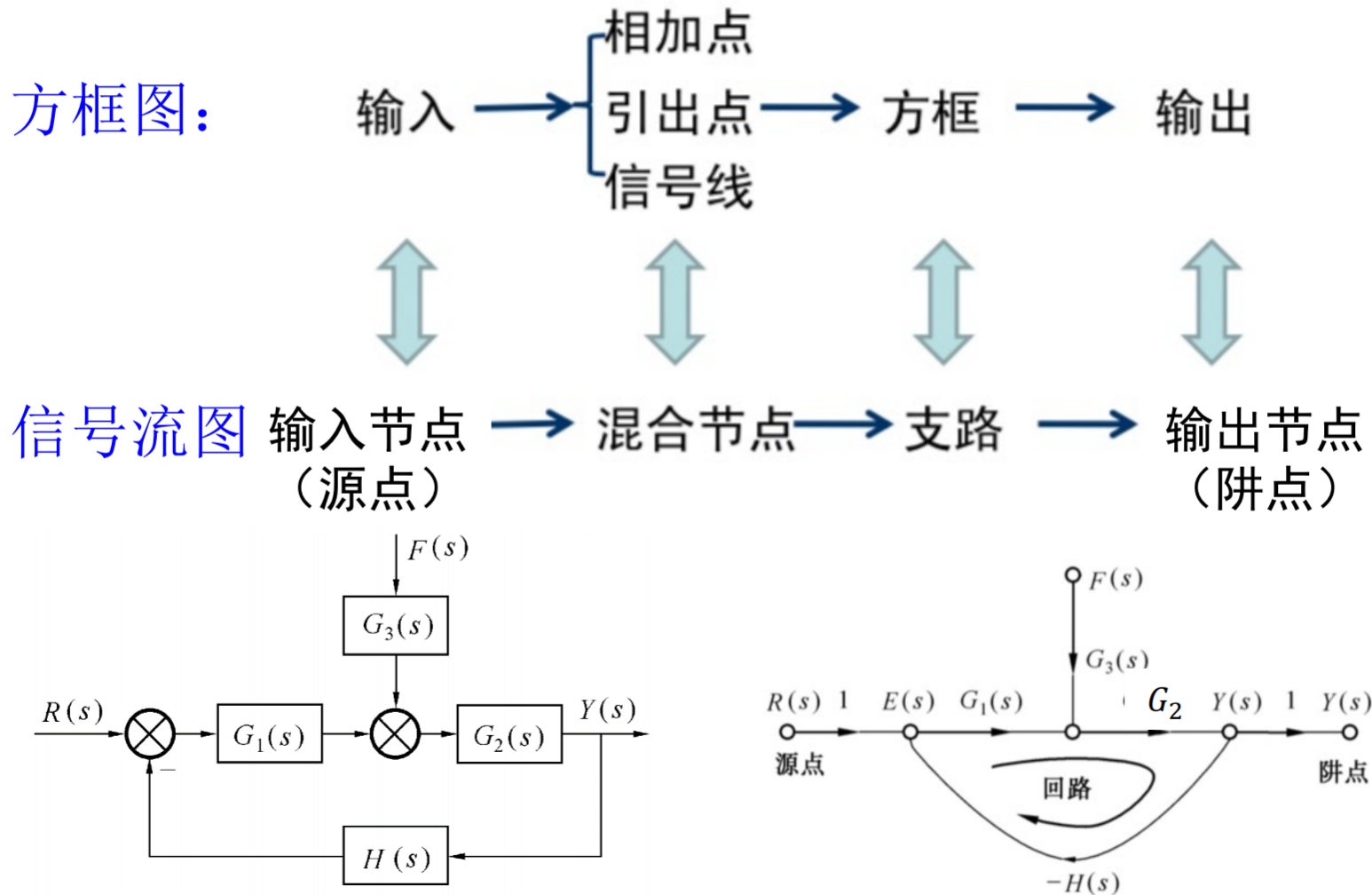
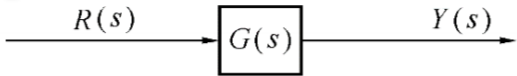
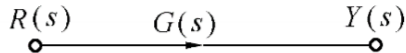
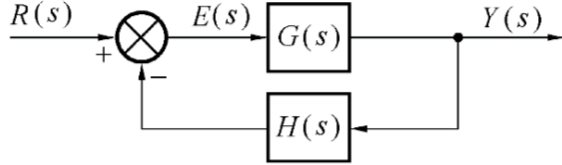
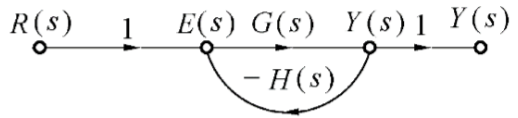
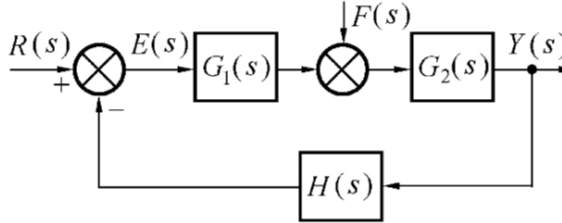
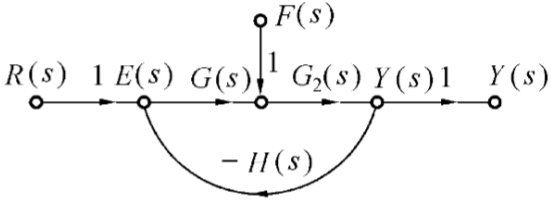
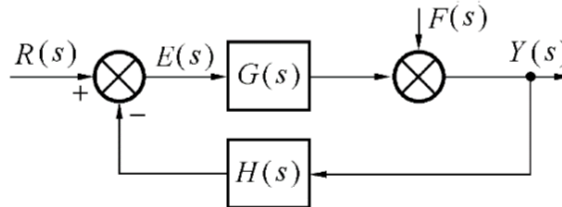
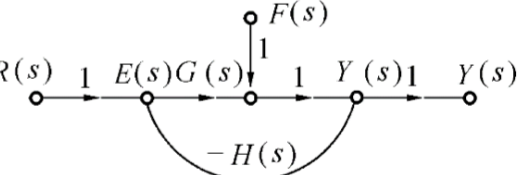
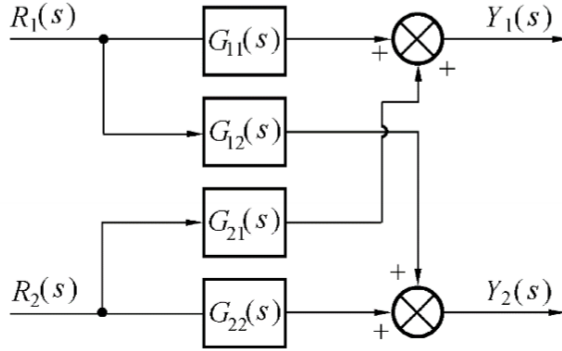
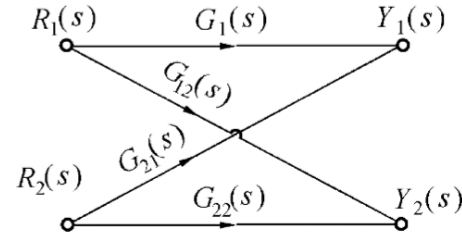


表 2.4.1 控制系统方框图与信号流图对照表



# 2.6 信号流图

参考书：  
裴润、宋申民  
《自动控制原理》

方框图	信号流图
	
	
	
	
	



## 2.6 信号流图

系统传递函数 = 信号流图的输入输出节点间总传输增益

梅森公式(Mason's formula): 
$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

$P$ ——总增益;

$P_k$ ——第  $k$  条前向通路的通路增益;

$\Delta$ ——信号流图的特征式,即 (Determinant of the graph) see Dolf, pp.85-86

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum_a L_a$ ——所有回路增益之和;

$\sum_{bc} L_b L_c$ ——每两个互不接触回路增益乘积之和;

$\sum_{def} L_d L_e L_f$ ——每三个互不接触回路增益乘积之和;

$\Delta_k$ ——在  $\Delta$  中除去与第  $k$  条前向通路相接触的(即有共有节点)回路后的特征式,称为第  $k$  条前向通路特征式的余因子。

**不接触回路:** 一个信号流图可能有多个回路,若回路之间没有任何公共节点,则称为不接触回路,反之称为接触回路

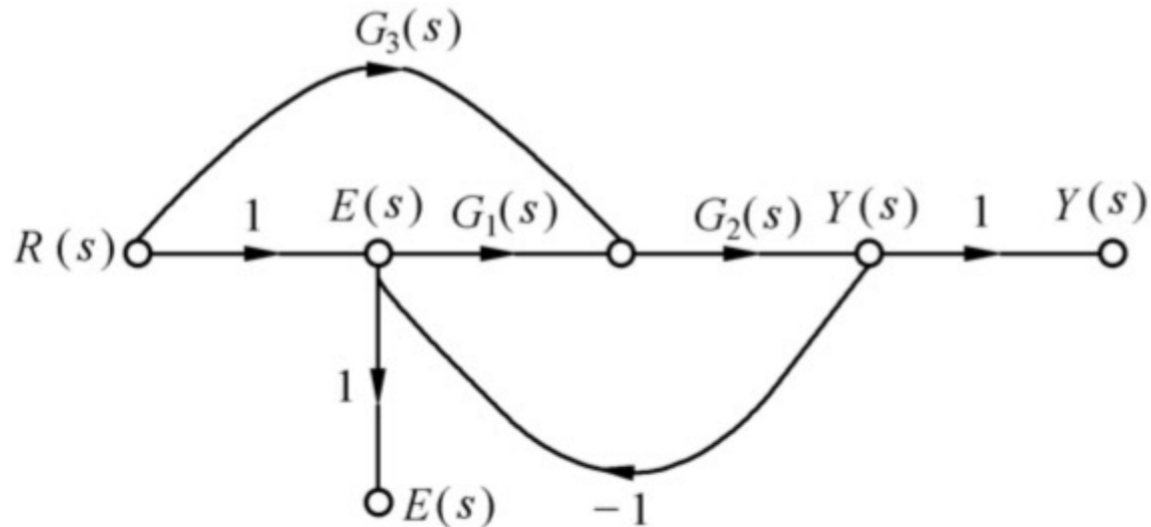
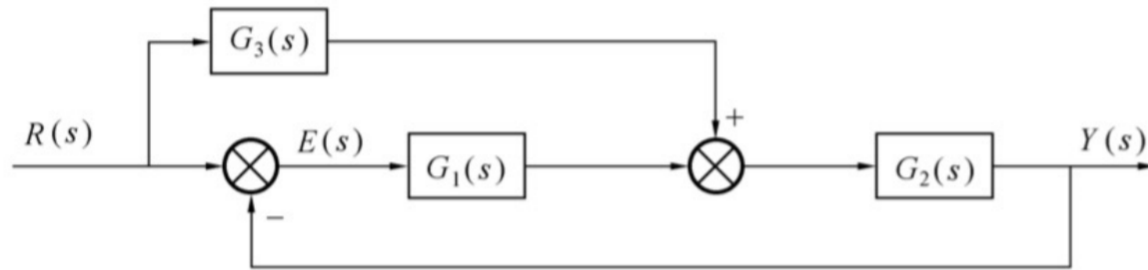
**注意:** 当前向通道接触所有的回路时,  $\Delta_i$  等于1;  
当前向通道不接触所有的回路时,  $\Delta_i$  等于 $\Delta$



## 2.6 信号流图



**<例2.6>** 控制系统方框图如下，试画出信号流图，并用梅森公式求 $Y(s)/R(s)$ 和 $E(s)/R(s)$





## 2.6 信号流图

(1) 求  $Y(s)/R(s)$

只有一个回路，回路增益为

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)$$

信号流图的特征式为

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + G_1(s)G_2(s)$$

由  $R(s)$  到  $Y(s)$  有两条前向通路

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)$$

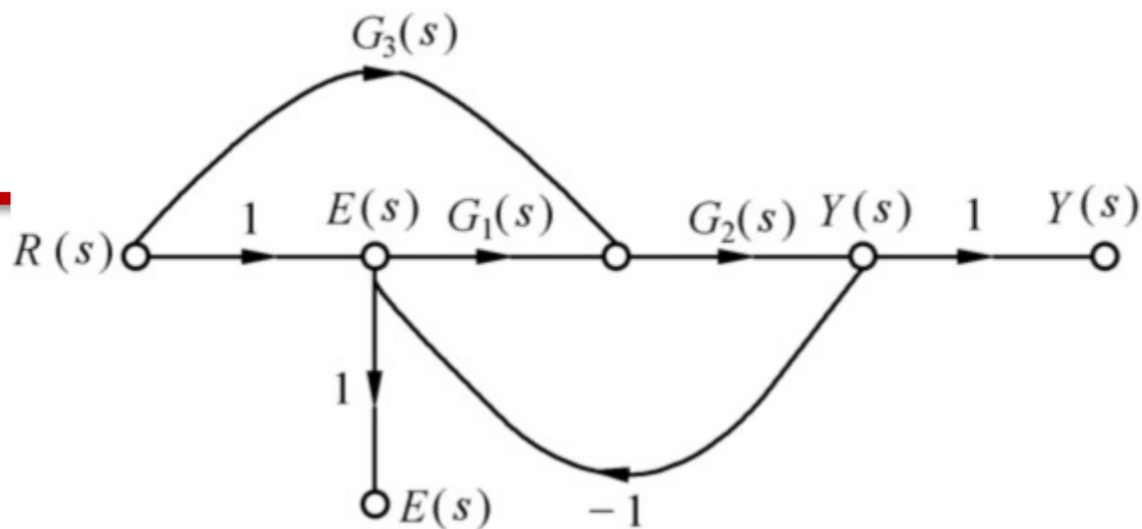
$$P_2 = G_3(s)G_2(s)$$

回路  $L_1$  与两条前向通路都接触

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1$$

根据梅森公式可写出

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^2 P_k \Delta_k = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \dots$$



## 2.6 信号流图

(2) 求 $E(s)/R(s)$

只有一个回路，回路增益为

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)$$

信号流图的特征式为

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + G_1(s)G_2(s)$$

由 $R(s)$ 到 $E(s)$ 有两条前向通路

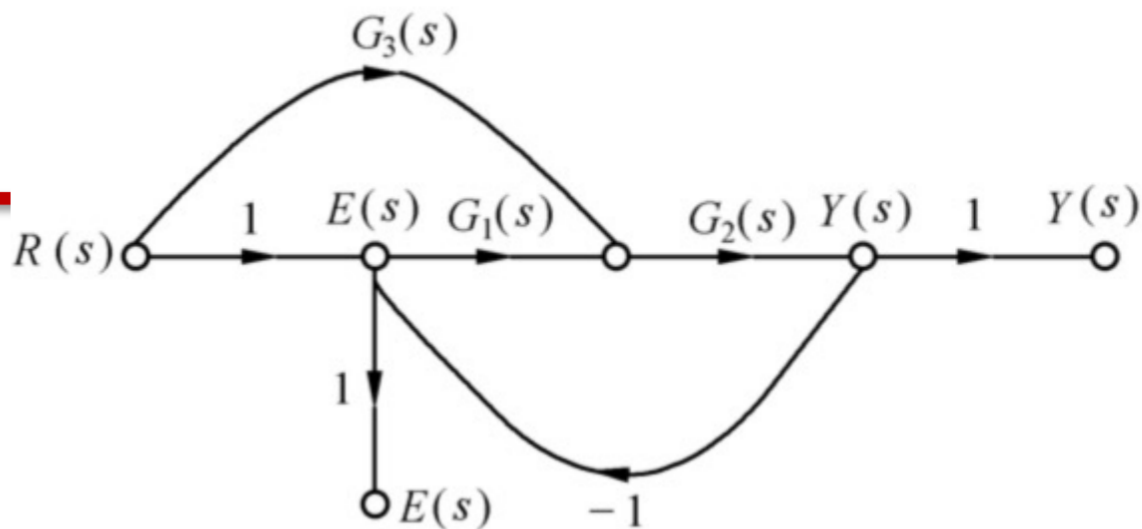
$$P_1 = 1 \quad P_2 = -G_3(s)G_2(s)$$

回路 $L_1$ 与两条前向通路都接触

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1$$

根据梅森公式可以写出

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^2 P_k \Delta_k = \frac{1 - G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

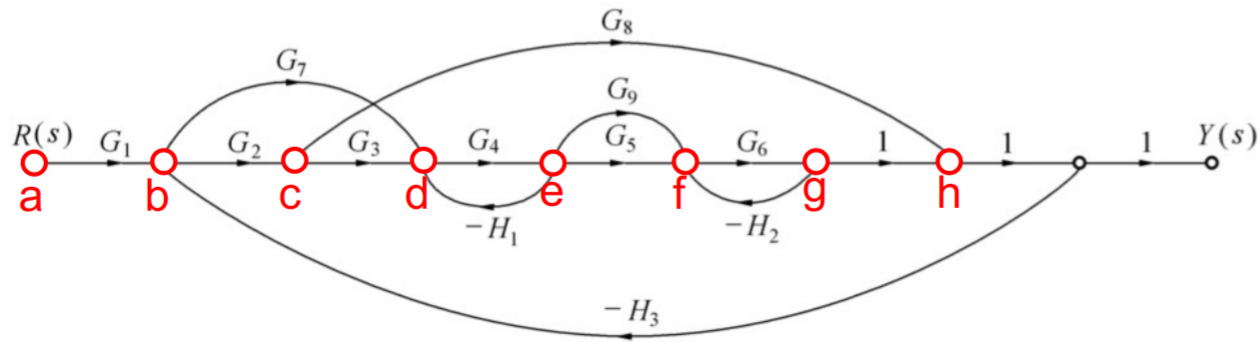
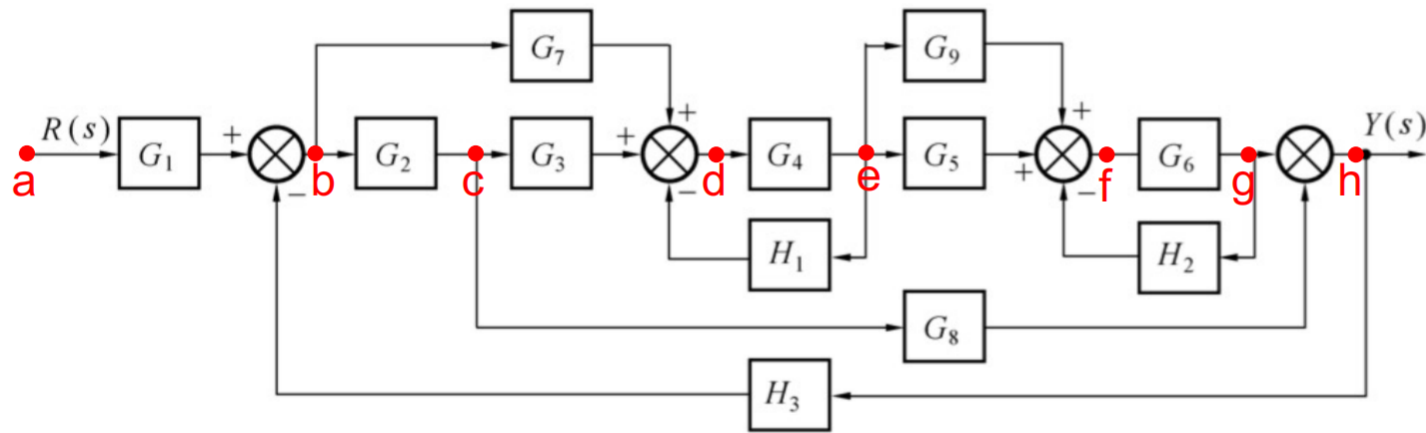
$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \dots$$



## 2.6 信号流图



**<例2.7>** 控制系统方框图如下，试画出信号流图，并用梅森公式求 $Y(s)/R(s)$

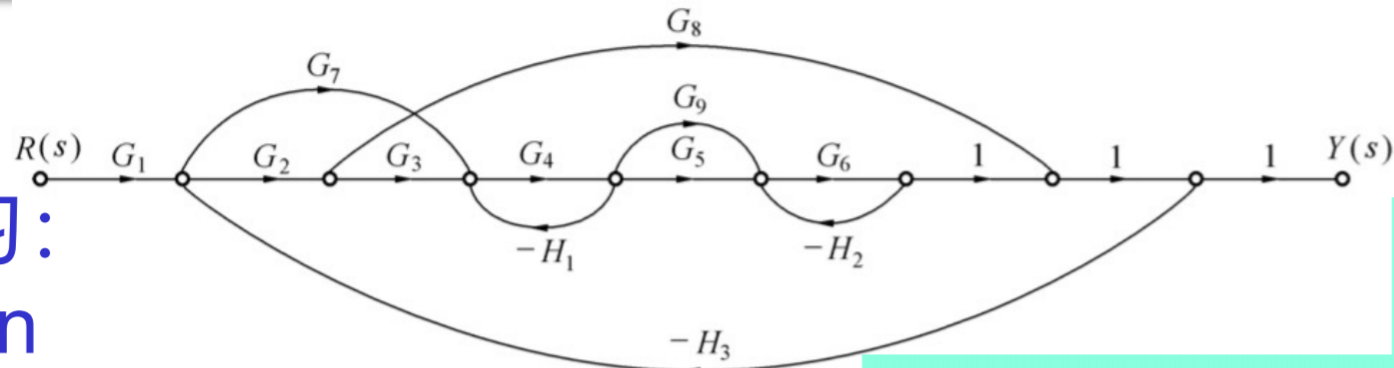


练习：  
3min





## 2.6 信号流图



练习：  
3min

第1步：此图共有\_\_个回路，回路增益分别为

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_6 H_2$$

$$L_3 = -G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_5 = -G_7 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_6 = -G_7 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_7 = -G_2 G_8 H_3$$

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

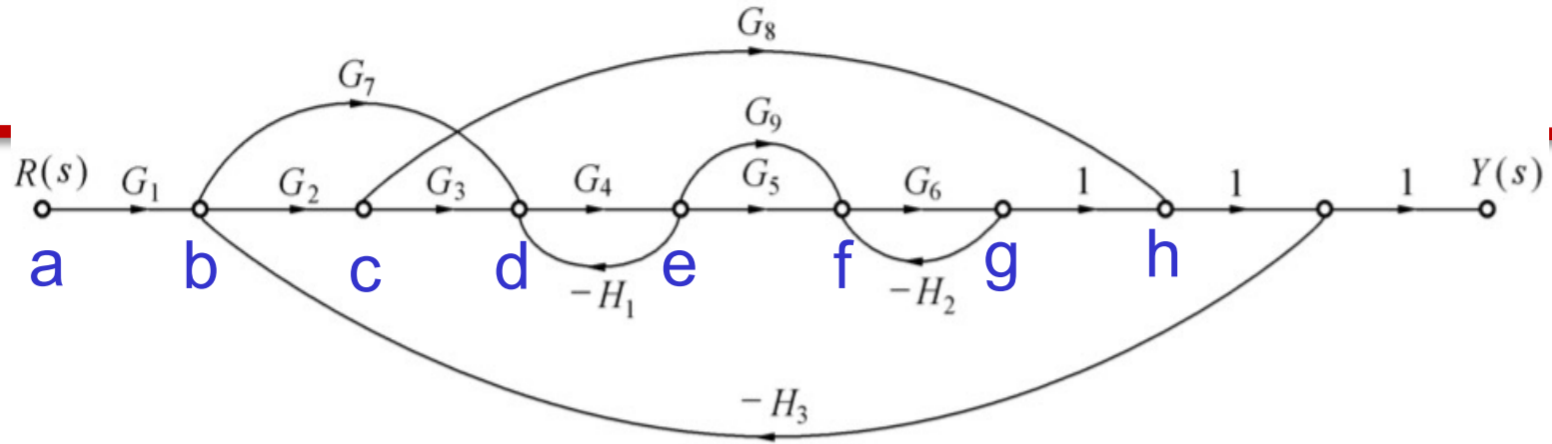
$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \dots$$

第2步：每两个互不接触回路的增益乘积

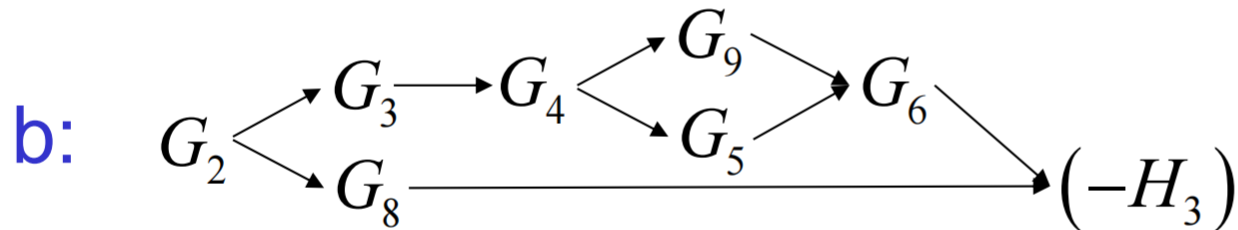
第3步：每三个互不接触回路的增益乘积

思考：怎样不重不漏？





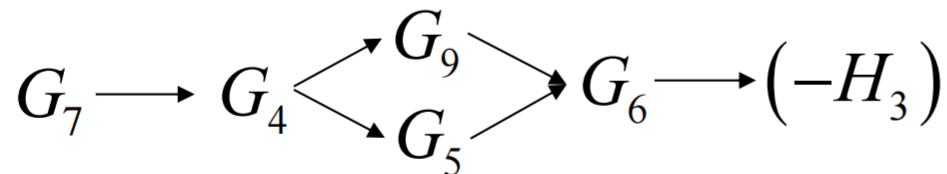
找回路Tip: 遍历有反馈输入支路的节点



$$L_1 = -G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_2 = -G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_3 = -G_2 G_8 H_3$$



$$L_4 = -G_7 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_5 = -G_7 G_4 G_5 G_6 H_3$$

**d:**  $G_4 \longrightarrow (-H_1)$

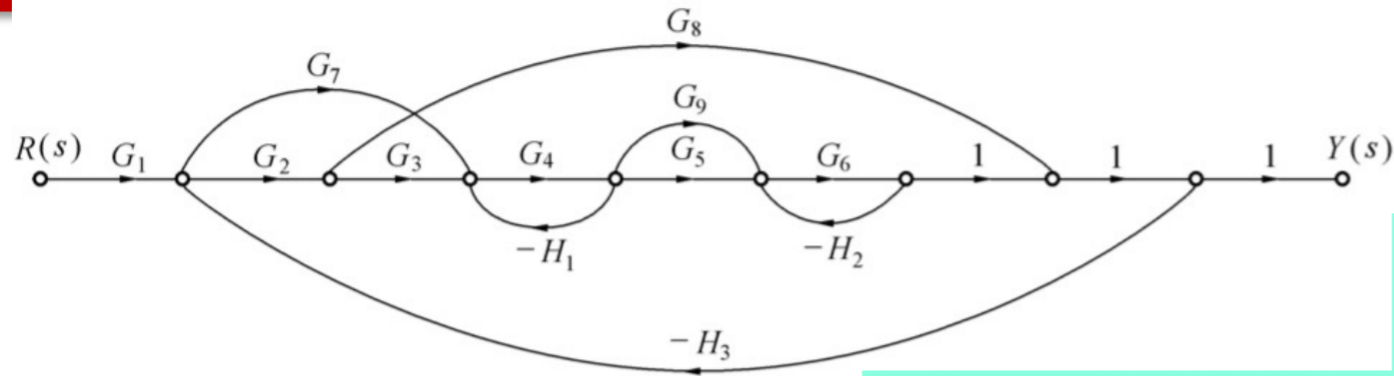
$$L_6 = -G_4 H_1$$

**f:**  $G_6 \longrightarrow (-H_2)$

$$L_7 = -G_6 H_2$$



## 2.6 信号流图



$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

第1步：此图共有\_\_个回路，回路增益分别为

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \dots$$

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_6 H_2$$

$$L_3 = -G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_5 = -G_7 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_6 = -G_7 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_7 = -G_2 G_8 H_3$$

第2步：每两个互不接触回路的增益乘积

$$L_1 L_2 = G_4 G_6 H_1 H_2$$

$$L_1 L_7 = G_2 G_4 G_8 H_1 H_3$$

$$L_2 L_7 = G_2 G_6 G_8 H_2 H_3$$

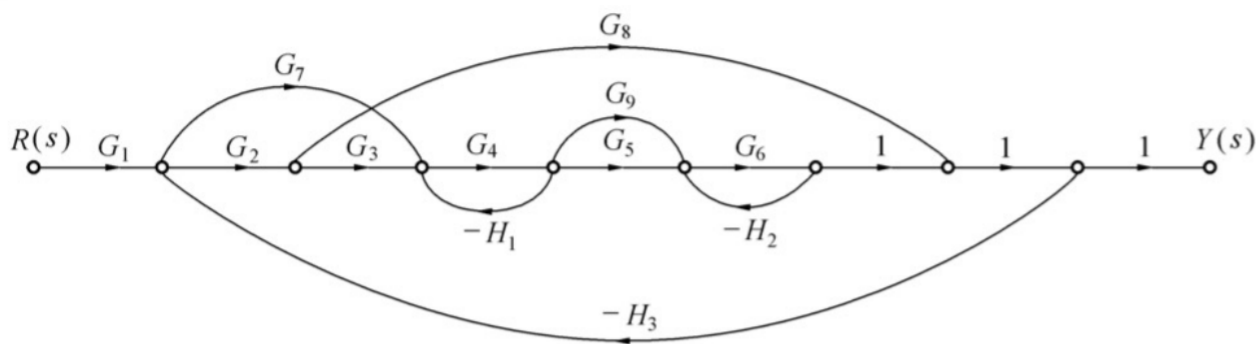
练习：  
3min

第3步：每三个互不接触回路的增益乘积

$$L_1 L_2 L_7 = -G_2 G_4 G_6 G_8 H_1 H_2 H_3$$



## 2.6 信号流图



$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_6 H_2$$

$$L_3 = -G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_5 = -G_7 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_6 = -G_7 G_4 G_9 G_6 H_3$$

$$L_7 = -G_2 G_8 H_3$$

第4步：信号流图的特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7) + L_1 L_2 + L_1 L_7 + L_2 L_7 - L_1 L_2 L_7 =$$

$$1 + G_4 H_1 + G_6 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3 + G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3 + G_7 G_4 G_5 G_6 H_3 +$$

$$G_7 G_4 G_9 G_6 H_3 + G_2 G_8 H_3 + G_4 G_6 H_1 H_2 + G_2 G_4 G_8 H_1 H_3 +$$

$$G_2 G_6 G_8 H_2 H_3 + G_2 G_4 G_6 G_8 H_1 H_2 H_3$$

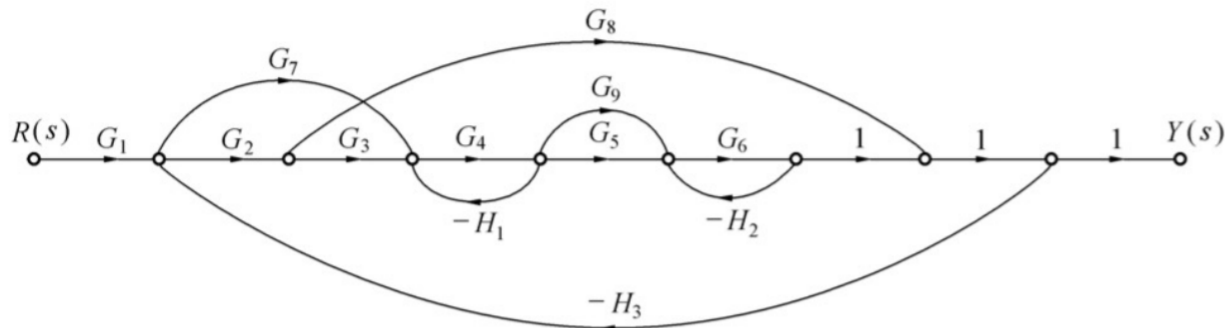
第5步：信号流图的前向通道及其对应的特征式余子式为

练习：  
3min

$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$	$\Delta_1 = 1$
$P_2 = G_1 G_2 G_8$	$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2 = 1 + G_4 H_1 + G_6 H_2 + G_4 G_6 H_1 H_2$
$P_3 = G_1 G_7 G_4 G_5 G_6$	$\Delta_3 = 1$
$P_4 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_9 G_6$	$\Delta_4 = 1$
$P_5 = G_1 G_7 G_4 G_9 G_6$	$\Delta_5 = 1$



## 2.6 信号流图



$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

最后,应用梅森增益公式计算给定系统的闭环传递函数  $Y(s)/R(s)$ , 即

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^5 P_k \Delta_k = & (G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 + G_1 G_2 G_8 + G_1 G_2 G_4 G_8 H_1 + G_1 G_2 G_6 G_8 H_2 + \\ & G_1 G_2 G_4 G_6 G_8 H_1 H_2 + G_1 G_4 G_5 G_6 G_7 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_6 G_9 + \\ & G_1 G_4 G_6 G_7 G_9) / (1 + G_4 H_1 + G_6 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3 + \\ & G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3 + G_7 G_4 G_5 G_6 H_3 + G_7 G_4 G_9 G_6 H_3 + \\ & G_2 G_8 H_3 + G_4 G_6 H_1 H_2 + G_2 G_4 G_8 H_1 H_3 + G_2 G_6 G_8 H_2 H_3 + \\ & G_2 G_4 G_6 G_8 H_1 H_2 H_3) \end{aligned}$$



---

2023.09.14 (Thu)

第6讲



## 2.6 信号流图



**<例2.8>** 控制系统信号流图如下，用梅森公式求 $Y(s)/R(s)$

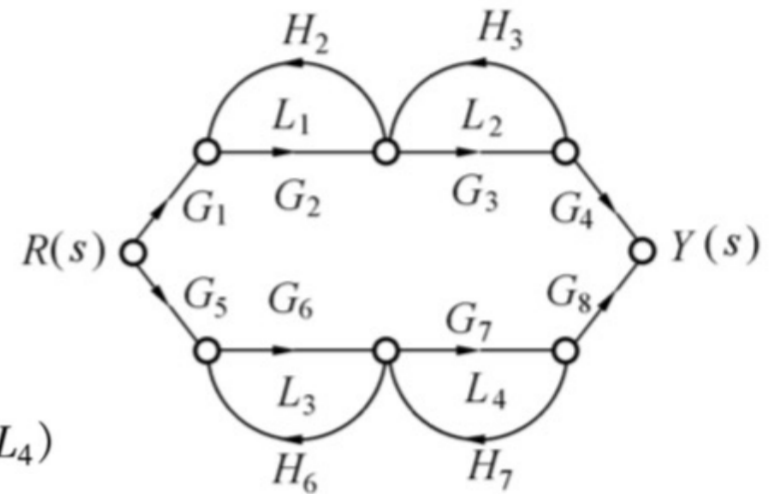
练习：  
5min

4个回路是

$$L_1 = G_2 H_2 \quad L_2 = G_3 H_3$$

$$L_3 = G_6 H_6 \quad L_4 = G_7 H_7$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)$$



2条前向通路

$$\text{通路 1: } P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$$

$$\text{通路 2: } P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$$

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 (1 - L_3 - L_4) + G_5 G_6 G_7 G_8 (1 - L_1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4}$$

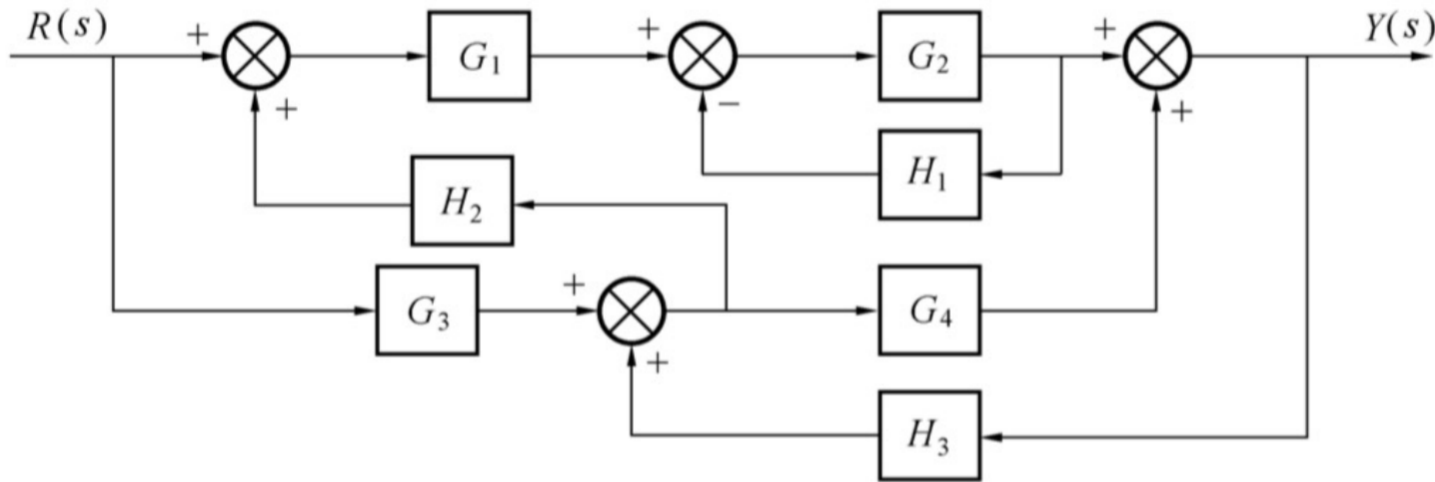


## 2.6 信号流图



<例2.9> 控制系统方框图如下，试用梅森公式求 $Y(s)/R(s)$

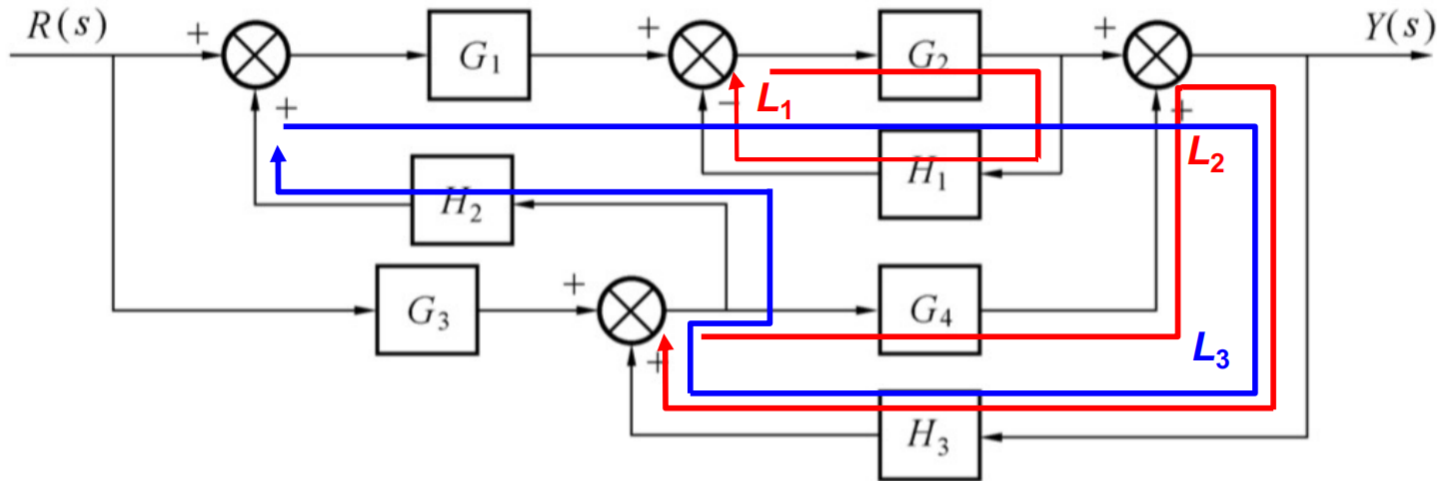
练习：  
5 min



$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$



## 2.6 信号流图



$$L_1 = -G_2H_1 \quad L_2 = G_4H_3 \quad L_3 = G_1G_2H_3H_2$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 = 1 + G_2H_1 - G_4H_3 - G_1G_2H_3H_2 - G_2H_1G_4H_3$$

$$P_1 = G_1G_2 \quad P_2 = G_3H_2G_1G_2 \quad P_3 = G_3G_4$$

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1 \quad \Delta_3 = 1 + G_2H_1$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^3 P_k \Delta_k = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) =$$

$$\frac{G_1G_2 + G_3H_2G_1G_2 + G_3G_4(1 + G_2H_1)}{1 + G_2H_1 - G_4H_3 - G_1G_2H_3H_2 - G_2H_1G_4H_3}$$





## 2.7 状态空间模型

### ● 为什么需要状态空间模型

#### 输入输出模型

单输入单输出 (SISO)

线性时不变系统 (LTI)

仅描述输入输出关系  
(外部特性)

传递函数、频域法

经典控制理论

#### 状态空间模型

多入多出系统 (MIMO)

线性系统、非线性系统等

全面描述系统动态特性

频域法、时域法、微分方程、差分方程等

现代控制理论



## 2.7 状态空间模型



**<例2.10>** 机械系统如图所示，质量块 $m$ 在输入变量作用力 $u$ 下产生的位移为 $x$ 。位移及速度正方向如图中所示， $D$ 为阻尼器的阻尼系数， $K$ 为弹簧弹性系数，试推导其状态空间描述。

解：弹簧和质量块是储能元件，因此系统有 2 个独立储能元件。

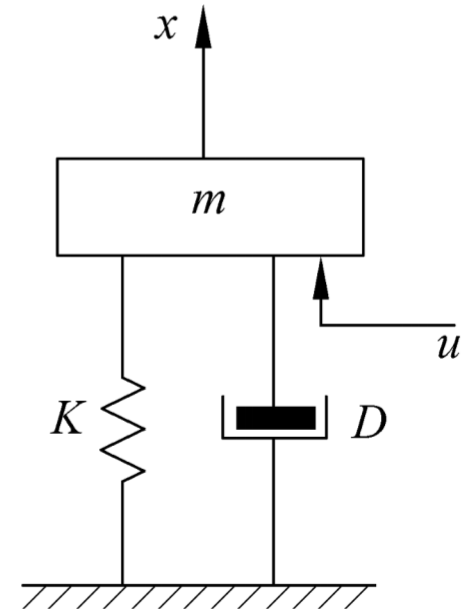
根据牛顿运动定律及力的平衡条件，可得方程

$$m\ddot{x} = u - Kx - D\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + Kx + D\dot{x} = u$$

选位移  $x$  作为状态变量  $x_1$ ，速度为状态变量  $x_2$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases}$$





## 2.7 状态空间模型

$$m\ddot{x} + Kx + D\dot{x} = u \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$m\dot{x}_2 + Kx_1 + Dx_2 = u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{D}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

状态空间表达

State space representation

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



## 2.7 状态空间模型

### 相关术语:

**状态**: 动态系统的状态是系统的**最小**一组变量（称为状态变量），只要知道了在时刻 $t=t_0$ 的一组状态变量和时刻 $t>t_0$ 的输入量，就能够完全确定系统在未来时刻的行为

**状态变量**: 动态系统的状态变量是确定动态系统状态的**最小**一组变量  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , 构成了系统变量中的**极大线性无关组**。

(状态变量组的最小性: 状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  是为完全表征系统行为所必需的系统变量的最少个数)

**状态向量**: 如果完全描述一个给定的系统的行为需要  $n$  个状态变量，那么这  $n$  个状态变量  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$  可以看成是向量  $x$  的  $n$  个分量，这个向量就称为状态向量

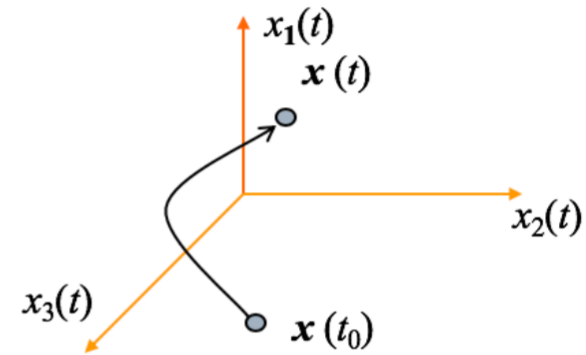
**状态空间**: 由状态向量张成的函数空间。在特定时刻  $t$ , 状态向量就是状态空间中的一个点。



## 2.7 状态空间模型

**状态轨迹：**以 $x(t)=x(t_0)$ 为起点，随着时间的推移， $x(t)$ 在状态空间绘出的一条轨迹，具体形状由 $x(t_0)$ ， $u(t)$ 和系统本身的动力学特性决定。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{——状态方程} \\ y = Cx + Du & \text{——输出方程} \end{cases}$$



**状态方程：**描述系统状态与输入之间关系的、一阶微分方程（组）

**输出方程：**描述系统输出与状态、输入之间关系的数学表达式

**状态空间表达式：** 状态方程 + 输出方程



## 2.7 状态空间模型

### 状态变量的特点:

- (1) **独立性**: 状态变量之间线性独立
- (2) **多样性**: 状态变量的选取并不唯一, 实际上存在无穷多种方案
- (3) **等价性**: 两个状态向量之间只差一个非奇异线性变换
- (4) **现实性**: 状态变量通常取为含义明确的物理量
- (5) **抽象性**: 状态变量可以没有直观的物理意义



## 2.7 状态空间模型

### ● 状态微分方程

假设MIMO系统包含  $n$  个状态变量, 系统由  $m$  个输入量和  $q$  个输出量, 可以用下列方程描述系统:

状态方程

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$

⋮

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$

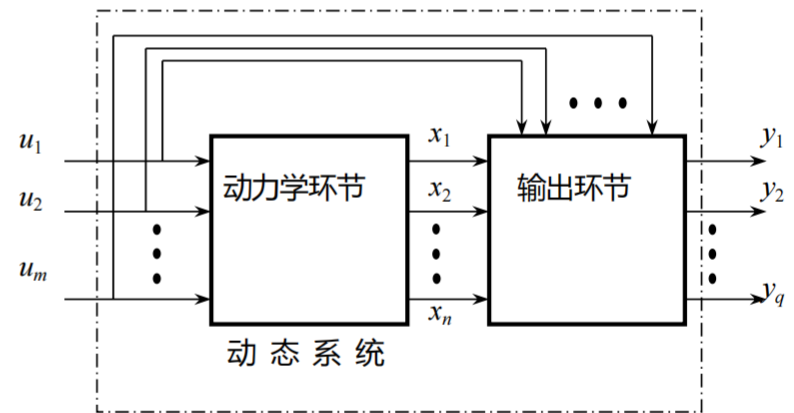
输出方程

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$

$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$

⋮

$$y_q(t) = g_q(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)$$







## 2.7 状态空间模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ y_q(t) &= g_q(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M} \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

general form





## 2.7 状态空间模型

### 线性定常系统(LTI)的状态空间表达式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

状态方程

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

输出方程

$t \geq 0, x_0 = x(0)$  (初始条件)

$\mathbf{x} \in R^n$  状态向量,  $\mathbf{u} \in R^m$  输入向量,  $\mathbf{y} \in R^q$  输出向量

$\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ , 系统的状态矩阵(系统矩阵)

$\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ , 系统的控制矩阵(输入矩阵);

$\mathbf{C} \in R^{q \times n}$ , 系统的输出矩阵;

$\mathbf{D} \in R^{q \times m}$ , 系统的前馈矩阵;

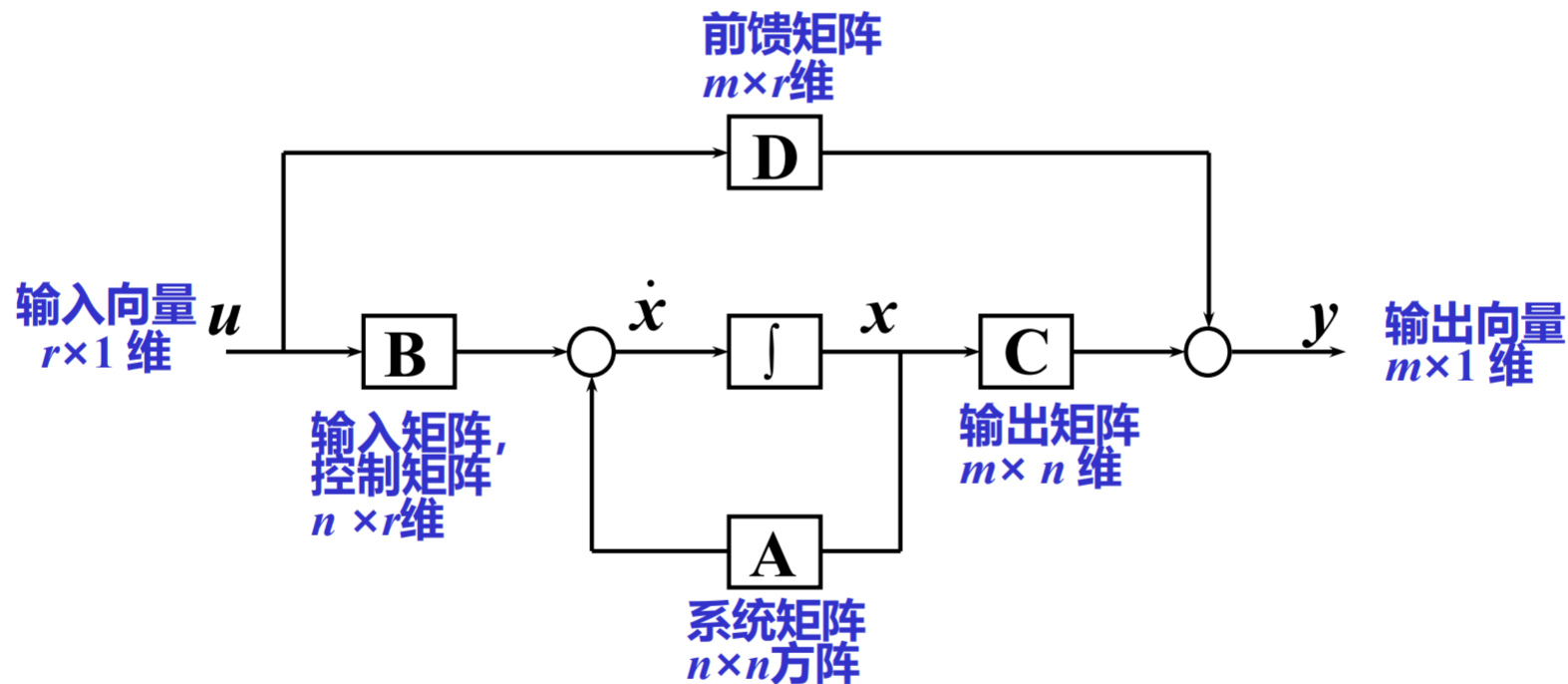
常用符号  $\Sigma(A, B, C, D)$  来表示所讨论的动力学系统, 或者用  $\Sigma(A, B)$  表示所讨论系统的状态方程。



## 2.7 状态空间模型

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$



状态空间表示的线性系统方框图

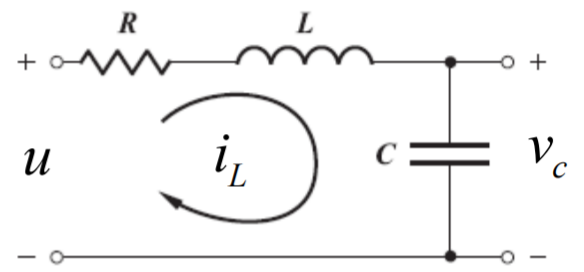


# 2.7 状态空间模型



**<例2.11> 列写图示RLC串联网络状态空间表达式**

解：选择电容电压 $v_C$ 和电感电流 $i_L$ 为**状态变量**



$$i_C = C\dot{v}_C, \quad v_L = Li_L$$

$$v_R + v_L + v_C = u(t), \quad Ri_L + Li_L + v_C = u(t)$$

$\dot{v}_C$ 和 $i_L$ 分别用 $v_C, i_L$ 和 $u(t)$ 来表示

$$\dot{v}_C = \frac{1}{C}i_L$$

$$\dot{i}_L = -\frac{1}{L}v_C - \frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u(t)$$

令 $x_1 = v_C, x_2 = i_L$ ;

输出 $y = y = v_C(t)$ , 输入 $u = u = u(t)$

可以写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



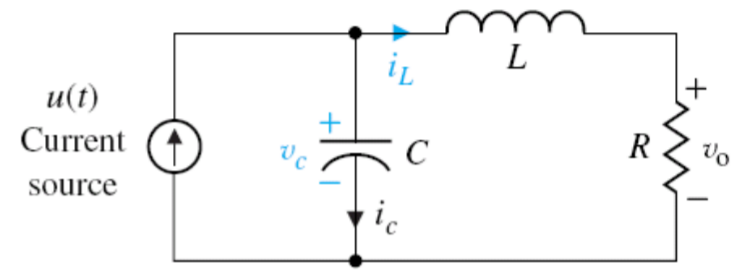
# 2.7 状态空间模型



## <例2.12> 列写图示RLC网络状态空间表达式

同学  
板书

- (a): 选  $v_c$  和  $i_L$  为状态变量,  $v_o$  为输出
- (b): 选  $v_c$  和  $v_o$  为状态变量,  $v_o$  为输出



解(a):  $i_c = C\dot{v}_c, \quad v_L = L\dot{i}_L$   
 由KCL:  $i_c = C\dot{v}_c = u(t) - i_L$   
 由KVL:  $L\dot{i}_L = v_c - Ri_L$   
 output:  $v_o = Ri_L(t)$

令  $x_1 = v_c, \quad x_2 = i_L$   
 $\dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$   
 $\dot{x}_2 = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$

可以写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



# 2.7 状态空间模型



## <例2.13> 列写图示RLC网络状态空间表达式

解(b): 选  $v_c$  和  $v_o$  为状态变量

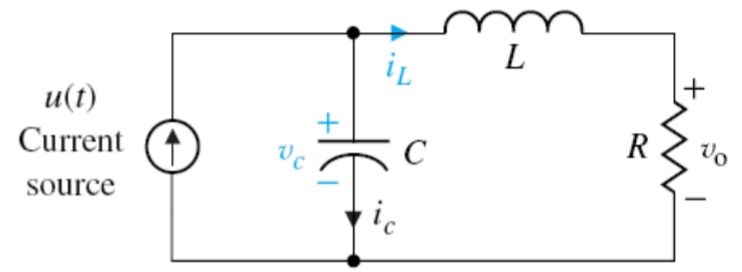
由KCL:  $C\dot{v}_c + v_o / R = u(t)$

由KVL:  $L \frac{d(v_o / R)}{dt} = v_c - v_o$

$x_1 = v_c, \quad x_2 = v_o,$

$\dot{x}_1 = -\frac{1}{CR}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$

$\dot{x}_2 = \frac{R}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$



思考1: 不一样中有哪些一样之处?  
两个系统矩阵的特征根?  
思考2: 选择其他变量组合行不行?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CR} \\ R & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



## 2.7 状态空间模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ y_q(t) &= g_q(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

general form



## 2.7 状态空间模型

### 线性定常系统(LTI)的状态空间表达式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) && \text{状态方程} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) && \text{输出方程}\end{aligned}$$

$t \geq 0, x_0 = x(0)$  (初始条件)

$\mathbf{x} \in R^n$  状态向量,  $\mathbf{u} \in R^m$  输入向量,  $\mathbf{y} \in R^q$  输出向量

$\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ , 系统的状态矩阵(系统矩阵)

$\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ , 系统的控制矩阵(输入矩阵);

$\mathbf{C} \in R^{q \times n}$ , 系统的输出矩阵;

$\mathbf{D} \in R^{q \times m}$ , 系统的前馈矩阵;

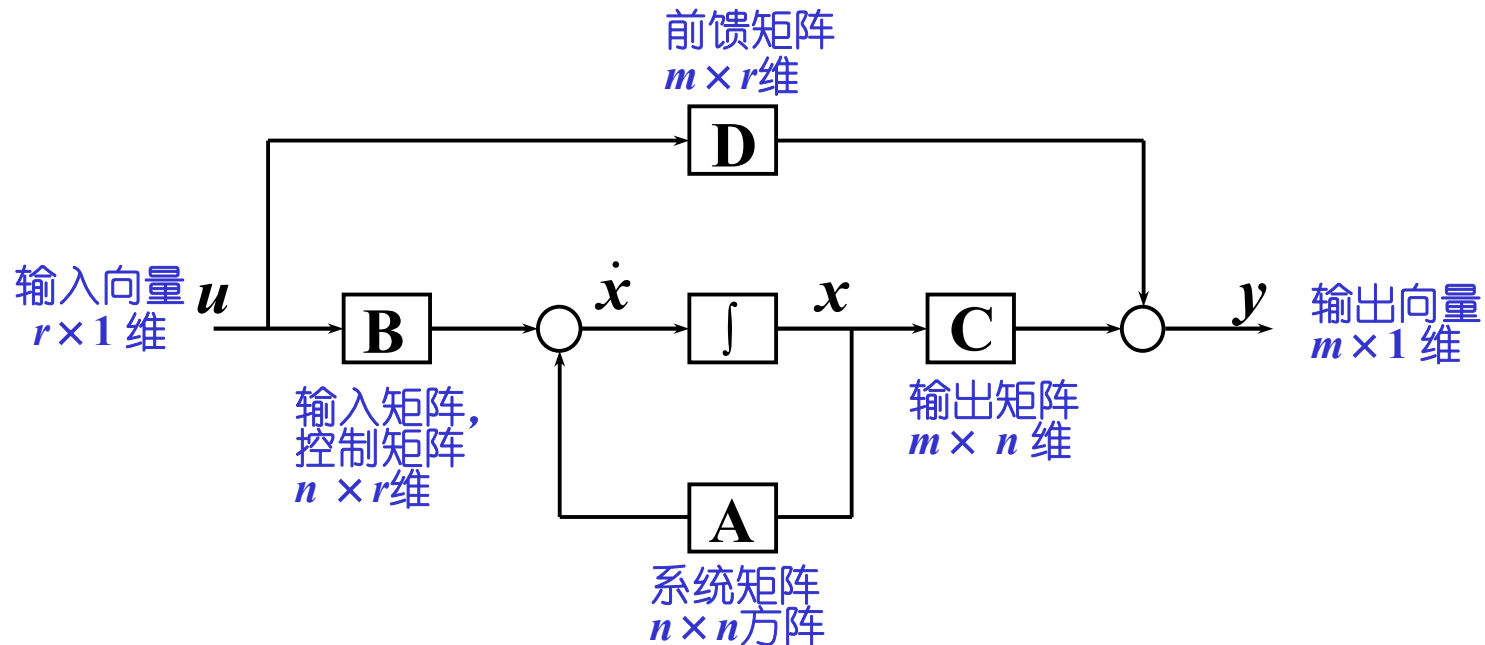
常用符号  $\Sigma(A, B, C, D)$  来表示所讨论的动力学系统, 或者用  $\Sigma(A, B)$  表示所讨论系统的状态方程。



## 2.7 状态空间模型

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$



状态空间表示的线性系统方框图





## 2.7 状态空间模型

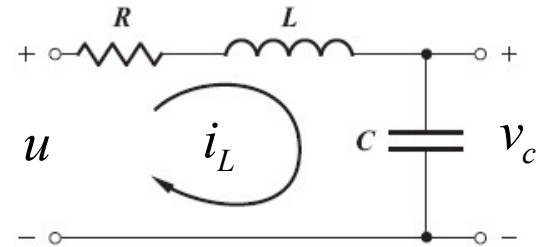


**<例2.11>** 列写图示RLC串联网络状态空间表达式

解：选择电容电压 $v_C$ 和电感电流 $i_L$ 为状态变量

$$i_C = C\dot{v}_C, \quad v_L = Li_L$$

$$v_R + v_L + v_C = u(t), \quad Ri_L + Li_L + v_C = u(t)$$



$\dot{v}_C$ 和 $i_L$ 分别用 $v_C, i_L$ 和 $u(t)$ 来表示

$$\dot{v}_C = \frac{1}{C}i_L$$

$$\dot{i}_L = -\frac{1}{L}v_C - \frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u(t)$$

令 $x_1 = v_C, x_2 = i_L$ ;

输出 $\mathbf{y} = y = v_C(t)$ , 输入 $\mathbf{u} = u = u(t)$

可以写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



## 2.7 状态空间模型

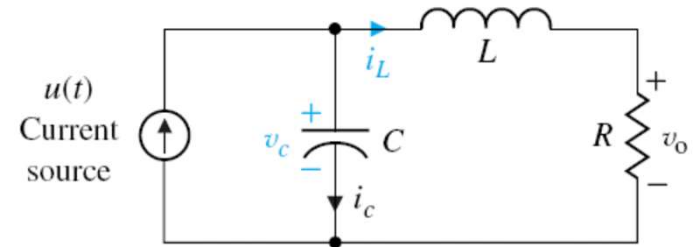


**<例2.12>** 列写图示RLC网络状态空间表达式

同学  
板书

(a): 选  $v_c$  和  $i_L$  为状态变量,  $v_o$  为输出

(b): 选  $v_c$  和  $v_o$  为状态变量,  $v_o$  为输出



解(a):  $i_c = C\dot{v}_c, \quad v_L = Li_L$

由KCL:  $i_c = C\dot{v}_c = u(t) - i_L$

由KVL:  $Li_L = v_c - Ri_L$

output:  $v_o = Ri_L(t)$

令  $x_1 = v_c, \quad x_2 = i_L$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$$

$$\dot{x}_2 = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

可以写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



## 2.7 状态空间模型



<例2.13> 列写图示RLC网络状态空间表达式

解(b): 选  $v_c$  和  $v_o$  为状态变量

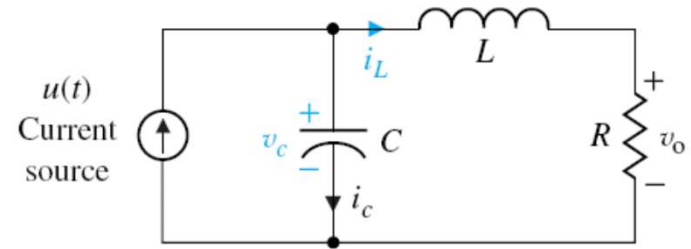
由KCL:  $C\dot{v}_c + v_o / R = u(t)$

由KVL:  $L \frac{d(v_o / R)}{dt} = v_c - v_o$

$x_1 = v_c, \quad x_2 = v_o,$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{CR}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$



思考1: 不一样中有哪些一样之处?  
两个系统矩阵的特征根?

思考2: 选择其他变量组合行不行?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CR} \\ \frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



---

2023.09.19 (Tue)

第7讲



## 2.7 状态空间模型

### ● 传递函数 转换为 状态空间模型



由状态空间模型可以唯一的转换为一个传递函数(阵); 由传递函数转换为状态空间模型, 称为系统的实现问题。由于状态量选择的多样性, 对于一个传递函数(阵), 系统的实现是不唯一的。这里给出一种“能控规范型”的实现形式。

(control normal form / canonical form)



## 2.7 状态空间模型

- Case I: 当传递函数的分子为常数项时

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

↓ Laplace反变换

n阶ODE  $\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$

↓ 定义状态变量

一阶微分方程组

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$



## 2.7 状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u(t) \end{cases} \quad \text{定义状态向量 } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x \end{cases}$$



## 2.7 状态空间模型

- Case II: 传递函数的分子为多项式  $m < n$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_1(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned} \right\}$$

$$Y(s) = X_1(s) [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0]$$





## 2.7 状态空间模型

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

根据Case I

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



## 2.7 状态空间模型

$$Y(s) = X_1(s) [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$$

↓ Laplace反变换

$$y(t) = b_m \frac{d^m x_1}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0 x_1$$

$$= b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{m-1} x_m + b_m x_{m+1}$$

$$= [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



## 2.7 状态空间模型

补充方法：由传递函数的部分分式展开求状态空间表达式

Special case 1: 传递函数中只含有两两相异的实数极点

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{(s - \lambda_1)\cdots(s - \lambda_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

$$G(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \quad c_i = [G(s)(s - \lambda_i)]_{s=\lambda_i}$$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} U(s) + \frac{c_2}{s - \lambda_2} U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} U(s)$$

★选取状态变量：

$$\text{令 } X_i(s) = \frac{U(s)}{s - \lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad y(t) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \text{ —— 输出方程}$$



## 2.7 状态空间模型

$$X_i(s) = \frac{U(s)}{s - \lambda_i} \longrightarrow \dot{x}_i = \lambda_i x_i + u$$

状态空间实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} x$$

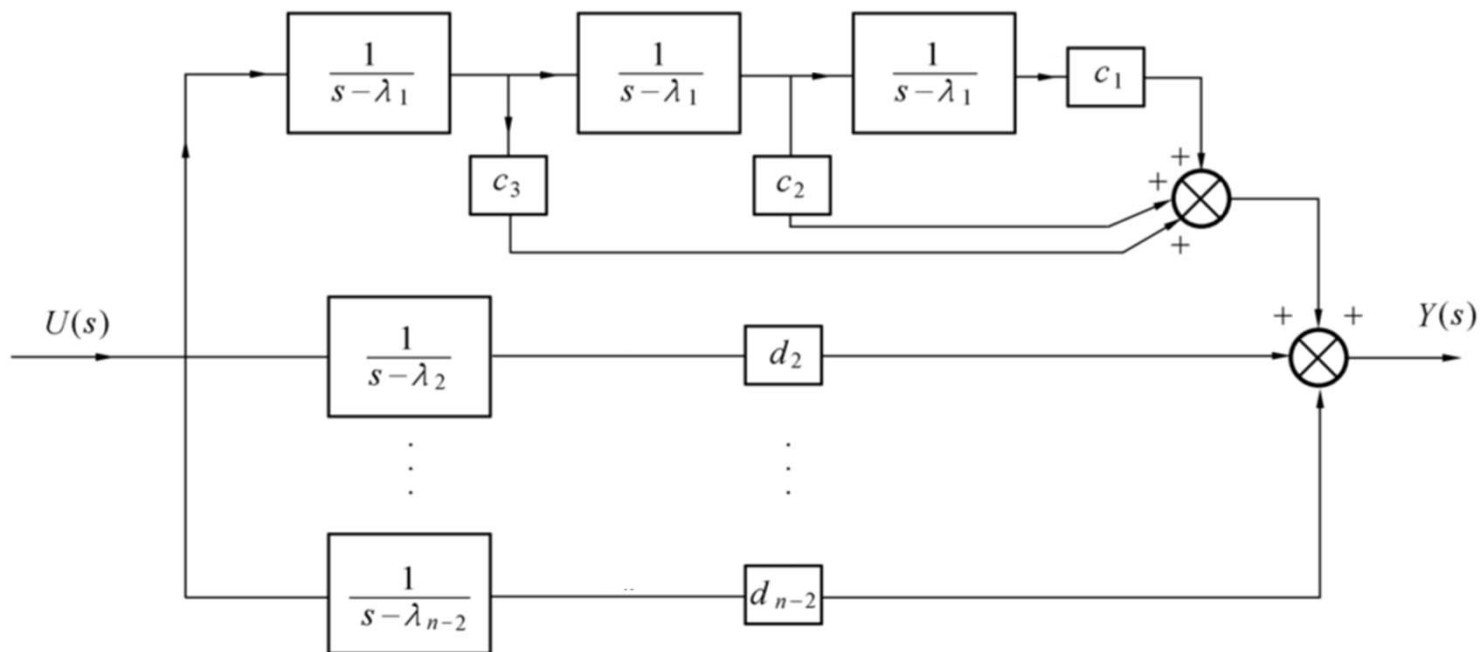


## 2.7 状态空间模型

补充方法：由传递函数的部分分式展开求状态空间表达式

Special case 2: 传递函数中有重实数极点

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^3(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_{n-2})} = \frac{c_1}{(s-\lambda_1)^3} + \frac{c_2}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{c_3}{s-\lambda_1} + \sum_{j=2}^{n-2} \frac{d_j}{s-\lambda_j}$$





## 2.7 状态空间模型

补充方法：由传递函数的部分分式展开求状态空间表达式

Special case 2: 传递函数中有重实数极点

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s - \lambda_1)^3 (s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_{n-2})} = \frac{c_1}{(s - \lambda_1)^3} + \frac{c_2}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_3}{s - \lambda_1} + \sum_{j=2}^{n-2} \frac{d_j}{s - \lambda_j}$$

★选取状态变量:

$$X_1(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} X_2(s) \Rightarrow \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} X_3(s) \Rightarrow \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} U(s) \Rightarrow \dot{x}_3 = \lambda_1 x_3 + u$$

$$X_4(s) = \frac{1}{s - \lambda_2} U(s) \Rightarrow \dot{x}_4 = \lambda_2 x_4 + u$$

⋮ ⋮

$$X_n(s) = \frac{1}{s - \lambda_{n-2}} U(s) \Rightarrow \dot{x}_n = \lambda_{n-2} x_n + u$$

状态空间实现为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & d_2 & \cdots & d_{n-2} \end{bmatrix} x$$



## 2.7 状态空间模型

### ● 状态空间模型转换为传递函数(阵)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Laplace变换  
零初始条件

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\longrightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\searrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$



## 2.7 状态空间模型

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) + \mathbf{D}U(s) \\ &= [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s) \end{aligned}$$

$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$  称为传递函数矩阵

对于单输入单输出的系统,  $U(s), Y(s)$  是标量, 则传递函数为:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D$$



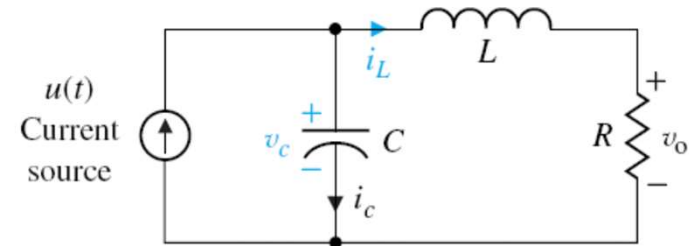


## 2.7 状态空间模型



<例2.14> 下图RLC网络，  
推导出系统传递函数模型

由系统状态空间模型



$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} (s + \frac{R}{L}) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & (s + \frac{R}{L}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{R/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$



## 2.7 状态空间模型



<例2.15> 求下面状态空间表达式的传递函数

3min

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s-3}{s^2-2s+5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s-3}{s^2-2s+5}$$

Q: 两个状态空间模型有着相同的传递函数，二者是什么关系？



## 2.7 状态空间模型

$$\Sigma_1: \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2: \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

存在非奇异变换矩阵  $T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ 系统 $S_1$ 和系统 $S_2$ 是等价的。



## 2.7 状态空间模型

通过一个非奇异线性变换关联起来的两个状态空间模型是等价的。

数学描述：

给定系统  $S(A, B, C, D)$ ，引入线性变换

$$\bar{x} = Tx$$

其中， $T$  为  $n \times n$  的非奇异矩阵，则可以得到系统  $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB,$$

$$\bar{C} = CT^{-1}, \bar{D} = D$$

$$\bar{x}(0) = Tx(0)$$

我们称系统  $S$  和系统  $\bar{\Sigma}$  是等价的。

用途：通过线性变换，可将状态方程变成对角线或约当标准型（或其他标准型）。



## 2.7 状态空间模型

对于等价的系统，必然有一些不变的特征，使得两个系统等价，这个不变的特征就是特征多项式和特征根。

**结论1：** 等价的状态空间模型具有相同的传递函数。

**结论2：** 等价的状态空间模型具有相同的特征多项式、特征方程和极点。



## What we can do with SSR?

Linear control

Nonlinear control

Adaptive control

Optimal control

Optimal estimation

etc.



## 2.8 线性离散系统数学模型

### Ref:

1. 第6.1-6.6节 in 裴润, 宋申民. 自动控制原理
2. Chapter 12 in C.T. Chen. *Analog & Digital Control System Design*.
3. Chapter 13 in Dorf
4. Chapter 8 in Franklin. *Feedback Control of Dynamic Systems*
5. Proakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*.

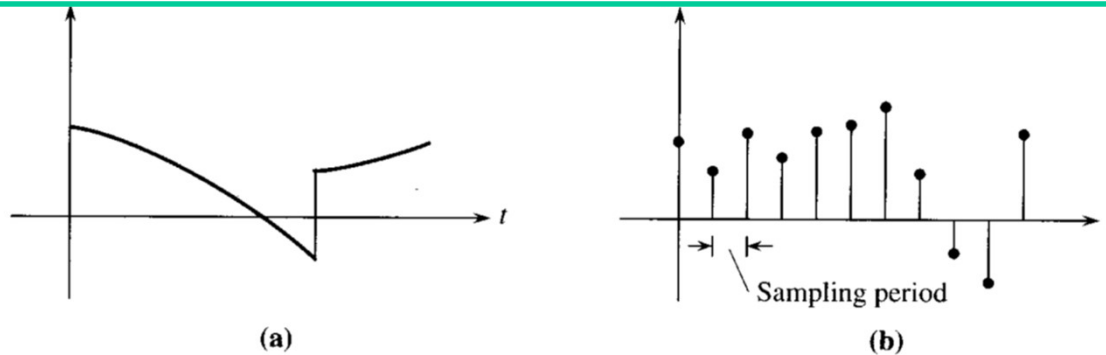


Figure 12.2 Continuous-time and discrete-time signals.

连续信号(continuous signals)

模拟信号(analogy signals)

连续系统(CT systems)

离散信号 (discrete signals)

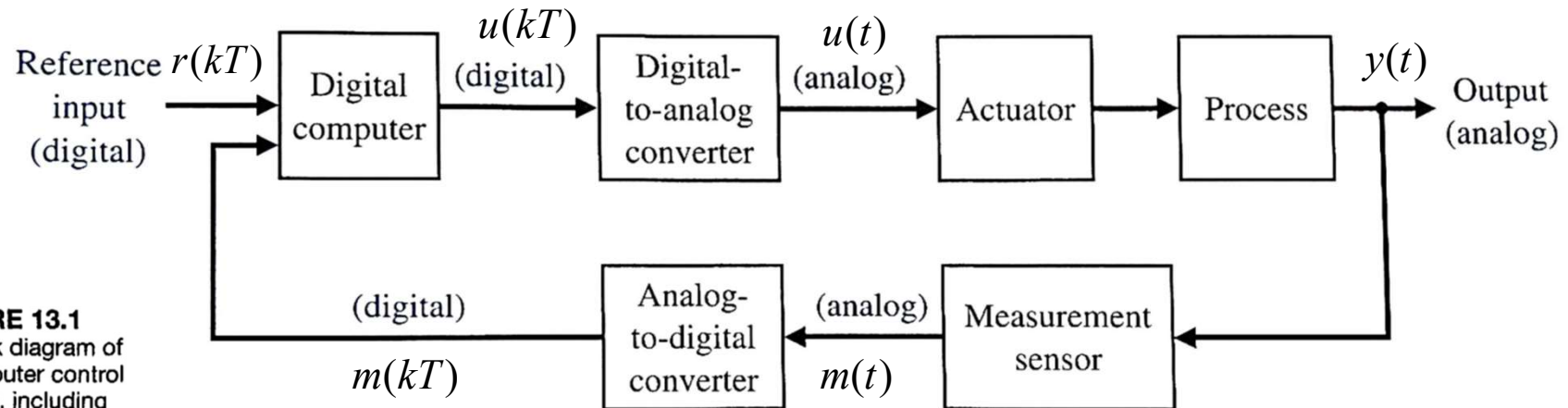
数字信号 (digital signals)-量化幅值的离散信号

离散系统 (DT systems)



## 2.8 线性离散系统数学模型

### A digital/computer control system



**FIGURE 13.1**  
A block diagram of a computer control system, including the signal converters. The signal is indicated as digital or analog.





---

2023.09.21 (Thu)

第8讲



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ 数字/计算机/离散控制系统的优缺点

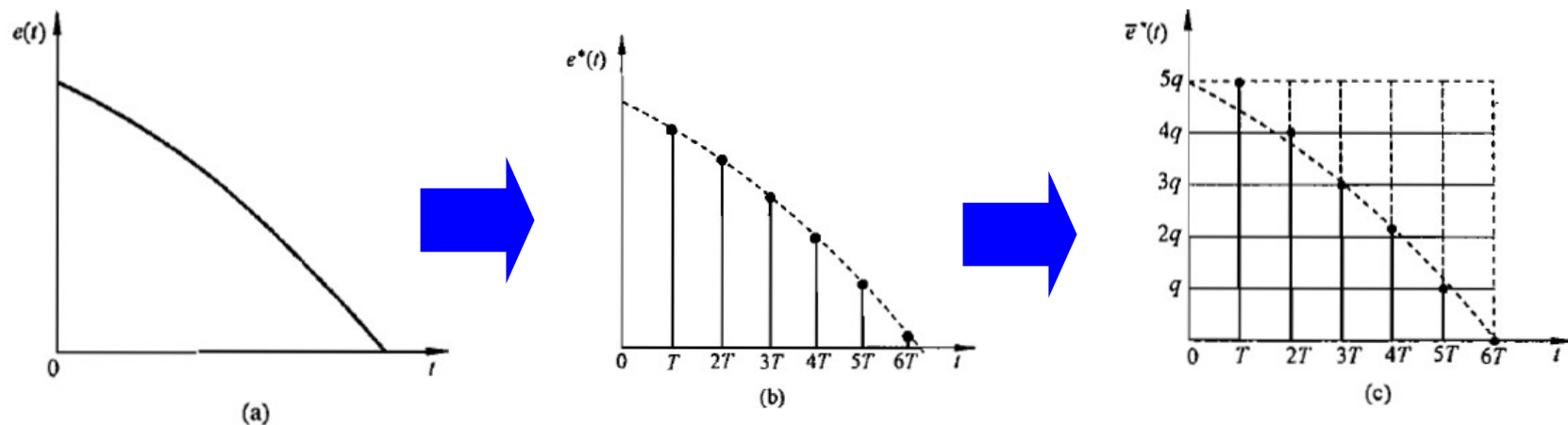
- 优点
- (1) 控制计算由程序实现，便于修改，容易实现复杂的控制律
  - (2) 抗干扰性强
  - (3) 一机多用，利用率高
  - (4) 便于联网，实现生产过程的自动化和宏观管理
- 缺点
- (1) 采样点之间的信息丢失，与相同条件下的连续系统相比，性能会有所下降。
  - (2) 需附加A/D、D/A转换装置。



## 2.8 线性离散系统数学模型

### □ A/D 转换 (analog-to-digital converter)

- ① 将连续模拟信号转换为离散数字信号的装置。
- ② A/D转换主要包括采样、量化和编码的过程。
- ③ 离散信号必须表示成最小位二进制的整数倍，才能成为数字信号，才能进行运算。 (LSB: least significant bit)



量化：采用有限字长的一组二进制数去逼近离散模拟信号的幅值。

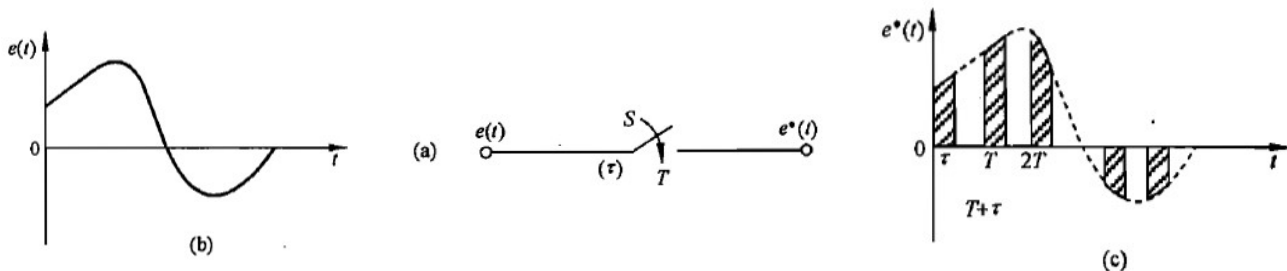
编码：将量化后的数值变成按某种规则编码的二进制数码。



## 2.8 线性离散系统数学模型

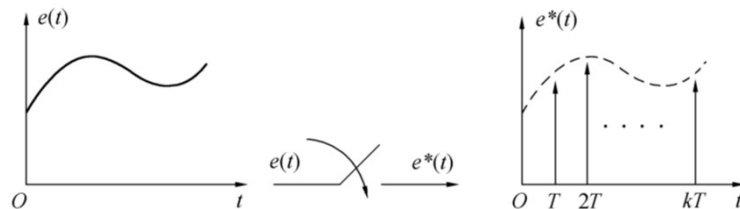
### ➤ 采样过程及其数学描述

- ① 采样器，又称采样开关：把连续信号变换为脉冲序列。
- ② 采样过程：用一个周期性闭合的采样开关  $S$  表示。



### 理想采样过程

- ①  $\tau \ll T$  认为采样瞬时完成
- ② 字长足够 认为  $e^*(kT) = e(kT)$



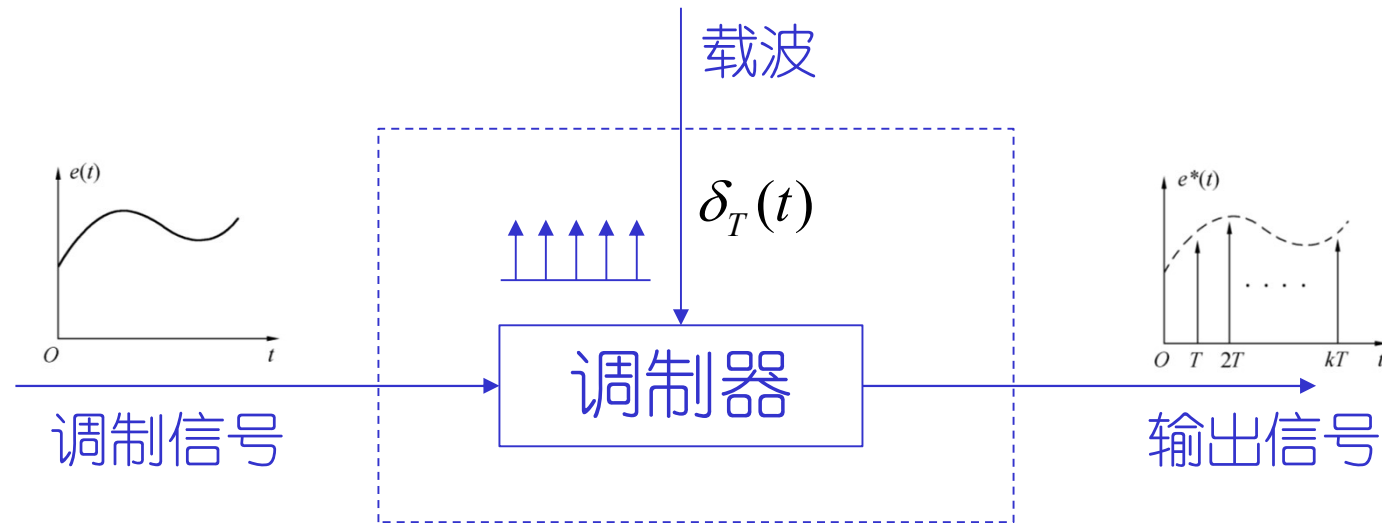
$$\text{采样频率 } f_s = \frac{1}{T}$$

$$\text{采样角频率 } \omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$$



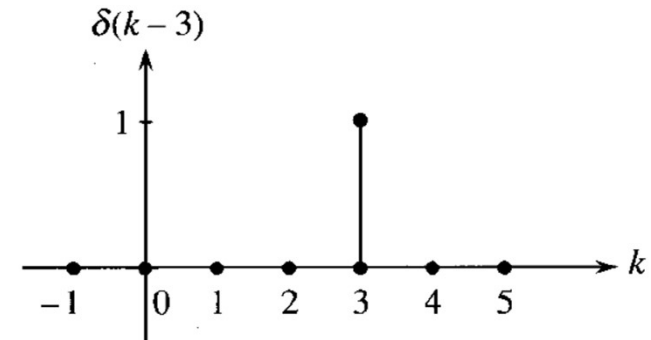
## 2.8 线性离散系统数学模型

采样过程可以看出是一个脉冲调制的过程



单位脉冲序列: 
$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

其中 
$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



注意：脉冲强度（即面积）用其高度来表示



## 2.8 线性离散系统数学模型

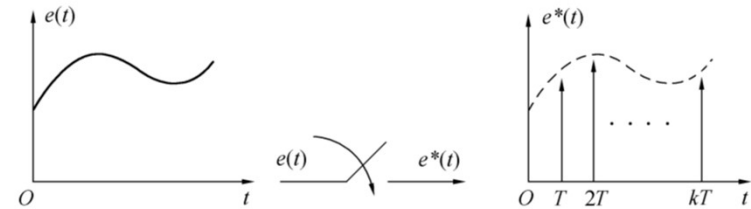
冲激采样 (impulse sampler)

$$e^*(t) = e(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \delta(t - kT)$$

$$= e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t - T) + \cdots + e(kT)\delta(t - kT) + \cdots$$

时间序列  $e(0), e(T), e(2T), \dots$



注意：冲激采样实际并不存在，引入它只是为了分析方便。



## 2.8 线性离散系统数学模型

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

采样信号的拉氏变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t-\lambda)) &= e^{-\lambda s} F(s) \\ \mathcal{L}(\delta(t)) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^*(s) &= \mathcal{L}[e^*(t)] \\ &= e(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + e(T)\mathcal{L}[\delta(t-T)] + e(2T)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + \dots \\ &= e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2Ts} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-kTs} \end{aligned}$$

关于 $s$ 的超越方程

$$\boxed{e^{Ts} = z} \quad \text{or} \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$z$  变换

$$E^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{-k} = E(z)$$

关于 $z$ 的代数方程

冲激采样信号的拉普拉斯变换 = 连续信号的 $z$ 变换



## 2.8 线性离散系统数学模型

### 采样频率怎么选？

采样频率越大（ $T$ 越小），获得控制信息越多，控制效果越好。但过大会增加计算负担，控制规律复杂，无实际意义。可能会采集到高频噪声信号，增大建模误差

采样频率越小（ $T$ 越大），则会出现信号混叠(Aliasing)，同时也增加了控制过程的误差，降低动态性能和稳定性。

**定理 6.2.1(Shannon 定理)** 如果对一个具有有限频谱( $-\omega_h < \omega < \omega_h$ )的连续信号进行采样,当采样角频率  $\omega_s > 2\omega_h$  (或者说采样频率  $f_s > 2f_{\max}$ )时,则由采样得到的离散信号能无失真地恢复到原来的连续信号。

必要条件

$$T < \frac{2\pi}{2\omega_h} \iff \omega_s > 2\omega_h$$

为什么？

思考：无失真指的是 频率？幅值？





## 2.8 线性离散系统数学模型

### 采样信号的频谱分析

脉冲序列的傅里叶变换  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}$

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T} \quad \text{采样角频率}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{1}{T} \quad \text{傅氏系数}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

采样信号的傅里叶变换  $x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jn\omega_s t}$

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

采样信号的拉氏变换  $X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s)$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### 采样信号的频谱分析

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s)$$

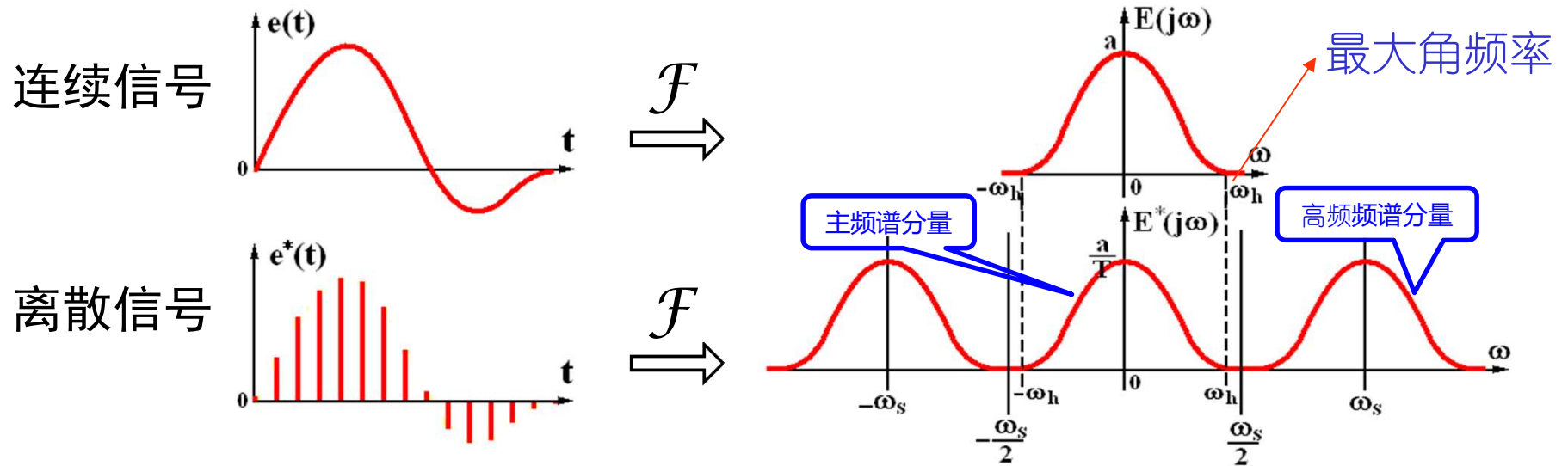
↓ 当极点在左半平面

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - n\omega_s)] \quad \text{采样信号 } x^*(t) \text{ 的频谱}$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

连续信号 $e(t)$ 与离散信号 $e^*(t)$ 的频谱



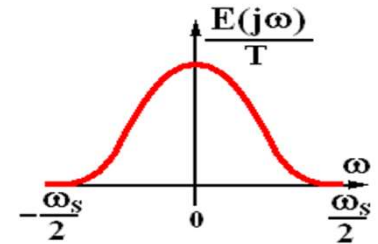
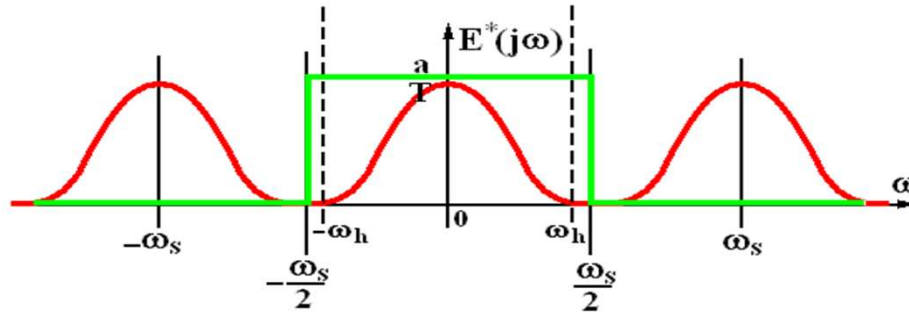
$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[j(\omega - n\omega_s)]$$



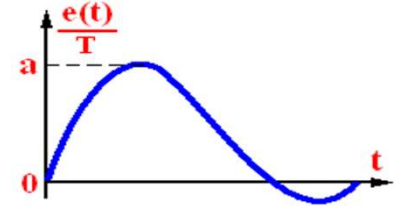
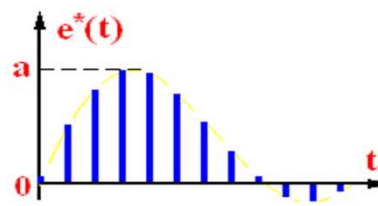
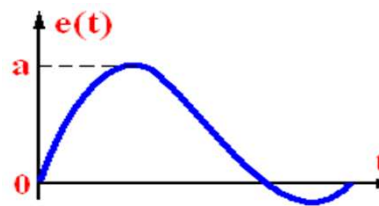
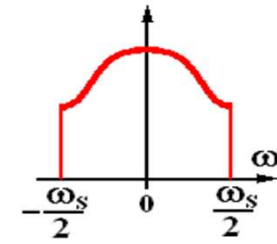
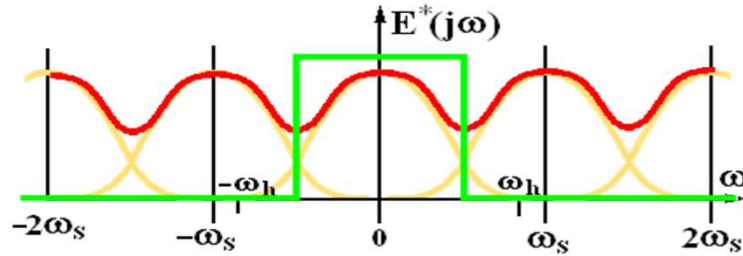
# 2.8 线性离散系统数学模型

信号完全复现的必要条件

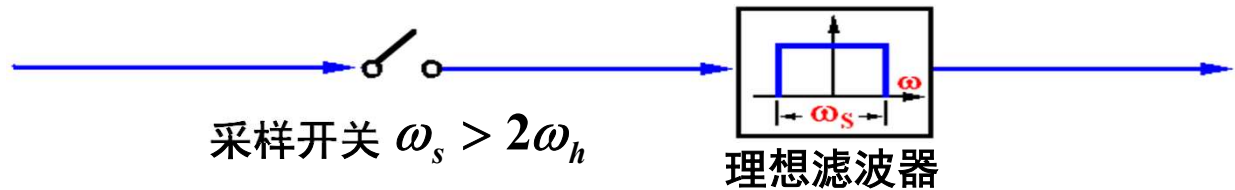
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_h$$



$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} < 2\omega_h$$



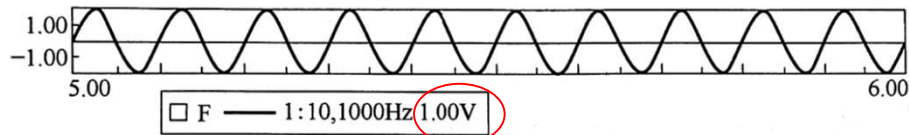
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_h$$





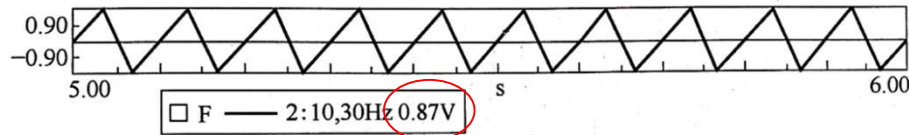
## 2.8 线性离散系统数学模型

注意：采样定理只能保证信号的频率不失真，无法保证幅值不失真



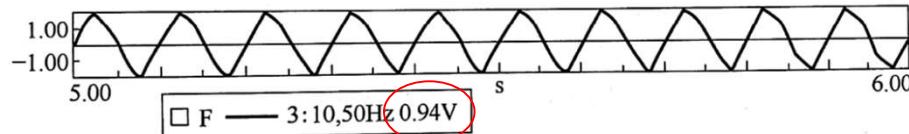
$$f_s = 1000\text{Hz}$$

是信号能够复现的  
必要条件



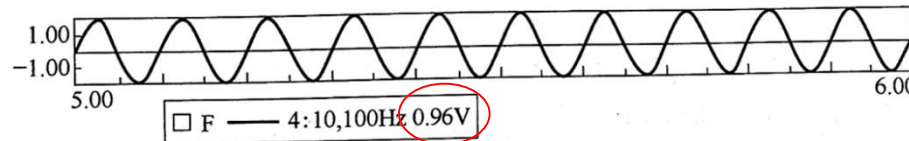
$$f_s = 30\text{Hz}$$

工程中：



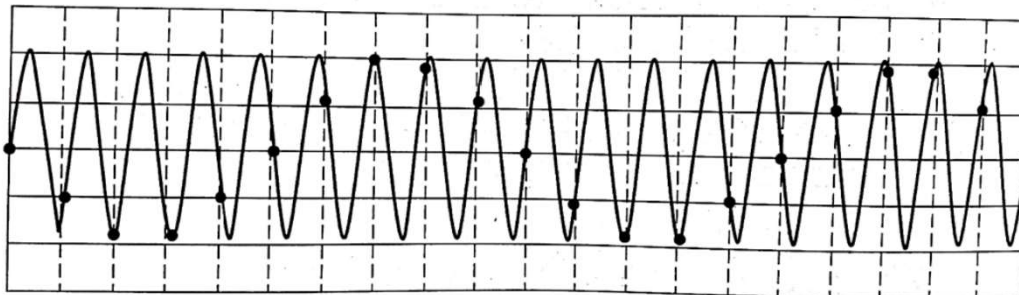
$$f_s = 50\text{Hz}$$

采样频率 > 10 信号频率



$$f_s = 100\text{Hz}$$

> 伺服系统控制信号的最  
高频率分量的 10 倍



频率混叠(Aliasing)

如：车轮倒转；频闪仪



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ 如何减小量化误差

- 采用位数高的ADC

表 2-1 不同 AD 位数的结果

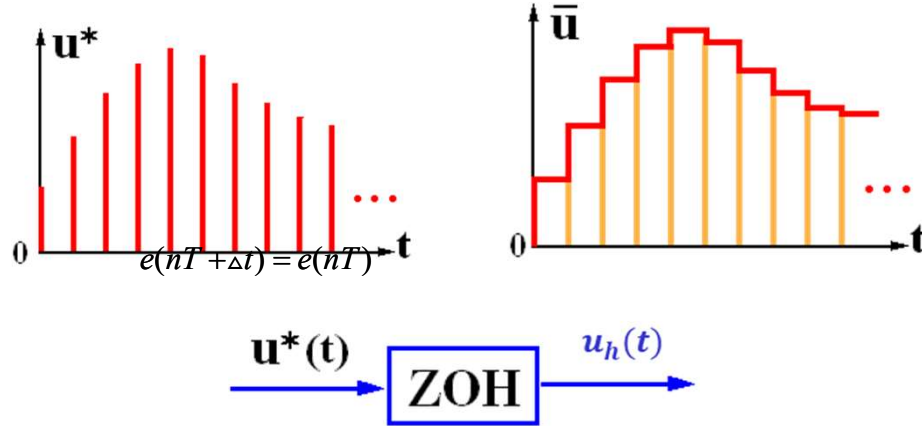
AD 位数 $M$	量化份数 $N$	量化量级 $Q$ : $\pm 10V$
8	255	78.1mV
12	4095	4.88mV
16	65535	0.305mV
24	16777215	1.19 $\mu$ V

- 使用量程合适的传感器



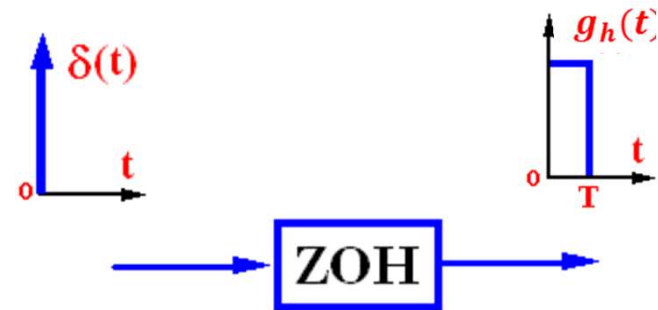
## □ D/A 转换

零阶保持器  
(ZOH)



### 零阶保持器

工程实践中，理想滤波器并不存在，只能用特性接近的低通滤波器代替，零阶保持器是常用的低通滤波器之一。





## 2.8 线性离散系统数学模型

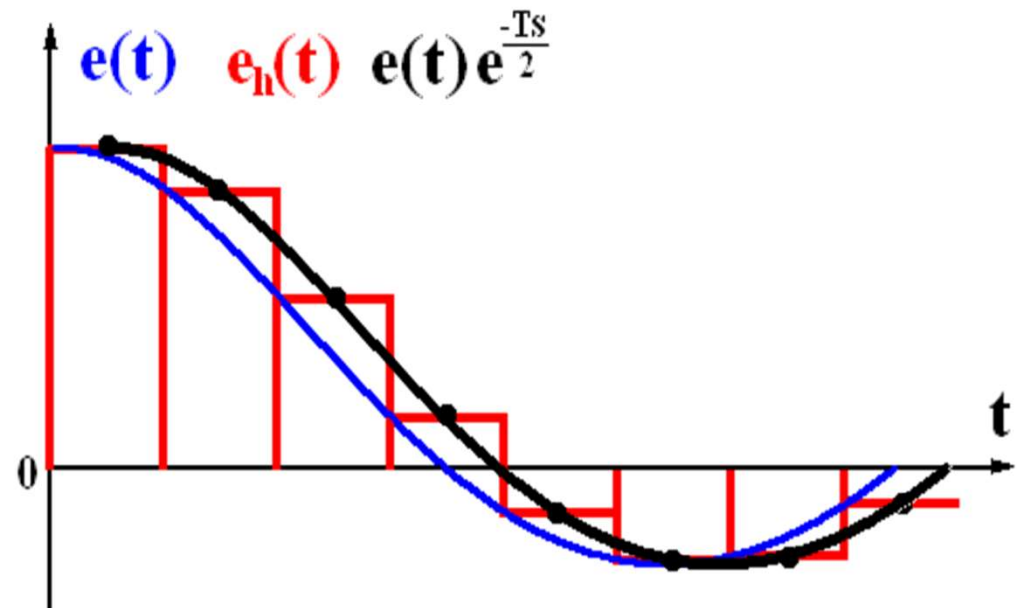
### 零阶保持器对系统的影响

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$\approx e^{-Ts/2}$$

零阶保持器特性 (胡寿松)

1. 低通
2. 相角滞后
3. 时间滞后

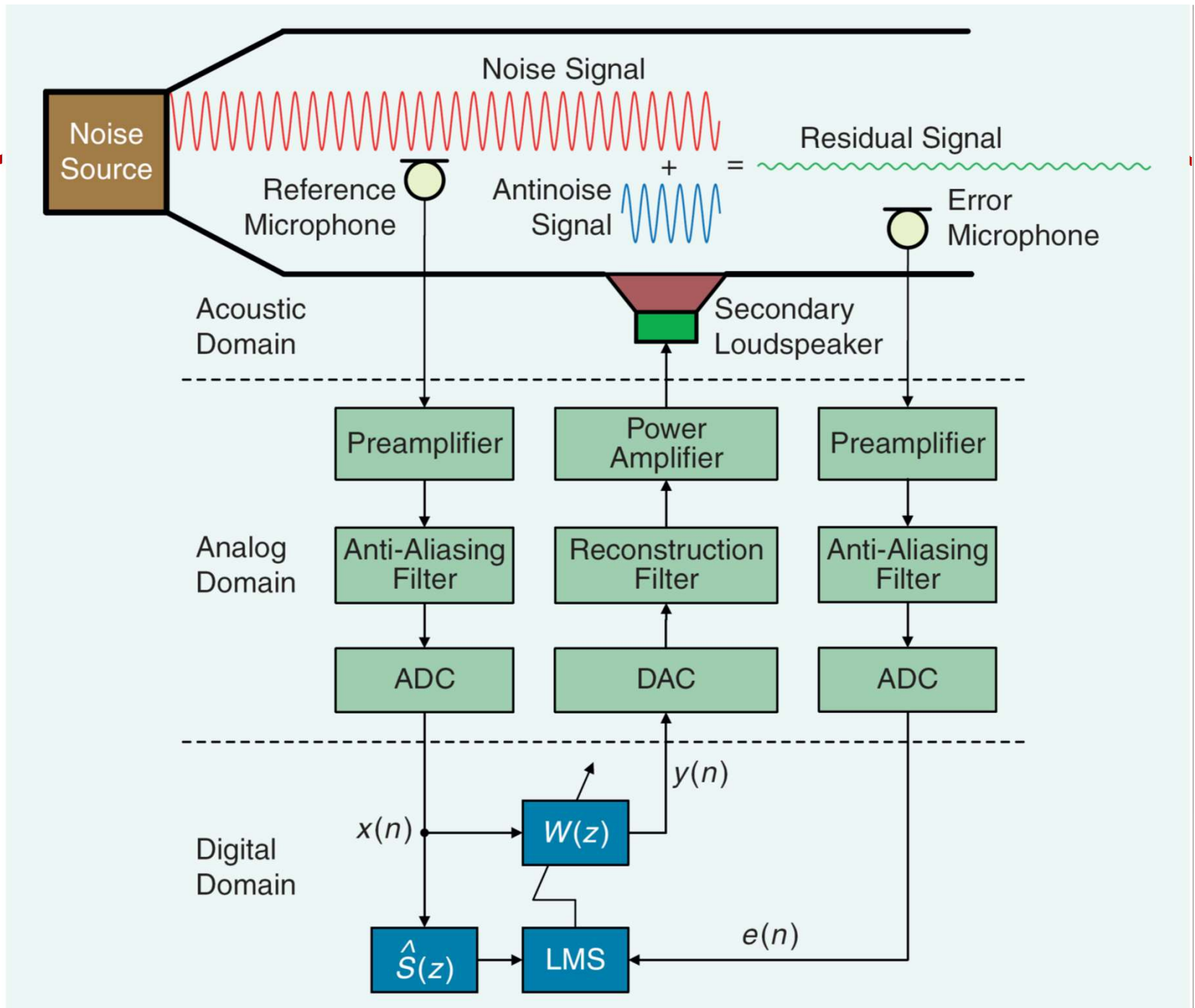






## 应用实例

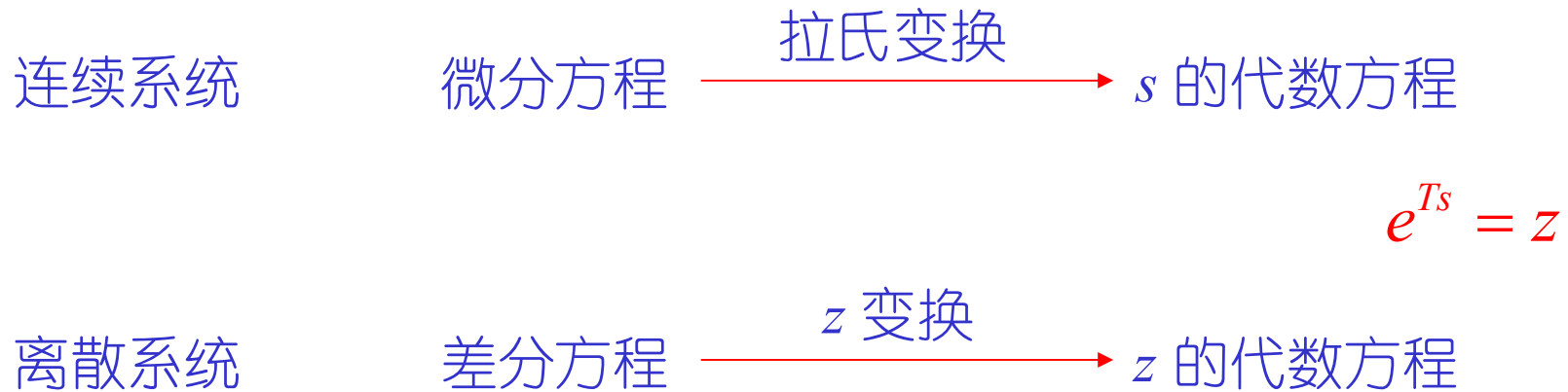
### 前馈型主动噪声控制方框图





## 2.8 线性离散系统数学模型

### □ z 变换



$$x(t) \rightarrow x^*(t) \rightarrow X^*(s) \rightarrow X(z)$$

连续信号

采样信号

采样信号的拉氏变换

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

采样信号拉氏变换的变形



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► z 变换的定义

$$\begin{aligned} X(z) &= X^*(s) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \\ &= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x^*(t)] = \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

备注： z 变换只对离散信号而言  
X(z) 只对应唯一的  $x^*(t)$ ，  
不对应唯一的  $x(t)$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ z 变换方法1—级数求和法

**例 6.4.1** 求单位阶跃函数  $1(t)$  采样序列的  $Z$  变换。

**解** 单位阶跃函数  $1(t)$  在所有采样时刻上的采样值均为 1, 即

$$1(kT) = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

根据式(6.4.5) 求得

$$X(z) = Z[1(t)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k} + \dots$$

这是一个等比级数, 首项  $a_1 = 1$ , 公比  $q = z^{-1}$ , 通项  $a_n = a_1 q^{n-1} = z^{-n+1}$ , 前  $n$  项和

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - z^{-n}}{1 - z^{-1}}$$

若  $|z| > 1$ , 这个无穷级数的和为

$$X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{-n}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

因为  $|z| = |e^{Ts}| = e^{\sigma T}$ ,  $\sigma = \text{Re}[s]$ , 所以条件  $|z| > 1$  意味着  $\sigma > 0$ 。这正是单位阶跃函数能进行拉氏变换的条件。



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► z 变换方法1—级数求和法

**例 6.4.2** 求衰减指数  $e^{-at}$  ( $a > 0$ ) 采样序列的  $Z$  变换。

**解** 衰减指数  $e^{-at}$  ( $a > 0$ ) 在各采样时刻上的采样值为  $1, e^{-aT}, e^{-2aT}, e^{-3aT}, \dots, e^{-kaT}, \dots$ , 将其代入式(6.4.5)有

$$X(z) = Z[e^{-at}] = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \dots + e^{-kaT}z^{-k} + \dots$$

这也是个等比级数,若满足条件  $|e^{-aT}z| > 1$ ,则

$$X(z) = Z[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► z 变换方法2—部分分式展开法

**例 6.4.4** 已知连续函数  $x(t)$  的拉氏变换为  $X(s) = \frac{a}{s(s+a)}$ , 试求  $x(t)$  采样序列的 Z 变换。

**解** 将  $X(s)$  展成部分分式, 即

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

对上式逐项求拉氏反变换, 得

$$x(t) = 1(t) - e^{-at}$$

由例 6.4.1 及例 6.4.2 知

$$Z[1(t)] = \frac{z}{z-1}$$

$$Z[e^{-at}] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

所以

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} = \frac{z(1 - e^{-aT})}{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}}$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ z 变换方法3—留数法

若已知连续信号  $x(t)$  的拉氏变换  $X(s)$  和它的全部极点  $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 可用下列的留数计算公式求  $x(t)$  采样序列  $x^*(t)$  的 Z 变换  $X(z)$ , 即

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \left[ X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=s_i} \quad (6.4.6)$$

当  $X(s)$  具有非重极点  $s_i$  时

$$\operatorname{Res} \left[ X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=s_i} = \lim_{s \rightarrow s_i} \left[ X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} (s - s_i) \right] \quad (6.4.7)$$

当  $X(s)$  在  $s_i$  处具有  $r$  重极点时

$$\operatorname{Res} \left[ X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=s_i} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[ X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} (s - s_i)^r \right] \quad (6.4.8)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► z 变换方法3—留数法

**例 6.4.5** 求连续时间函数  $x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$  采样序列的 Z 变换。

**解**  $x(t)$  的拉氏变换为  $X(s) = \frac{1}{s^2}$ ,  $X(s)$  有两个  $s = 0$  的极点, 即  $s_1 = 0, r_1 = 2$ , 则

$$X(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{sT}} (s-0)^2 \right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

**例 6.4.6** 若  $X(s) = \frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)}$ , 试求  $x(t)$  采样序列的 Z 变换。

**解**  $X(s)$  的极点为  $s_{1,2} = -1$  (二重极点),  $s_3 = -2$ , 则

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)} \frac{z}{z - e^{sT}} (s+1)^2 \right] + \\ &\quad \lim_{s \rightarrow -2} \left[ \frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)} \frac{z}{z - e^{sT}} (s+2) \right] = \\ &\quad \frac{-Tze^{-T}}{(z - e^{-T})^2} + \frac{2z}{z - e^{-2T}} \end{aligned}$$





表 6.4.1 Z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	$e^{-kTs}$	$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z - 1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$
5	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s + a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
8	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
11	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$\frac{T^2 z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
13		$a^k$	$\frac{z}{z - a}$
14		$a^k \cos k\pi$	$\frac{z}{z + a}$



---

2023.09.26 (Tue)

第9讲



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ $z$ 变换的性质和定理

#### (1) $z$ 变换的线性性质

$$x(k) = \alpha f(k) + \beta g(k) \longrightarrow X(z) = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha f(k) + \beta g(k)] z^{-k} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\ &= \alpha \mathcal{Z}[f(k)] + \beta \mathcal{Z}[g(k)] \\ &= \alpha F(z) + \beta G(z) \end{aligned}$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ $z$ 变换的性质和定理

#### (2) 位移定理 (实平移定理)

设连续时间函数  $x(t)$  在  $t < 0$  时为零,  $x(t)$  的  $Z$  变换为  $X(z)$ , 则有

$$Z[x(t - nT)] = z^{-n}X(z) \quad (6.4.11)$$

$$Z[x(t + nT)] = z^n \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \quad (6.4.12)$$

实数位移定理中, 式(6.4.11) 称为滞后定理, 式(6.4.12) 称为超前定理。

滞后定理证明:  $\mathcal{Z}[x(t - nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k}$

$$\downarrow m = k - n$$

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-(m+n)}$$

$$= z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n} X(z)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ z 变换的性质和定理

#### (2) 位移定理 (实平移定理)

超前定理证明：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[x(t+nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-k} \\
 &= z^n \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-(k+n)} \\
 &= z^n \sum_{m=n}^{\infty} x(mT)z^{-m} \\
 &= z^n \left( \sum_{m=n}^{\infty} x(mT)z^{-m} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right) \\
 &= z^n \left( \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right) \\
 &= z^n \left( X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right)
 \end{aligned}$$

备注：算子 $z^{-1}$ 为滞后算子，将采样信号滞后1个采样周期；同理，算子 $z$ 为超前算子，将采样信号超前1个采样周期。平移定理相当于拉氏变换中的微分和积分定理，可将描述离散系统的差分方程转换为z域的代数方程。



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► $z$ 变换的性质和定理

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

#### (3) 初值定理

若  $\mathcal{Z}[x(t)] = X(z)$ ,  $x(t) = 0, \forall t < 0$ .

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x^*(t) = \lim_{k \rightarrow 0} x(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

#### (4) 终值定理

若  $\mathcal{Z}[x(t)] = X(z)$ , 且  $(z-1)X(z)$  的全部极点都位于单位圆内

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► $z$ 变换的性质和定理

#### (5) 卷积定理

离散卷积:  $y(kT) = x_1(mT) * x_2(mT) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(mT)x_2(kT - mT)$

$$X_1(z)X_2(z) = \mathcal{Z} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} x_1(mT)x_2(kT - mT) \right]$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► $z$ 的反/逆变换方法

对  $X(z)$  进行  $z$  的反变换得到相应的时间序列  $x(kT)$  或  $x(k)$

注意：对  $X(z)$  进行  $z$  的反变换得到的仅是采样瞬间的时间序列  $x(k)$ ，而不是唯一的  $x(t)$

#### (1) 长除法

当  $X(z)$  是  $z$  的有理分式时，可用长除法求  $Z$  反变换。

$$\text{设 } X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_mz^{-m}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_nz^{-n}} \quad n \geq m$$

将分子多项式  $N(z)$  除以分母多项式  $D(z)$ ，将商按  $z^{-1}$  升幂排列，有

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots$$

由此可以得到  $X(z)$  的  $Z$  反变换

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + x(2T)\delta(t - 2T) + \cdots + x(kT)\delta(t - kT) + \cdots$$





例 6.4.7 已知  $X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$ , 求其  $Z$  反变换  $x^*(t)$ 。

解 
$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} = \frac{10z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{10z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

用分子多项式除以分母多项式, 有

$$\begin{array}{r} 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + 150z^{-4} + \dots \\ 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \overline{) 10z^{-1}} \\ \underline{10z^{-1}} \phantom{+ 30z^{-2}} \\ 30z^{-2} - 20z^{-3} \\ \underline{30z^{-2} - 90z^{-3} + 60z^{-4}} \\ 70z^{-3} - 60z^{-4} \\ \underline{70z^{-3} - 210z^{-4} + 140z^{-5}} \\ 150z^{-4} - 140z^{-5} \\ \vdots \end{array}$$

由此得到级数形式的  $X(z)$  为

$$X(z) = 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + 150z^{-4} + \dots$$

由  $Z$  变换的定义可知

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(T) &= 10 \\ x(2T) &= 30 \\ x(3T) &= 70 \\ x(4T) &= 150 \\ &\vdots \end{aligned}$$

因此, 脉冲序列  $x^*(t)$  可写成

$$x^*(t) = 10\delta(t-T) + 30\delta(t-2T) + 70\delta(t-3T) + 150\delta(t-4T) + \dots$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► $z$ 的反/逆变换方法

#### (2) 部分分式法

设  $X(z)$  的极点为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 且无重极点, 则  $X(z)/z$  的部分分式展开式为

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - z_i}$$

上式两端乘以  $z$ , 得到  $X(z)$  的部分分式展开式

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - z_i}$$

逐项查表求出  $\frac{A_i z}{z - z_i}$  的  $Z$  反变换, 然后写出

$$x(kT) = Z^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - z_i} \right]$$

则离散时间信号  $x^*(t)$  为

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ Z^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - z_i} \right] \right] \delta(t - kT)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

例 6.4.8 已知  $X(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ , 求  $Z$  反变换  $x^*(t)$ 。

解 
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$X(z) = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

查  $Z$  变换表可知

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] = (-1)^k \quad Z^{-1}\left[\frac{z}{z+2}\right] = (-2)^k$$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^k - (-2)^k] \delta(t - kT) = \\ \delta(t - T) - 3\delta(t - 2T) + 7\delta(t - 3T) - 15\delta(t - 4T) + \dots$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ➤ $z$ 的反/逆变换方法

#### (3) 留数计算法

用留数计算法求取  $X(z)$  的  $Z$  反变换, 首先求取  $x(kT)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 即

$$x(kT) = \sum \text{Res}[X(z)z^{k-1}]$$

其中, 留数和  $\sum \text{Res}[X(z)z^{k-1}]$  可写为

$$\sum \text{Res}[X(z)z^{k-1}] = \sum_{i=1}^l \frac{1}{(r_i - 1)!} \frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}} [(z - z_i)^{r_i} X(z) z^{k-1}] \Big|_{z=z_i}$$

式中  $z_i (i = 1, 2, \dots, l)$  ——  $X(z)$  彼此不相等的极点, 彼此不相等的极点数为  $l$ ;  
 $r_i$  —— 重极点  $z_i$  的重复个数。

由求得的  $x(kT)$  可写出与已知象函数  $X(z)$  对应的原函数 —— 脉冲序列

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

**例 6.4.9** 求  $X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-1)^2}$  的  $Z$  反变换。

**解**  $X(z)$  中彼此不相同的极点为  $z_1 = a$  及  $z_2 = 1$ , 其中  $z_1$  为单极点, 即  $r_1 = 1$ ,  $z_2$  为二重极点, 即  $r_2 = 2$ , 不相等的极点数  $l = 2$ 。则

$$x(kT) = (z-a) \frac{z}{(z-a)(z-1)^2} z^{k-1} \Big|_{z=a} + \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{z}{(z-a)(z-1)^2} z^{k-1} \right] \Big|_{z=1} = \frac{a^k}{(a-1)^2} + \frac{k}{1-a} - \frac{1}{(1-a)^2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

最后, 求得  $X(z)$  的  $Z$  反变换为

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{a^k}{(a-1)^2} + \frac{k}{1-a} - \frac{1}{(1-a)^2} \right] \delta(t - kT)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### □ 线性离散系统的 3 种数学模型

- 差分方程——时域数学模型
  - 线性常系数差分方程
  - 迭代法和Z变换法求解差分方程
- 脉冲传递函数——复域数学模型
  - 概念
  - 由差分方程求脉冲传递函数
  - 串联环节的脉冲传递函数
  - 线性离散系统的脉冲传递函数
- 离散状态空间表达式
  - 化差分方程为离散状态方程
  - 化脉冲传递函数为离散状态方程
  - 线性连续系统状态方程的离散化



## 2.8 线性离散系统数学模型

### □ 线性常系数差分方程

- n阶后向差分方程

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_{n-1} y(k-n+1) + a_n y(k-n) \\ = b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + \cdots + b_{m-1} r(k-m+1) + b_m r(k-m)$$

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k-j), \quad n \geq m$$

$kT$ 时刻的输出 $y(k)$ 不仅与 $kT$ 时刻的输入 $r(k)$ 相关，还与 $kT$ 时刻以前的输入 $r(k-1), r(k-2), \dots$ 和输出 $y(k-1), y(k-2), \dots$ 有关。

初始条件



## 2.8 线性离散系统数学模型

### □ 线性常系数差分方程

- n阶前向差分方程

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_2 y(k+n-2) + \cdots + a_n y(k) \\ = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \cdots + b_m r(k) \end{aligned}$$

$$y(k+n) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k+n-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k+m-j)$$

前向/后向差分方程无本质区别。若不考虑初始条件，仅就输入与输出关系而言，二者等价。





## 2.8 线性离散系统数学模型

### 时间序列的 $z$ 变换

对于一个序列  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  其 $z$ 变换为:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

$z^{-k}$  表示第  $k$  次采样时刻。因此  $z^{-1}$  代表着一个单位的延时。



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ▶ 差分方程的求解

#### • 迭代法

例 6.6.1 已知差分方程

$$y(k) = r(k) + 5y(k-1) - 6y(k-2)$$

2阶差分方程

输入序列  $r(k) = 1$ , 初始条件为  $y(0) = 0, y(1) = 1$ , 试用迭代法求出输出序列  $y(k), k = 0, 1, 2, \dots, 10$ 。

解 根据初始条件及递推关系

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

$$y(2) = r(2) + 5y(1) - 6y(0) = 6$$

$$y(3) = r(3) + 5y(2) - 6y(1) = 25$$

$$y(4) = r(4) + 5y(3) - 6y(2) = 90$$

⋮

$$y(10) = r(10) + 5y(9) - 6y(8) = 86\ 526$$



## 2.8 线性离散

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} X(z)$$

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k} \right]$$

$$= z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1} x(1) - \dots - z^1 x(n-1)$$

### ▶ 差分方程的求解

#### • $z$ 变换法

例 6.6.2 用  $Z$  变换法解二阶齐次差分方程

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$

解 对方程进行  $Z$  变换, 并利用实数位移定理有

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) + 3zY(z) - 3zy(0) + 2Y(z) = 0$$

整理后得到

$$(z^2 + 3z + 2)Y(z) = y(0)z^2 + [y(1) + 3y(0)]z$$

代入初始条件有

$$(z^2 + 3z + 2)Y(z) = z$$

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

进行  $Z$  反变换, 有

$$y(k) = (-1)^k - (-2)^k$$

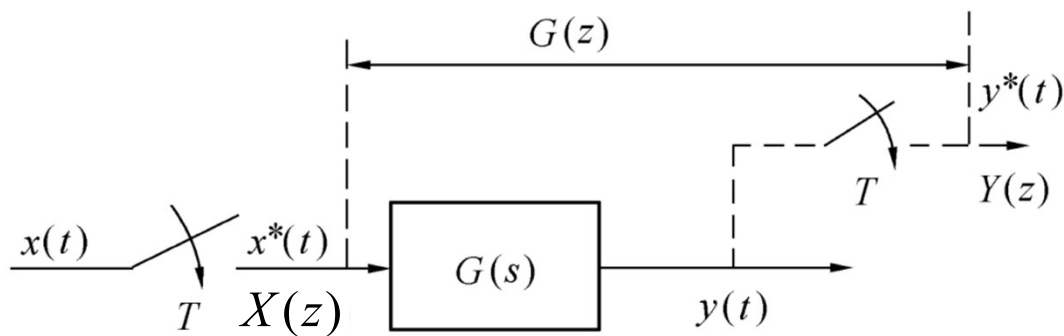
$$y^*(t) = \delta(t-T) - 3\delta(t-2T) + 7\delta(t-3T) - 15\delta(t-4T) + \dots$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### □ 脉冲传递函数 ( $z$ 传递函数)

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[y^*(t)]}{\mathcal{Z}[x^*(t)]} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$





## 2.8 线性离散系统数学模型

- 脉冲传递函数的物理意义

已知一个连续系统的传递函数为  $G(s)$ ，则通过对  $G(s)$  的单位脉冲响应  $g(t)$  的采样序列  $g^*(t)$  求  $z$  变换，可得该环节的脉冲传递函数  $G(z) = \mathcal{Z}[g^*(t)]$

- 脉冲传递函数的性质

- $G(z)$  是关于  $z$  的复函数；
- $G(z)$  与输入输出序列无关，仅与系统的结构参数有关；
- $G(z)$  与系统差分方程一一对应；
- $G(z)$  相当于系统单位脉冲响应序列的  $z$  变换；
- $G(z)$  对应  $z$  平面零极点图。



## 2.8 线性离散系统数学模型

- 脉冲传递函数的局限性

原则上不反映非零初始条件下系统响应的全部信息

一般只适合描述单输入单输出离散系统；

只适用于描述线性定常离散系统



## 2.8 线性离散系统数学模型

例 6.5.1 连续系统传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s + 1)}$$

求其对应的脉冲传递函数  $G(z)$ 。

解 先将  $G(s)$  展成部分分式形式

$$G(s) = \frac{10}{s(s + 10)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 10}$$

由拉氏变换表和  $Z$  变换表可求得

$$G(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-10T}} = \frac{z(1 - e^{-10T})}{(z - 1)(z - e^{-10T})}$$

表 6.4.1  $Z$  变换表

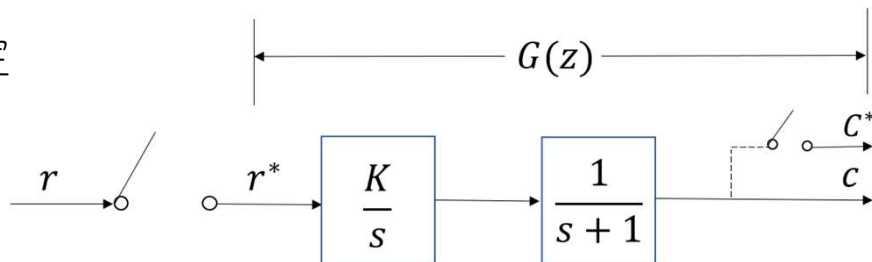
	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	$e^{-kTs}$	$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z - 1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$
5	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$



## 2.8 线性离散系统数学模型

例：离散系统结构图如果所示( $T=1$ )，试确定

- (1)系统的脉冲传递函数；
- (2)系统在z平面的零极点分布图；
- (3)系统的差分方程。



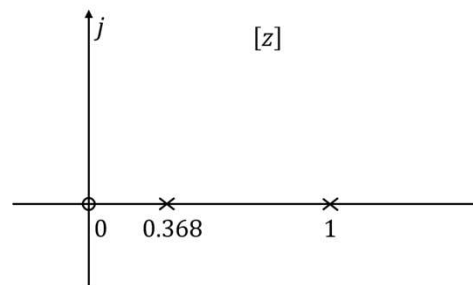
$$\begin{aligned}
 \text{解: (1) } G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} = Z \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] = K \cdot Z \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] \\
 &= K \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = \frac{(1-e^{-T})Kz}{(z-1)(z-e^{-T})} = \frac{(1-e^{-T})Kz}{z^2 - (1+e^{-T})z + e^{-T}} \\
 &= \frac{0.632Kz^{-1}}{1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2}}
 \end{aligned}$$

(2) 系统z平面零极点图

$$(3) (1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2})C(z) = 0.632Kz^{-1}R(z)$$

$$c(k) - 1.368c(k-1) + 0.368c(k-2) = 0.632Kr(k-1)$$

连续系统和离散系统  
极点关系？

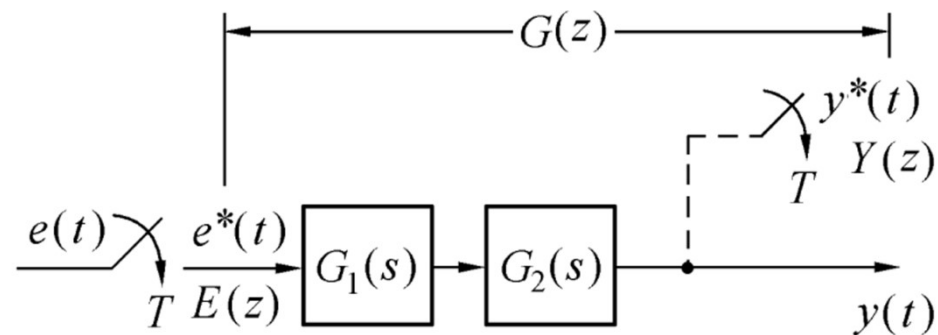






## 2.8 线性离散系统数学模型

- ▶ 串联环节的脉冲传递函数
  - 串联环节间无同步采样开关



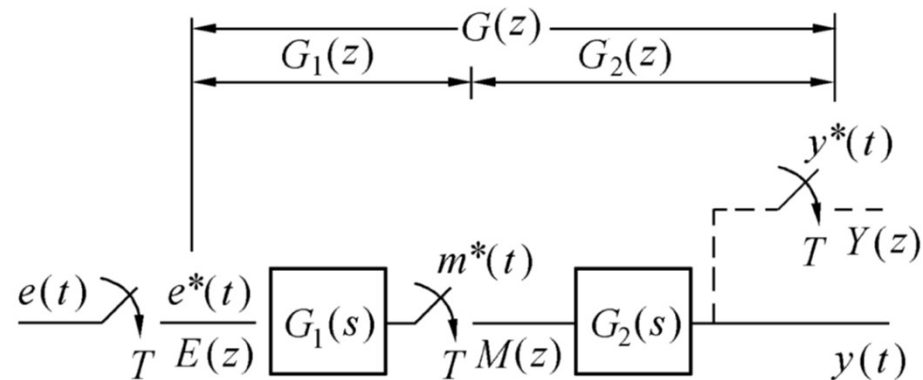
$$G(z) = Z[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### ► 串联环节的脉冲传递函数

- 串联环节间有同步采样开关



$$M(z) = G_1(z)E(z) \quad G_1(z) = Z[G_1(s)]$$

$$Y(z) = G_2(z)M(z) \quad G_2(z) = Z[G_2(s)]$$

$$\Longrightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = Z[G_1(s)]Z[G_2(s)] = G_1(z)G_2(z)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

**例 6.5.2** 两串联环节  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  之间无同步采样开关,  $G_1(s) = \frac{a}{s+a}$ ,  $G_2(s) = \frac{1}{s}$ , 求串联环节等效的脉冲传递函数  $G(z)$ 。

解

$$G(z) = G_1 G_2(z) = Z[G_1(s) G_2(s)] = Z\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] =$$

$$Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

**例 6.5.3** 两串联环节  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  之间有同步采样开关,  $G_1(s) = \frac{a}{s+a}$ ,  $G_2(s) = \frac{1}{s}$ , 求串联环节等效的脉冲传递函数  $G(z)$ 。

解

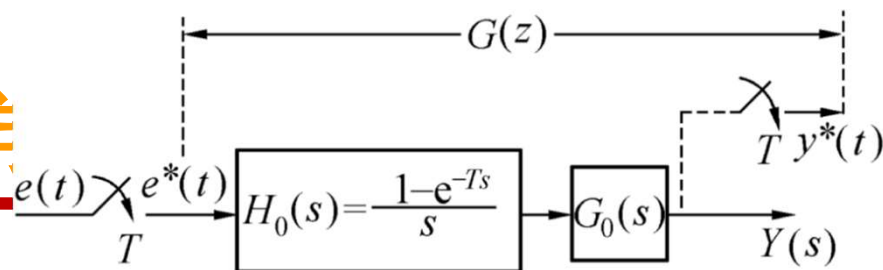
$$G(z) = G_1(z) G_2(z) = Z[G_1(s) G_2(s)] = Z\left[\frac{a}{s+a}\right] Z\left[\frac{1}{s}\right] =$$

$$\frac{az}{z-e^{-aT}} \frac{z}{z-1} = \frac{az^2}{(z-e^{-aT})(z-1)}$$

串联环节中有无同步采样开关隔离, 脉冲传递函数是不同的  
(零点不同, 极点相同)



## 2.8 线性离散系统数字



- 零阶保持器与环节串联

$$G(s) = H_0(s)G_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}G_0(s) = (1 - e^{-Ts}) \frac{G_0(s)}{s} = G_1(s)G_2(s)$$

其中

$$G_1(s) = 1 - e^{-Ts} \quad G_2(s) = \frac{G_0(s)}{s}$$

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = (1 - e^{-Ts})G_2(s) = G_2(s) - e^{-Ts}G_2(s)$$

$G(s)$  的单位冲激响应为

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}[G_2(s) - e^{-Ts}G_2(s)] = g_2(t) - g_2(t - T)$$

零阶保持器与环节  $G_0(s)$  串联时总的脉冲传递函数为

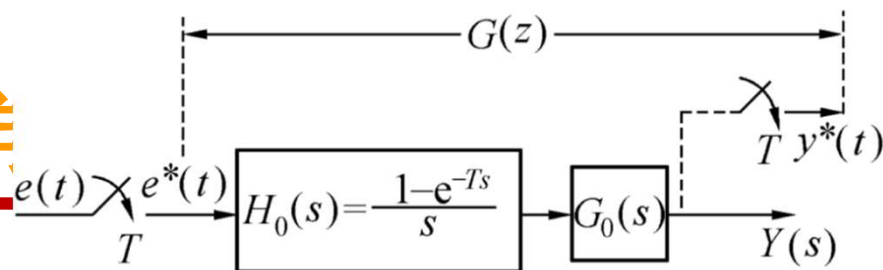
$$\begin{aligned} G(z) &= Z[G(s)] = Z[G_1(s)G_2(s)] = Z[G_2(s) - e^{-Ts}G_2(s)] = \\ &Z[g_2(t) - g_2(t - T)] = G_2(z) - G_2(z)z^{-1} = (1 - z^{-1})G_2(z) \end{aligned}$$

即

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_0(s)}{s}\right]$$



## 2.8 线性离散系统数字



- 零阶保持器与环节串联

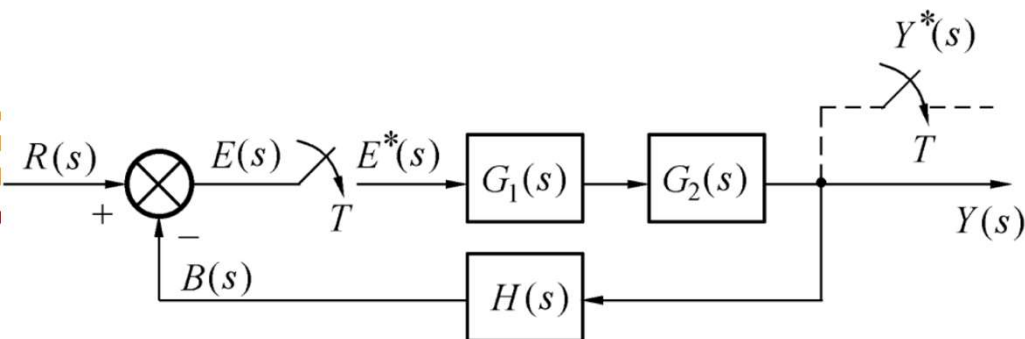
例6.5.4 设系统如图 6.5.3 所示, 与零阶保持器  $H_0(s)$  串联的环节的  $G_0(s) = \frac{k}{s(s+a)}$ , 其中  $k$  和  $a$  是常量, 求总的脉冲传递函数  $G(z)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad G(z) &= (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{k}{s^2(s+a)} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ k \left( \frac{1}{as^2} - \frac{1}{a^2s} + \frac{1}{a^2(s+a)} \right) \right] = \\ &= \frac{k[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]}{a^2(z-1)(z - e^{-aT})} \end{aligned}$$

注：增加ZOH不改变系统的阶数，不改变开环极点，只改变开环零点



## 2.8 线性离散系统



- 闭环脉冲传递函数

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)\epsilon^*(s)$$

$$B(s) = H(s)Y(s)$$

$$\epsilon(s) = R(s) - B(s)$$

由上列各式求得

$$\epsilon(s) = R(s) - G_1(s)G_2(s)H(s)\epsilon^*(s)$$

其中,  $\epsilon^*(s)$  代表离散偏差信号  $\epsilon^*(t)$  的拉氏变换。可以证明

$$Z[G_1(s)G_2(s)H(s)\epsilon^*(s)] = G_1G_2H(z)\epsilon(z)$$

$$\epsilon(z) = R(z) - G_1G_2H(z)\epsilon(z)$$

由上式可求得偏差信号对于控制信号的闭环脉冲传递函数

$$\frac{\epsilon(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G_1G_2H(z)}$$

考虑到

$$Y(z) = G_1G_2(z)\epsilon(z)$$

由此可求出被控制信号对于控制信号的闭环脉冲传递函数

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_1G_2(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

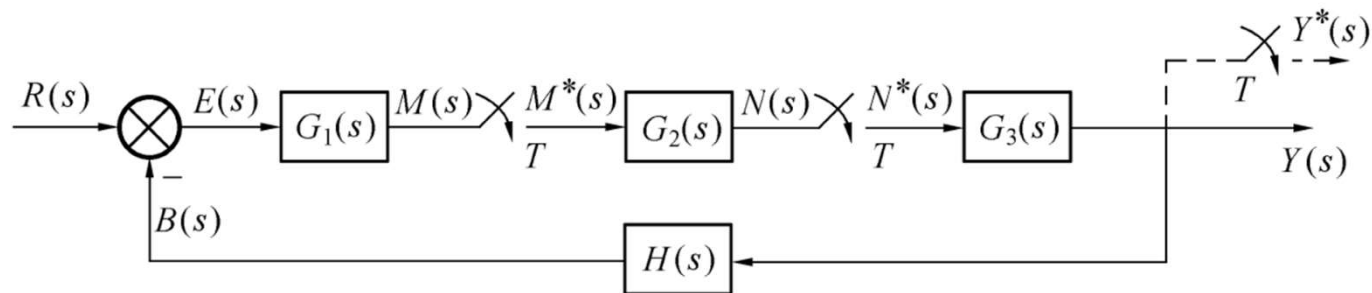
特征方程

$$1 + G_1G_2H(z) = 0$$

说明: 如果偏差信号不是以离散信号的形式输入到前向通道的第一个环节, 则一般写不出闭环脉冲传递函数。只能写出输出的Z变换的表达式。



例 6.5.6 线性离散系统的结构如图 6.5.6 所示,求系统被控制信号  $y(t)$  的  $Z$  变换。



$$\begin{cases} Y(z) = G_3(z)N(z) \\ N(z) = G_2(z)M(z) \\ M(z) = G_1R(z) - G_1G_3H(z)N(z) \end{cases}$$

$$Y(z) = G_2(z)G_3(z)M(z) = G_2(z)G_3(z)[G_1R(z) - G_1G_3H(z)Y(z)/G_3(z)] = G_2(z)G_3(z)G_1R(z) - G_2(z)G_1G_3H(z)Y(z)$$

即

$$[1 + G_2(z)G_1G_3H(z)]Y(z) = G_2(z)G_3(z)G_1R(z)$$

由此可得到被控制信号的  $Z$  变换

$$Y(z) = \frac{G_2(z)G_3(z)G_1R(z)}{1 + G_2(z)G_1G_3H(z)}$$

由图 6.5.6 可见,该系统由于  $R(s)$  未经采样就输入到  $G_1(s)$ ,所以,系统的闭环脉冲传递函数求不出来。



## 2.8 线性离散系统数学模型

表 6.5.1 常见线性离散系统的方框图及被控信号的  $Z$  变换

序号	系统框图	$Y(z)$ 计算式
1		$\frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$
2		$\frac{RG_1(z)G_2(z)}{1 + G_2HG_1(z)}$
3		$\frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
4		$\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$





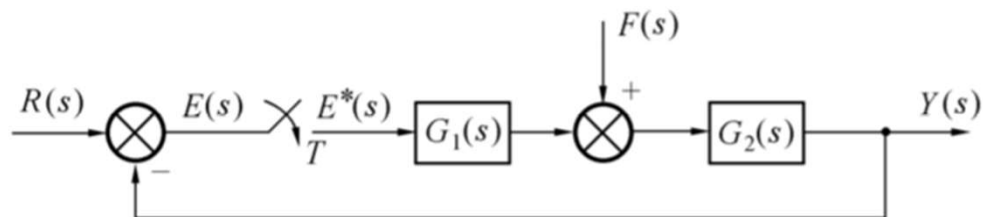
# 2.8 线性离散系统数学模型

5		$\frac{RG_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_2(z)G_1G_3H(z)}$
6		$\frac{RG(z)}{1 + HG(z)}$
7		$\frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
8		$\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)H(z)}$



## 2.8 线性离散系统数学模型

例 6.5.7 线性离散系统如图 6.5.7 所示, 试求参考输入  $R(s)$  和扰动输入  $F(s)$  同时作用时, 系统被控制量的  $Z$  变换  $Y(z)$ 。



$F(s)=0$ ,  $R(s)$ 单独作用

$$\left. \begin{aligned} Y_R(z) &= G_1 G_2(z) E(z) \\ E(z) &= R(z) - Y_R(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y_R(z) = \frac{G_1 G_2(z)}{1 + G_1 G_2(z)} R(z)$$

$R(s)=0$ ,  $F(s)$ 单独作用

$$\left. \begin{aligned} Y_F(s) &= G_2(s) F(s) + G_1(s) G_2(s) E^*(s) \\ E(s) &= -Y_F(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y_F(z) = \frac{G_2 F(z)}{1 + G_1 G_2(z)}$$

$$Y(z) = Y_R(z) + Y_F(z) = \frac{G_1 G_2(z) R(z)}{1 + G_1 G_2(z)} + \frac{G_2 F(z)}{1 + G_1 G_2(z)}$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

结论：

1. 闭环脉冲传递函数和开环脉冲传递函数之间没有固定的关系，不能直接由开环传递函数求闭环脉冲传递函数。
2. 只能按照框图中各变量关系具体求取。
3. 如果输出变量是连续信号，可以在闭环回路外设一虚拟采样开关
4.  $Z[G_1(s)G_2(s)X^*(s)] = Z[G_1(s)G_2(s)]X^*(s) = G_1G_2(z) X(z)$
5. 如果输入信号未经采样就输入到某连续环节，则求不出闭环脉冲传递函数，只能求出输出量的Z变换表达式。



## 2.8 线性离散系统数学模型

补充练习:

求  $C(z) = G_1(z) \cdot [E(z) - E_1(z)]$

$$\left. \begin{aligned} E_1(z) &= G_1 H_1(z) \cdot [E(z) - E_1(z)] \\ [1 + G_1 H_1(z)] \cdot E_1(z) &= G_1 H_1(z) \cdot E(z) \end{aligned} \right\} E_1(z) = \frac{G_1 H_1(z)}{[1 + G_1 H_1(z)]} \cdot E(z)$$

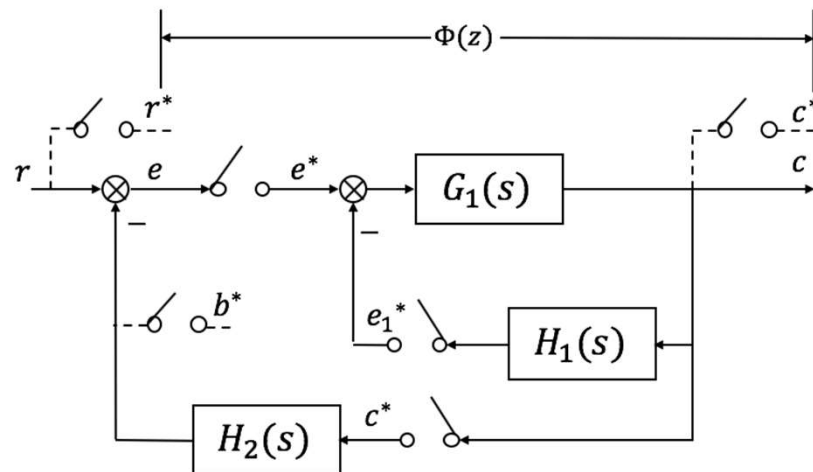
$$= G_1(z) \left[ 1 - \frac{G_1 H_1(z)}{1 + G_1 H_1(z)} \right] \cdot E(z) = \frac{G_1(z) \cdot E(z)}{1 + G_1 H_1(z)}$$

$$E(z) = R(z) - B(z) = R(z) - H_2(z) \cdot C(z)$$

$$C(z) = \frac{G_1(z) \cdot [R(z) - H_2(z) \cdot C(z)]}{1 + G_1 H_1(z)}$$

$$\left[ 1 + \frac{G_1(z) H_2(z)}{1 + G_1 H_1(z)} \right] C(z) = \frac{G_1(z) \cdot R(z)}{1 + G_1 H_1(z)}$$

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1 H_1(z) + G_1(z) H_2(z)}$$





## 2.8 线性离散系统数学模型

### □ 离散空间状态表达

设采样方式为周期采样，采样时刻为 $kT(k=0,1,2,\dots)$

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### 1. 化差分方程为离散状态方程

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = bu(k)$$

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$



## 2.8 线性离散系统数学模型

### 2. 化脉冲传递函数为离散状态方程

假设系统的脉冲传递函数  $G(z)$  分子分母多项式的阶数相同，且具有两两不同的实极点，则

$$G(z) = \frac{\bar{y}(z)}{\bar{u}(z)} = d + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{z - z_i} \quad k_i = \lim_{z \rightarrow z_i} [G(z)(z - z_i)]$$

取  $\bar{x}_i(z) = \frac{1}{z - z_i} \bar{u}(z)$  为离散状态变量的  $Z$  变换, 则有

$$z\bar{x}_i(z) = z_i \bar{x}_i(z) + \bar{u}(z)$$

$$\bar{y}(z) = d\bar{u}(z) + \sum_{i=1}^n k_i \bar{x}_i(z)$$

进行  $Z$  反变换得到

$$\vdots$$

$$x_i(k+1) = z_i x_i(k) + u(k)$$

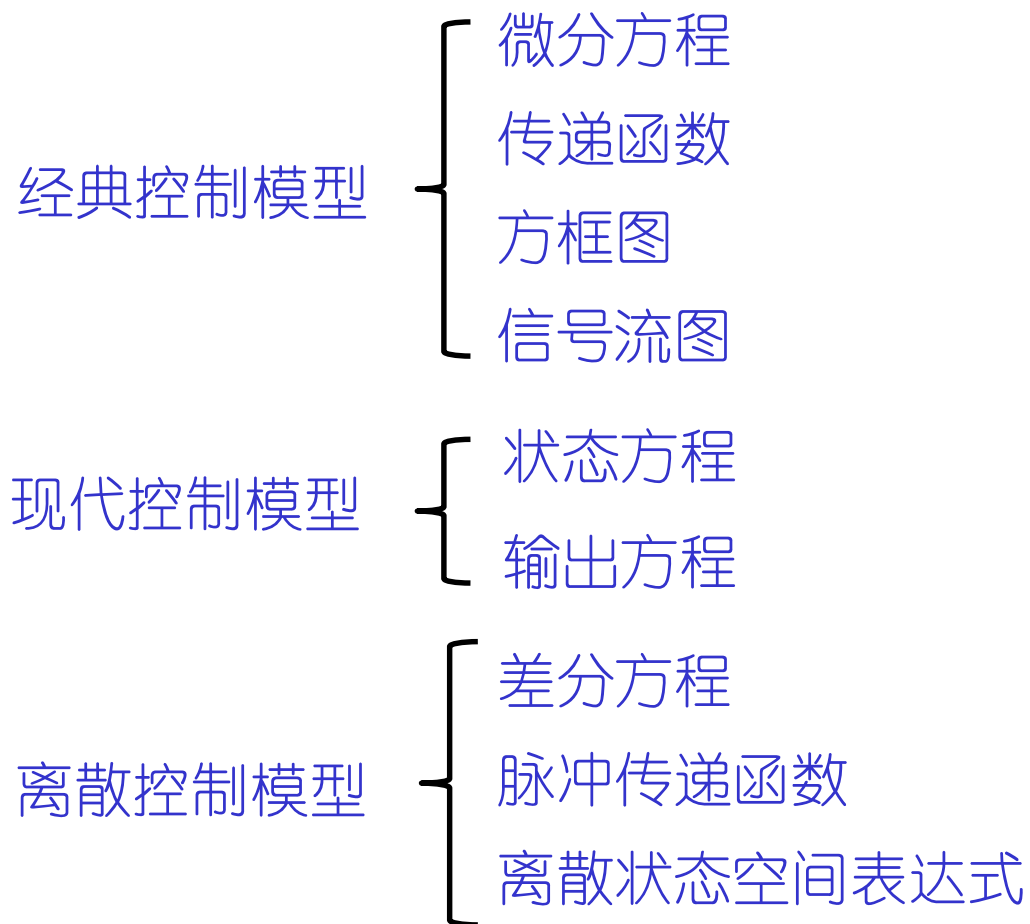
$$y(k) = \sum_{i=1}^n k_i x_i(k) + du(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & & & 0 \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + du(k)$$



# 控制系统数学模型







哈爾濱工業大學(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

# 自动控制理论 A

## (Principles of Automatic Control)

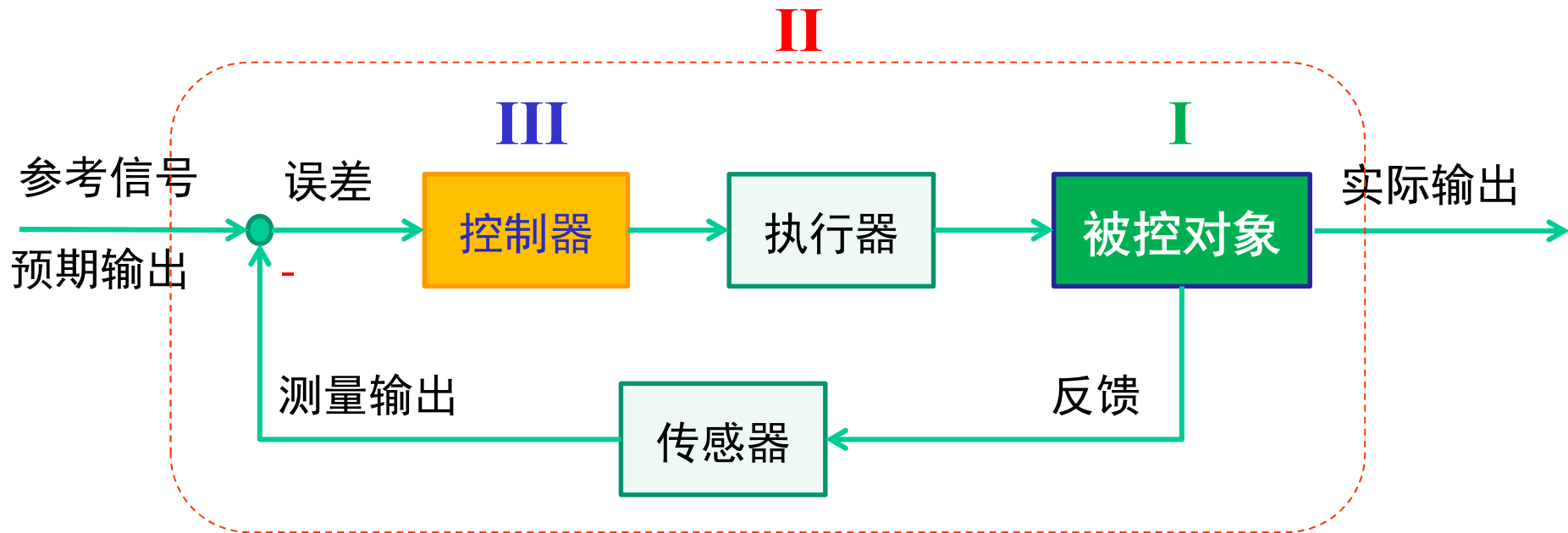
主讲人：张宏伟、张颖

机电工程与自动化学院  
哈尔滨工业大学(深圳)

2023.09.28



## 第三章 控制系统的时域分析



I: 系统建模  
 II: 系统分析  
 III: 系统设计/综合

I: Modeling  
 II: Analysis  
 III: Design/Synthesis



## 第三章 控制系统的时域分析

系统响应：

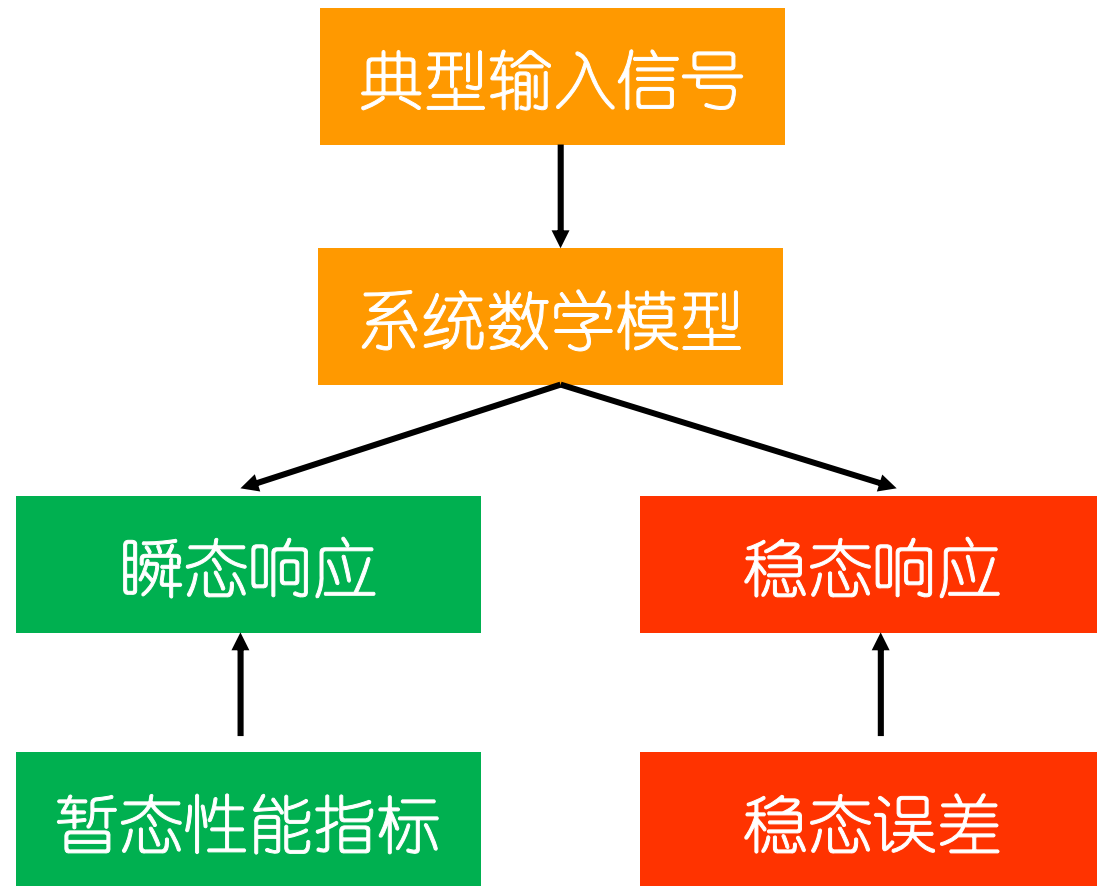
- 瞬态响应
- 稳态响应

transient response

= 瞬态响应

= 动态响应

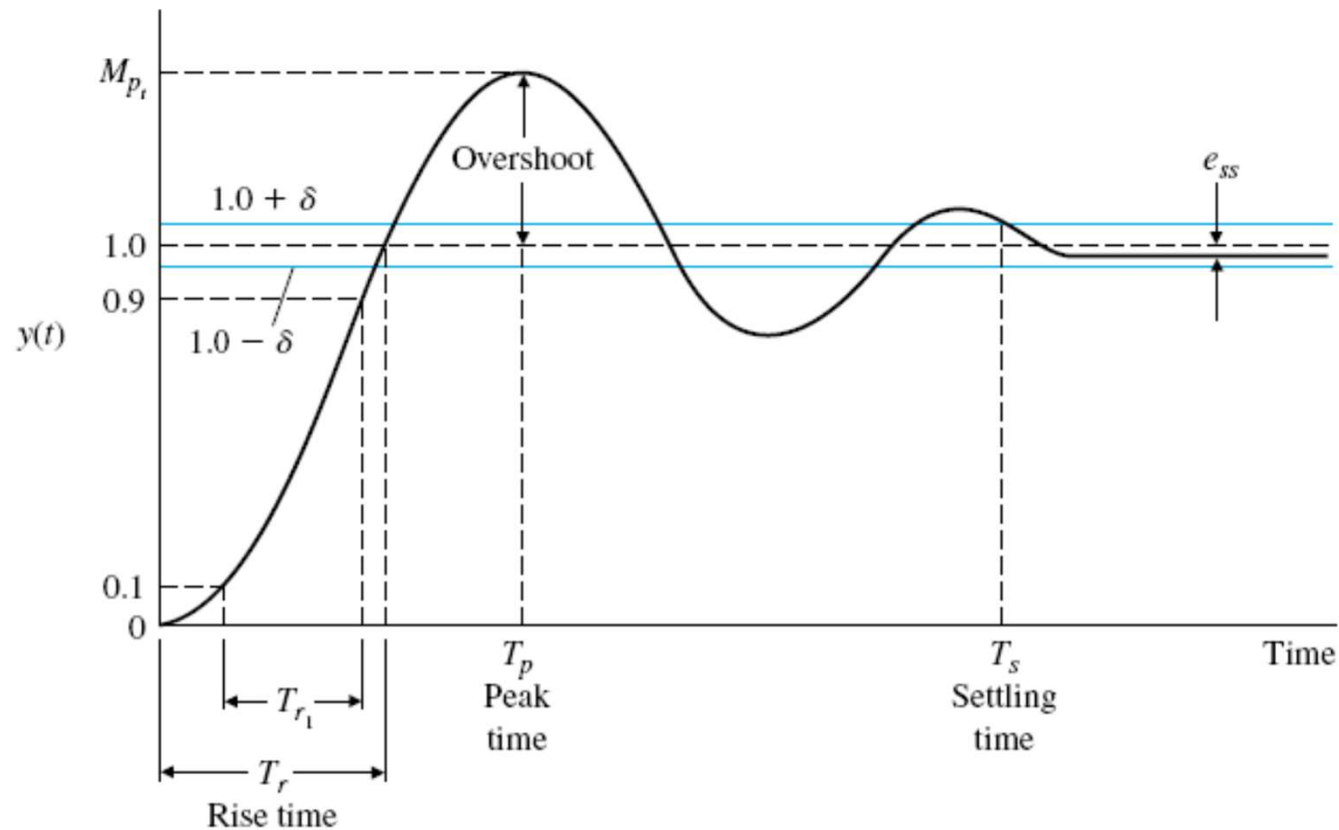
= 暂态响应





## 3.1 传递函数时域分析

- 稳：** 系统受扰动影响后能回到原来的平衡位置
- 准：** 稳态误差要小
- 快：** 阶跃响应的过渡过程要平稳、迅速





## 第三章 控制系统的时域分析

### 3.1 基于传递函数的时域分析

1. 典型输入信号、一阶系统的时域分析
2. 二阶系统的单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡响应
3. 高阶系统的时域分析
4. 基于脉冲传递函数的离散系统时域分析

### 3.2 基于状态空间的时域分析

1. 连续系统
2. 离散系统



## 3.1 传递函数时域分析

---

参考书：

K. Ogata. Modern Control Engineering, 5<sup>th</sup> edition, Prentice Hall, 2010.

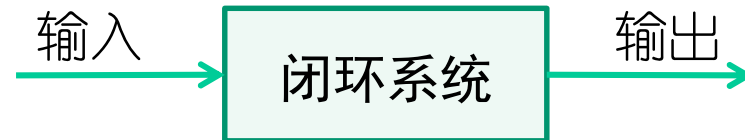
(影印版：现代控制工程(第5版), 电子工业出版社)

裴润, 宋申民, 自动控制原理. 哈尔滨工业大学出版社

Dorf & Bishop, Modern Control Systems, 12<sup>th</sup> edition



## 3.1 传递函数时域分析



控制目标：

让系统产生期望的输出信号 (desirable output)

Question: What is “desirable” ?

Question: For which “inputs”?

Answer:

Define output “specifications” for inputs mostly used in targeted applications (e.g. step, ramp, sinusoidal, etc).

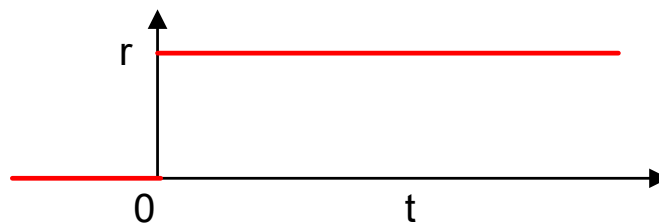


## 3.1 传递函数时域分析

### □ 典型输入信号

#### 1) 阶跃信号 (Step Function)

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases}, \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

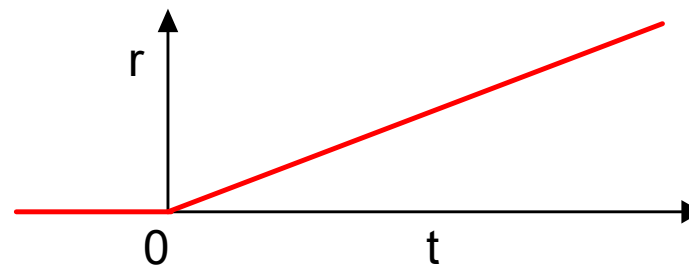


单位阶跃信号常记为  $1(t)$  或  $u(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

#### 2) 斜坡信号 (Ramp Function)

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At, & t \geq 0 \end{cases}, \quad R(s) = \frac{A}{s^2}$$



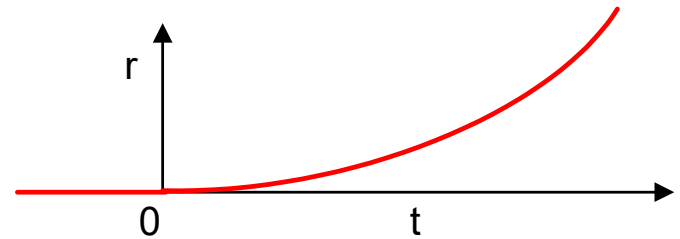




## 3.1 传递函数时域分析

### 3) 抛物线信号 (Parabolic Function)

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} At^2, & t \geq 0 \end{cases}, \quad R(s) = \frac{A}{s^3}$$



当 $A=1$ 时，分别称为单位阶跃、单位斜坡、单位抛物线函数(信号)

### 4) 单位脉冲信号 (Unit Impulse Function)

$$r(t) = \delta(t) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}, & -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad R(s) = 1$$



狄拉克函数



## 3.1 传递函数时域分析

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \rightarrow \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

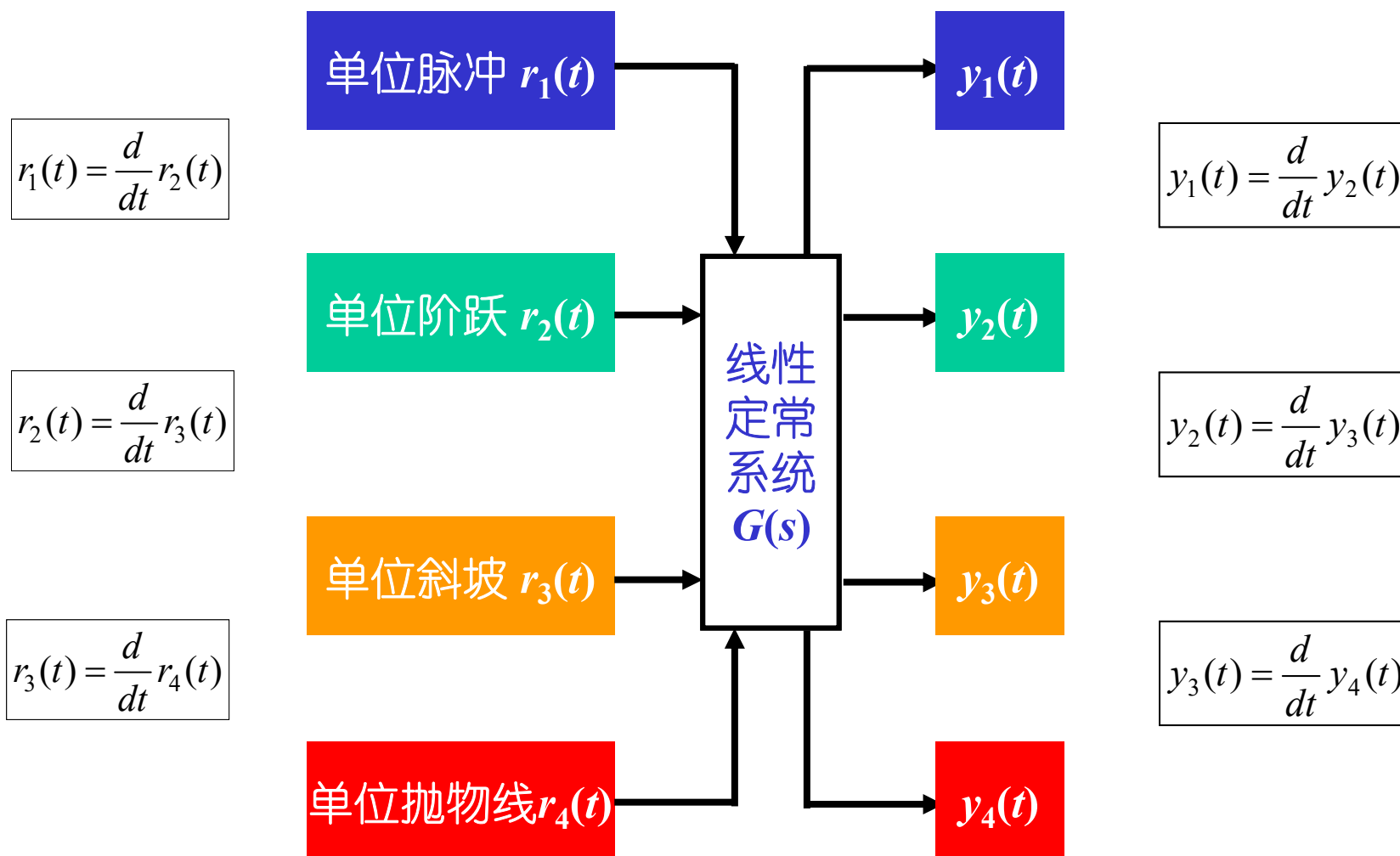
采样特性  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$

系统的脉冲响应反映了系统的固有性质：

$$\begin{array}{ccc} \frac{R(s) = 1}{r(t) = \delta(t)} \rightarrow & \boxed{G(s)} & \xrightarrow{Y(s) = G(s)R(s) = G(s),} \\ & & y(t) = g(t) \end{array}$$



## 3.1 传递函数时域分析





## 3.1 传递函数时域分析

线性定常系统的一个特性：

系统对输入信号导数的响应，等于系统对该输入信号响应的导数；或者，系统对输入信号积分的响应，等于系统对该输入信号响应的积分，积分常数由输入时的初始条件确定。

### 5) 正弦信号(Sinusoidal Function)

$$r(t) = A \sin(\omega t + \phi),$$

$$R(s) = A e^{\frac{\phi}{\omega} s} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

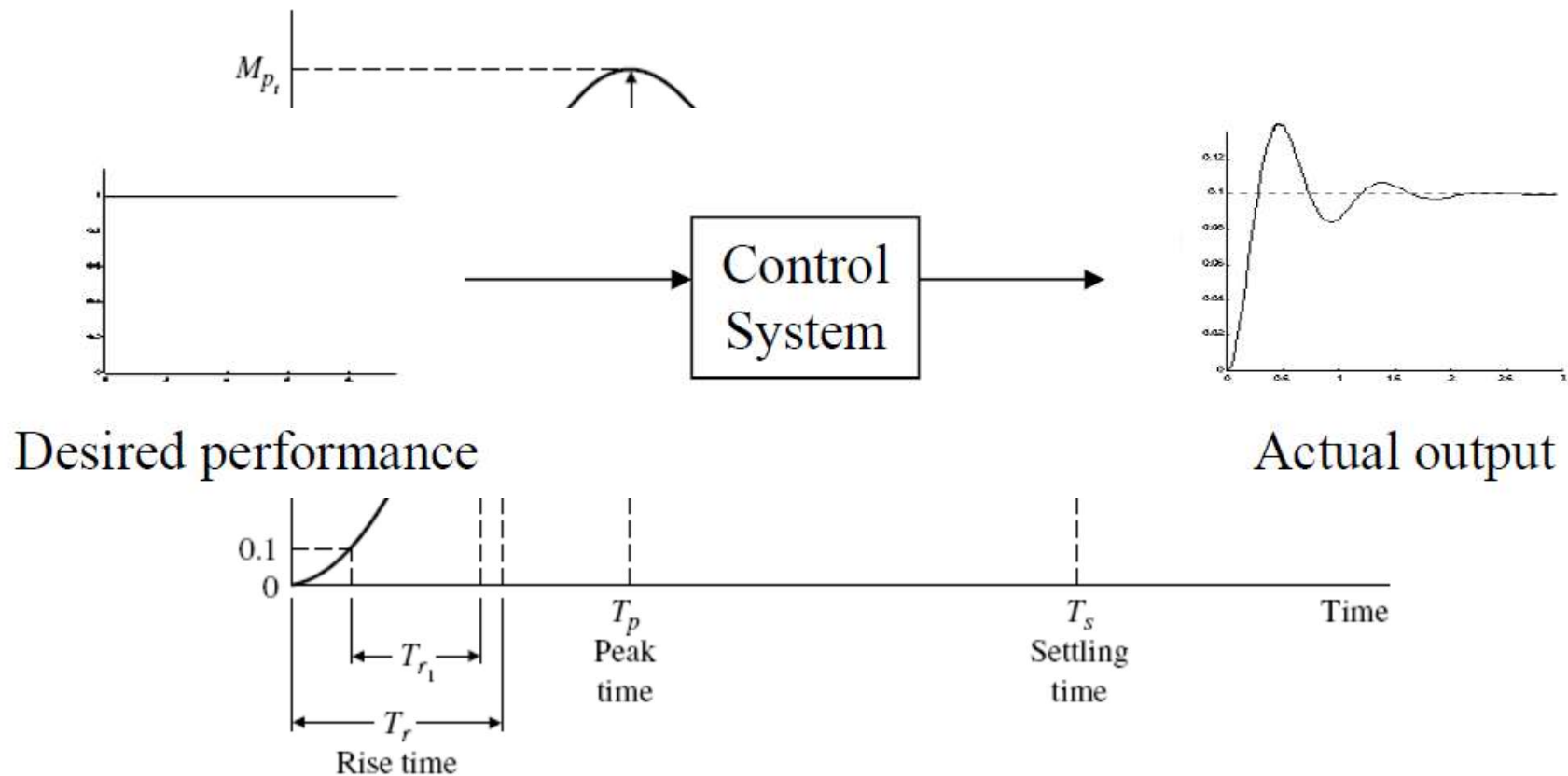


## 3.1 传递函数时域分析

### □ 单位阶跃响应与瞬态性能指标

控制系统的典型单位阶跃响应曲线

稳定  
准确  
快速





## 3.1 传递函数时域分析

瞬态/动态性能指标：

**a) 延迟时间  $T_d$ : (delay time)**

系统响应从0上升到稳态值的50%所需要的时间

**b) 上升时间  $T_r$ : (rise time)**

1) 系统响应从0上升到稳态值所需时间  
(有振荡系统)

1) 系统响应从稳态值的10%上升到90%所需时间  
(无振荡系统)

**c) 峰值时间  $T_p$ : (peak time)**

系统响应达到最大峰值所需要的时间



## 3.1 传递函数时域分析

d) (最大)超调量  $\sigma$ : (maximum overshoot)

系统响应超出稳态值的最大偏离量(常以百分比表示)

$$\sigma\% \triangleq \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

e) 调节时间  $T_s$ : (settling time)

系统响应与稳态值之差达到并维持误差  $\pm\delta$  所需要的最小时间;

$$|y(t) - y(\infty)| \leq y(\infty)\delta, \quad t \geq T_s$$

f) 振荡次数  $N$ :

调节时间  $T_s$  内,  $y(t)$  偏离  $y(\infty)$  的振荡次数;

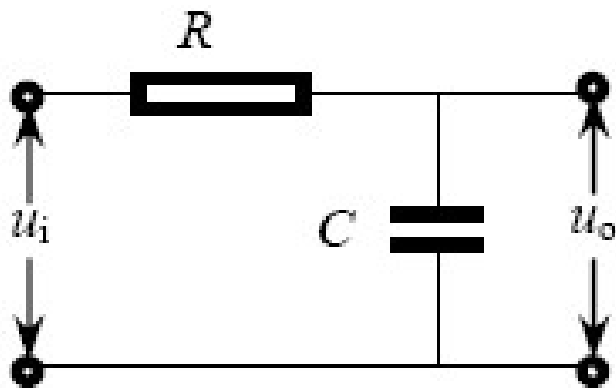


## 3.1 传递函数时域分析

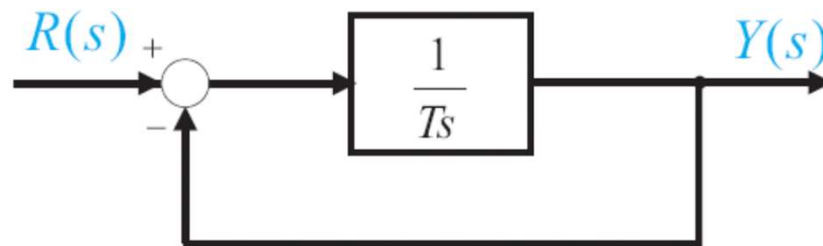
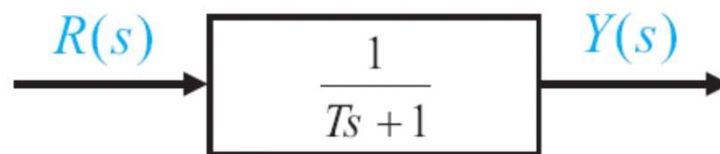
### □ 一阶系统的时域分析

数学模型  $\xrightarrow[\text{求解微分方程}]{\text{典型输入下}}$  时域分析  $\longrightarrow$  性能指标

系统闭环传递函数：
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$



$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$







## 3.1 传递函数时域分析

### ● 单位阶跃响应

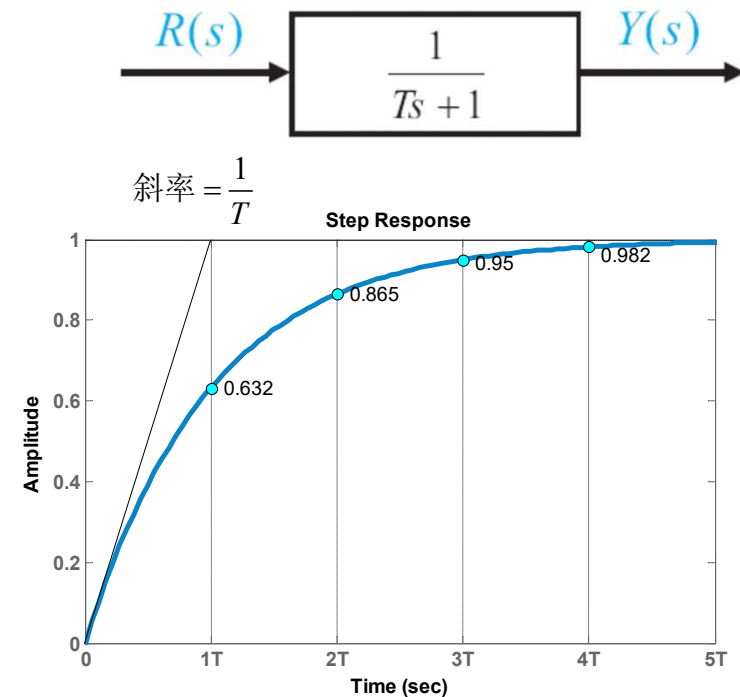
输入:  $r(t) = 1(t)$ ,  $R(s) = 1/s$

输出:  $Y(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{(Ts + 1)s}$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \right]$$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

误差:  $e(t) = 1 - y(t) = e^{-t/T} \longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$





## 3.1 传递函数时域分析

➤ 延迟时间  $T_d$ :  $y(t)|_{t=T_d} = 1 - e^{-T_d/T} = 0.5$

→  $T_d = -T \ln(0.5) = 0.69T$

➤ 上升时间  $T_r$ : 响应从稳态值的10%上升到90%所需时间

$y(t_{0.1}) = 0.1 = 1 - e^{-t_{0.1}/T} \longrightarrow t_{0.1} = -T \ln 0.9 = 0.105T$

$y(t_{0.9}) = 0.9 = 1 - e^{-t_{0.9}/T} \longrightarrow t_{0.9} = -T \ln 0.1 = 2.303T$

➤ 调节时间  $T_s$ :

$T_r = t_{0.9} - t_{0.1} = 2.2T$

If  $\delta = 5\% \longrightarrow T_s = 3T$



## 3.1 传递函数时域分析

一阶系统单位阶跃响应特点：

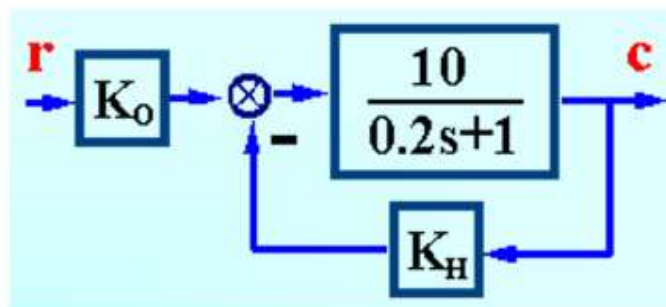
1. 系统输出  $y(t)$  是初值为零，终值为 1 的单调连续上升过程
2. 响应曲线终值为 1，即在阶跃输入作用下，稳态误差为零
3. 响应曲线在  $T = 0$  处斜率最大，为  $1/T$
4. 动态性能与常数  $T$  有关，当  $t = T$  时，响应曲线上升到稳态值的 63.2%

**要提高响应的快速性，可减小时间常数  $T$**



## 3.1 传递函数时域分析

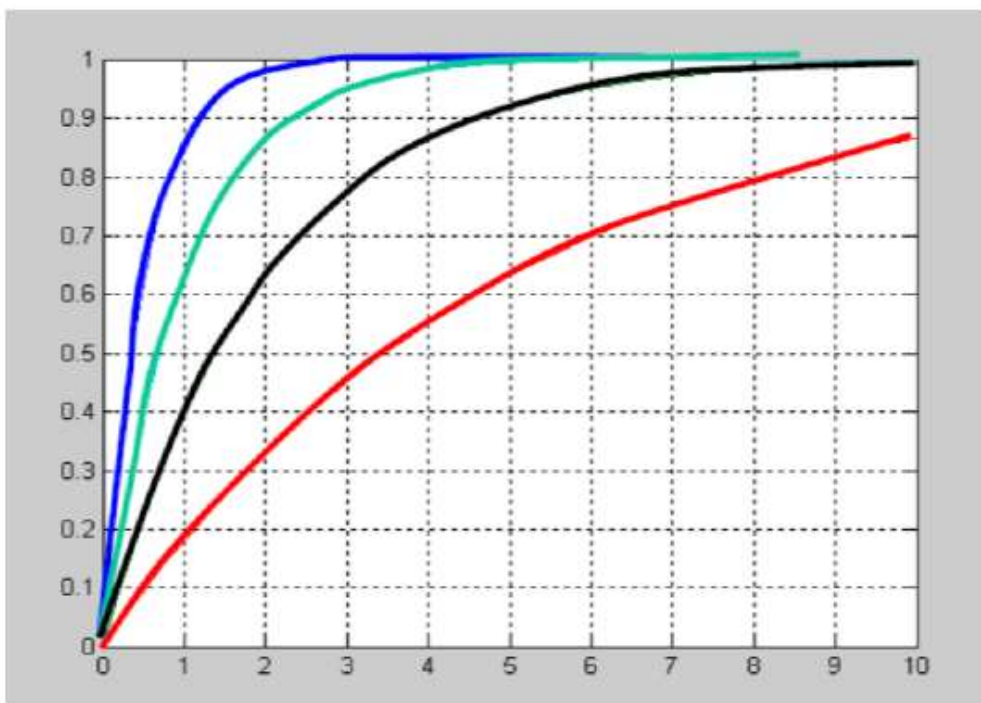
系统如图所示，现采用负反馈方式，欲将系统调节时间减小到原来的0.1倍，且保证原放大倍数不变，试确定参数 $K_o$ 和 $K_H$ 的取值。



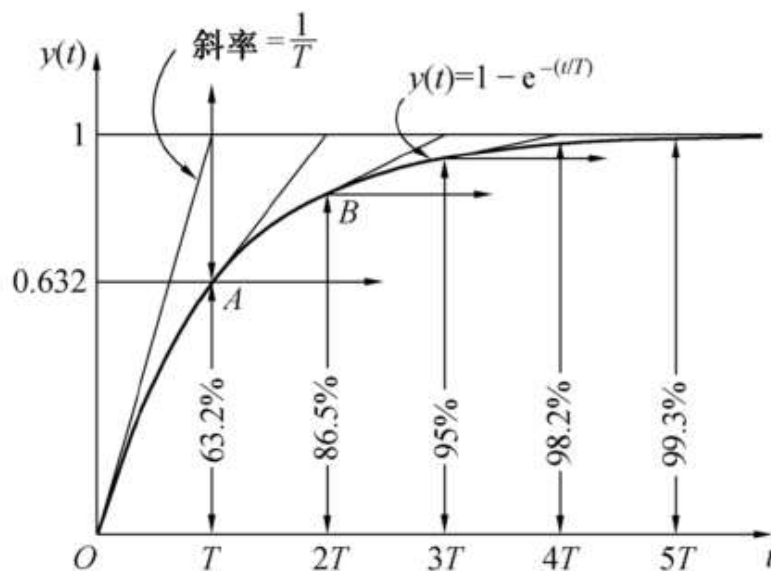


## 3.1 传递函数时域分析

**思考：**图中 4 条一阶系统阶跃响应曲线，时间常数分别为 0.5, 1, 2, 5, 请标注在对应的曲线上。



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$





## 3.1 传递函数时域分析

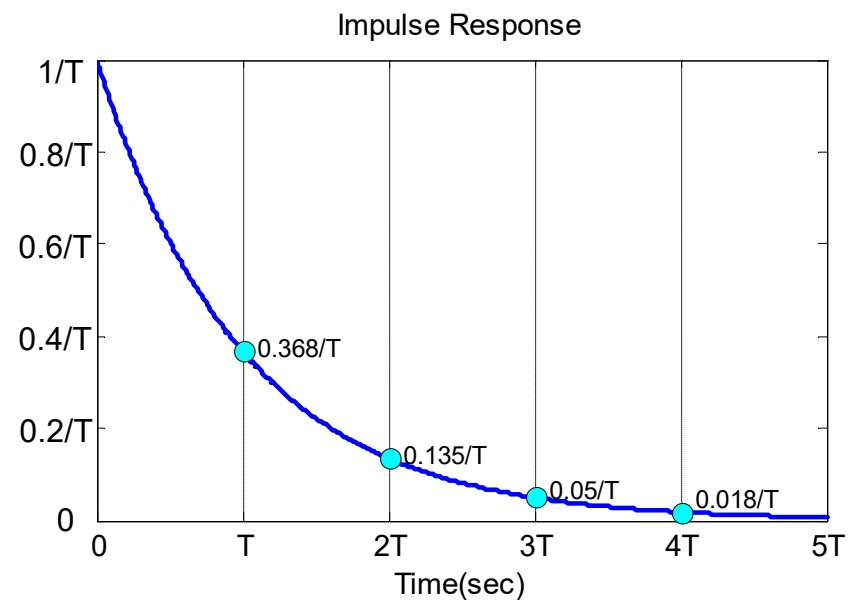
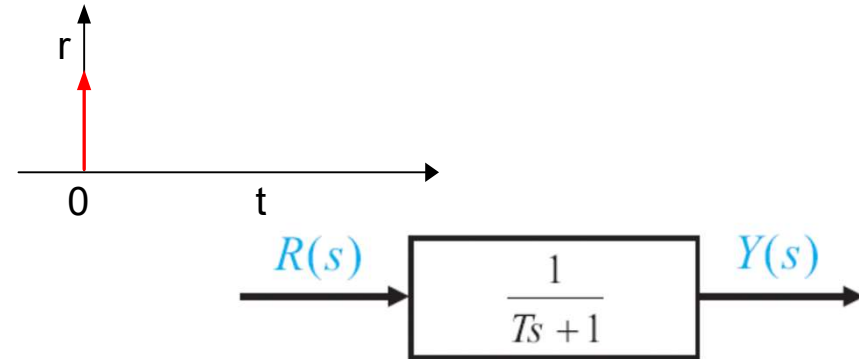
### ● 单位脉冲响应

输入:  $r(t) = \delta(t)$ ,  $R(s) = 1$

输出:  $Y(s) = G(s)R(s)$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{Ts + 1} \right] = \frac{1}{T} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

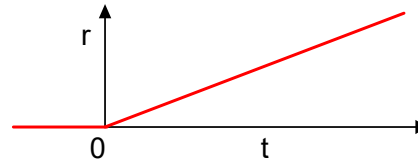




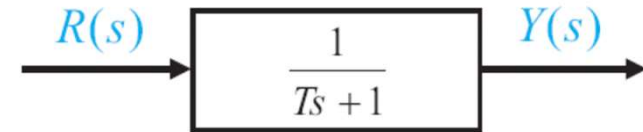
## 3.1 传递函数时域分析

### ● 单位斜坡响应

输入:  $r(t) = t$ ,  $R(s) = 1/s^2$



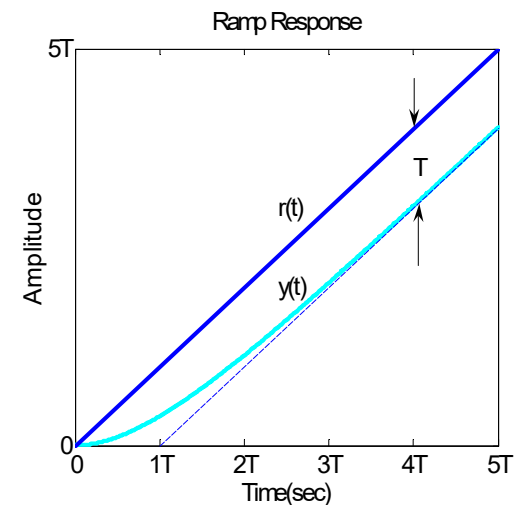
输出:  $Y(s) = G(s)R(s)$



$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2(Ts+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

$$y(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0$$

误差:  $e(t) = r(t) - y(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$        $e(\infty) = T$







## 3.1 传递函数时域分析

一阶系统单位脉冲响应特点：

1. 系统输出  $y(t)$  是单调连续下降的指数曲线
2. 响应曲线终值为 0，即系统在脉冲输入作用下，稳态误差为零
3. 动态性能与常数  $T$  有关， $y(0) = \frac{1}{T}$ ,  $y(T) = 0.368 \frac{1}{T}$ ,  $y(\infty) = 0$
4. 和传递函数一样，单位脉冲响应可以反映系统全部性质，对系统脉冲响应做拉氏变换，可得到传递函数

一阶系统单位斜坡响应特点：

1. 当  $t \rightarrow \infty$  时， $y(t)$  为  $y(t - T)$
2. 一阶系统在跟踪单位斜坡信号时，有稳态误差，其数值等于时间常数  $T$
3. 减小时间常数  $T$ ，可以 ① 加快响应速度；② 减少系统跟踪斜坡信号的稳态误差

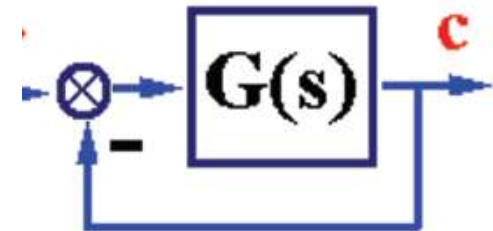




## 3.1 传递函数时域分析

例2 已知单位反馈系统的单位阶跃响应  $h(t) = 1 - e^{-at}$

试求  $\Phi(s)$ ,  $G(s)$ 。





## 3.1 传递函数时域分析

### □ 二阶系统的单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡响应

#### ➤ 二阶系统的数学模型

#### • 系统实例

伺服电机的三个闭环控制：  
 电流环  
 速度环  
 位置环

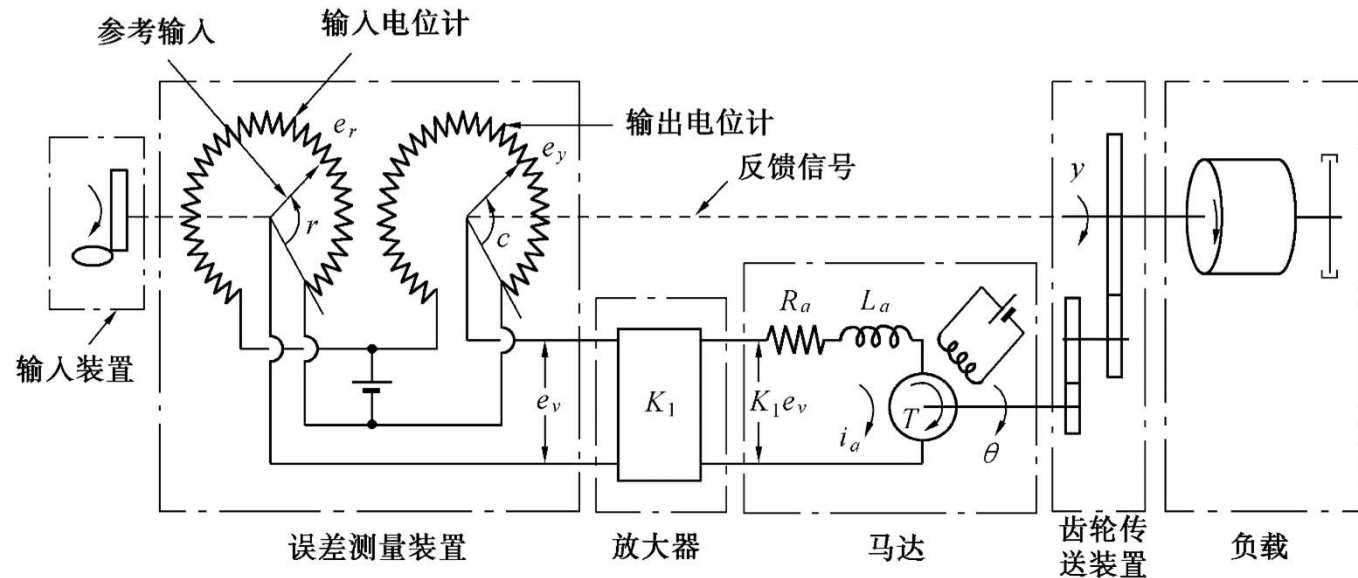


图 3.4.1 电动伺服系统原理图

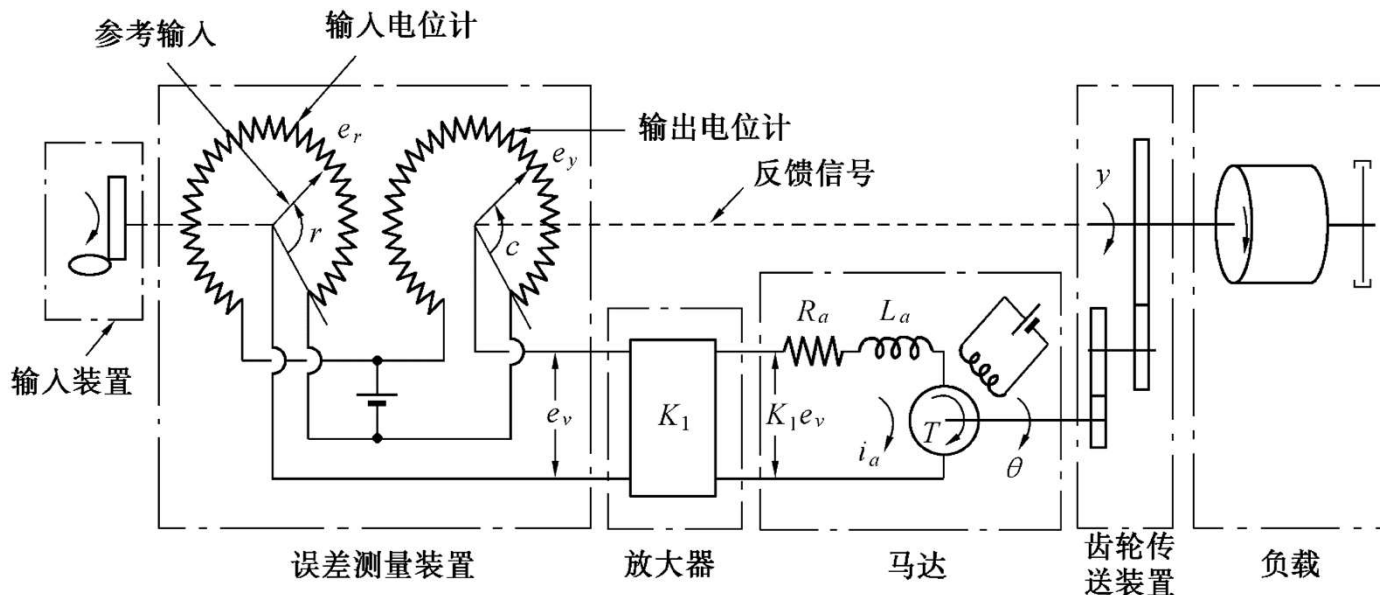
电流环：控制电机转矩，使输出电流尽量接近等于设定电流，动态响应最快

速度环：它的输出直接就是电流环的参考信号

位置环：内部输出就是速度环的参考信号，此时系统运算量最大，动态响应速度最慢



# 3.1



输入电位计和输出电位计的电压分别是

$$e_r = K_0 r \quad e_y = K_0 y$$

放大器的输入电压  $e_v$  和输出电压  $e_a$  的关系是

$$e_v = e_r - e_y = K_0(r - y)$$

$$e_a = K_1 e_v$$

直流机电枢的电压 - 电流方程是

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

$e_b$  —— 电枢反电势,  $e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$ ;

$K_3$  —— 电机  $m$  反电势系数;

$R_a$  —— 电枢绕组电阻;

$L_a$  —— 电枢绕组电感, 通常  $L_a$  都很小, 可以忽略不计。

这样上面方程可以简化为

$$R_a i_a = e_a - K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

电机的力矩平衡方程是

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = M = K_2 i_a$$

$J_0, b_0$  —— 折算到电机轴上的转动惯量和阻力系数;

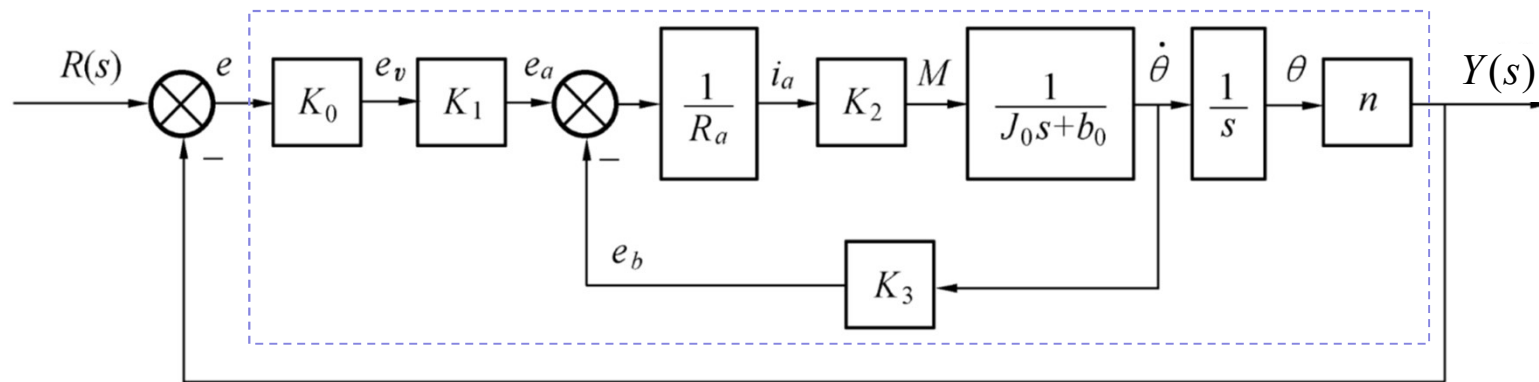
$K_2$  —— 直流电机的力矩系数。

减速器的传动比为  $n$ , 则电机转角  $\theta$  和负载转角  $y$  之间的关系是

$$y = n \cdot \theta$$



## 3.1 传递函数时域分析



$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_m}{T_m s^2 + s + K_m} \longrightarrow \Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中  $K_m = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{R_0 b_0 + K_2 K_3}$

$$T_m = \frac{R_a J_0}{R_0 b_0 + K_2 K_3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_m}{T_m}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{K_m T_m}}$$

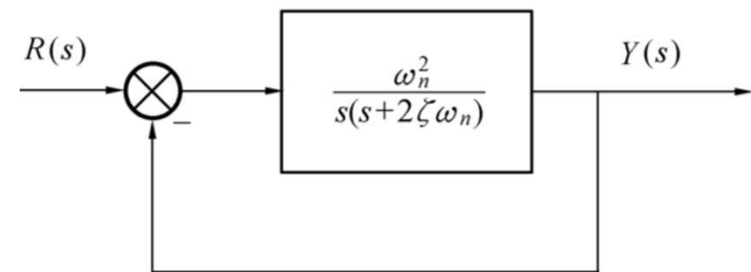


图 3.4.3 标准形式的二阶系统



---

10.10 (Tue)

第11讲



## 3.1 传递函数时域分析

- 二阶系统的数学模型

① 标准二阶系统微分方程  $\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = \omega_n^2r$

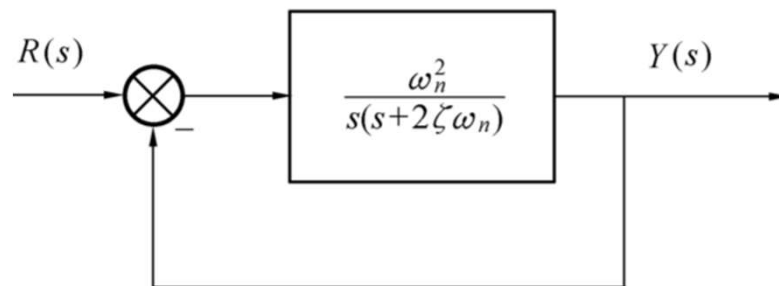
② 标准二阶系统传递函数

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\omega_n$  : 自然振荡频率(无阻尼自然振荡频率)

$\zeta$  : 阻尼比

③ 标准二阶系统结构图 (单位负反馈)



开环传函

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

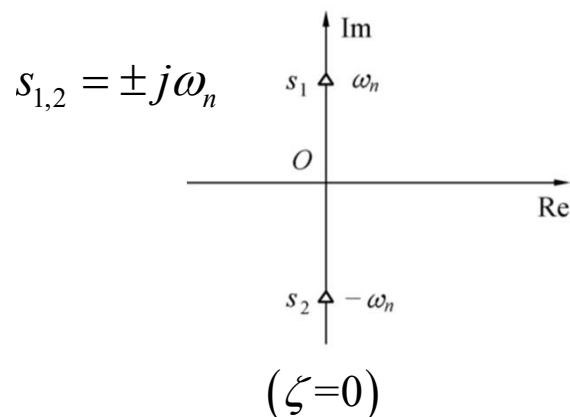
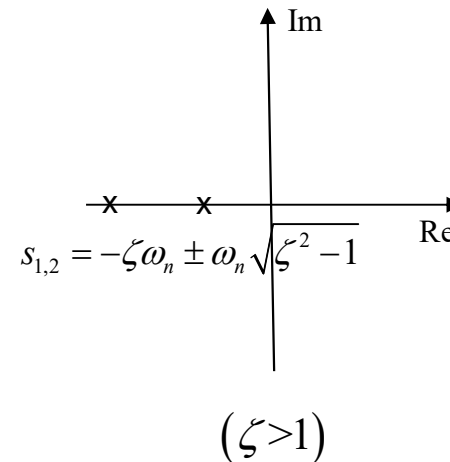
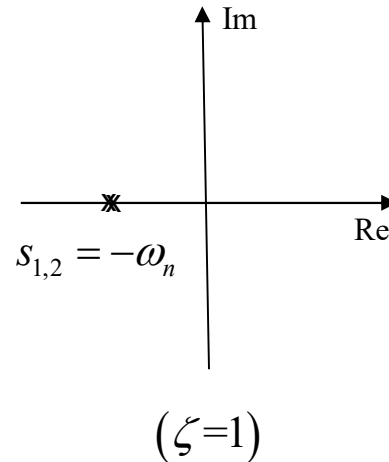
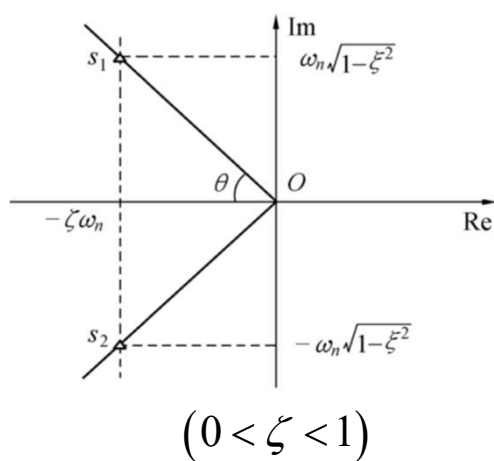
图 3.4.3 标准形式的二阶系统



## 3.1 传递函数时域分析

### ④ 标准二阶系统的特征方程和特征根/极点

$$\text{特征根/极点: } s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

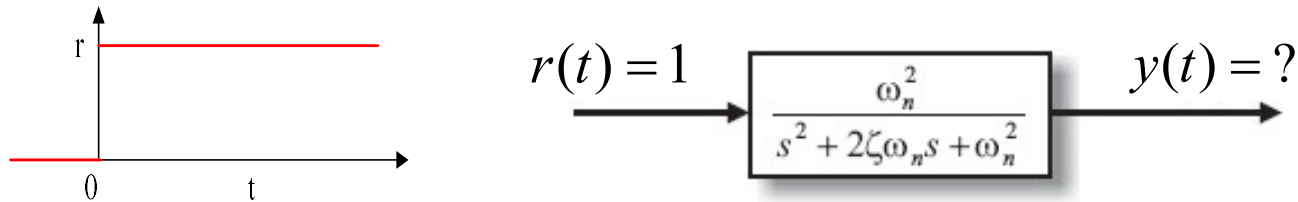


- $0 < \zeta < 1$  —— 欠阻尼
- $\zeta = 1$  —— 临界阻尼
- $\zeta > 1$  —— 过阻尼
- $\zeta = 0$  —— 无阻尼



## 3.1 传递函数时域分析

### ► 二阶系统的单位阶跃响应



目标：Solve for  $y(t)$  when  $r(t) = 1$ :  $\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 r(t)$

手段：
$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$  (参考Dorf表2.3 : 拉普拉斯变化对)

$y(t)$

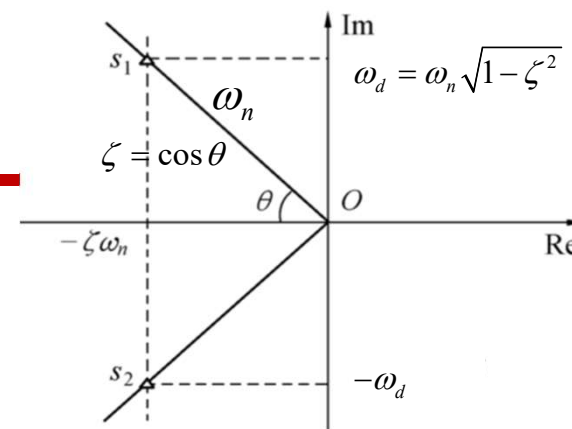




# 3.1 传递函数时域分析

## 二阶系统的单位阶跃响应

### Case 1: 欠阻尼 (0 < ζ < 1)



极点:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$

ω<sub>n</sub>: 无阻尼自然振荡(角)频率  
 ω<sub>d</sub> = ω<sub>n</sub>√(1-ζ<sup>2</sup>): 阻尼自然振荡(角)频率  
 ζ: 阻尼比  
 σ: 阻尼系数或衰减系数

求解 y(t):

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 - s(s + 2\zeta\omega_n)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \sim \cos \omega t$$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sim \sin \omega t$$

考虑到

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$



## 3.1 传递函数时域分析

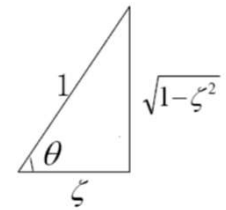
$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= \underbrace{1}_{\text{稳态分量}} - \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)}_{\text{暂态分量}} \quad t \geq 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

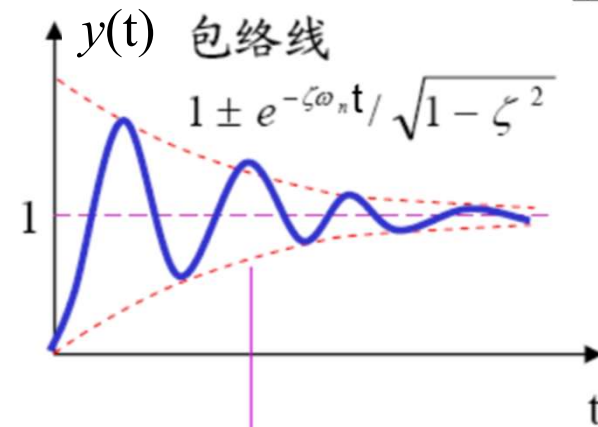
$$\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \cos \theta = \zeta$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \text{或} \quad \theta = \arccos \zeta$$



欠阻尼单位阶跃响应特点：

- 暂态分量是衰减的正弦震荡
- 暂态分量的衰减速度取决于 $\zeta\omega_n$
- 系统输出稳态值为 1
- 在阶跃信号作用下不存在稳态误差



稳态值为1的衰减振荡过程



## 3.1 传递函数时域分析

- Case 2: 无阻尼 ( $\zeta = 0$ )

极点:  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

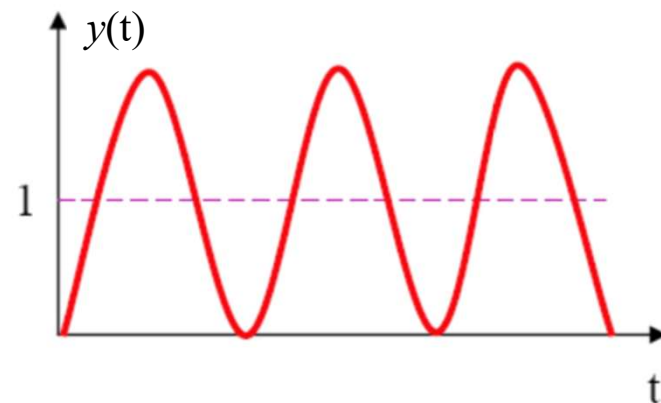
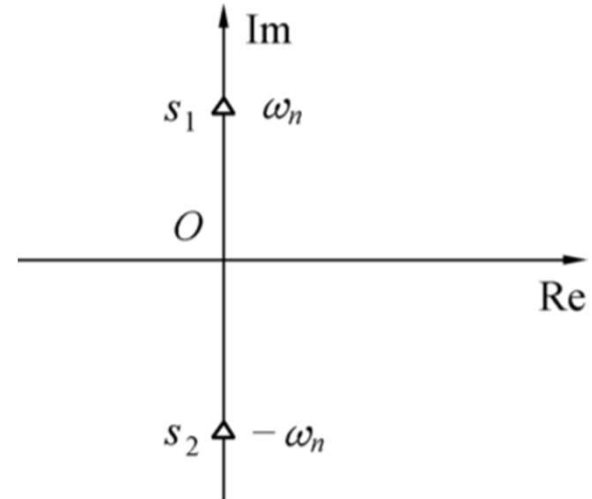
$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\zeta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

超调  $\sigma_p = 100\%$   
调节时间  $t_s = \infty$

无阻尼单位阶跃响应是一个等幅振荡过程。





# 3.1 传递函数时域分析

- Case 3: 临界阻尼 ( $\xi = 1$ )

极点:  $s_{1,2} = -\omega_n$

阶跃响应:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

$$= 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t \geq 0$$

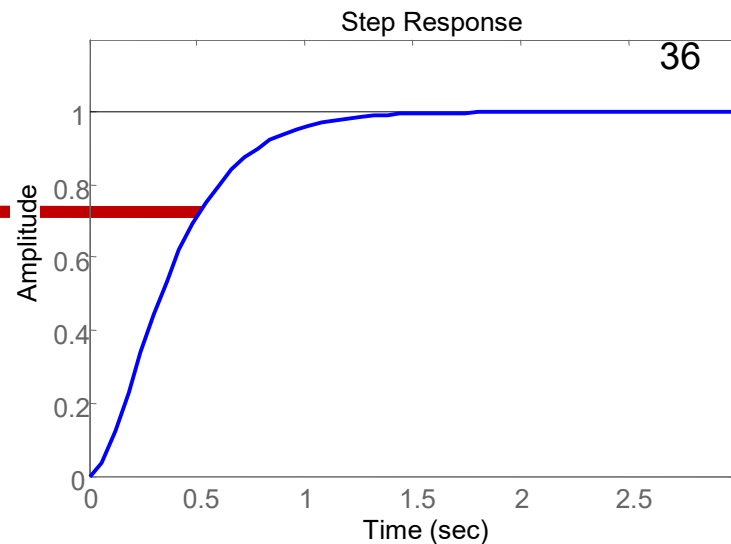
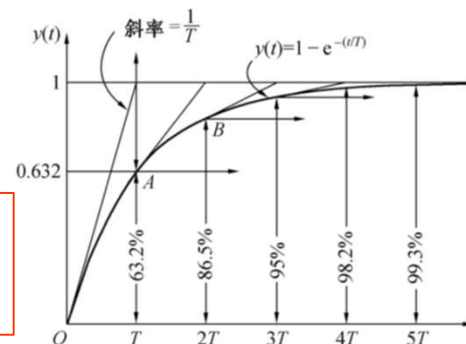
$$y'(0) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \Big|_{t=0} = 0$$

一阶系统单位阶跃响应

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

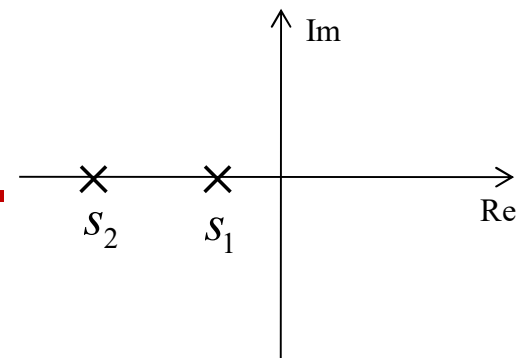
$$y'(0) = \frac{1}{T}$$

临界阻尼单位阶跃响应是一个稳态值为1的无超调单调上升过程。类似于一阶系统的单位阶跃响应，但有区别!





# 3.1 传递函数时域分析



- Case 4: 过阻尼 ( $\xi > 1$ )

极点:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

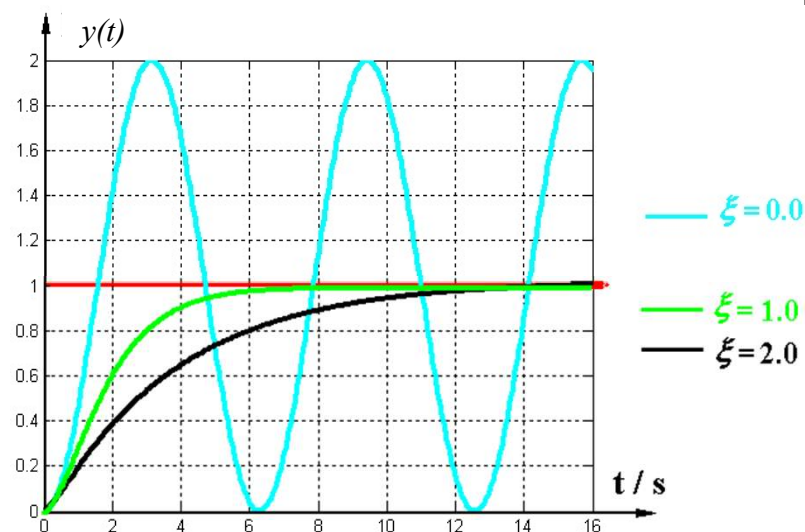
阶跃响应

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1/s_1}{s-s_1} - \frac{1/s_2}{s-s_2} \right)$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{-s_1} e^{s_1 t} - \frac{1}{-s_2} e^{s_2 t} \right), \quad t \geq 0$$

过阻尼单位阶跃响应是一个  
稳态值为1的单调上升过程





## 3.1 传递函数时域分析

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{-s_1} e^{s_1 t} - \frac{1}{-s_2} e^{s_2 t} \right), \quad t \geq 0$$

$$\text{令 } T_1 = -\frac{1}{s_1} = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$T_2 = -\frac{1}{s_2} = \frac{1}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

为过阻尼二阶规范系统的两个时间常数，可得

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad t \geq 0$$



## 3.1 传递函数时域分析

当  $\zeta \gg 1$ ,

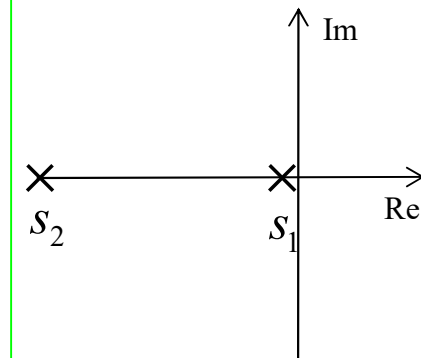
$$y(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$T_1 \gg T_2$$

$e^{-\frac{t}{T_2}}$  项的衰减比  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  项快得多,

且  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  项的系数也较大,

对于系统瞬态响应  $e^{-\frac{t}{T_2}}$  项在后期的影响很小



二阶规范系统的瞬态响应近似于一阶系统

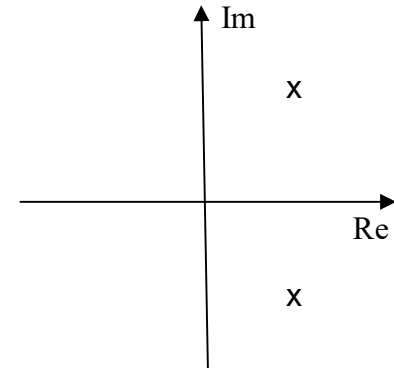
$$y(t) \approx 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$



## 3.1 传递函数时域分析

- Case 5: 负阻尼 ( $-1 < \zeta < 0$ )

极点:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d, \quad \sigma > 0$



$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad t \geq 0$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} < 0$$

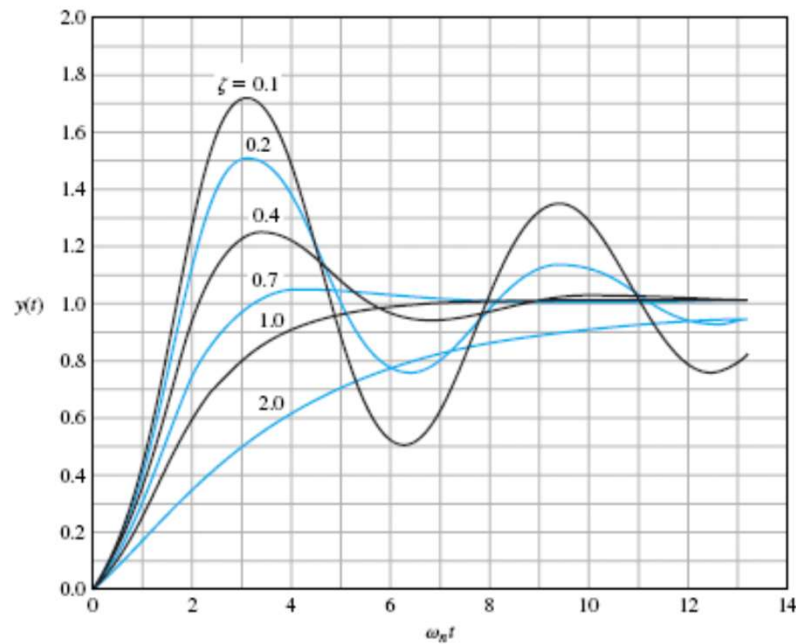
负阻尼单位阶跃响应是发散的正弦振荡，系统不稳定。



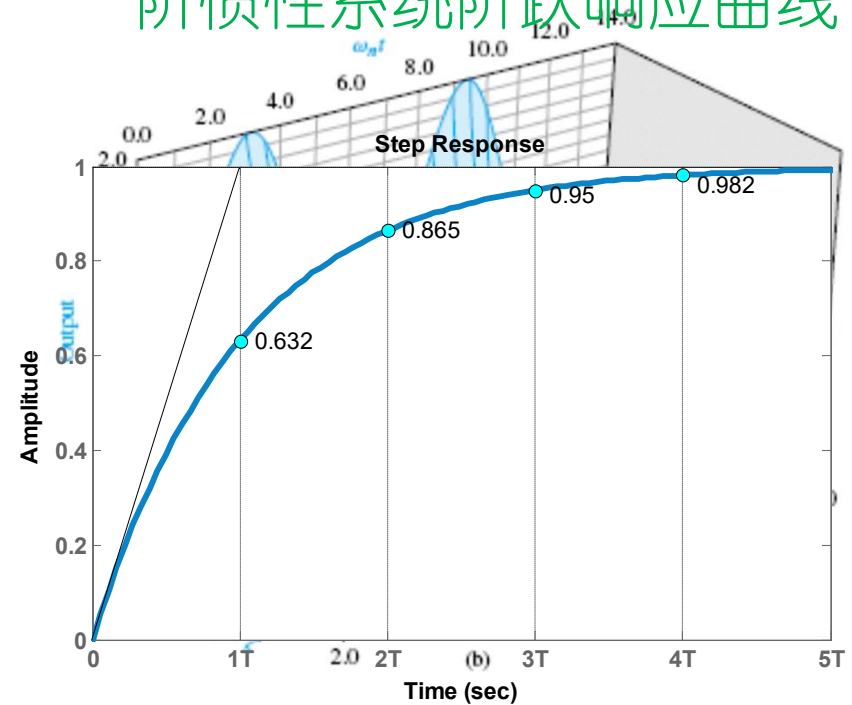


## 3.1 传递函数时域分析

二阶规范系统阶跃响应曲线



一阶惯性系统阶跃响应曲线



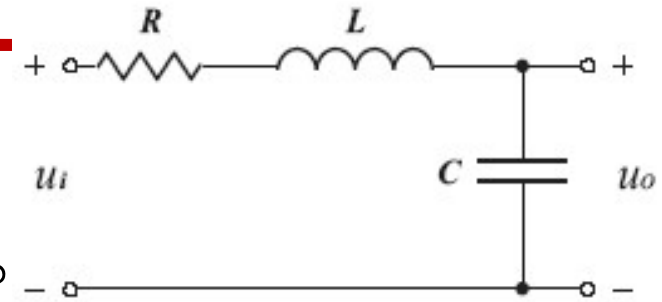
$\zeta$	$\zeta = 0$ 无阻尼	$0 < \zeta < 1$ 欠阻尼	$\zeta = 1$ 临界阻尼	$\zeta > 1$ 过阻尼
响应	无衰减振荡	衰减振荡	无振荡	无振荡



## 3.1 传递函数时域分析



**<例3.1>**: 如图RLC串联网络,  
试求其自然振荡频率和阻尼比。



解: 传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{R}{L}, \quad \longrightarrow \quad \zeta = \frac{R}{2\omega_n L} = \frac{1}{2}\sqrt{LC} \frac{R}{L} = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

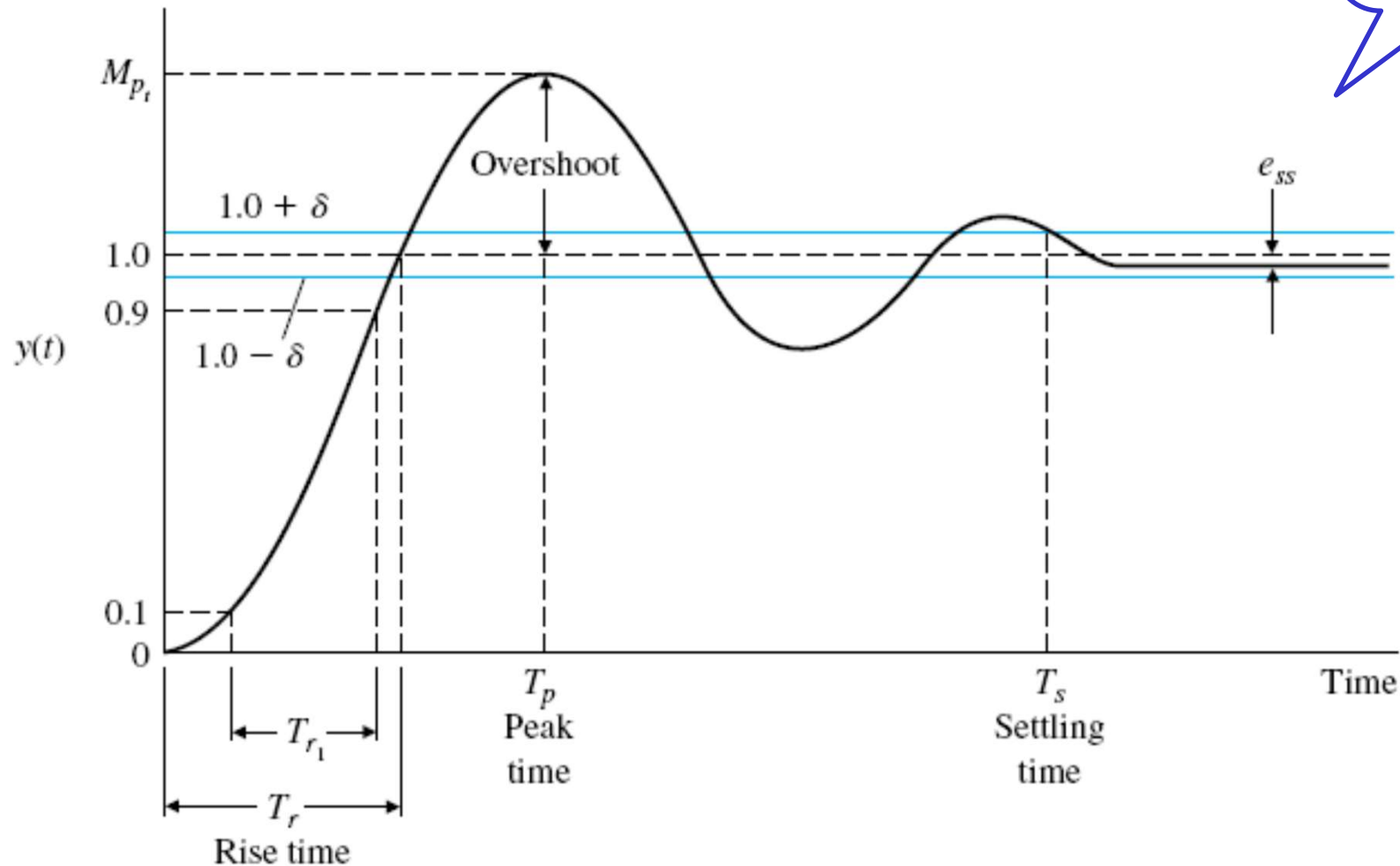
$\zeta$ 大:  $R$ 较大( $R$ 为耗能元件),  $L$ 较小,  $C$ 较大 ( $L, C$ 储能元件)

$R$ 较大, 能耗较大, 磁能和场能相互转换过程中在 $R$ 上耗能较多, 使得振荡衰减较快, 甚至不能产生振荡。



## 3.1 传递函数时域分析

控制系统的典型单位阶跃响应曲线



性能指标  
是就稳定  
系统而言  
的



## 3.1 传递函数时域分析

### 欠阻尼二阶规范系统瞬态响应特性

1) 峰值时间  $T_p$ : 响应曲线第一次达到峰值的时间

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=T_p} = 0$$

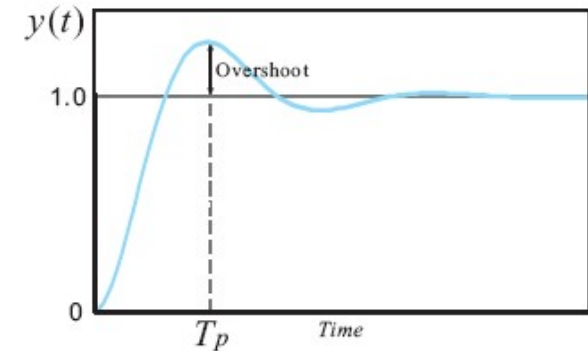
$$sY(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t = 0$$

$$\sin \omega_d t = 0 \Rightarrow \omega_d t = n\pi \Rightarrow t = n\pi / \omega_d, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

第一次到达峰值, 取  $n=1$ :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$



$$\text{where } \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sim \sin \omega t$$

阻尼比  $\zeta$  一定时,  $\omega_n \uparrow$  (闭环极点离负实轴距离越远),  $T_p \downarrow$  (系统响应加快)



## 3.1 传递函数时域分析

### 2) 超调量 $\sigma\%$ :

$$\sigma\% \triangleq \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

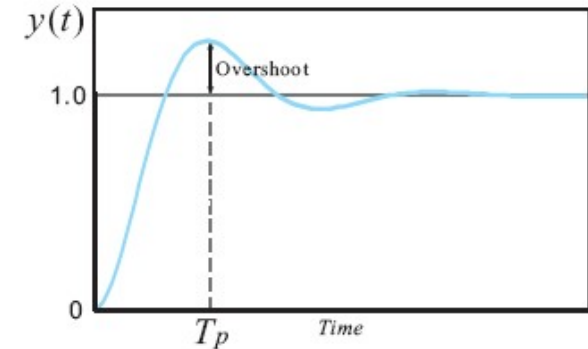
$$\sigma\% = [y(T_p) - 1] \times 100\%$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_p} \sin(\omega_d T_p + \varphi)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp\left(-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right) \sin(\pi + \varphi), \text{ where } \varphi = \arccos \zeta$$

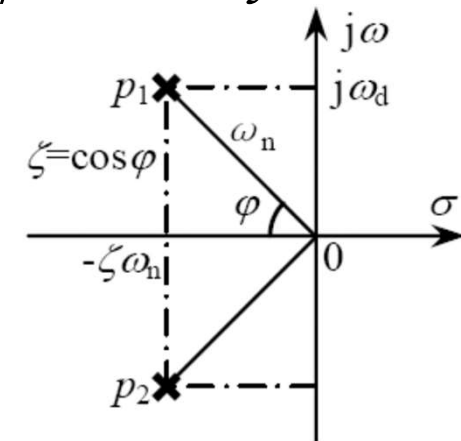
$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi = -\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\omega_n T_p} = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\%$$



$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)$$

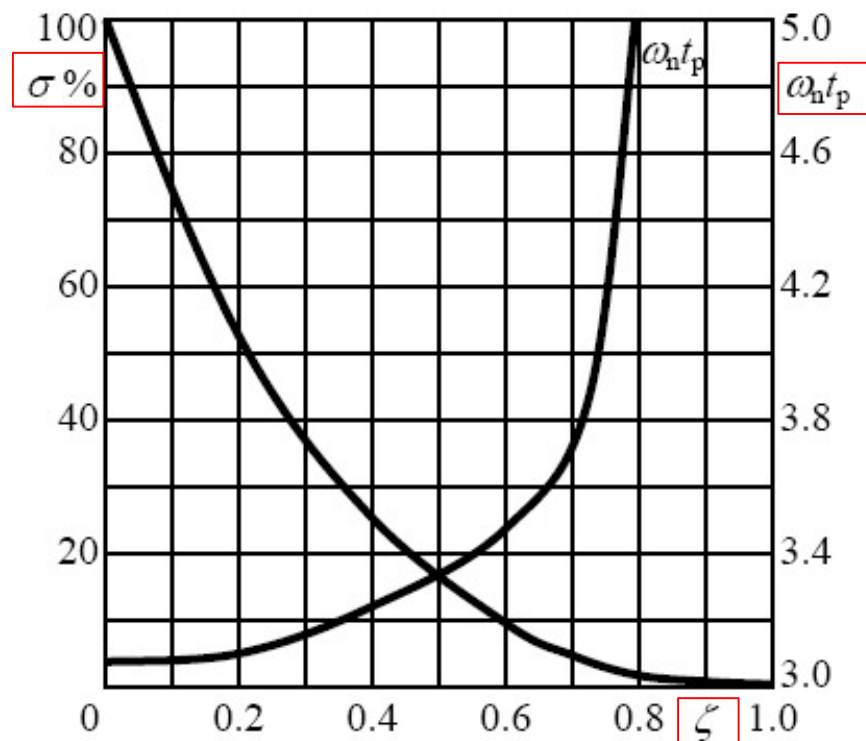
$$T_p = \pi / \omega_d$$





## 3.1 传递函数时域分析

注意：超调量 $\sigma\%$ 只是 $\zeta$ 的函数，与 $\omega_n$ 无关



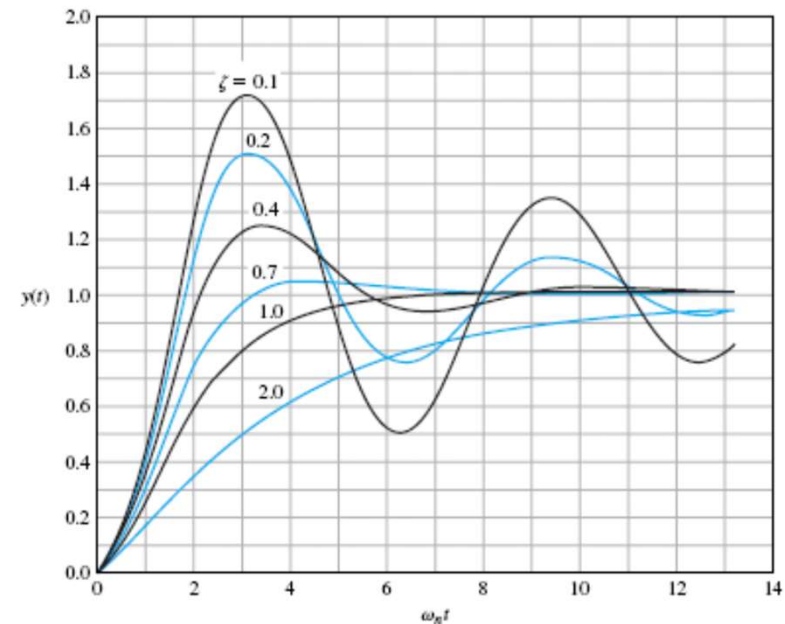
$\sigma\%$ 以及 $\omega_n T_p$ 与 $\zeta$ 的关系

$\zeta \uparrow$

$\sigma\% \downarrow$

折中

$\omega_n T_p \uparrow$





## 3.1 传递函数时域分析

### 3) 上升时间 $T_r$ :

有振荡系统:

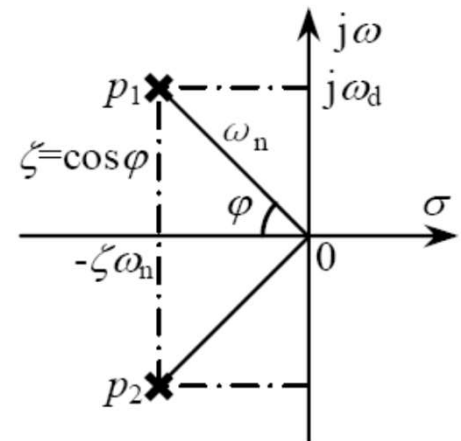
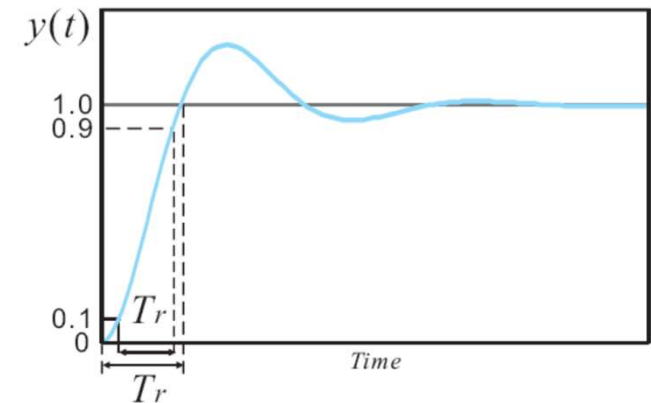
采用“0→100%”的上升时间定义

$$y(T_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_r} \sin(\omega_d T_r + \varphi) = 1$$

$$\sin(\omega_d T_r + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega_d T_r + \varphi = \pi$$

$$T_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\varphi = \arccos \zeta$$



当阻尼比  $\zeta$  一定, 即  $\varphi$  一定时, 提高  $\omega_n$ , 可缩短上升时间  $T_r$ , 即系统的快速性与  $\omega_n$  成正比。



## 3.1 传递函数时域分析

### 4) 调节时间 $T_s$ :

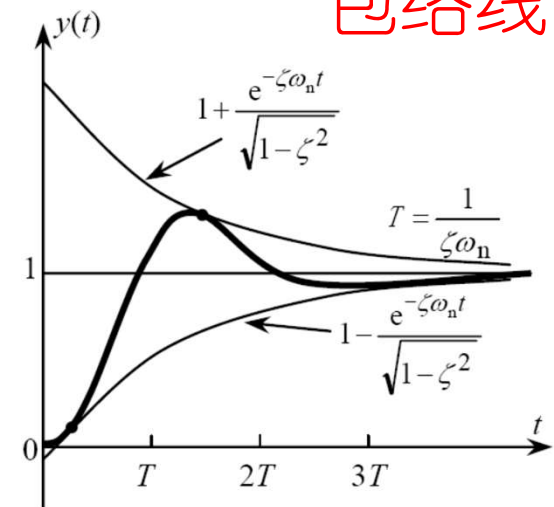
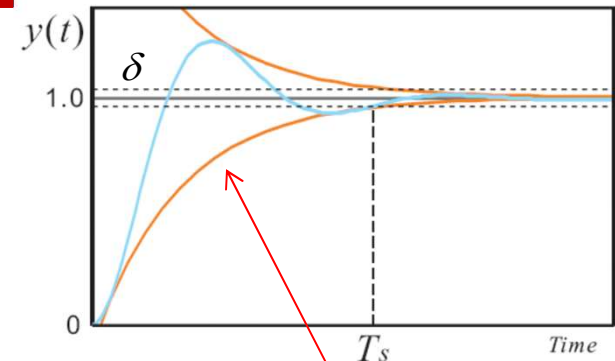
$$t \geq T_s : |y(t) - y(\infty)| \leq y(\infty)\delta$$

$$\text{系统响应: } y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \right| \leq \delta$$

$$\text{为便于计算,近似取 } \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_s} \approx \delta$$

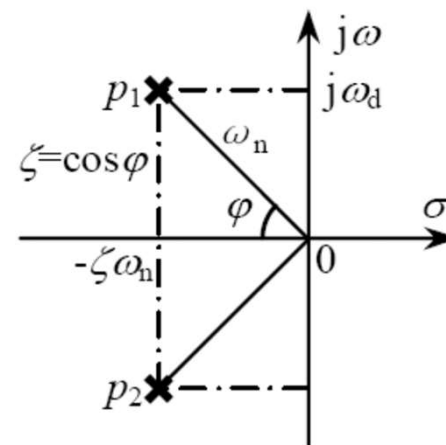
$$T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\delta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ -\ln \delta - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$







## 3.1 传递函数时域分析



$$T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\delta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ -\ln \delta - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$

$$\ln(0.02) = -3.912 \approx -4$$

$$\ln(0.05) = -2.995 \approx -3$$

$$-0.83 < \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) < 0, \text{ for } 0 < \zeta < 0.9$$

当  $0 < \zeta < 0.9$ ,  
采用工程上的近似值

$$T_s(2\%) \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 4 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$

$$T_s(5\%) \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 3 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$

$$T_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$T_s(5\%) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

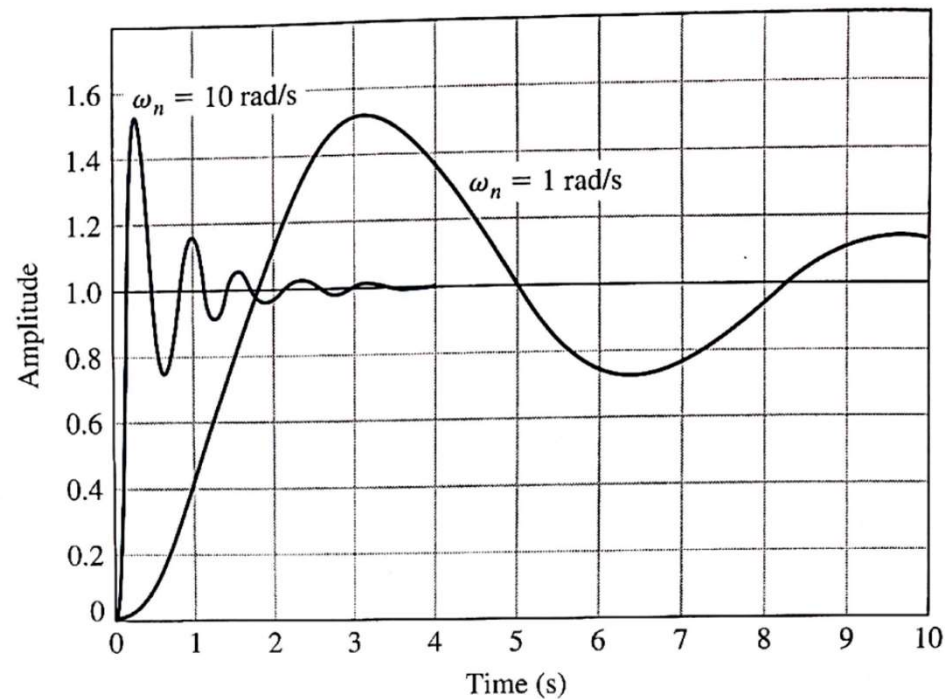
调节时间近似与极点到虚轴的距离成反比



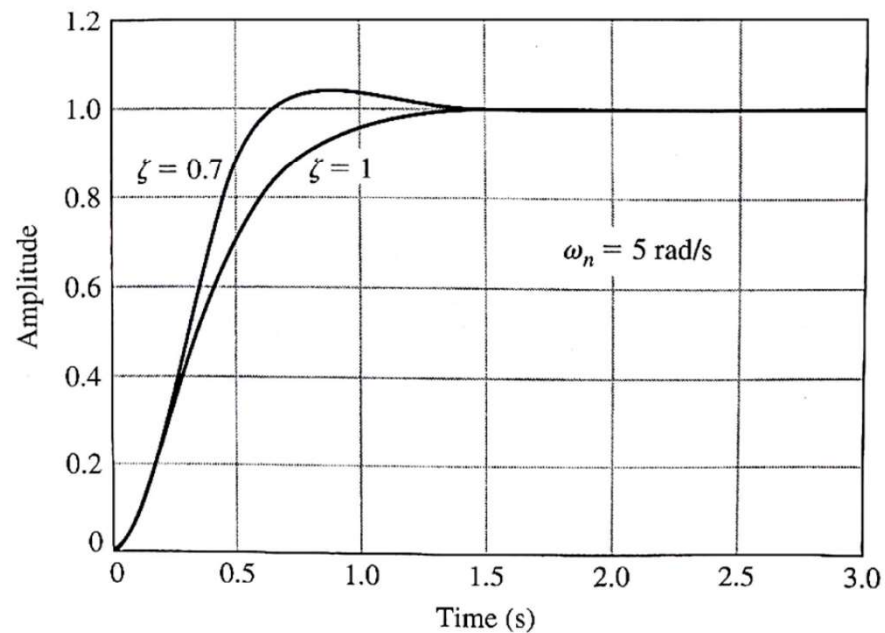
## 3.1 传递函数

系统阶跃响应的  
快速性取决于：  
阻尼比和频率

超调仅取决于：  
阻尼比



**FIGURE 5.10**  
The step response  
for  $\zeta = 0.2$  for  
 $\omega_n = 1$  and  
 $\omega_n = 10$ .



**FIGURE 5.11**  
The step response  
for  $\omega_n = 5$  with  
 $\zeta = 0.7$  and  $\zeta = 1$ .



## 3.1 传递函数时域分析

5) 延迟时间  $T_d$ :  $y(T_d) = 0.5$

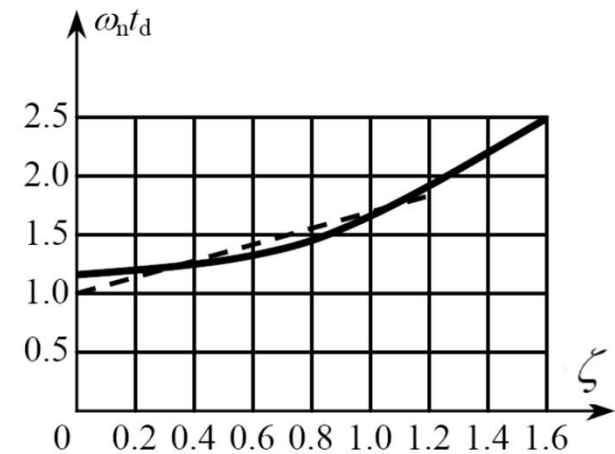
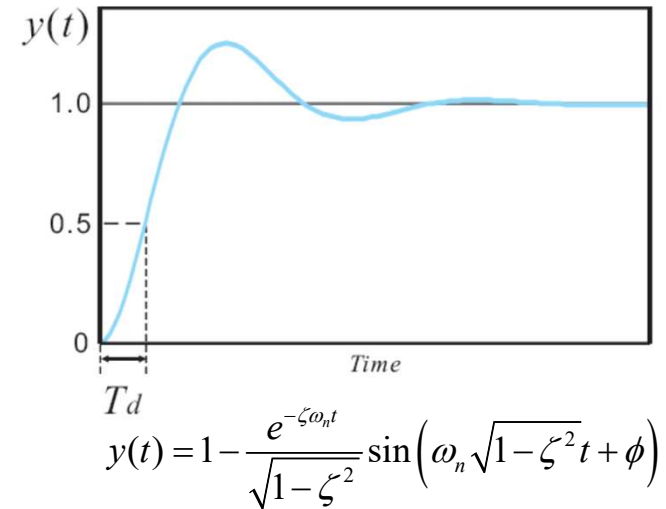
$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_d} \sin(\omega_d T_d + \varphi) = 0.5$$



$T_d$ 的求解由隐函数给出

$$\omega_n T_d = \frac{1}{\zeta} \ln \frac{2 \sin(\omega_d T_d + \varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

其曲线如图所示





## 3.1 传递函数时域分析

### 6) 振荡次数 $N$ :

阻尼振荡周期: 
$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

振荡次数: 
$$N = \frac{T_s}{\tau_d} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}, & \delta = 2\% \\ \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}, & \delta = 5\% \end{cases}$$

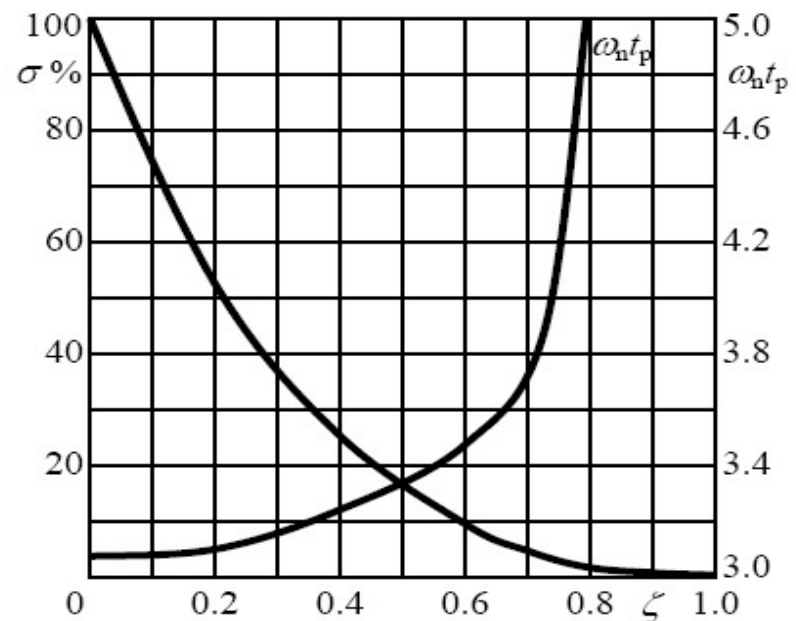


## 3.1 传递函数时域分析

⚠ 注：兼顾超调量和响应时间，控制系统常选择

$\zeta = 0.4 \sim 0.8$ ，相应的  $\sigma\% = 25.4\% \sim 1.5\%$

实际控制系统常选取工作在欠阻尼状态，只有当不允许出现超调或对象本身惯性很大时，才采用接近临界阻尼的过阻尼状态。



$\sigma\%$ 以及 $\omega_n T_p$ 与 $\zeta$ 的关系



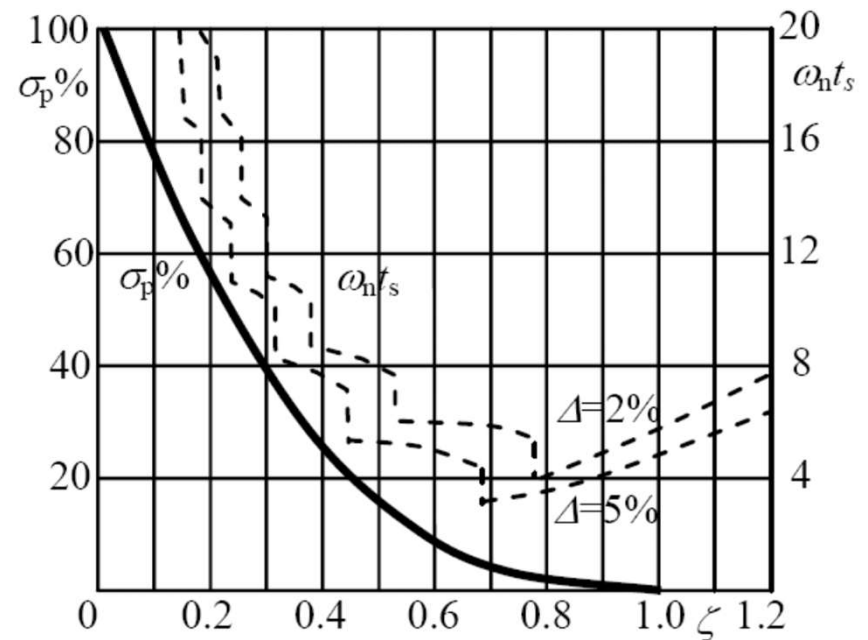
## 3.1 传递函数时域分析

### ⚠ 二阶工程最佳参数

某些控制系统采用所谓“二阶工程最佳参数”作为控制系统工程设计的依据，即选择参数使

$$\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707, \quad \text{相应的 } \sigma\% = e^{-\pi} \times 100\% = 4.3\%$$

由  $\sigma\%$  和  $\omega_n T_s$  与  $\zeta$  的关系曲线可见，此时控制系统较好地兼顾了瞬态响应和平稳性与快速性。



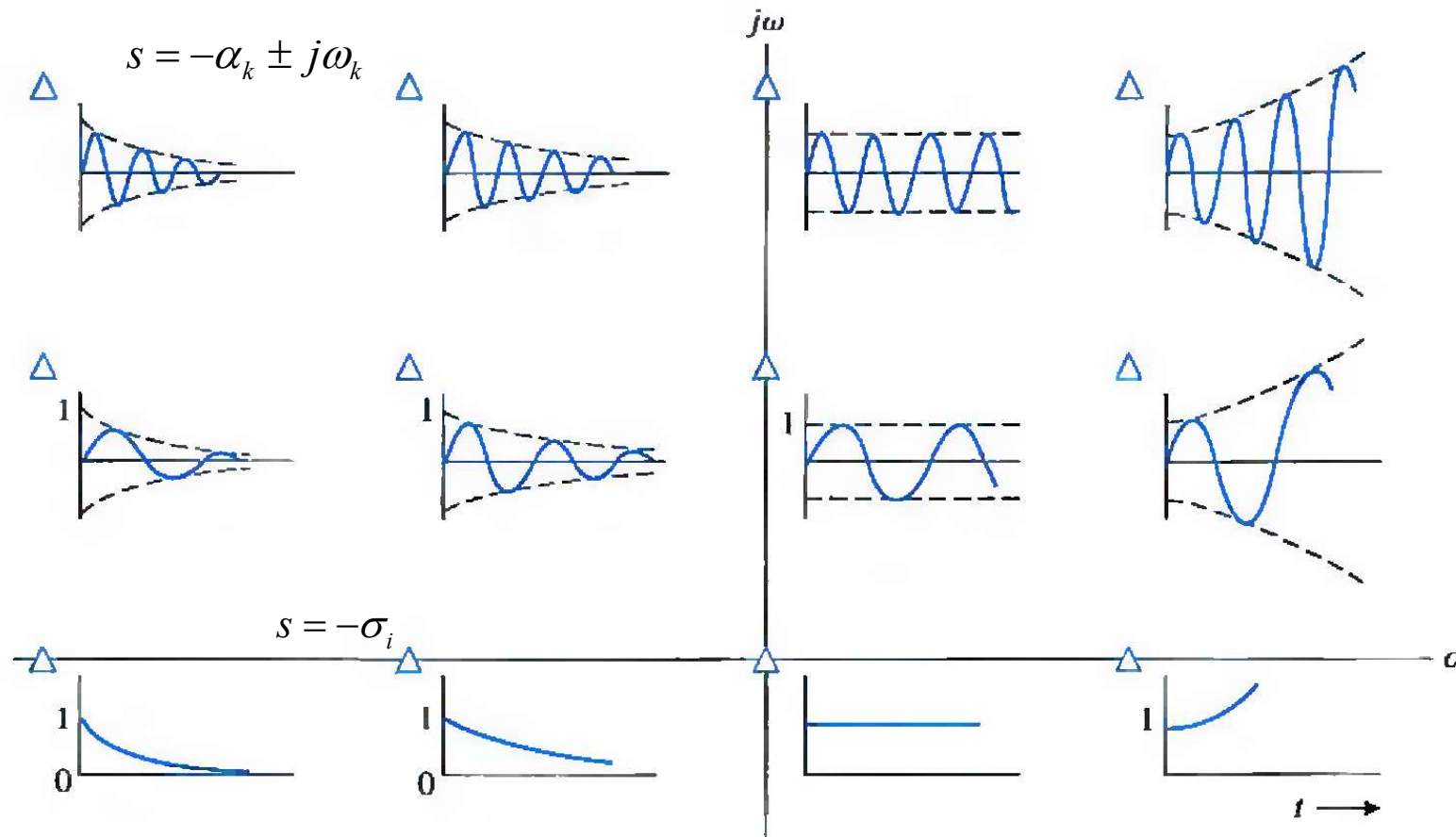


## 3.1 传递函数时域分析

请阅读教材  
5.5节

闭环反馈系统的瞬态响应与传递函数极点位置的关系

图5.17 不同位置特征根对应的脉冲响应



**FIGURE 5.17** Impulse response for various root locations in the s-plane. (The conjugate root is not shown.)



## 3.1 传递函数时域分析

例 3.4.1 已知二阶系统的闭环传递数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中  $\zeta = 0.6, \omega_n = 5 \text{ rad/s}$ 。试计算该系统单位阶跃响应的特征量  $t_r, t_p, t_s, \sigma_p$  和  $N$ 。

符号说明：内容取自不同教科书，部分符号可以互用

$T_r(t_r), T_p(t_p), T_s(t_s), \sigma\%(\sigma_p), \varphi(\theta)$

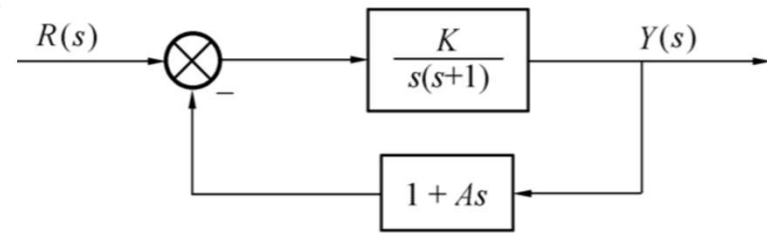
注：调节时间可用  
工程近似公式计算





## 3.1 传递函数时域分析

**例 3.4.2** 已知系统的方框图如图 3.4.11 所示。要求具有性能指标： $\sigma_p = 20\%$ ， $t_p = 1$  s。试确定系统参数  $K$  和  $A$ ，并计算单位阶跃响应的特征量  $t_r$ ， $t_s$  及  $N$ 。

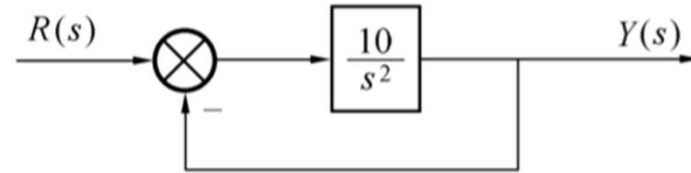




## 3.1 传递函数时域分析

**例 3.4.3** 已知系统方框图如图 3.4.12(a) 所示。试分析：(1) 该系统能否正常工作？(2) 若要求  $\zeta = 0.707$ ，系统应如何改进？

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 10}$$





哈爾濱工業大學(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

# 自动控制理论 A

## (Principles of Automatic Control)

主讲人：张宏伟、张颖

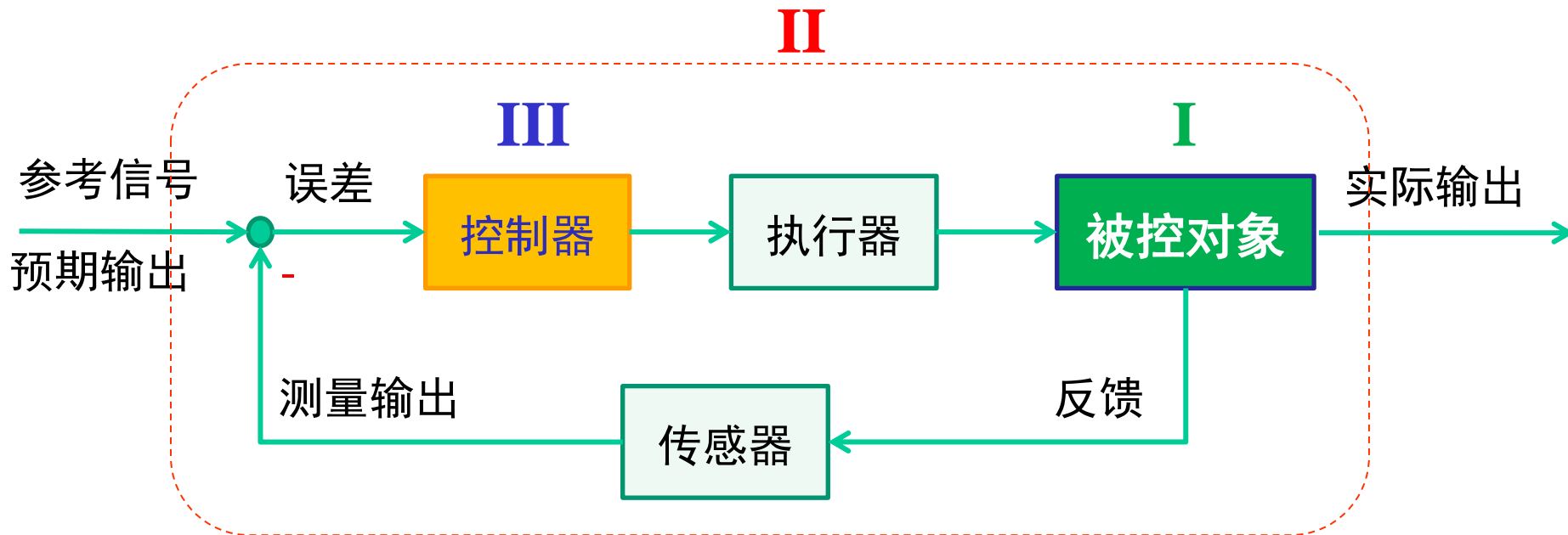
机电工程与自动化学院

哈尔滨工业大学(深圳)

2023.09.28



# 第三章 控制系统的时域分析



**I:** 系统建模

**II:** 系统分析

**III:** 系统设计/综合

**I:** Modeling

**II:** Analysis

**III:** Design/Synthesis



# 第三章 控制系统的时域分析

系统响应：

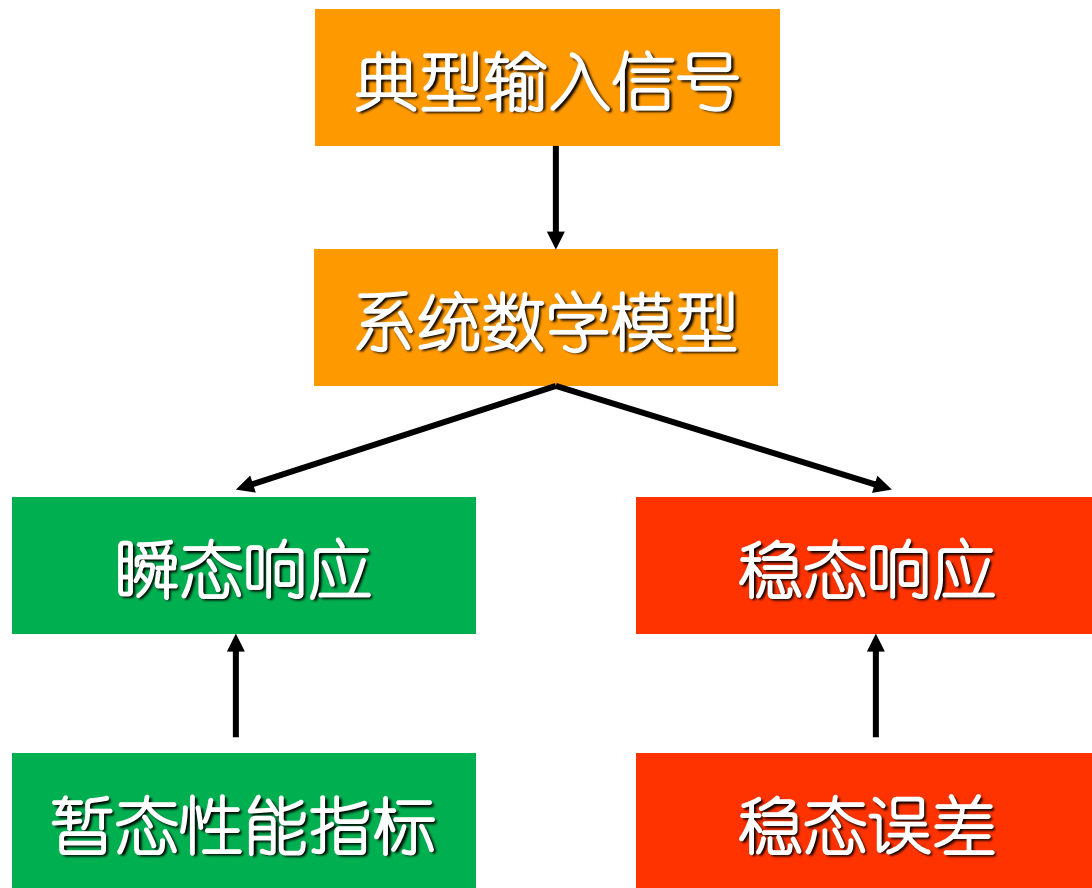
- 瞬态响应
- 稳态响应

transient response

= 瞬态响应

= 动态响应

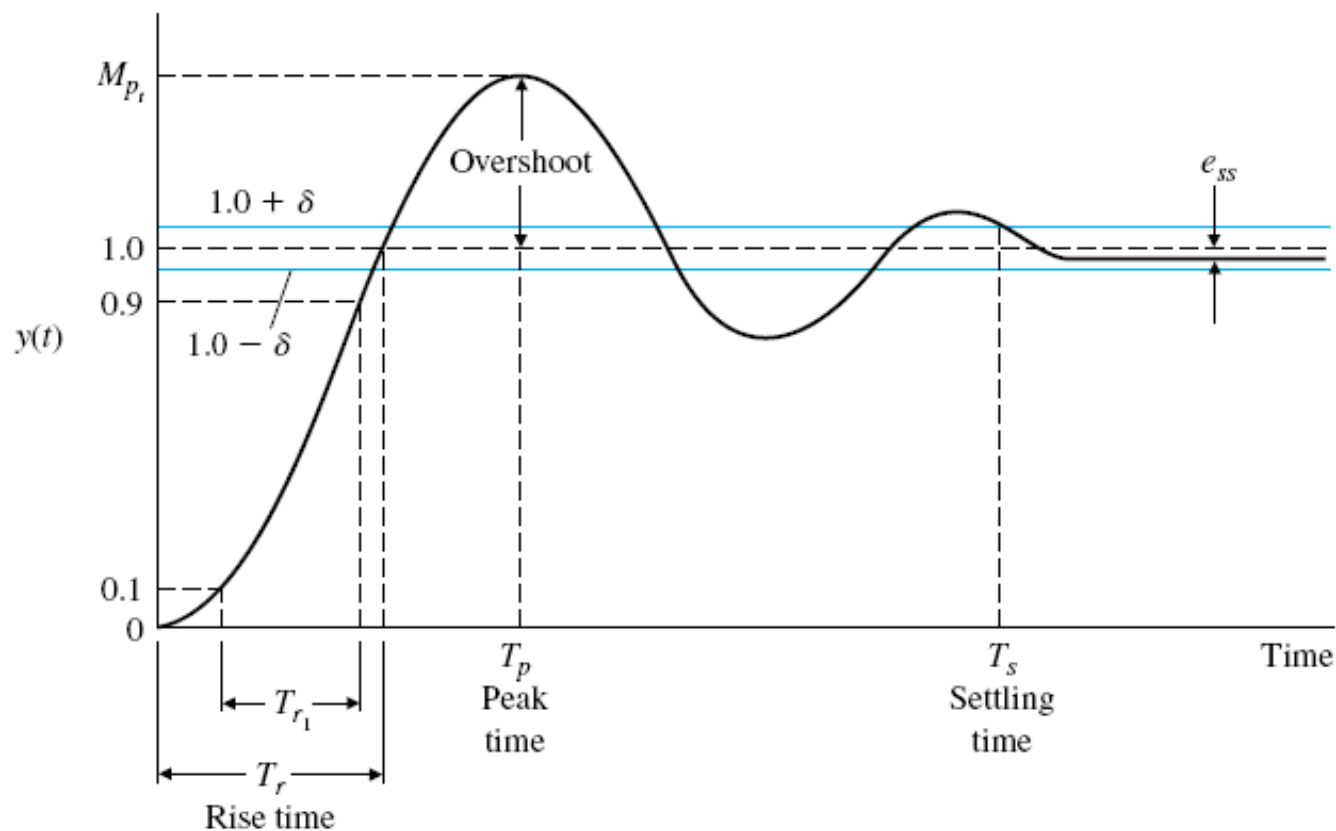
= 暂态响应





## 3.1 传递函数时域分析

- 稳：** 系统受扰动影响后能回到原来的平衡位置
- 准：** 稳态误差要小
- 快：** 阶跃响应的过渡过程要平稳、迅速





# 第三章 控制系统的时域分析

## 3.1 基于传递函数的时域分析

1. 典型输入信号、一阶系统的时域分析
2. 二阶系统的单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡响应
3. 高阶系统的时域分析
4. 基于脉冲传递函数的离散系统时域分析

## 3.2 基于状态空间的时域分析

1. 连续系统
2. 离散系统



## 3.1 传递函数时域分析

参考书：

K. Ogata. Modern Control Engineering, 5<sup>th</sup> edition, Prentice Hall, 2010.

(影印版：现代控制工程(第5版)，电子工业出版社)

裴润, 宋申民, 自动控制原理. 哈尔滨工业大学出版社

Dorf & Bishop, Modern Control Systems, 12<sup>th</sup> edition

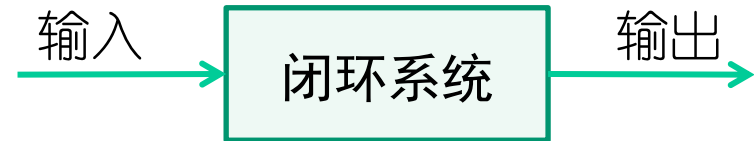




# 3.1 传递函数时域分析

控制目标：

让系统产生期望的输出信号 (desirable output)



Question: What is “desirable” ?

Question: For which “inputs”?

Answer:

Define output “specifications” for inputs mostly used in targeted applications (e.g. step, ramp, sinusoidal, etc).

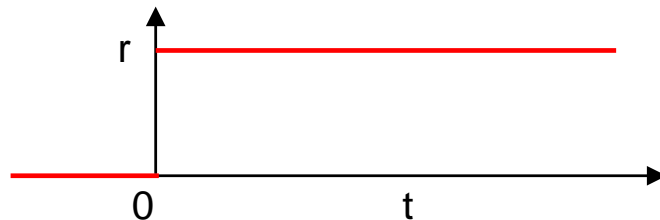


# 3.1 传递函数时域分析

## □ 典型输入信号

### 1) 阶跃信号 (Step Function)

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases}, \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

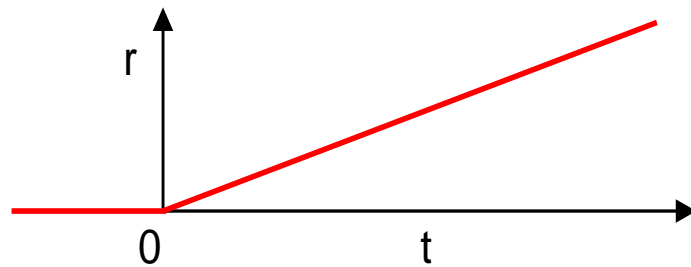


单位阶跃信号常记为  $1(t)$  或  $u(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

### 2) 斜坡信号 (Ramp Function)

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At, & t \geq 0 \end{cases}, \quad R(s) = \frac{A}{s^2}$$

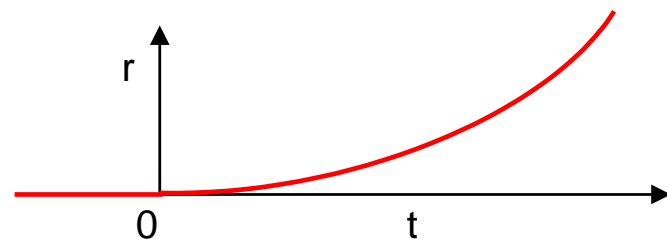




## 3.1 传递函数时域分析

### 3) 抛物线信号 (Parabolic Function)

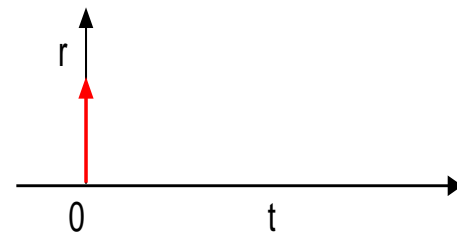
$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} At^2, & t \geq 0 \end{cases}, \quad R(s) = \frac{A}{s^3}$$



当 $A=1$ 时, 分别称为单位阶跃、单位斜坡、单位抛物线函数(信号)

### 4) 单位脉冲信号 (Unit Impulse Function)

$$r(t) = \delta(t) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}, & -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad R(s) = 1$$



狄拉克函数



## 3.1 传递函数时域分析

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \rightarrow \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

采样特性  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$

系统的脉冲响应反映了系统的固有性质：

$$\begin{array}{ccc} \frac{R(s) = 1}{r(t) = \delta(t)} \rightarrow & \boxed{G(s)} & \rightarrow \frac{Y(s) = G(s)R(s) = G(s),}{y(t) = g(t)} \end{array}$$

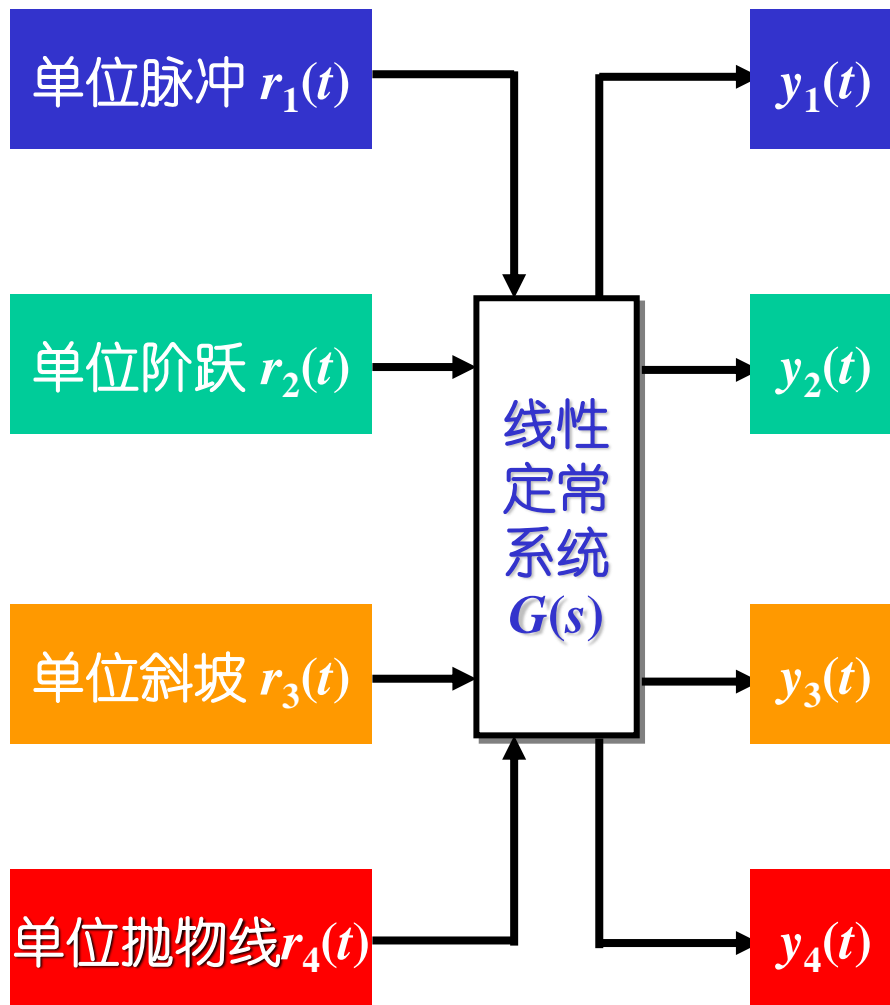


# 3.1 传递函数时域分析

$$r_1(t) = \frac{d}{dt} r_2(t)$$

$$r_2(t) = \frac{d}{dt} r_3(t)$$

$$r_3(t) = \frac{d}{dt} r_4(t)$$



$$y_1(t) = \frac{d}{dt} y_2(t)$$

$$y_2(t) = \frac{d}{dt} y_3(t)$$

$$y_3(t) = \frac{d}{dt} y_4(t)$$



## 3.1 传递函数时域分析

线性定常系统的一个特性：

系统对输入信号导数的响应，等于系统对该输入信号响应的导数；或者，系统对输入信号积分的响应，等于系统对该输入信号响应的积分，积分常数由输入时的初始条件确定。

### 5) 正弦信号(Sinusoidal Function)

$$r(t) = A \sin(\omega t + \phi),$$

$$R(s) = A e^{\frac{\phi}{\omega} s} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

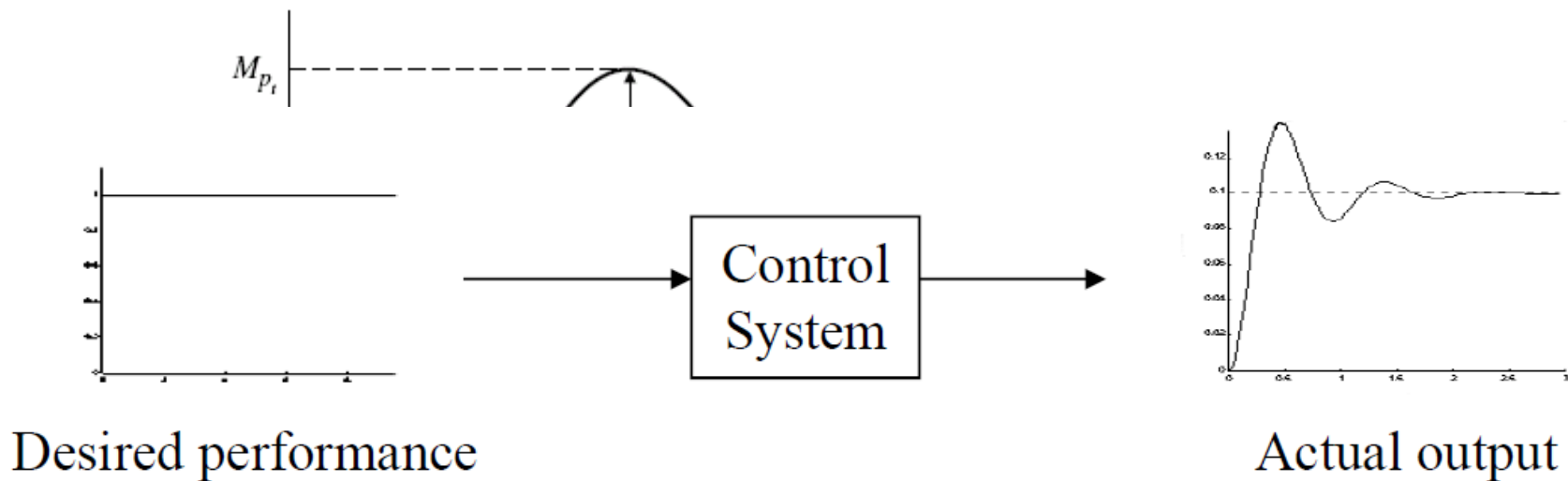


# 3.1 传递函数时域分析

## □ 单位阶跃响应与瞬态性能指标

控制系统的典型单位阶跃响应曲线

稳定  
准确  
快速





## 3.1 传递函数时域分析

瞬态/动态性能指标：

**a) 延迟时间  $T_d$ : (delay time)**

系统响应从0上升到稳态值的50%所需要的时间

**b) 上升时间  $T_r$ : (rise time)**

1) 系统响应从0上升到稳态值所需时间  
(有振荡系统)

1) 系统响应从稳态值的10%上升到90%所需时间  
(无振荡系统)

**c) 峰值时间  $T_p$ : (peak time)**

系统响应达到最大峰值所需要的时间





## 3.1 传递函数时域分析

### d) (最大)超调量 $\sigma$ : (maximum overshoot)

系统响应超出稳态值的最大偏离量(常以百分比表示)

$$\sigma\% \triangleq \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

### e) 调节时间 $T_s$ : (settling time)

系统响应与稳态值之差达到并维持误差  $\pm\delta$  所需要的最小时间;

$$|y(t) - y(\infty)| \leq y(\infty)\delta, \quad t \geq T_s$$

### f) 振荡次数 $N$ :

调节时间  $T_s$  内,  $y(t)$  偏离  $y(\infty)$  的振荡次数;

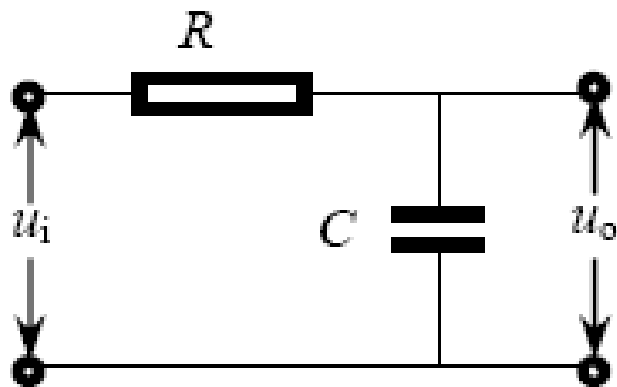


# 3.1 传递函数时域分析

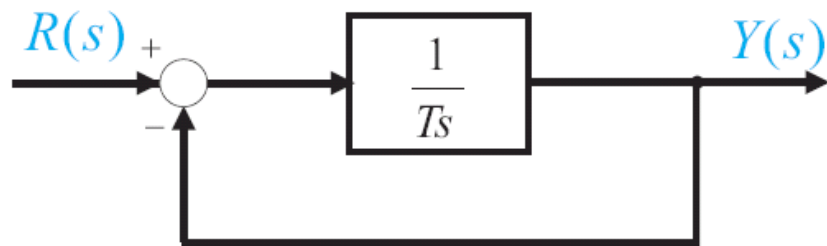
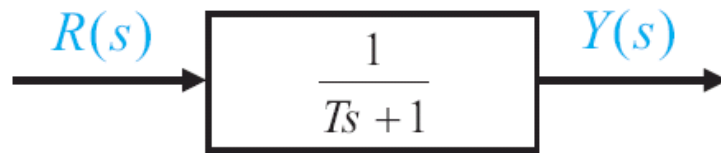
## □ 一阶系统的时域分析

数学模型  $\xrightarrow[\text{求解微分方程}]{\text{典型输入下}}$  时域分析  $\longrightarrow$  性能指标

系统闭环传递函数：
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$



$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$





# 3.1 传递函数时域分析

## ● 单位阶跃响应

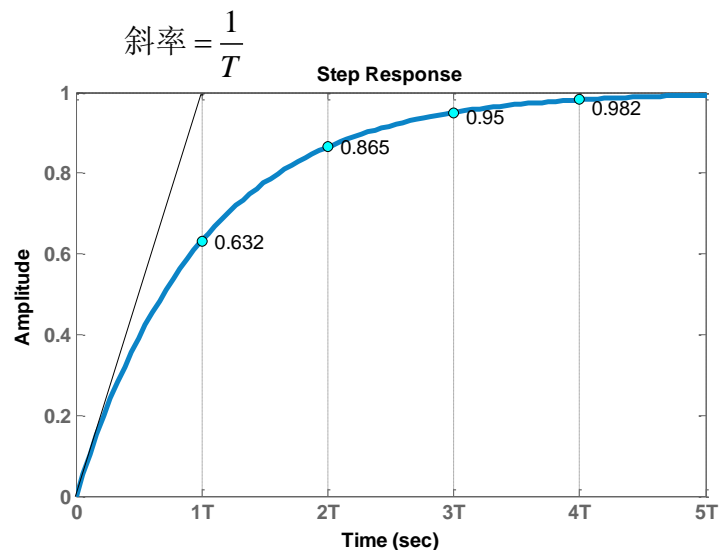
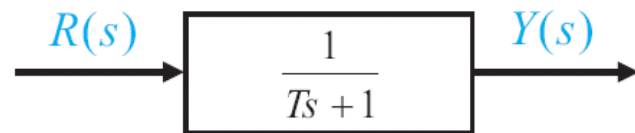
输入:  $r(t) = 1(t)$ ,  $R(s) = 1/s$

输出:  $Y(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{(Ts + 1)s}$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

误差:  $e(t) = 1 - y(t) = e^{-t/T} \longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$





## 3.1 传递函数时域分析

➤ 延迟时间  $T_d$ :  $y(t)|_{t=T_d} = 1 - e^{-T_d/T} = 0.5$

$$\longrightarrow T_d = -T \ln(0.5) = 0.69T$$

➤ 上升时间  $T_r$ : 响应从稳态值的10%上升到90%所需时间

$$y(t_{0.1}) = 0.1 = 1 - e^{-t_{0.1}/T} \longrightarrow t_{0.1} = -T \ln 0.9 = 0.105T$$

$$y(t_{0.9}) = 0.9 = 1 - e^{-t_{0.9}/T} \longrightarrow t_{0.9} = -T \ln 0.1 = 2.303T$$



➤ 调节时间  $T_s$ :

$$T_r = t_{0.9} - t_{0.1} = 2.2T$$

$$\text{If } \delta = 5\% \longrightarrow T_s = 3T$$



## 3.1 传递函数时域分析

一阶系统单位阶跃响应特点：

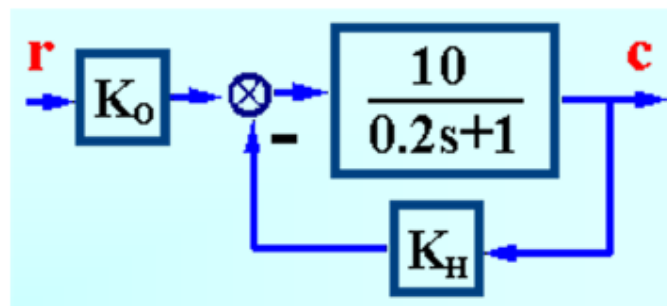
1. 系统输出  $y(t)$  是初值为零，终值为 1 的单调连续上升过程
2. 响应曲线终值为 1，即在阶跃输入作用下，稳态误差为零
3. 响应曲线在  $T = 0$  处斜率最大，为  $1/T$
4. 动态性能与常数  $T$  有关，当  $t = T$  时，响应曲线上升到稳态值的 63.2%

**要提高响应的快速性，可减小时间常数  $T$**



## 3.1 传递函数时域分析

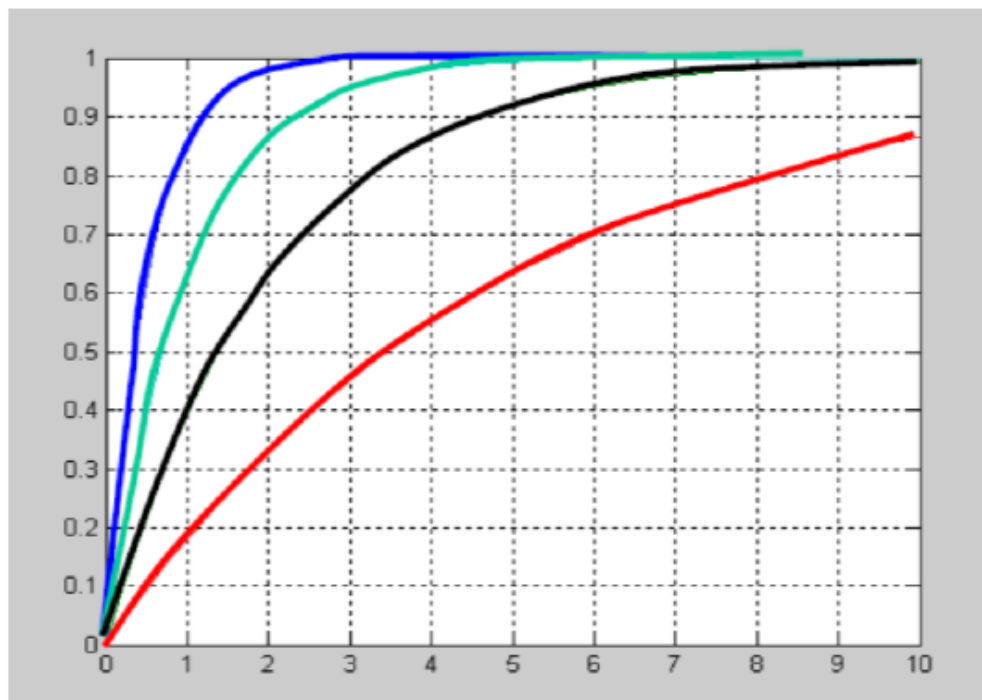
系统如图所示，现采用负反馈方式，欲将系统调节时间减小到原来的0.1倍，且保证原放大倍数不变，试确定参数 $K_O$ 和 $K_H$ 的取值。



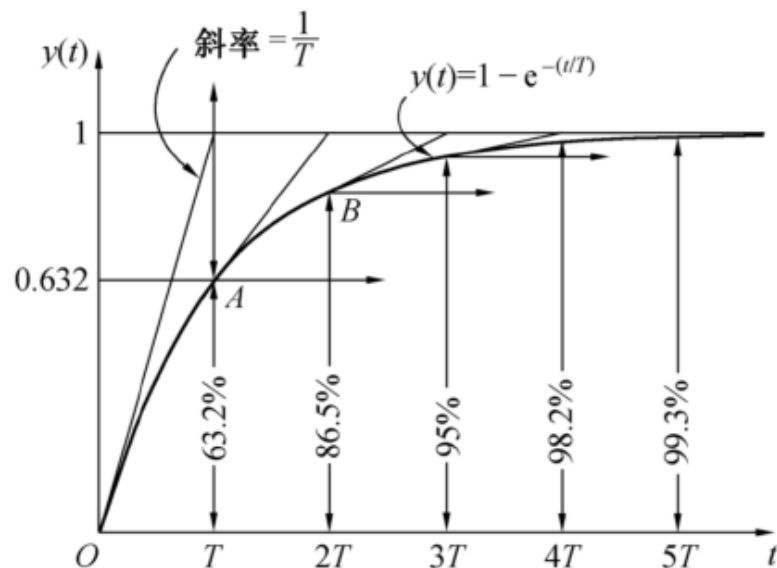


## 3.1 传递函数时域分析

**思考：**图中 4 条一阶系统阶跃响应曲线，时间常数分别为 0.5, 1, 2, 5, 请标注在对应的曲线上。



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$





# 3.1 传递函数时域分析

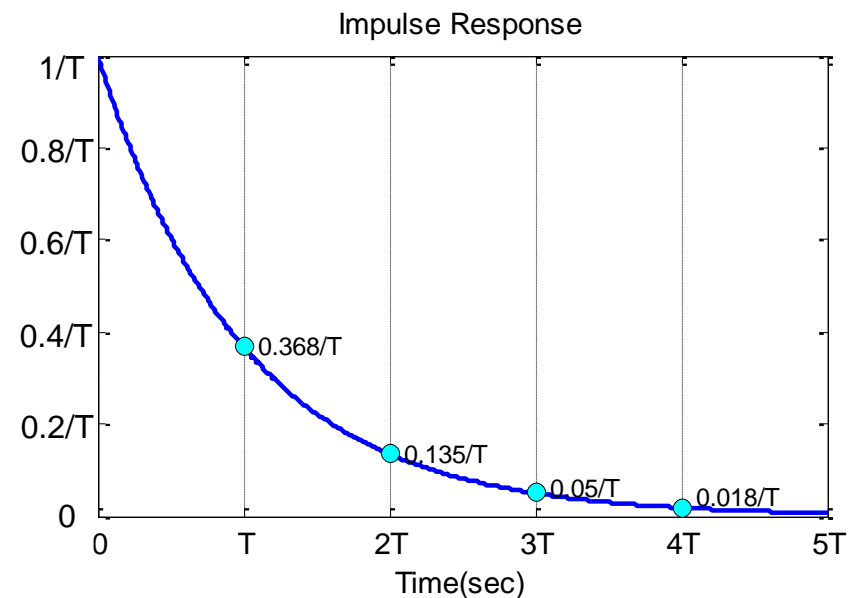
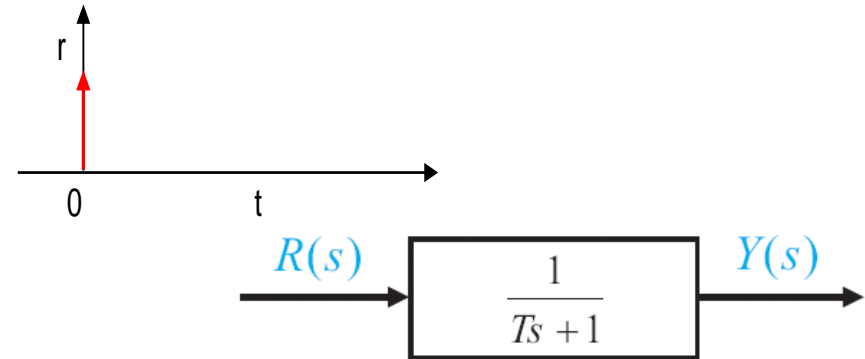
## ● 单位脉冲响应

输入:  $r(t) = \delta(t)$ ,  $R(s) = 1$

输出:  $Y(s) = G(s)R(s)$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{Ts + 1} \right] = \frac{1}{T} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$







# 3.1 传递函数时域分析

## ● 单位斜坡响应

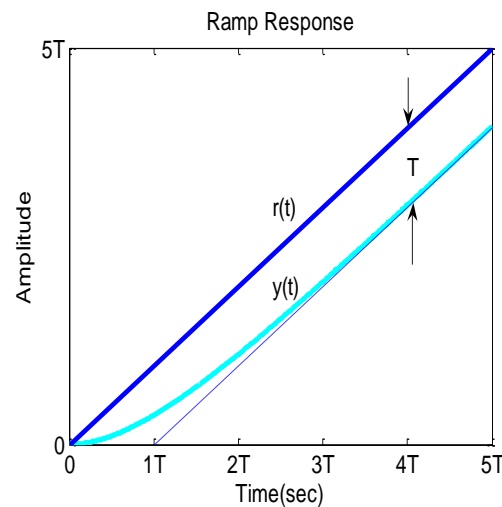
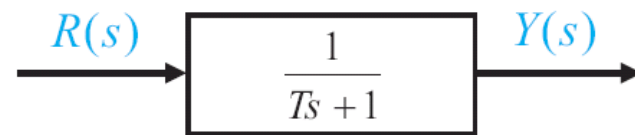
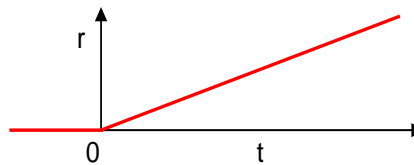
输入:  $r(t) = t$ ,  $R(s) = 1/s^2$

输出:  $Y(s) = G(s)R(s)$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(Ts+1)} \right] = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

$$y(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0$$

误差:  $e(t) = r(t) - y(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$        $e(\infty) = T$





## 3.1 传递函数时域分析

一阶系统单位脉冲响应特点：

1. 系统输出  $y(t)$  是单调连续下降的指数曲线
2. 响应曲线终值为 0，即系统在脉冲输入作用下，稳态误差为零
3. 动态性能与常数  $T$  有关， $y(0) = \frac{1}{T}$ ,  $y(T) = 0.368 \frac{1}{T}$ ,  $y(\infty) = 0$
4. 和传递函数一样，单位脉冲响应可以反映系统全部性质，对系统脉冲响应做拉氏变换，可得到传递函数

一阶系统单位斜坡响应特点：

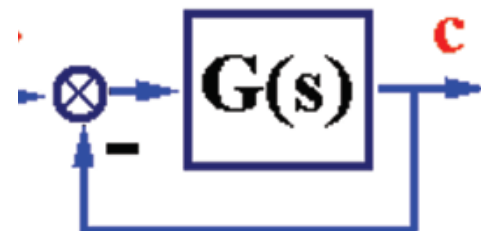
1. 当  $t \rightarrow \infty$  时， $y(t)$  为  $y(t - T)$
2. 一阶系统在跟踪单位斜坡信号时，有稳态误差，其数值等于时间常数  $T$
3. 减小时间常数  $T$ ，可以 ① 加快响应速度；② 减少系统跟踪斜坡信号的稳态误差



## 3.1 传递函数时域分析

例2 已知单位反馈系统的单位阶跃响应  $h(t) = 1 - e^{-at}$

试求  $\Phi(s)$ ,  $G(s)$ 。





10.10 (Tue)

第11讲



# 3.1 传递函数时域分析

## □ 二阶系统的单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡响应

### ➤ 二阶系统的数学模型

#### • 系统实例

伺服电机的三个闭环控制：  
 电流环  
 速度环  
 位置环

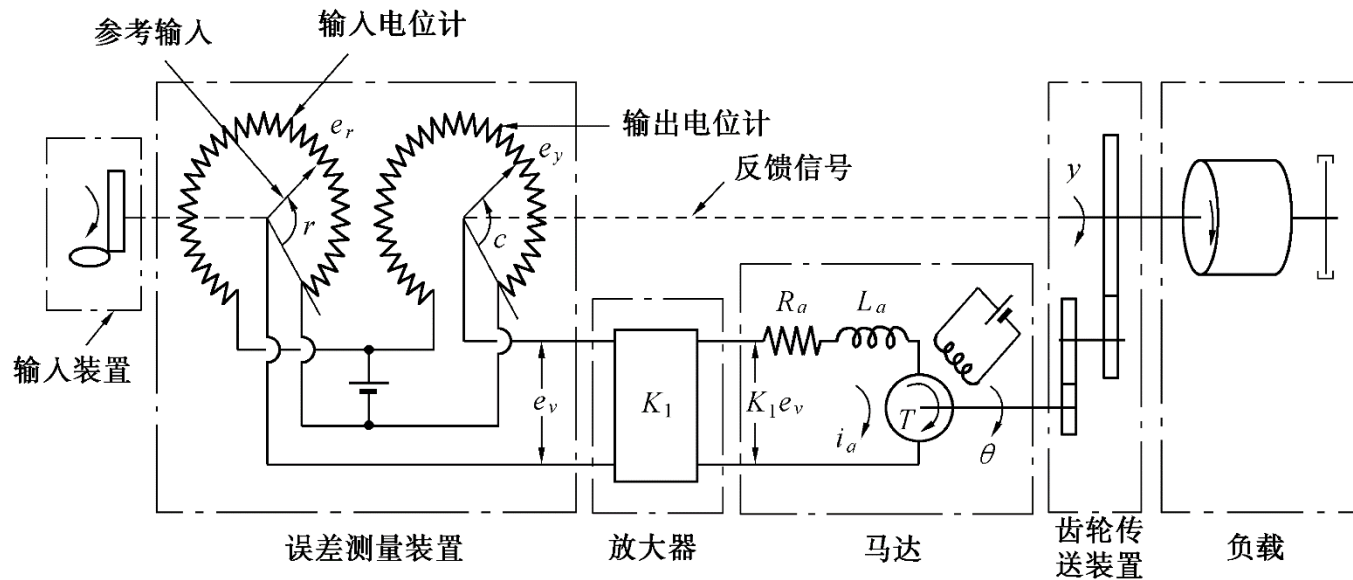


图 3.4.1 电动伺服系统原理图

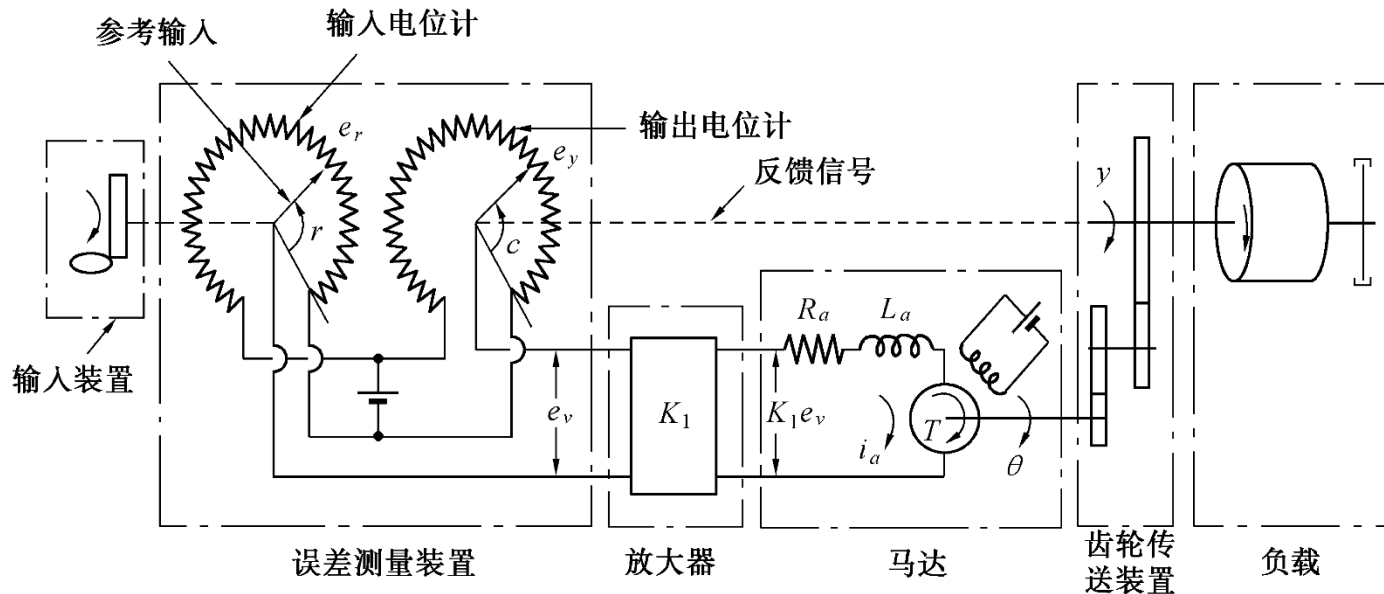
电流环：控制电机转矩，使输出电流尽量接近等于设定电流，动态响应最快

速度环：它的输出直接就是电流环的参考信号

位置环：内部输出就是速度环的参考信号，此时系统运算量最大，动态响应速度最慢



## 3.1



输入电位计和输出电位计的电压分别是

$$e_r = K_0 r \quad e_y = K_0 y$$

放大器的输入电压  $e_v$  和输出电压  $e_a$  的关系是

$$e_v = e_r - e_y = K_0(r - y)$$

$$e_a = K_1 e_v$$

直流机电枢的电压 - 电流方程是

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

$e_b$ ——电枢反电势,  $e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$ ;

$K_3$ ——电机  $m$  反电势系数;

$R_a$ ——电枢绕组电阻;

$L_a$ ——电枢绕组电感,通常  $L_a$  都很小,可以忽略不计。

这样上面方程可以简化为

$$R_a i_a = e_a - K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

电机的力矩平衡方程是

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = M = K_2 i_a$$

$J_0, b_0$ ——折算到电机轴上的转动惯量和阻力系数;

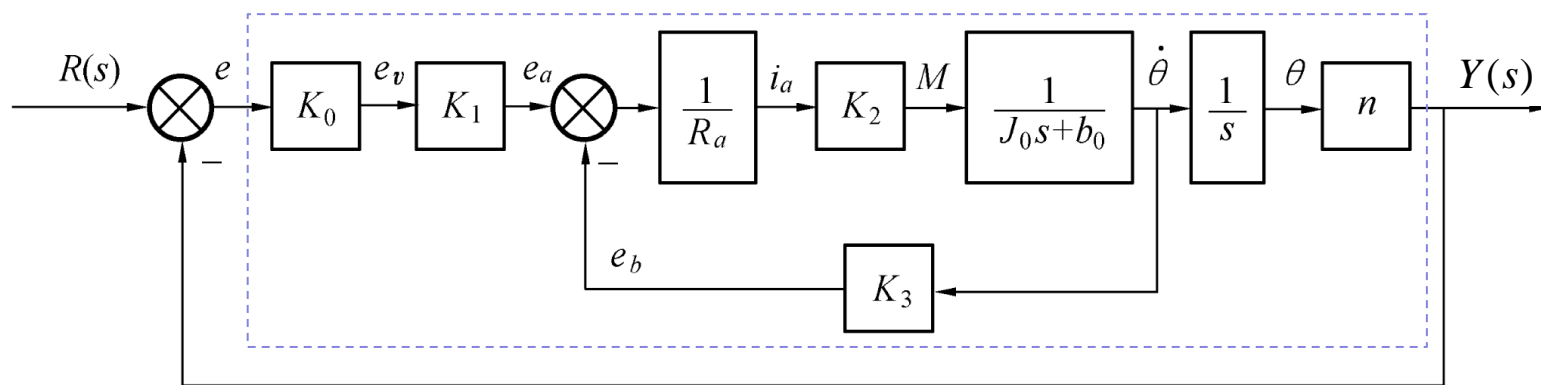
$K_2$ ——直流电机的力矩系数。

减速器的传动比为  $n$ ,则电机转角  $\theta$  和负载转角  $y$  之间的关系是

$$y = n \cdot \theta$$



# 3.1 传递函数时域分析



$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_m}{T_m s^2 + s + K_m} \xrightarrow{\omega_n = \sqrt{\frac{K_m}{T_m}}} \Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{K_m T_m}}$$

其中  $K_m = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{R_0 b_0 + K_2 K_3}$

$$T_m = \frac{R_a J_0}{R_0 b_0 + K_2 K_3}$$

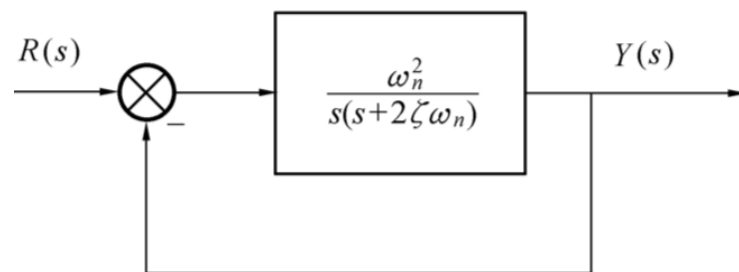


图 3.4.3 标准形式的二阶系统



## 3.1 传递函数时域分析

- 二阶系统的数学模型

① 标准二阶系统微分方程  $\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = \omega_n^2r$

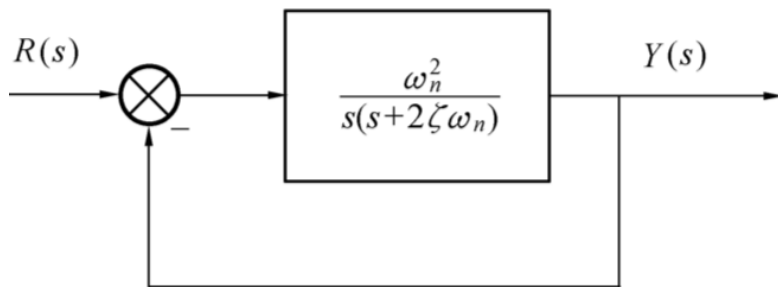
② 标准二阶系统传递函数

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\omega_n$  : 自然振荡频率(无阻尼自然振荡频率)

$\zeta$  : 阻尼比

③ 标准二阶系统结构图 (单位负反馈)



开环传函

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

图 3.4.3 标准形式的二阶系统

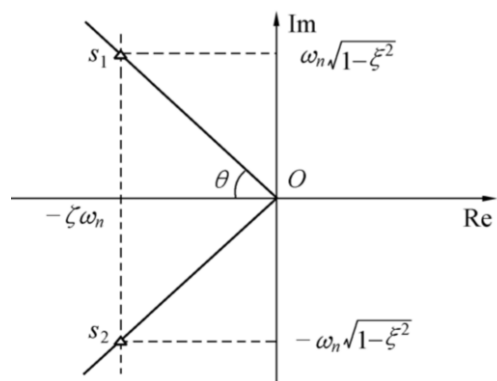




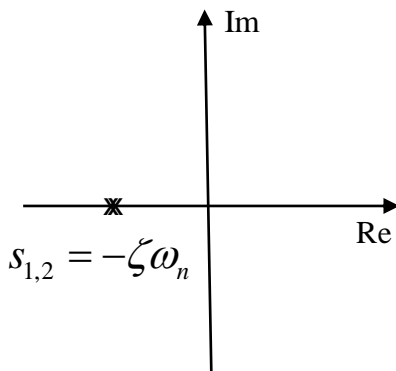
## 3.1 传递函数时域分析

### ④ 标准二阶系统的特征方程和特征根/极点

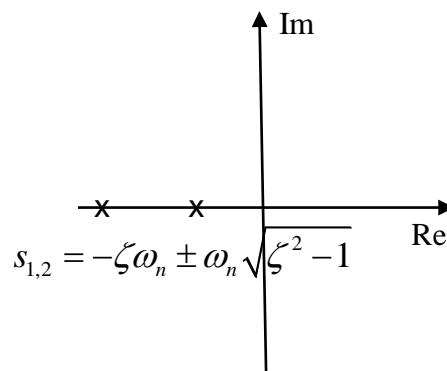
$$\text{特征根/极点: } s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



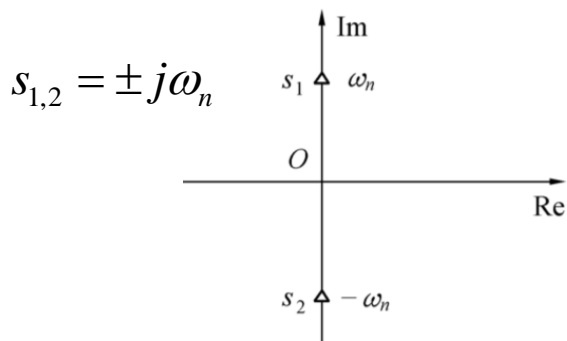
$$(0 < \zeta < 1)$$



$$(\zeta = 1)$$



$$(\zeta > 1)$$



$$(\zeta = 0)$$

$0 < \zeta < 1$  —— 欠阻尼

$\zeta = 1$  —— 临界阻尼

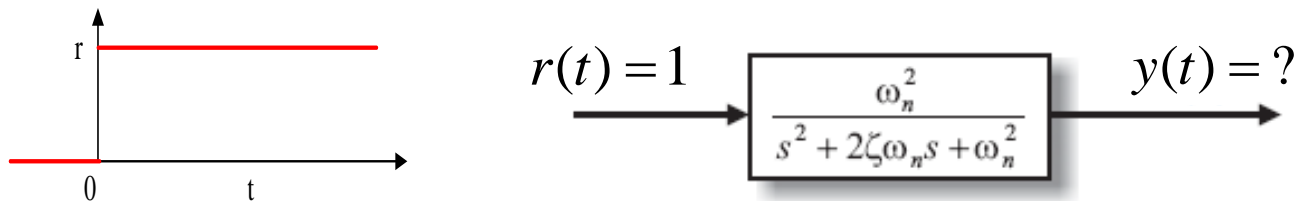
$\zeta > 1$  —— 过阻尼

$\zeta = 0$  —— 无阻尼



## 3.1 传递函数时域分析

### ► 二阶系统的单位阶跃响应



目标：Solve for  $y(t)$  when  $r(t) = 1$ :  $\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 r(t)$

手段：
$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$  (参考Dorf表2.3 : 拉普拉斯变化对)

$y(t)$



# 3.1 传递函数时域分析

## ➤ 二阶系统的单位阶跃响应

### • Case 1: 欠阻尼 ( $0 < \zeta < 1$ )

极点:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$

求解  $y(t)$ :

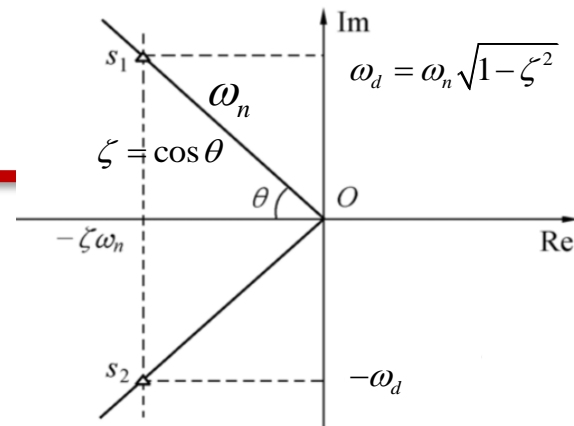
$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 - s(s + 2\zeta\omega_n)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

考虑到

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$



- $\omega_n$ : 无阻尼自然振荡(角)频率
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ : 阻尼自然振荡(角)频率
- $\zeta$ : 阻尼比
- $\sigma$ : 阻尼系数或衰减系数

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \sim \cos \omega t$$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sim \sin \omega t$$



# 3.1 传递函数时域分析

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= \underbrace{1}_{\text{稳态分量}} - \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)}_{\text{暂态分量}} \quad t \geq 0$$

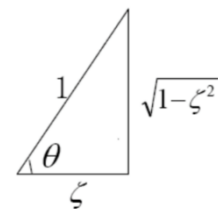
稳态分量

暂态分量

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

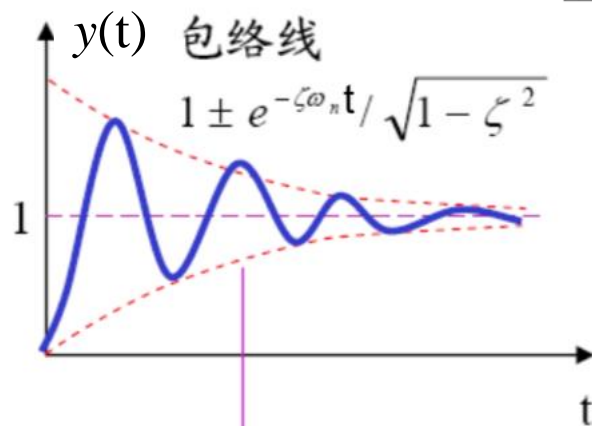
$$\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \cos \theta = \zeta$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \text{或} \quad \theta = \arccos \zeta$$



欠阻尼单位阶跃响应特点：

- 暂态分量是衰减的正弦振荡
- 暂态分量的衰减速度取决于  $\zeta\omega_n$
- 系统输出稳态值为 **1**
- 在阶跃信号作用下不存在稳态误差



稳态值为1的衰减振荡过程



## 3.1 传递函数时域分析

- Case 2: 无阻尼 ( $\zeta = 0$ )

极点:  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

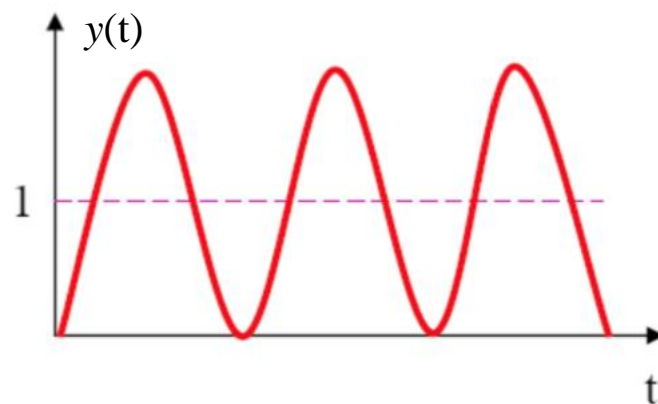
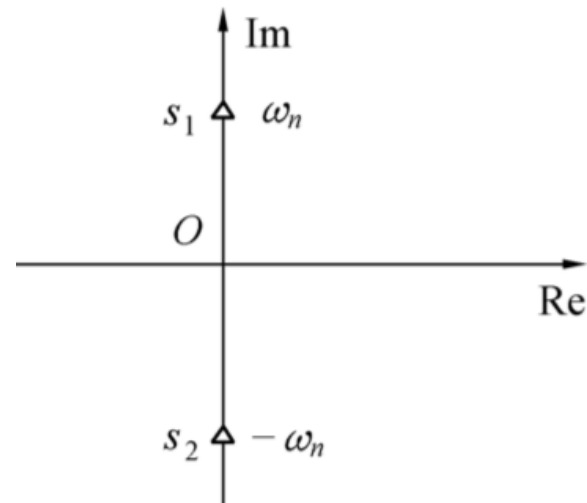
$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\zeta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

超调  $\sigma_p = 100\%$   
调节时间  $t_s = \infty$

无阻尼单位阶跃响应是一个等幅振荡过程。





# 3.1 传递函数时域分析

- Case 3: 临界阻尼 ( $\xi = 1$ )

极点:  $s_{1,2} = -\omega_n$

阶跃响应:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

$$= 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t \geq 0$$

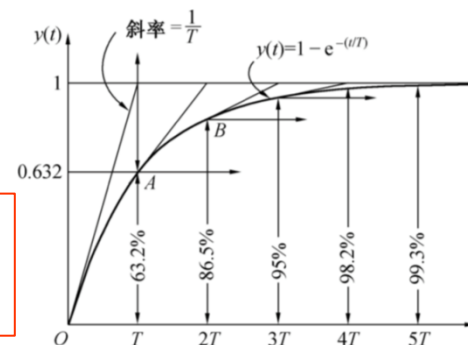
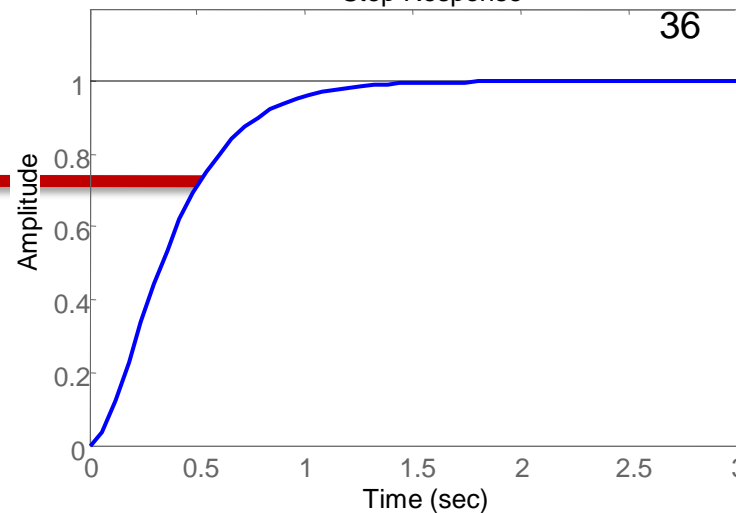
一阶系统单位阶跃响应

$$y'(0) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

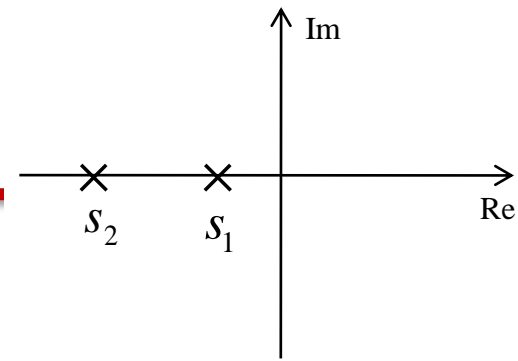
$$y'(0) = \frac{1}{T}$$

临界阻尼单位阶跃响应是一个稳态值为1的无超调单调上升过程。类似于一阶系统的单位阶跃响应，但有区别!





# 3.1 传递函数时域分析



- Case 4: 过阻尼 ( $\xi > 1$ )

极点:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

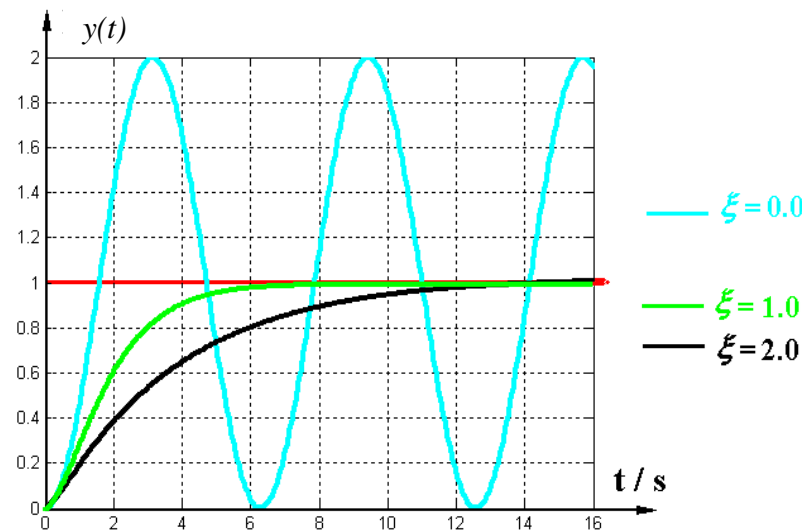
阶跃响应

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1/s_1}{s-s_1} - \frac{1/s_2}{s-s_2} \right)$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{-s_1} e^{s_1 t} - \frac{1}{-s_2} e^{s_2 t} \right), \quad t \geq 0$$

过阻尼单位阶跃响应是一个稳态值为1的单调上升过程





## 3.1 传递函数时域分析

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{-s_1} e^{s_1 t} - \frac{1}{-s_2} e^{s_2 t} \right), \quad t \geq 0$$

$$\text{令 } T_1 = -\frac{1}{s_1} = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$T_2 = -\frac{1}{s_2} = \frac{1}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

为过阻尼二阶规范系统的两个时间常数，可得

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad t \geq 0$$





## 3.1 传递函数时域分析

当  $\zeta \gg 1$ ,

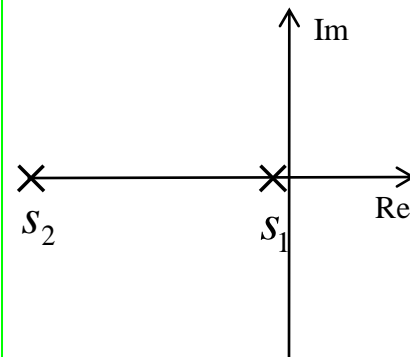
$$y(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$T_1 \gg T_2$$

$e^{-\frac{t}{T_2}}$  项的衰减比  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  项快得多,

且  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  项的系数也较大,

对于系统瞬态响应  $e^{-\frac{t}{T_2}}$  项在后期的影响很小



二阶规范系统的瞬态响应近似于一阶系统

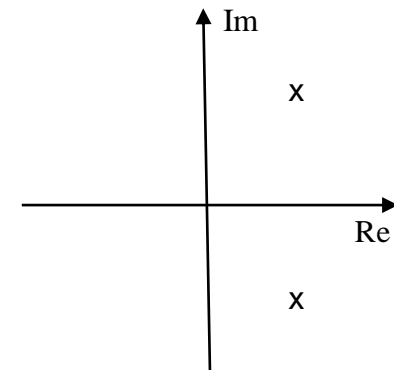
$$y(t) \approx 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$



## 3.1 传递函数时域分析

- Case 5: 负阻尼 ( $-1 < \zeta < 0$ )

极点:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d, \quad \sigma > 0$



$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad t \geq 0$$

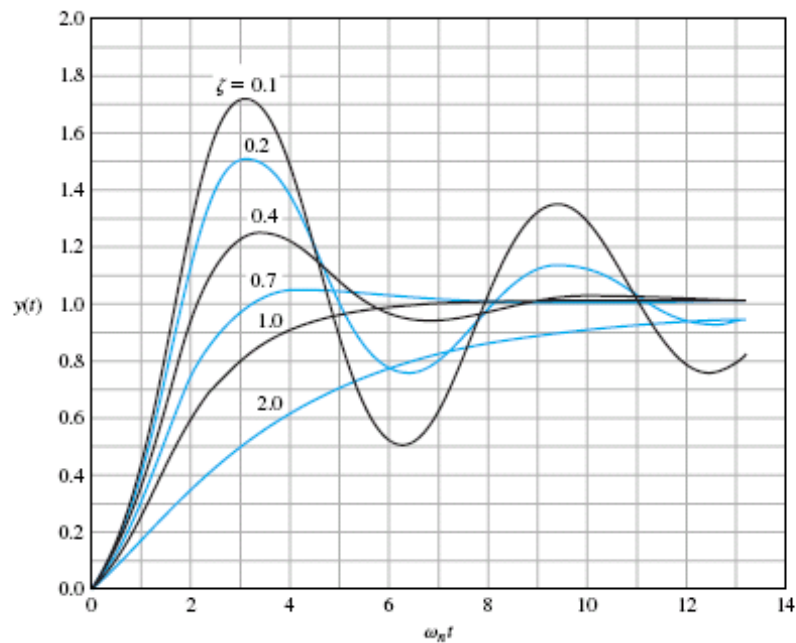
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} < 0$$

负阻尼单位阶跃响应是发散的正弦振荡，系统不稳定。

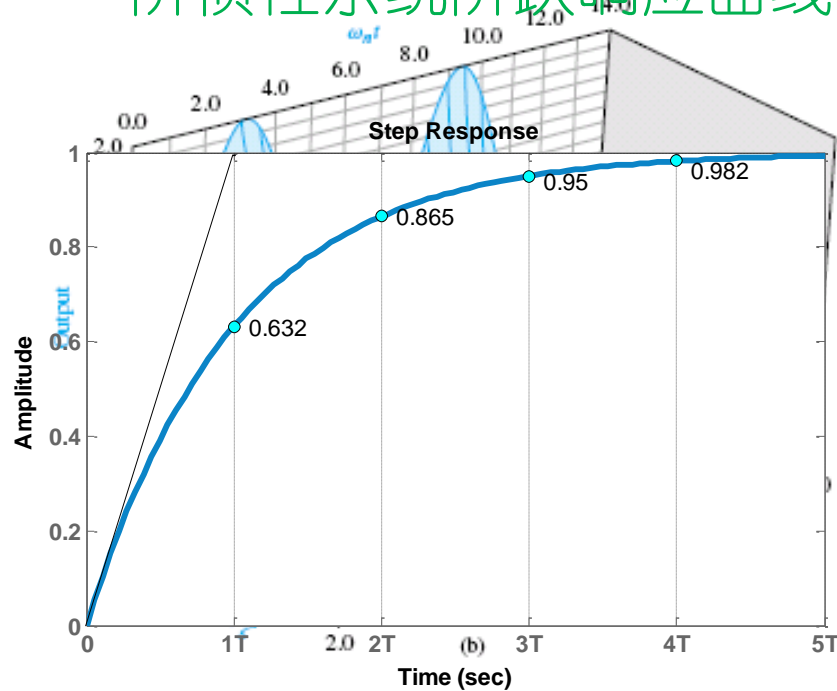


# 3.1 传递函数时域分析

## 二阶规范系统阶跃响应曲线



## 一阶惯性系统阶跃响应曲线



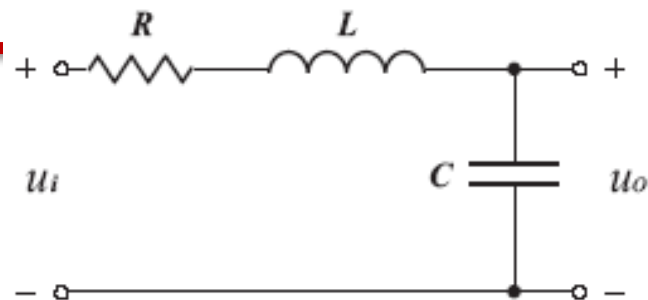
$\zeta$	$\zeta = 0$ 无阻尼	$0 < \zeta < 1$ 欠阻尼	$\zeta = 1$ 临界阻尼	$\zeta > 1$ 过阻尼
响应	无衰减振荡	衰减振荡	无振荡	无振荡



## 3.1 传递函数时域分析



**<例3.1>**: 如图RLC串联网络, 试求其自然振荡频率和阻尼比。



解: 传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{R}{L}, \quad \longrightarrow \quad \zeta = \frac{R}{2\omega_n L} = \frac{1}{2} \sqrt{LC} \frac{R}{L} = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$\zeta$ 大:  $R$ 较大( $R$ 为耗能元件),  $L$ 较小,  $C$ 较大 ( $L, C$ 储能元件)

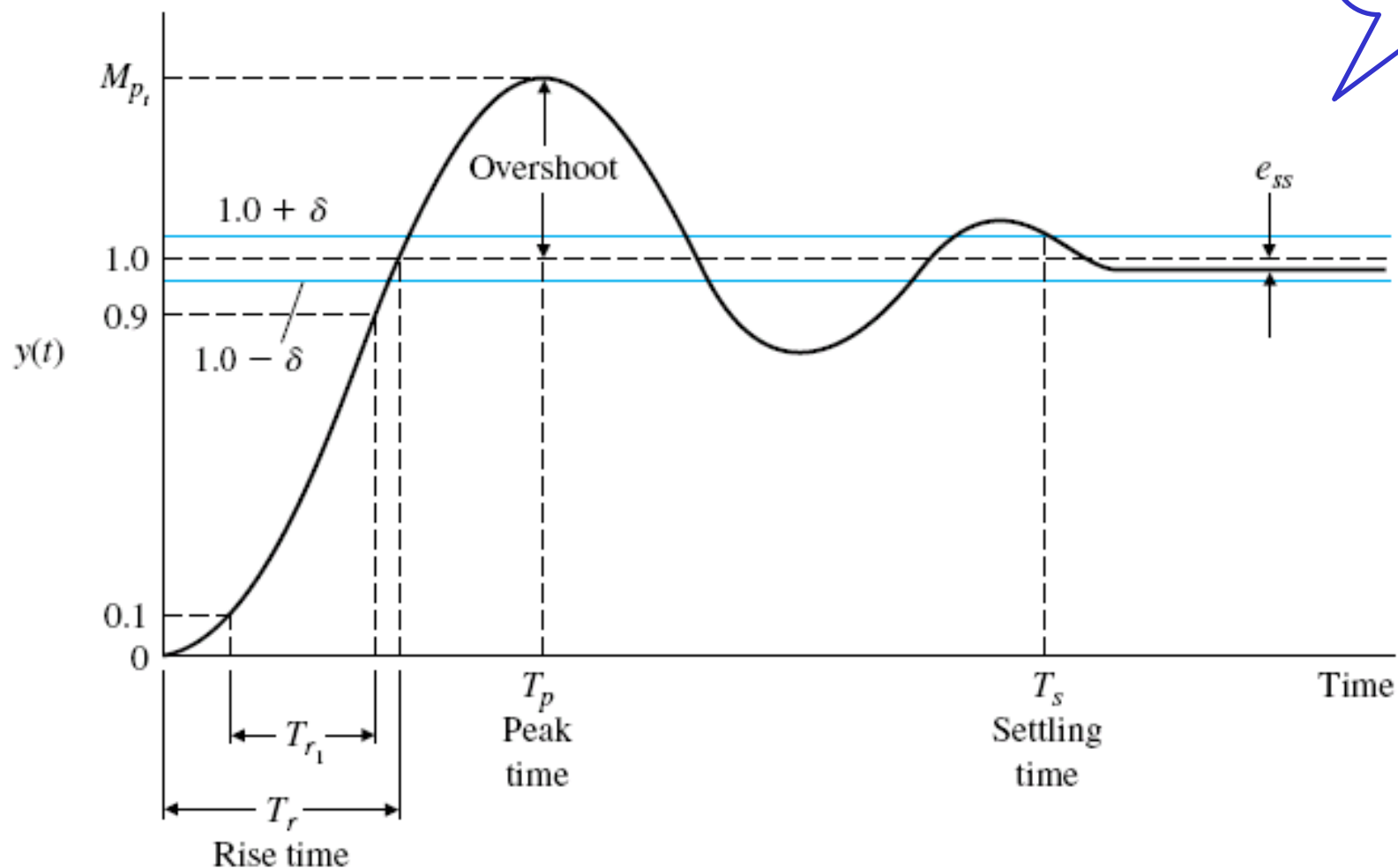
$R$ 较大, 能耗较大, 磁能和场能相互转换过程中在 $R$ 上耗能较多, 使得振荡衰减较快, 甚至不能产生振荡。



# 3.1 传递函数时域分析

控制系统的典型单位阶跃响应曲线

性能指标  
是就稳定  
系统而言  
的





# 3.1 传递函数时域分析

## 欠阻尼二阶规范系统瞬态响应特性

1) 峰值时间  $T_p$ : 响应曲线第一次达到峰值的时间

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=T_p} = 0$$



$$\sin \omega_d t = 0 \Rightarrow \omega_d t = n\pi \Rightarrow t = n\pi / \omega_d, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

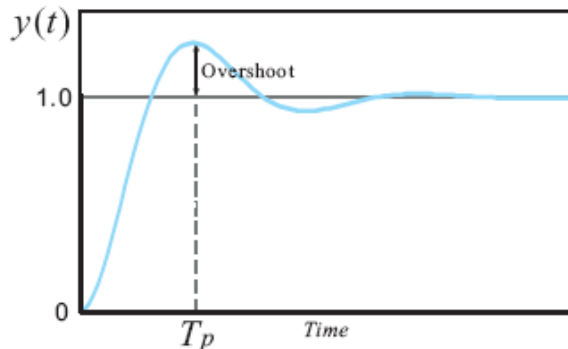
第一次到达峰值, 取  $n = 1$ :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$sY(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t = 0$$



$$\text{where } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sim \sin \omega t$$

阻尼比  $\zeta$  一定时,  $\omega_n \uparrow$  (闭环极点离负实轴距离越远),  $T_p \downarrow$  (系统响应加快)



# 3.1 传递函数时域分析

## 2) 超调量 $\sigma\%$ :

$$\sigma\% \triangleq \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

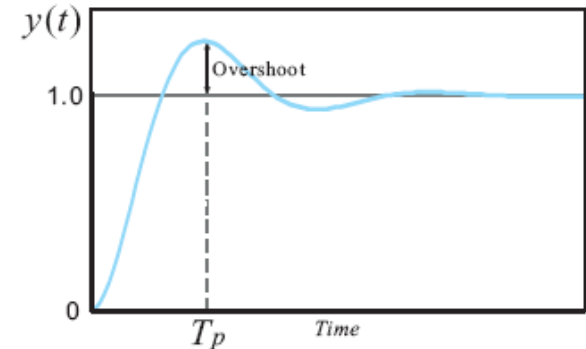
$$\sigma\% = [y(T_p) - 1] \times 100\%$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_p} \sin(\omega_d T_p + \varphi)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp\left(-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right) \sin(\pi + \varphi), \text{ where } \varphi = \arccos \zeta$$

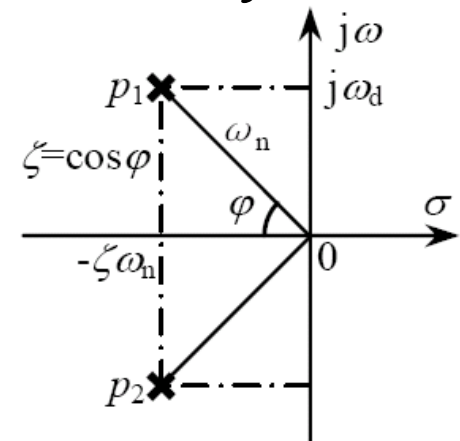
$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi = -\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\omega_n T_p} = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\%$$



$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)$$

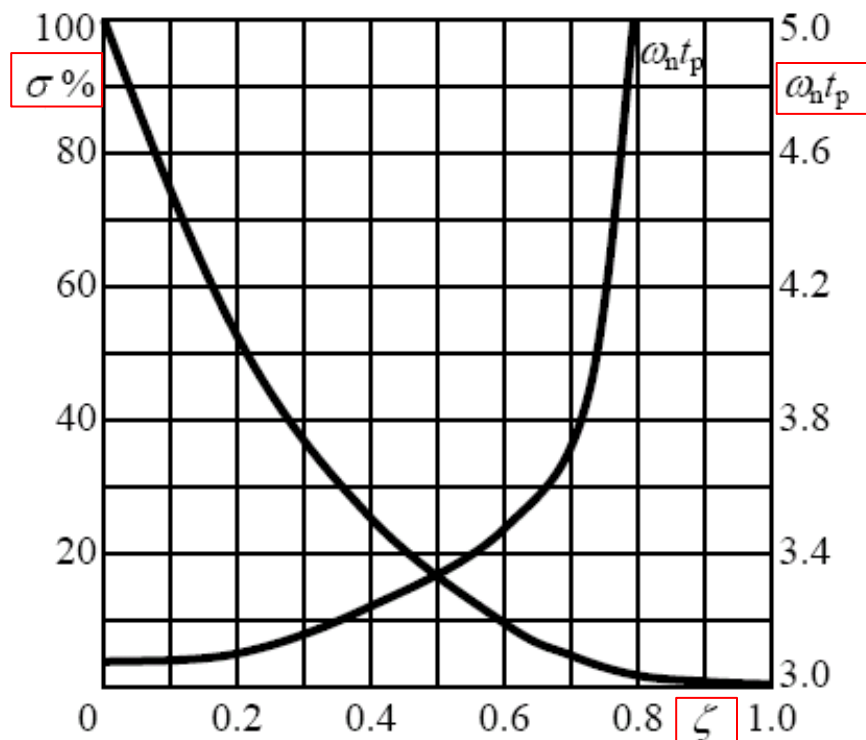
$$T_p = \pi / \omega_d$$



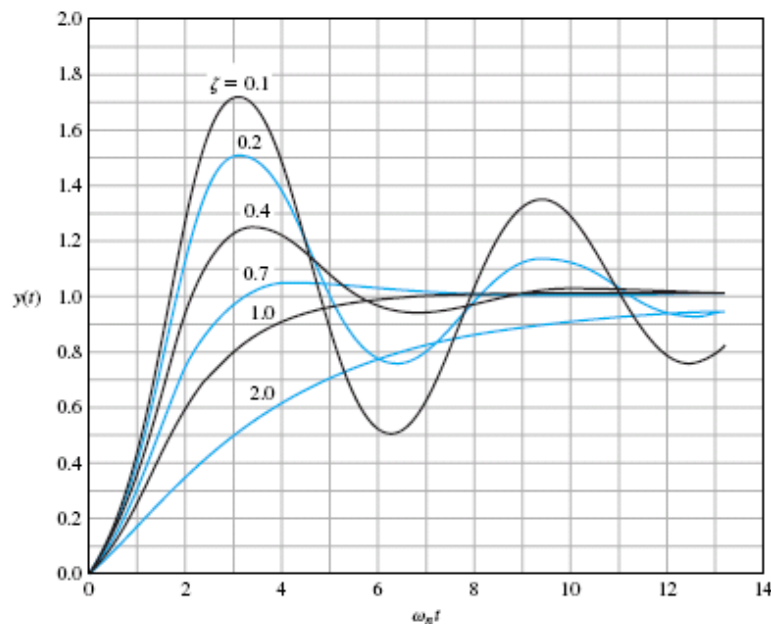
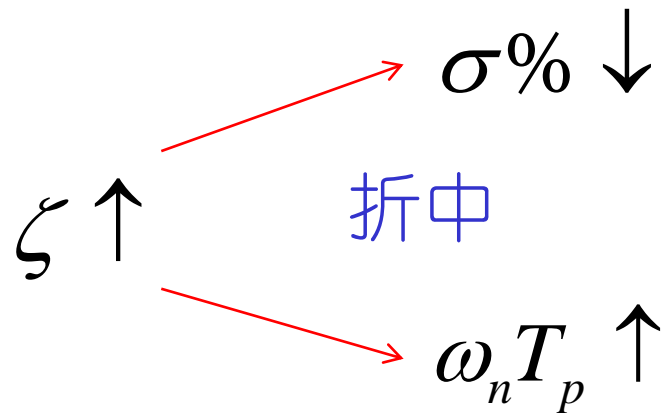


# 3.1 传递函数时域分析

注意：超调量 $\sigma\%$ 只是 $\zeta$ 的函数，与 $\omega_n$ 无关



$\sigma\%$ 以及 $\omega_n T_p$ 与 $\zeta$ 的关系







## 3.1 传递函数时域分析

### 3) 上升时间 $T_r$ :

有振荡系统:

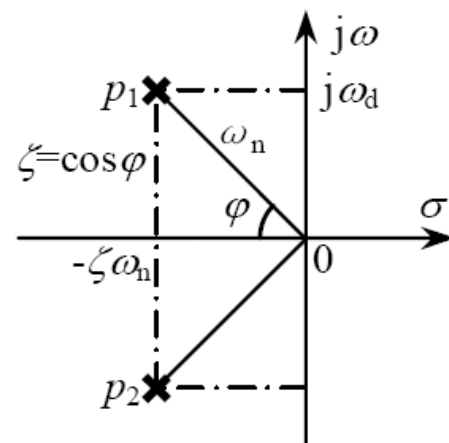
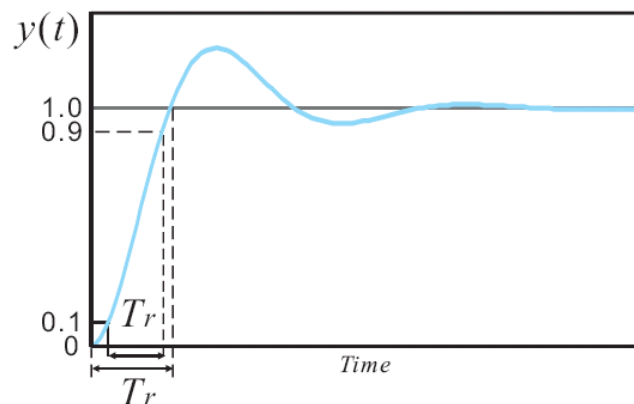
采用“0→100%”的上升时间定义

$$y(T_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_r} \sin(\omega_d T_r + \varphi) = 1$$

$$\sin(\omega_d T_r + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega_d T_r + \varphi = \pi$$

$$T_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\varphi = \arccos \zeta$$



当阻尼比  $\zeta$  一定, 即  $\varphi$  一定时, 提高  $\omega_n$ , 可缩短上升时间  $T_r$ , 即系统的快速性与  $\omega_n$  成正比。



# 3.1 传递函数时域分析

## 4) 调节时间 $T_s$ :

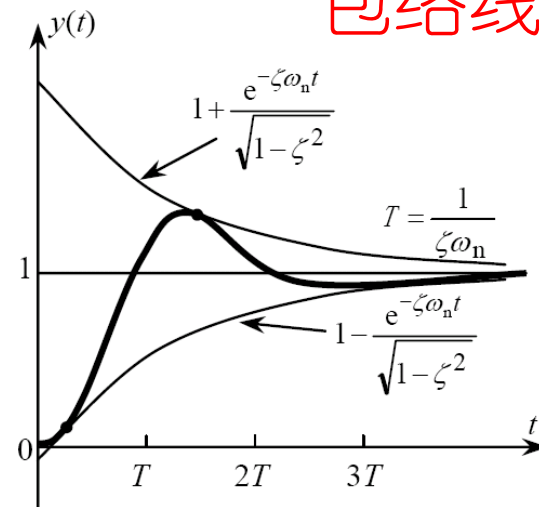
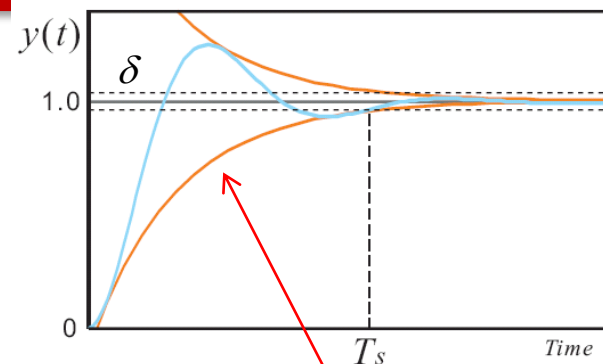
$$t \geq T_s : |y(t) - y(\infty)| \leq y(\infty)\delta$$

$$\text{系统响应: } y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \right| \leq \delta$$

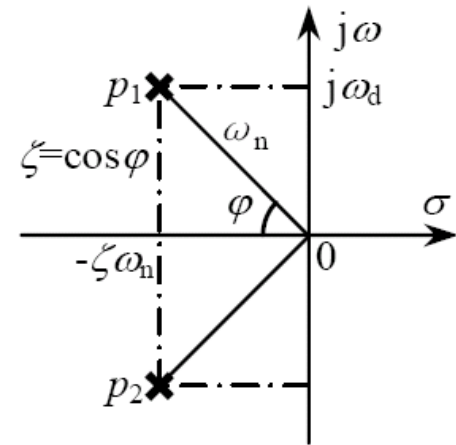
$$\text{为便于计算,近似取 } \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_s} \approx \delta$$

$$T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\delta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ -\ln \delta - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$





# 3.1 传递函数时域分析



$$T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\delta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ -\ln \delta - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$

$$\ln(0.02) = -3.912 \approx -4$$

$$\ln(0.05) = -2.995 \approx -3$$

$$-0.83 < \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) < 0, \text{ for } 0 < \zeta < 0.9$$

当  $0 < \zeta < 0.9$ ,  
采用工程上的近似值

$$T_s(2\%) \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 4 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$

$$T_s(5\%) \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 3 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right]$$

$$T_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$T_s(5\%) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

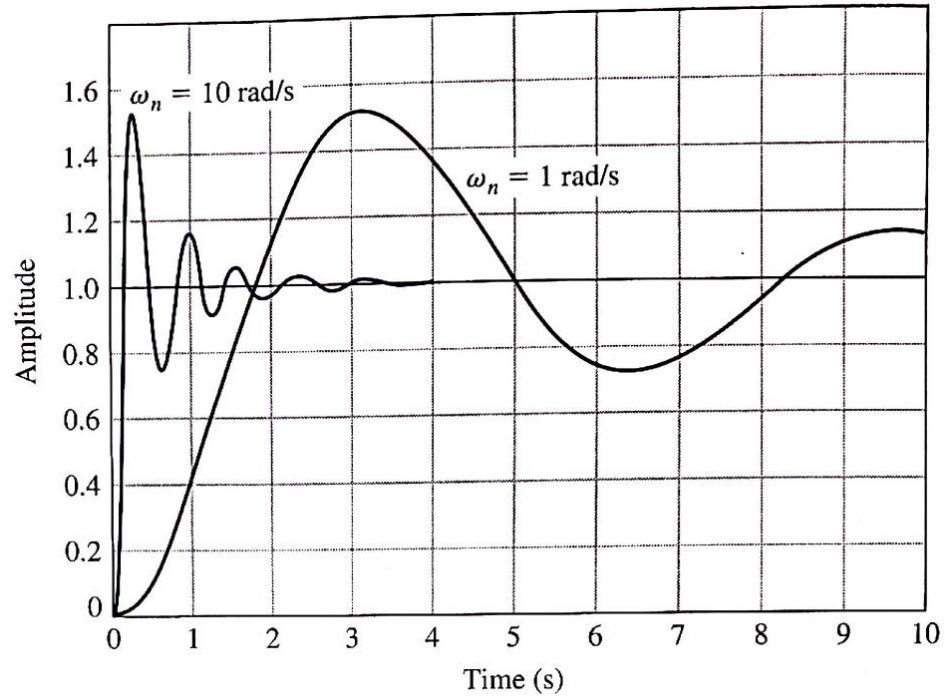
调节时间近似与极点到虚轴的距离成反比



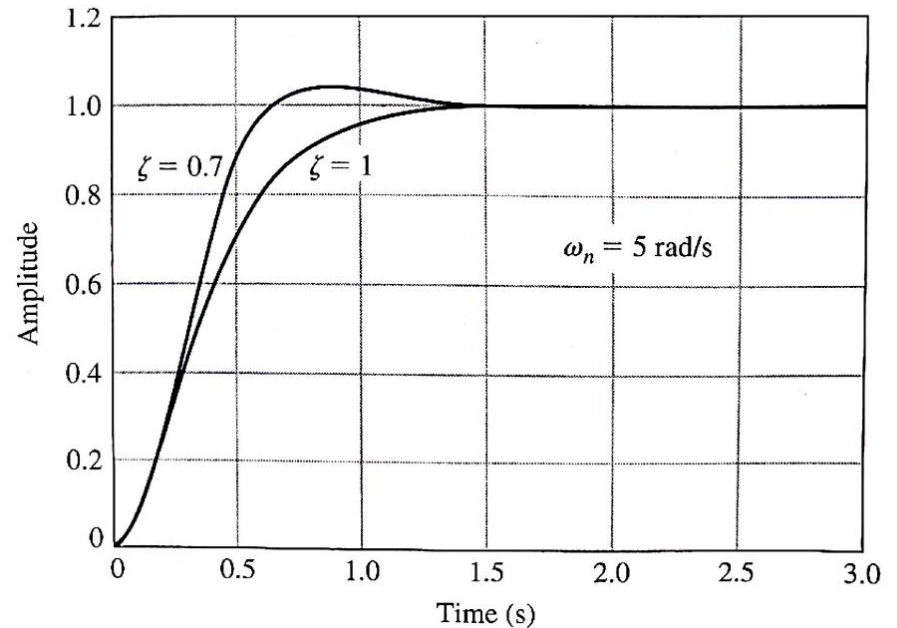
# 3.1 传递函数

系统阶跃响应的快速性取决于：  
阻尼比和频率

超调仅取决于：  
阻尼比



**FIGURE 5.10**  
The step response for  $\zeta = 0.2$  for  $\omega_n = 1$  and  $\omega_n = 10$ .



**FIGURE 5.11**  
The step response for  $\omega_n = 5$  with  $\zeta = 0.7$  and  $\zeta = 1$ .



## 3.1 传递函数时域分析

5) 延迟时间  $T_d$ :  $y(T_d) = 0.5$

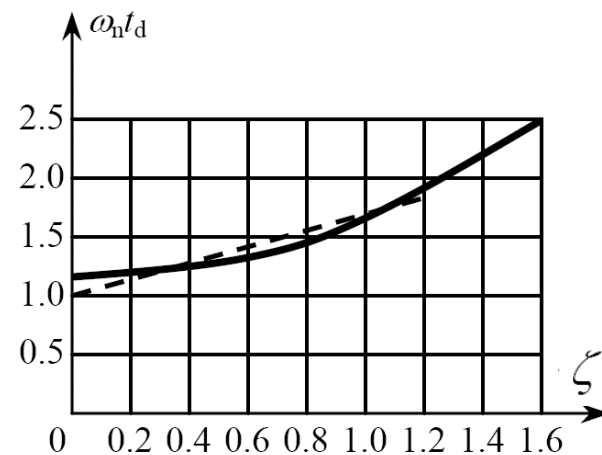
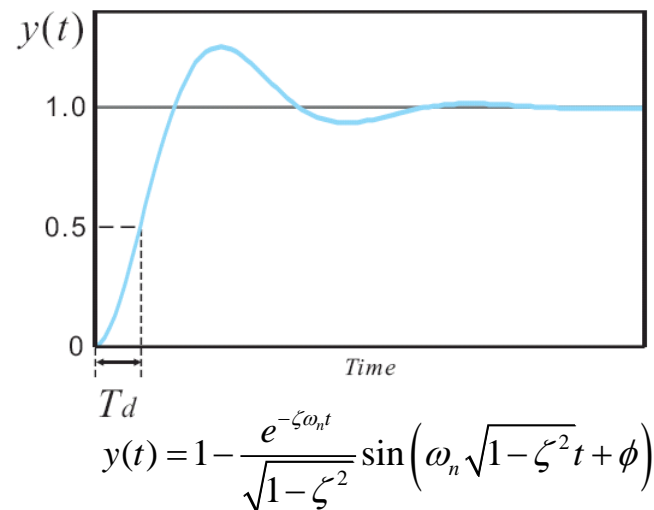
$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_d} \sin(\omega_d T_d + \phi) = 0.5$$



$T_d$ 的求解由隐函数给出

$$\omega_n T_d = \frac{1}{\zeta} \ln \frac{2 \sin(\omega_d T_d + \phi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

其曲线如图所示





## 3.1 传递函数时域分析

### 6) 振荡次数 $N$ :

阻尼振荡周期: 
$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

振荡次数: 
$$N = \frac{T_s}{\tau_d} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}, & \delta = 2\% \\ \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}, & \delta = 5\% \end{cases}$$

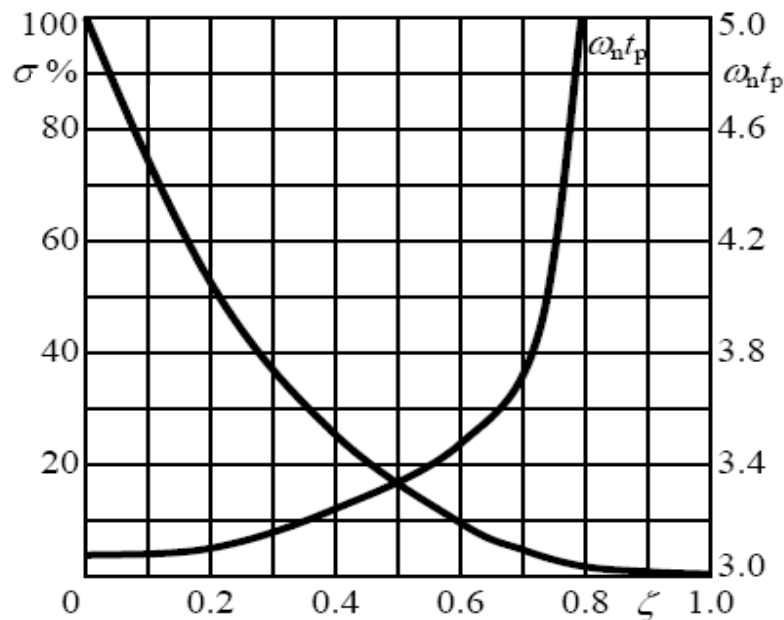


## 3.1 传递函数时域分析

⚠ **注：** 兼顾**超调量**和**响应时间**，控制系统常选择

$$\zeta = 0.4 \sim 0.8, \text{ 相应的 } \sigma\% = 25.4\% \sim 1.5\%$$

实际控制系统常选取工作在**欠阻尼状态**，只有当不允许出现超调或对象本身惯性很大时，才采用接近临界阻尼的**过阻尼状态**。



$\sigma\%$ 以及 $\omega_n T_p$ 与 $\zeta$ 的关系



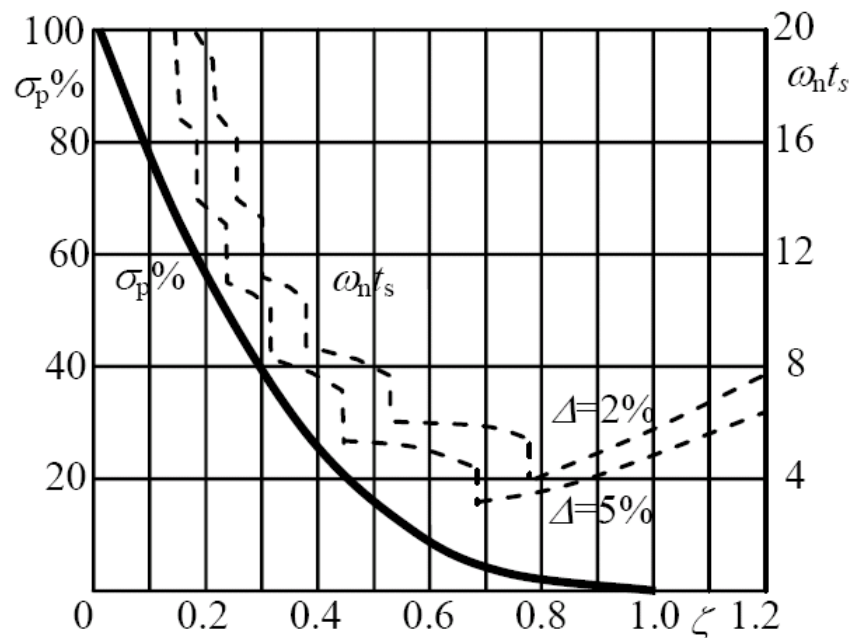
## 3.1 传递函数时域分析

### ⚠ 二阶工程最佳参数

某些控制系统采用所谓“二阶工程最佳参数”作为控制系统工程设计的依据，即选择参数使

$$\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707, \quad \text{相应的 } \sigma\% = e^{-\pi} \times 100\% = 4.3\%$$

由  $\sigma\%$  和  $\omega_n T_s$  与  $\zeta$  的关系曲线可见，此时控制系统较好地兼顾了瞬态响应和平稳性与快速性。





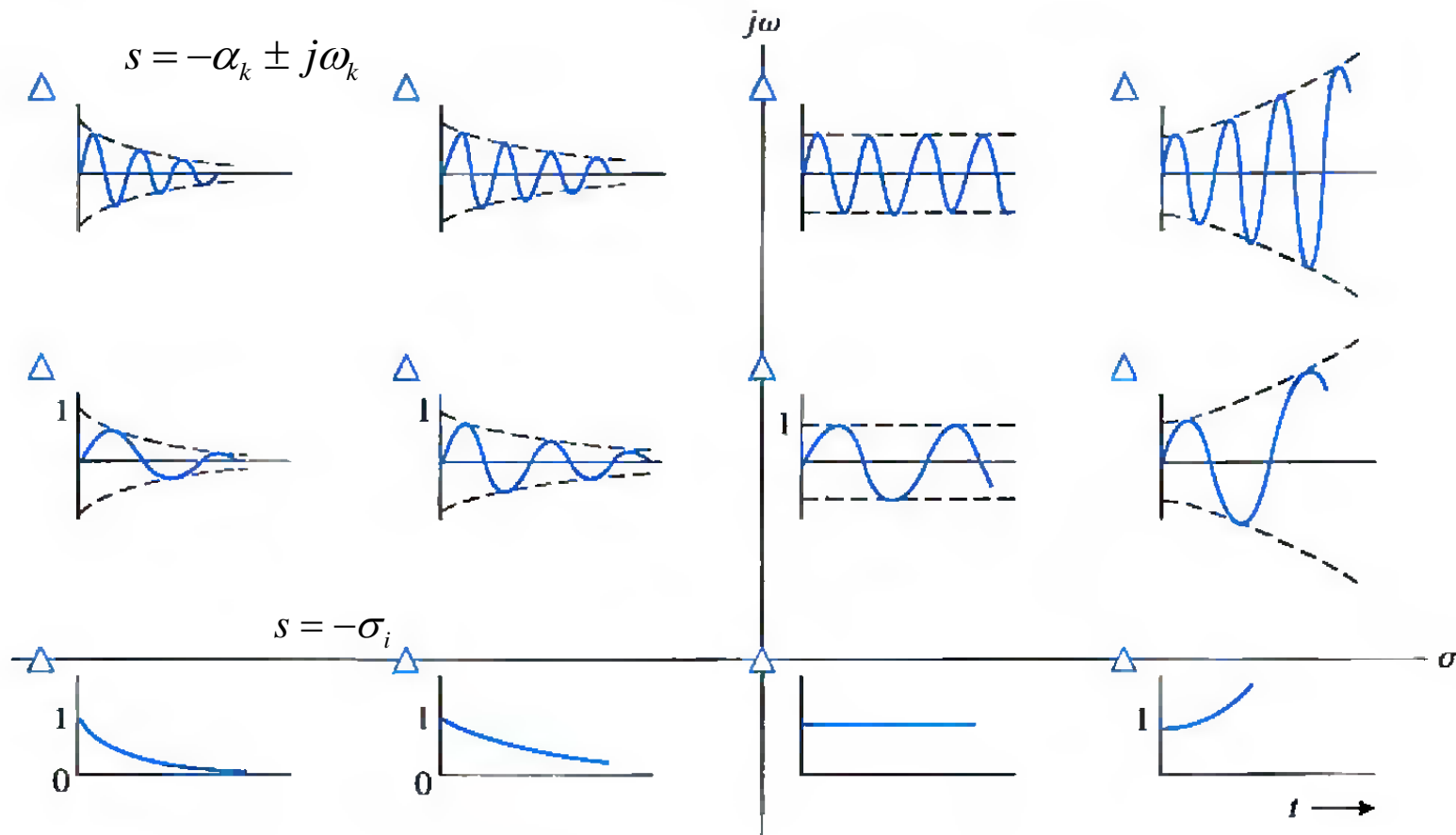


# 3.1 传递函数时域分析

请阅读教材5.5节

闭环反馈系统的瞬态响应与传递函数极点位置的关系

图5.17 不同位置特征根对应的脉冲响应



**FIGURE 5.17** Impulse response for various root locations in the s-plane. (The conjugate root is not shown.)



## 3.1 传递函数时域分析

例 3.4.1 已知二阶系统的闭环传递数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中  $\zeta = 0.6, \omega_n = 5 \text{ rad/s}$ 。试计算该系统单位阶跃响应的特征量  $t_r, t_p, t_s, \sigma_p$  和  $N$ 。

符号说明：内容取自不同教科书，部分符号可以互用

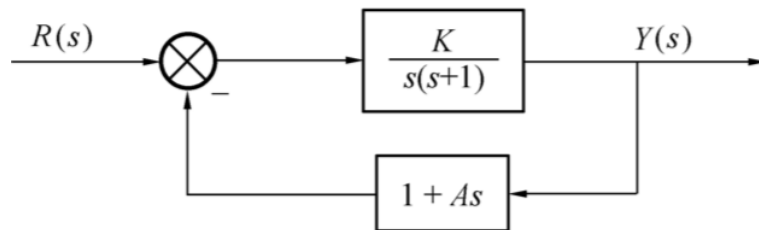
$T_r(t_r), T_p(t_p), T_s(t_s), \sigma\%(\sigma_p), \varphi(\theta)$

注：调节时间可用  
工程近似公式计算



## 3.1 传递函数时域分析

**例 3.4.2** 已知系统的方框图如图 3.4.11 所示。要求具有性能指标： $\sigma_p = 20\%$ ， $t_p = 1$  s。试确定系统参数  $K$  和  $A$ ，并计算单位阶跃响应的特征量  $t_r$ ， $t_s$  及  $N$ 。

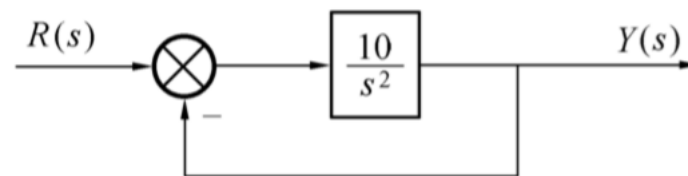




## 3.1 传递函数时域分析

**例 3.4.3** 已知系统方框图如图 3.4.12(a) 所示。试分析：(1) 该系统能否正常工作？(2) 若要求  $\zeta = 0.707$ ，系统应如何改进？

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 10}$$





10.12 (Thu)

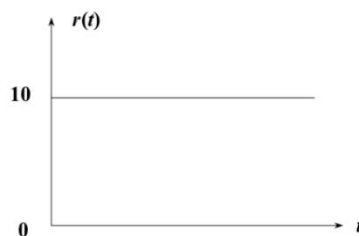
第12讲



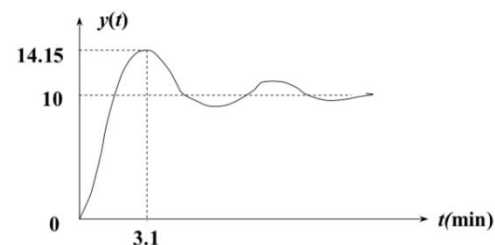
## 3.1 传递函数时域分析



**<例3.2>**: 设一单位负反馈的二阶系统的阶跃响应曲线如图所示，试确定该系统的开环传递函数。



系统输入曲线



系统响应曲线

.1

$$\sigma_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \times 100\%$$

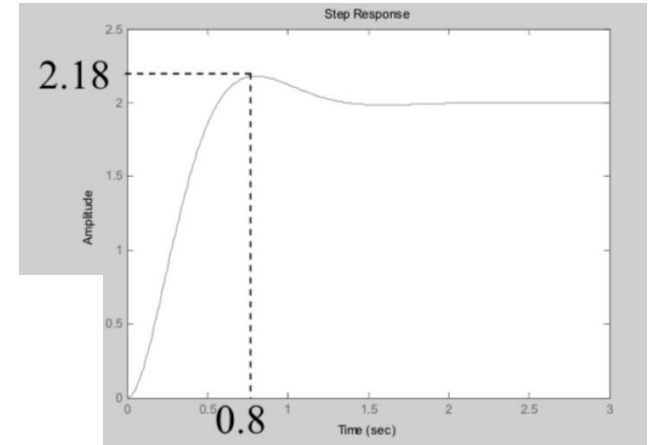
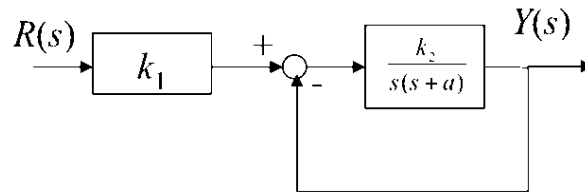
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$



# 3.1 传递函数时域分析



**<例3.3>**: 系统结构及单位阶跃响应如图, 试求 $k_1$ 、 $k_2$ 和 $a$ 值。

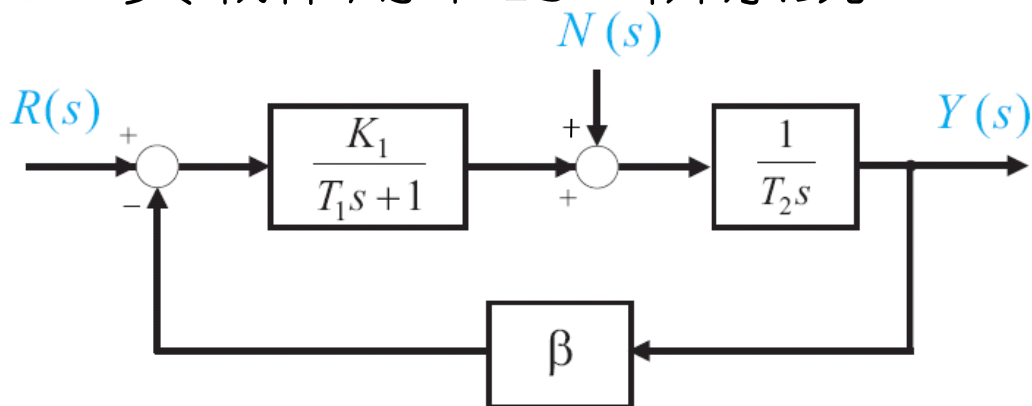




## 3.1 传递函数时域分析



**<例3.4>**: 负载作用下的二阶系统



**解**: 在参考输入  $r(t)$  作用下时 ( $n(t) = 0$ ):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\beta K_1}{T_1 T_2 s^2 + T_2 s + \beta K_1} \quad \text{无零点的二阶系统}$$

在负载  $n(t)$  作用下时 ( $r(t) = 0$ ):

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{T_1 s + 1}{T_1 T_2 s^2 + T_2 s + \beta K_1} \quad \text{有零点的二阶系统}$$





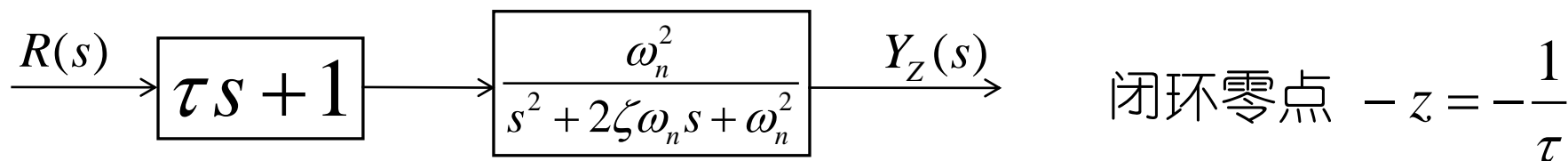
## 3.1 传递函数时域分析

### ► 具有零点的二阶系统的单位阶跃响应

对于二阶规范系统，添加一个闭环零点，则其**闭环传函**为：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \longrightarrow T_Z(s) = \frac{Y_Z(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 (\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2 (s + z)}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$



**Question:** 与原系统相比有哪些变化？

求解  $y(t)$ ?



## 3.1 传递函数时域分析

### ► 具有零点的二阶系统的单位阶跃响应

$$r(t) = 1(t), \quad R(s) = 1/s; \quad 0 < \zeta < 1$$

$$T_Z(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{s}{z} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

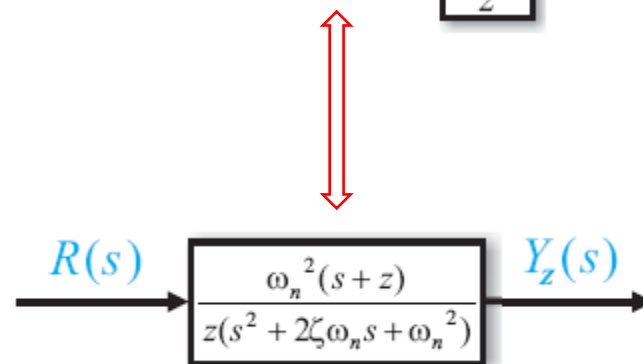
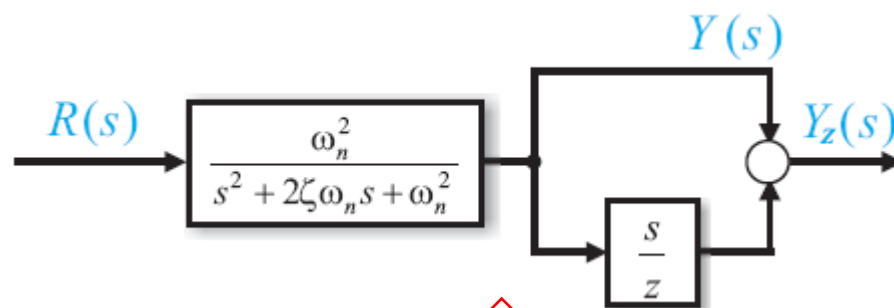
 $Y_Z(s)$ 

其等效结构图

$$Y_Z(s) = Y(s) + \frac{s}{z} Y(s)$$

考虑到零初始条件

$$y_Z(t) = y(t) + \frac{1}{z} \dot{y}(t)$$





## 3.1 传递函数时域分析

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \quad \text{无零点二阶规范系统阶跃响应}$$



$$\frac{1}{z} \dot{y}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{z\sqrt{1-\zeta^2}} (\zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \phi) - \omega_d \cos(\omega_d t + \phi))$$

$$\longrightarrow y_z(t) = y(t) + \frac{1}{z} \dot{y}(t) \quad \text{有零点二阶规范系统阶跃响应}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{z\sqrt{1-\zeta^2}} \left( (z - \zeta\omega_n) \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d \cos(\omega_d t + \phi) \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{l}{z} \sin(\omega_d t + \phi + \psi), t \geq 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \psi = \frac{z - \zeta\omega_n}{\sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}} = \frac{z - \zeta\omega_n}{l}$$

$$\sin \psi = \frac{\omega_d}{l}$$



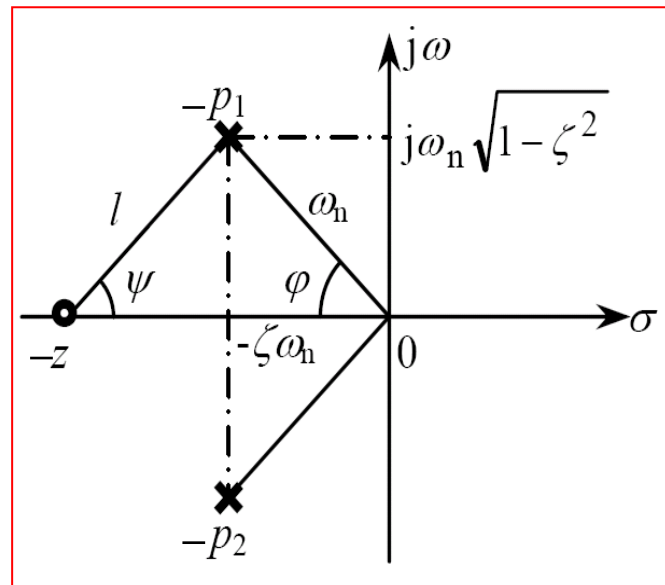
## 3.1 传递函数时域分析

$$\text{其中: } l = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \sqrt{z^2 - 2\zeta\omega_n z + \omega_n^2}$$

$$\psi = \arctan \frac{\omega_d}{z - \zeta\omega_n}, \quad \phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

$$\begin{aligned} \frac{l}{z} &= \frac{\sqrt{z^2 - 2\zeta\omega_n z + \omega_n^2}}{z} = \sqrt{1 - \frac{2\zeta\omega_n}{z} + \frac{\omega_n^2}{z^2}} \\ &= \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2} \end{aligned}$$

其中  $r = \frac{\zeta\omega_n}{z}$  为复数极点实部与零点之比



$$y_z(t) = 1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2}}{\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi + \psi), \quad t \geq 0$$



## 3.1 传递函数时域分析

### 1) 上升时间 $T_{rz}$ :

$$\sin(\omega_d t + \phi + \psi) = 0 \longrightarrow T_{rz} = \frac{\pi - \phi - \psi}{\omega_d} = T_r - \frac{\psi}{\omega_d}$$

### 2) 峰值时间 $T_{pz}$ :

$$\left. \frac{dy_z(t)}{dt} \right|_{t=T_{pz}} = 0 \longrightarrow T_{pz} = \frac{\pi - \psi}{\omega_d} = T_p - \frac{\psi}{\omega_d}$$

### 3) 超调量 $\sigma\%$ :

$$\sigma_z \% = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2} e^{-\zeta\omega_n T_{pz}} \times 100\%$$

$$= \frac{l}{z} e^{-\zeta\omega_n T_p} e^{\zeta\omega_n \frac{\psi}{\omega_d}} \times 100\% = \frac{l}{z} e^{\frac{\zeta\psi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times \sigma\%$$

试分析超调量和零点位置的关系

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$



## 3.1 传递函数时域分析

4) 调节时间  $T_{sz}$ :

$$t \geq T_{sz} : |y_z(t) - y_z(\infty)| \leq y_z(\infty)\delta$$

$$y_z(t) = 1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2}}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi + \psi), \quad t \geq 0$$

$$\left| \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2}}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_{sz}} \sin(\omega_d T_{sz} + \phi + \psi) \right| = \delta$$

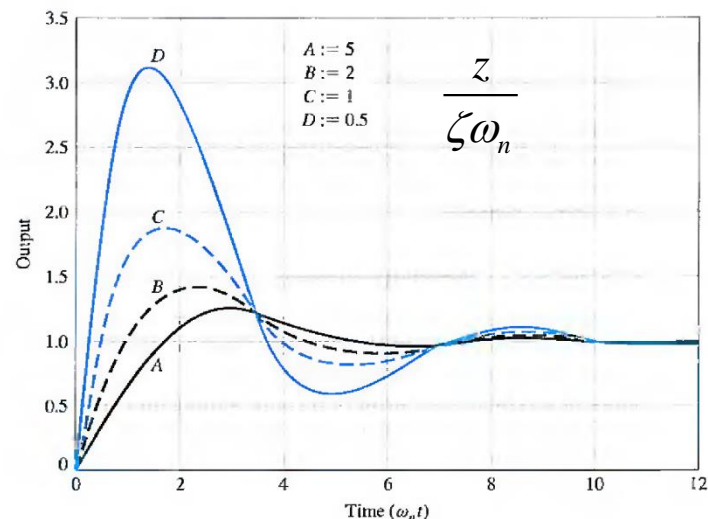
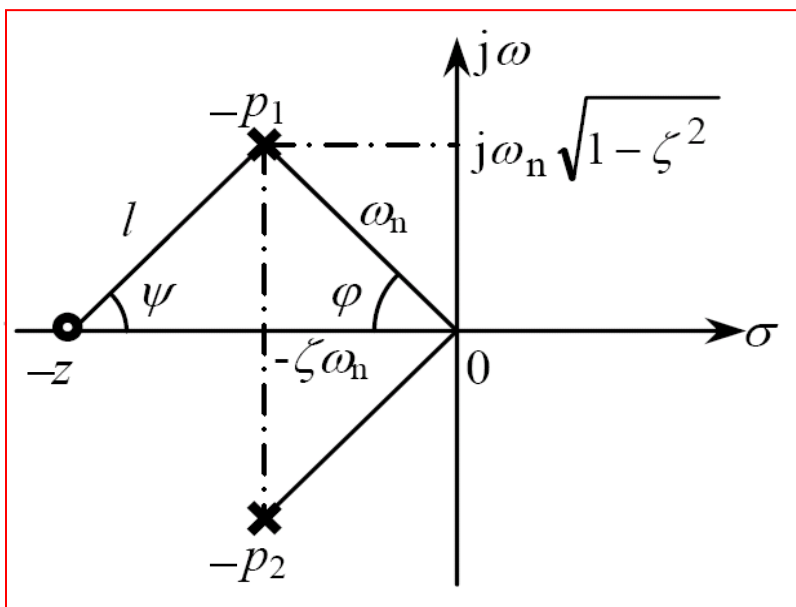
近似

$$\frac{l}{z} \frac{e^{-\zeta\omega_n T_{sz}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \delta \longrightarrow T_{sz} = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ -\ln \delta - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) - \ln \frac{l}{z} \right]$$

$$= T_s - \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{l}{z}$$



# 3.1 传递函数时域分析



(b) 单位阶跃响应曲线 ( $\zeta = 0.45$ )

添加零点对原无零点规范  
二阶系统性能的影响：

峰值时间提前；

超调量增大(振荡加剧)；

$\frac{z}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{r}$  越小，影响越大

**Table 5.4 The Response of a Second-Order System with a Zero and  $\zeta = 0.45$**

$z / \zeta\omega_n$	Percent Overshoot	Settling Time	Peak Time
5	23.1	8.0	3.0
2	39.7	7.6	2.2
1	89.9	10.1	1.8
0.5	210.0	10.3	1.5

Note: Time is normalized as  $\omega_n t$ , and settling time is based on a 2% criterion.



## 3.1 传递函数时域分析

➤ 二阶系统的单位脉冲响应

$$R(s) = 1$$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sim \sin \omega t$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(练习: 5min)

$$\mathcal{L} [e^{-at}f(t)] = F(s + a)$$

Case 1: 无阻尼

$$y(t) = \omega_n \sin(\omega_n t), \quad t \geq 0$$

Case 2: 临界阻尼

$$y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad t \geq 0$$

Case 3: 欠阻尼

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0$$

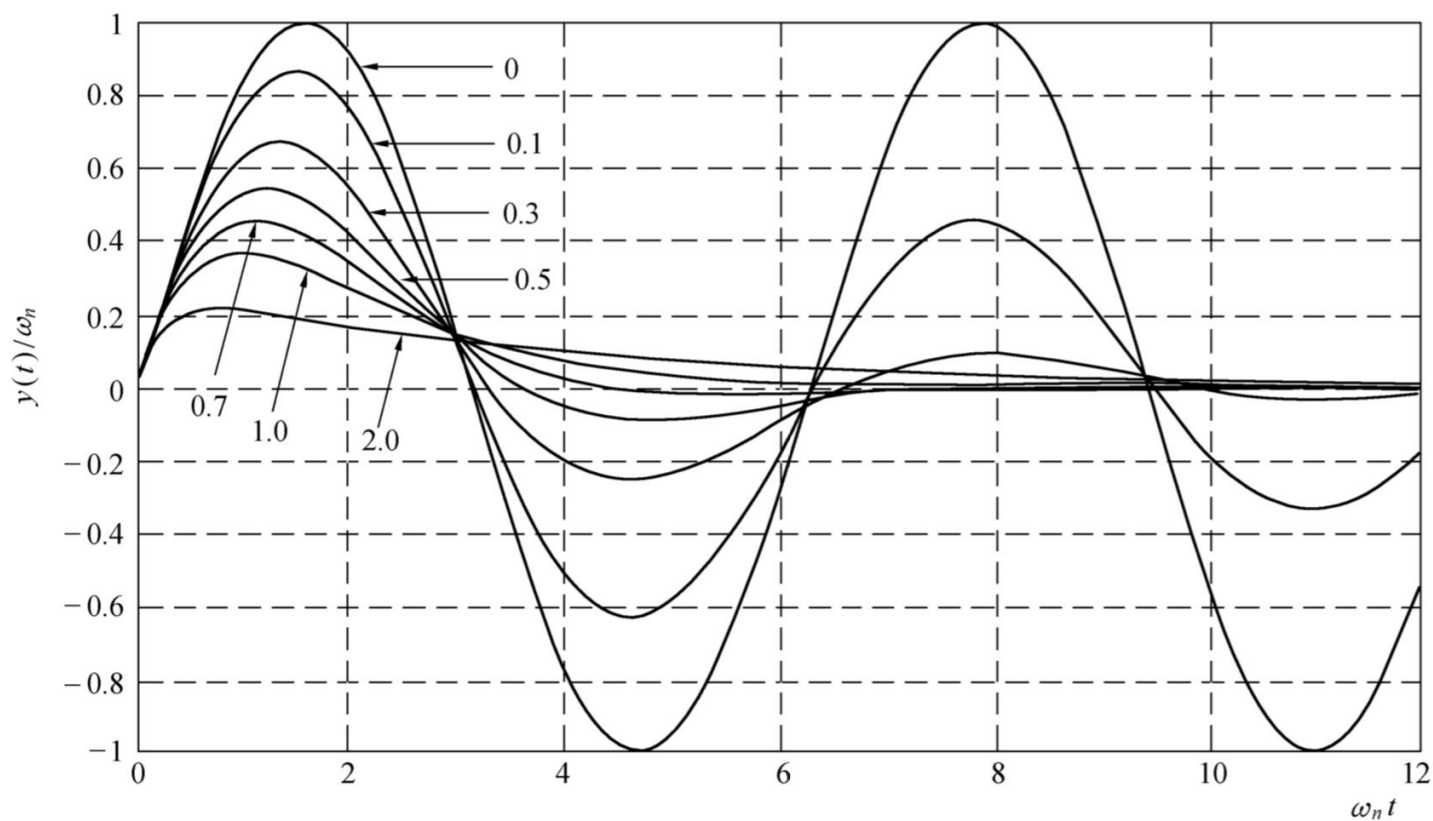
Case 4: 过阻尼

$$y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right], \quad t \geq 0$$





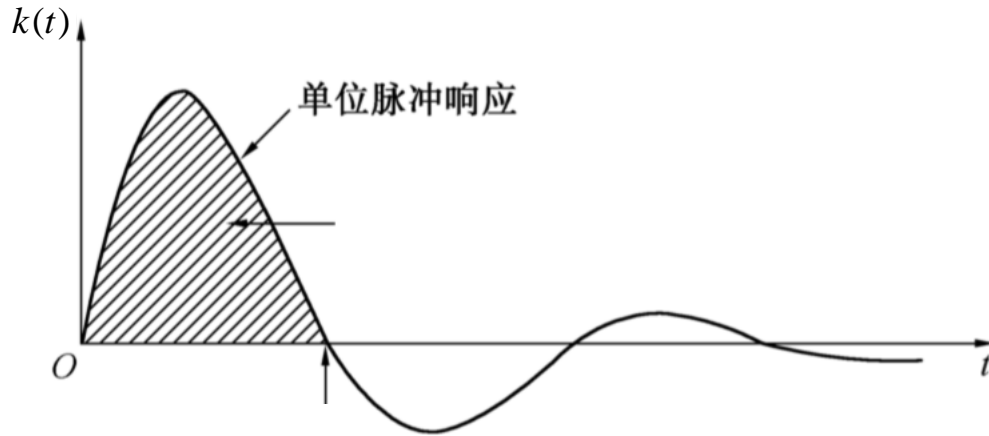
# 3.1 传递函数时域分析





# 3.1 传递函数时域分析

$$k(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0$$



思考(5min):

曲线零点坐标是什么？

阴影部分的面积为\_\_？



## 3.1 传递函数时域分析

► 二阶系统的单位斜坡响应  $r(t) = t$ ,  $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ;  $0 < \zeta < 1$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{2\zeta / \omega_n}{s} + \frac{2\zeta(s + \zeta\omega_n) / \omega_n + (2\zeta^2 - 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Case 1: 欠阻尼  $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \arctan \frac{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1})$   $t \geq 0$

Case 2: 临界阻尼  $y(t) = t - \frac{2}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n} e^{-\omega_n t} (1 + \frac{\omega_n}{2} t)$   $t \geq 0$

Case 3: 过阻尼  $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} +$

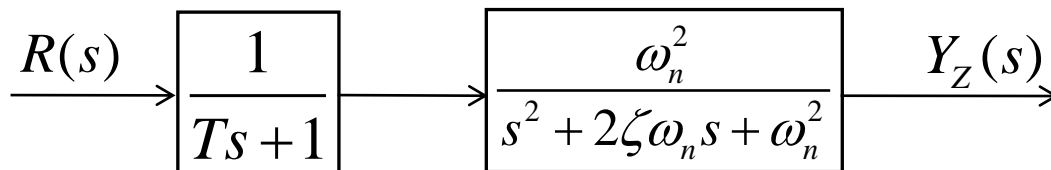
$$\frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$
  $t \geq 0$

欠阻尼情况下，单位斜坡响应的稳态误差  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \frac{2\zeta}{\omega_n}$



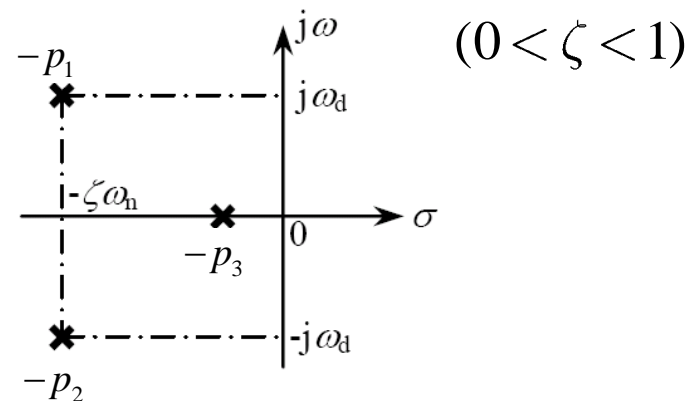
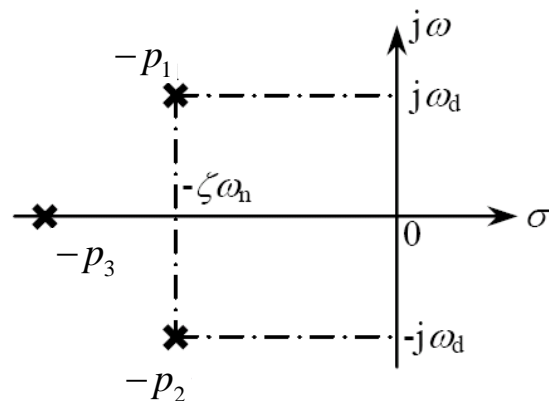
## 3.1 传递函数时域分析

► 典型三阶系统的单位阶跃响应 ( $0 < \zeta < 1$ )



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(Ts+1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s+p) \left[ (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2) \right]}$$

其中  $p = 1/T$





## 3.1 传递函数时域分析

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+p} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
 &= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+p} + \frac{A_2(s + \zeta\omega_n) - A_2\zeta\omega_n + A_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}
 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{p}{\omega_n \zeta}$$

$$\Rightarrow A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{-1}{\zeta^2 \beta (\beta - 2) + 1}, \quad A_2 = \frac{-\zeta^2 \beta (\beta - 2)}{\zeta^2 \beta (\beta - 2) + 1},$$

$$-A_2 \zeta \omega_n + A_3 = \frac{-\beta \zeta \omega_n [\zeta^2 (\beta - 2) + 1]}{\zeta^2 \beta (\beta - 2) + 1}$$



## 3.1 传递函数时域分析

欠阻尼二阶规范系统的阶跃响应

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-pt}}{\zeta^2 \beta(\beta - 2) + 1} - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\zeta^2 \beta(\beta - 2) + 1} \times \left[ \zeta^2 \beta(\beta - 2) \cos \omega_d t + \beta \sin \omega_d t \right]$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \phi), \quad t \geq 0$$

$$= 1 - \frac{e^{-\beta \zeta \omega_n t}}{\zeta^2 \beta(\beta - 2) + 1} - \frac{\beta \zeta}{\sqrt{\zeta^2 \beta(\beta - 2) + 1}} \times \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \gamma), \quad t \geq 0$$

其中： $\gamma = \arctan \frac{\zeta(\beta - 2)\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta^2(\beta - 2) + 1}$

$$\beta = \frac{p}{\zeta \omega_n}$$

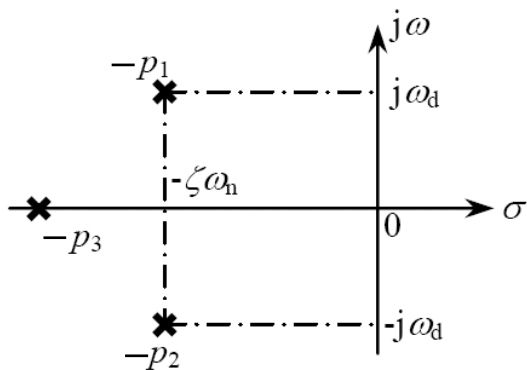
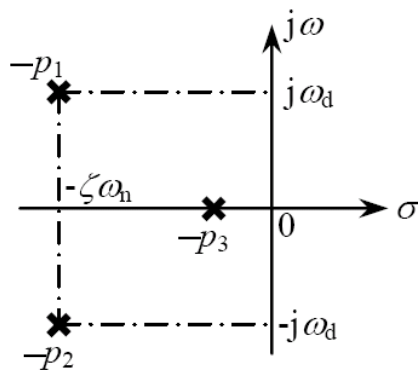
比较：有零点的二阶系统  $\left( \frac{1}{r} = \frac{z}{\zeta \omega_n} \right)$

注： $\zeta^2 \beta(\beta - 2) + 1 = \zeta^2 \beta^2 - 2\zeta^2 \beta + 1 = \zeta^2 (\beta - 1)^2 + (1 - \zeta^2) > 0$

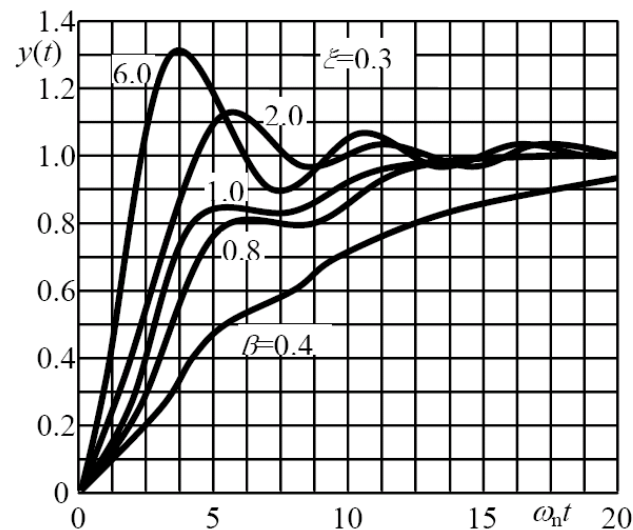
$\Rightarrow e^{-pt}$ 项的系数总是为负数



$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\beta\zeta\omega_n t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1} - \frac{\beta\zeta}{\sqrt{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}} \times \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \gamma), \quad t \geq 0$$

(a)  $\beta > 1$  时(b)  $\beta < 1$  时

$$\left( \beta = \frac{p}{\zeta\omega_n} \right)$$



## 讨论:

1)  $y(t)$  与  $\zeta, \omega_n, \beta = \frac{p}{\zeta\omega_n}$  有关

$\beta \rightarrow \infty$ , 相当于二阶系统

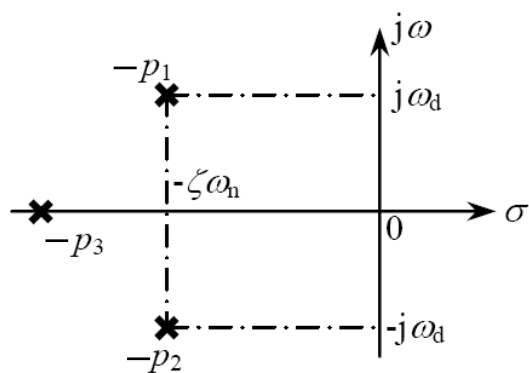
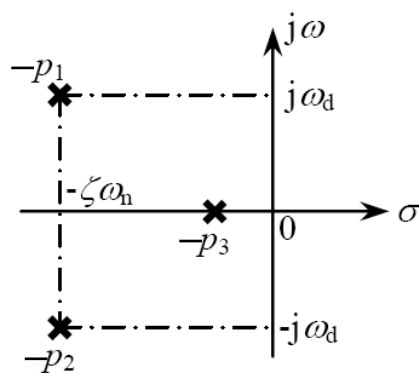
$\beta \gg 1$ , 共轭复数极点为**主导极点**, 响应主要呈现二阶特性

$\beta \ll 1$ , 实极点为**主导极点**, 响应主要呈现一阶特性

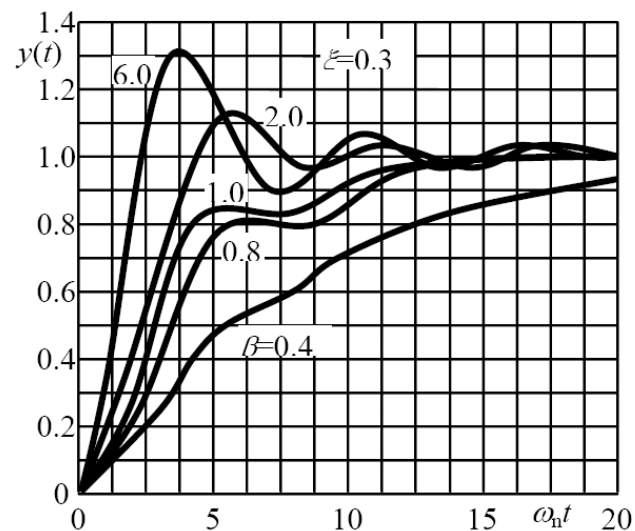
抓住问题的主要矛盾



## 3.1 传递函数时域分析

(a)  $\beta > 1$  时(b)  $\beta < 1$  时

$$\left( \beta = \frac{p}{\zeta \omega_n} \right)$$



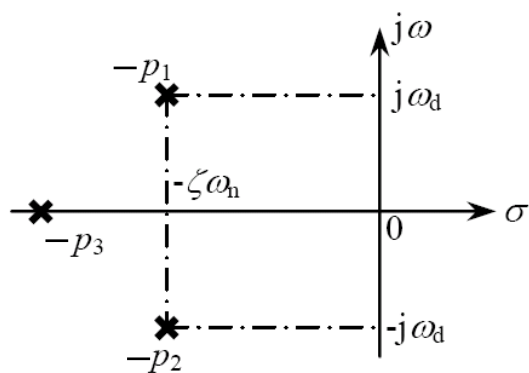
讨论:

- 2) 当  $\beta \geq 5$  左右(或者  $\beta \leq 1/5$  左右), 可按照主导极点共轭复数极点(或按照主导极点实极点)估算暂态响应特性;

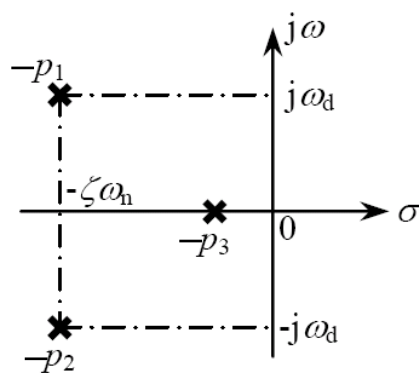
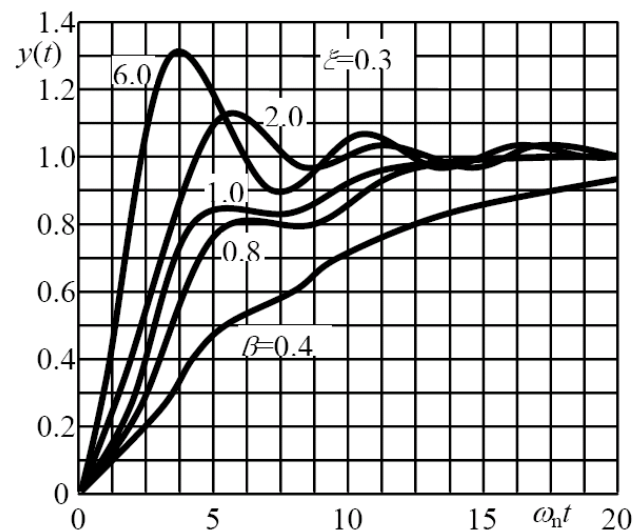




## 3.1 传递函数时域分析

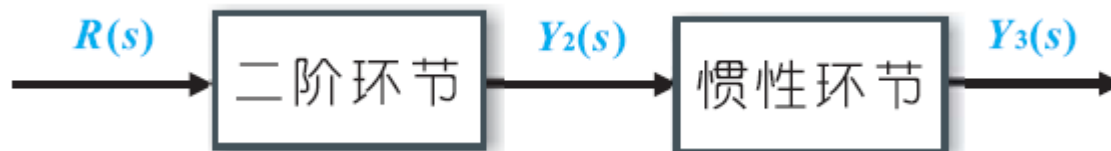
(a)  $\beta > 1$  时

$$\left( \beta = \frac{p}{\zeta \omega_n} \right)$$

(b)  $\beta < 1$  时

### 讨论:

- 3) 实极点的影响：振荡性减弱，超调量减小，响应速度变慢，相当于增加了系统的惯性；





## 3.1 传递函数时域分析

### ► 高阶系统的时域响应

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{k(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n)}$$

$$\Phi(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^q (s - s_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}$$

$$q + 2r = n$$

$r$  对共轭复数极点,  $s_k = -\zeta_k \omega_{nk} \pm j\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ ,  $k = 1, 2, \cdots, r$



## 3.1 传递函数时域分析

### ► 高阶系统的时域响应

单位阶跃响应的拉氏变换为

$$Y(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^q (s - s_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$\frac{1}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s - s_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k (s + \zeta_k \omega_{nk}) + C_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

对此式做拉氏反变换,得到单位阶跃响应

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^q A_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{dk} t) + \sum_{k=1}^r C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{dk} t) =$$

$$1 + \sum_{i=1}^q A_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{dk} t + \theta_k) \quad (3.5.1)$$

式中

$$A_i = \left[ k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} (s - s_i) \right]_{s = s_i}$$

$$D_k = 2 \left| \left[ k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} (s - s_k) \right]_{s = s_k} \right|$$



## 3.1 传递函数时域分析

(1) 如果高阶系统的闭环极点全部具有负实部,即全部在复数平面的左半平面,则系统单位阶跃响应的暂态分量最终衰减为零。

(2) 在暂态分量中,每一项衰减的快慢取决于相应实数闭环极点的绝对值  $|s_i|$ ,或复数闭环极点的实部绝对值  $|\zeta_k \omega_{nk}|$ ,系统闭环极点在复数平面左半平面距离虚轴越远,式(3.5.1)中与之相应的项衰减得越快;反之,越靠近虚轴闭环极点所对应的项衰减越慢。

(3) 高阶系统单位阶跃响应中暂态分量的各项系数不仅和闭环极点有关,而且也与闭环零点有关。在复数平面上,如果某一闭环极点靠近一零点,而又与其他极点相距较远,则式(3.5.1)中相应项的系数  $A$  或  $D$  较小,在暂态分量中的影响较小;若有一对闭环零、极点非常接近,称做一对偶极子,则该极点对暂态过程几乎没有影响;若某极点附近没有零点,并且距虚轴较近,则式(3.5.1)中相应项的系数就较大,对暂态过程的影响较大。

**结论:** 实部为负的极点,

越靠近虚轴, 衰减速度越慢, 对过渡过程的影响越大;

越远离虚轴, 衰减速度越快, 对过渡过程的影响越小。



## 3.1 传递函数时域分析

### 闭环主导极点

- 若高阶系统中距离虚轴最近的极点，其实数部分为其他极点的五分之一 ( $1/5$ ) 或更小，并且附近又没有其他闭环零点，则可认为系统的响应主要由该极点(或共轭复数极点)决定。
- 这种对系统暂态响应起主要作用的极点称为系统的主导极点。
- 一般情况下，高阶系统具有振荡性，故主导极点通常是共轭复数极点。所以，高阶系统常当作二阶系统来分析，相应的性能指标都可按二阶系统近似估计。

当不满足上述条件时，不能随意忽视零极点对系统动态性能的影响。



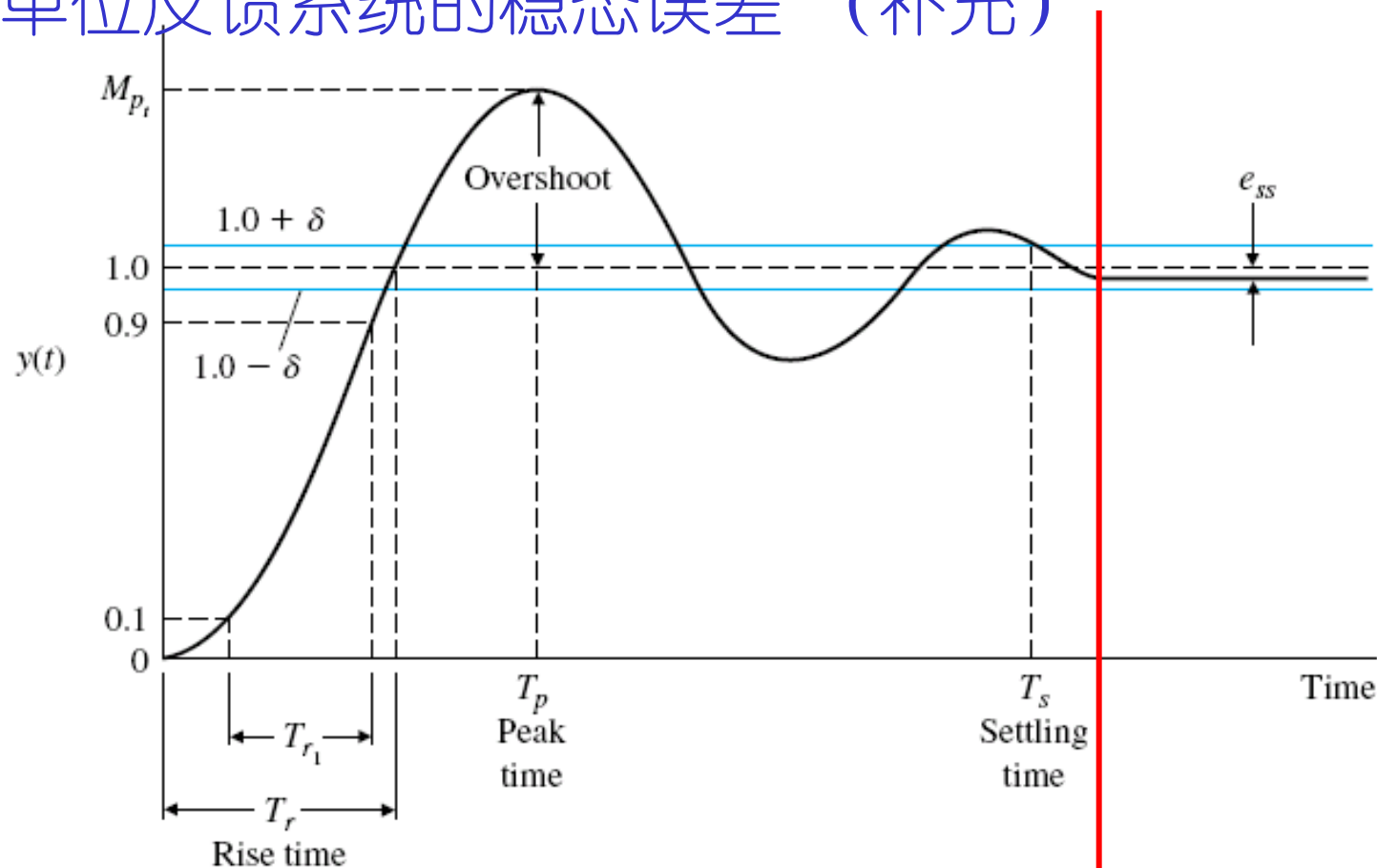
10.17 (Tue)

第13讲



## 3.1 传递函数时域分析

### □ 单位反馈系统的稳态误差 (补充)



瞬态响应:

$$T_r, T_d, T_p, T_s, \sigma\%, N$$

稳态响应

$$e_{ss}$$

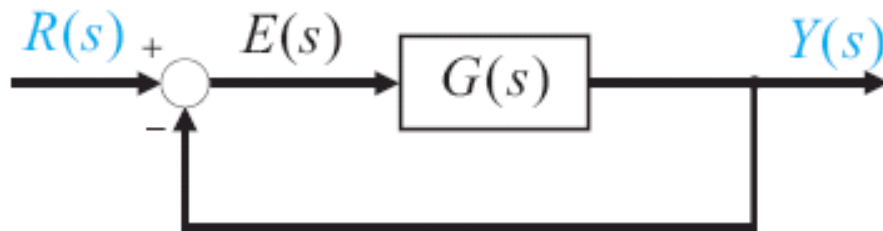


## 3.1 传递函数时域分析

### □ 单位负反馈系统的稳态误差 (补充)

误差信号

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$



$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \Phi_e(s) R(s)$$

误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

稳态误差

(Steady state error)

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

终值定理  
教材 eq. 2.28  
注意条件

稳态误差由开环传递函数和输入决定

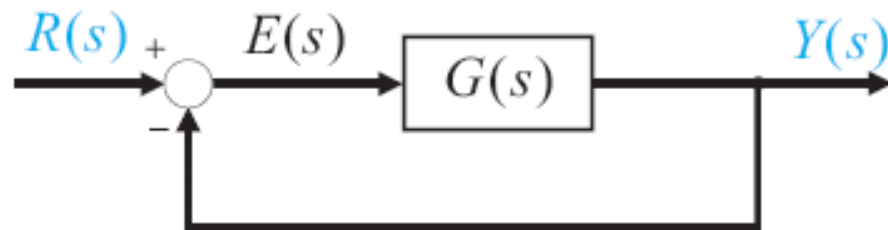




## 3.1 传递函数时域分析

### 开环传递函数( $n$ 阶系统)

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (\tau_j s + 1)}$$



( $G(s)$  是控制器和被控对象的综合对比: 图5.18)



## 3.1 传递函数时域分析

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

以**静态误差系数**给出典型输入下的系统的**稳态误差**:

1) 阶跃输入:  $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)}$$

**静态位置误差系数**  $K_p \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^N}$

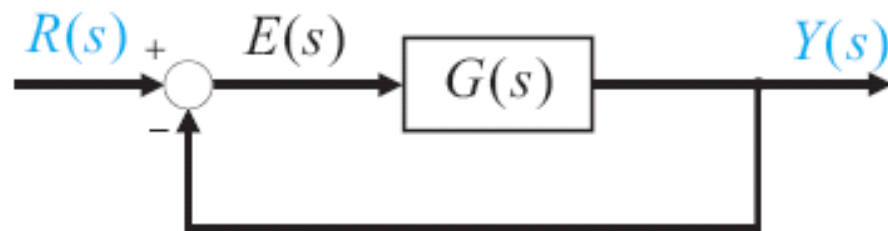
**稳态误差**  $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$



## 3.1 传递函数时域分析

### 开环传递函数( $n$ 阶系统)

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (\tau_j s + 1)}$$



( $G(s)$  是控制器和被控对象的综合对比: 图5.18)

$N$ : 开环传递函数 $G(s)$ 中原点处极点的重数, 即串联的积分环节的个数, 称为**系统的类型(或无差阶数)**

$N = 0, 1, 2, \dots$  分别称为0型, 1型, 2型, ... 系统



# 3.1 传递函数时域分析

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

以**静态误差系数**给出典型输入下的系统的**稳态误差**:

1) 阶跃输入:  $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)}$$

**静态位置误差系数**  $K_p \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^N}$

**稳态误差**  $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$

0型系统:  $K_p = K \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$

1型, 2型系统:  $K_p = \infty \quad e_{ss} = 0$

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (\tau_j s + 1)}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

2) 斜坡输入:  $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s[1 + G(s)]} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)}$$

静态速度误差系数  $K_v \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{N-1}}$

稳态误差  $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$

0型系统:  $K_v = 0$        $e_{ss} = \infty$

1型系统:  $K_v = K$        $e_{ss} = \frac{1}{K}$

2型系统:  $K_v = \infty$        $e_{ss} = 0$



## 3.1 传递函数时域分析

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

3) 抛物线输入:  $R(s) = \frac{1}{s^3}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2[1 + G(s)]} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

静态加速度误差系数

$$K_a \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{N-2}}$$

稳态误差  $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$

0型, 1型系统:  $K_a = 0$        $e_{ss} = \infty$

2型系统:  $K_a = K$        $e_{ss} = \frac{1}{K}$



## 3.1 传递函数时域分析

### 稳态误差小结

系统的型 无差 阶数	误差系数			稳态误差		
	$K_p$	$K_v$	$K_a$	阶跃输入 $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	斜坡输入 $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	抛物线输入 $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
0 型	$K$	0	0	$A/(1+K)$	$\infty$	$\infty$
1 型	$\infty$	$K$	0	0	$A/K$	$\infty$
2 型	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$A/K$



# 3.1 传递函数时域分析

Summary of steady state error for unity feedback system

Type #	Step $r(t)=1(t)$	Ramp $r(t)=t$	Parabolic $r(t)=t^2/2$
0	<p><math>e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}</math></p>	<p><math>e_{ss} = \infty</math></p>	<p><math>e_{ss} = \infty</math></p>
I	<p><math>e_{ss} = 0</math></p>	<p><math>e_{ss} = \frac{1}{K_v}</math></p>	<p><math>e_{ss} = \infty</math></p>
II	<p><math>e_{ss} = 0</math></p>	<p><math>e_{ss} = 0</math></p>	<p><math>e_{ss} = \frac{1}{K_a}</math></p>





# 3.1 传递函数时域分析

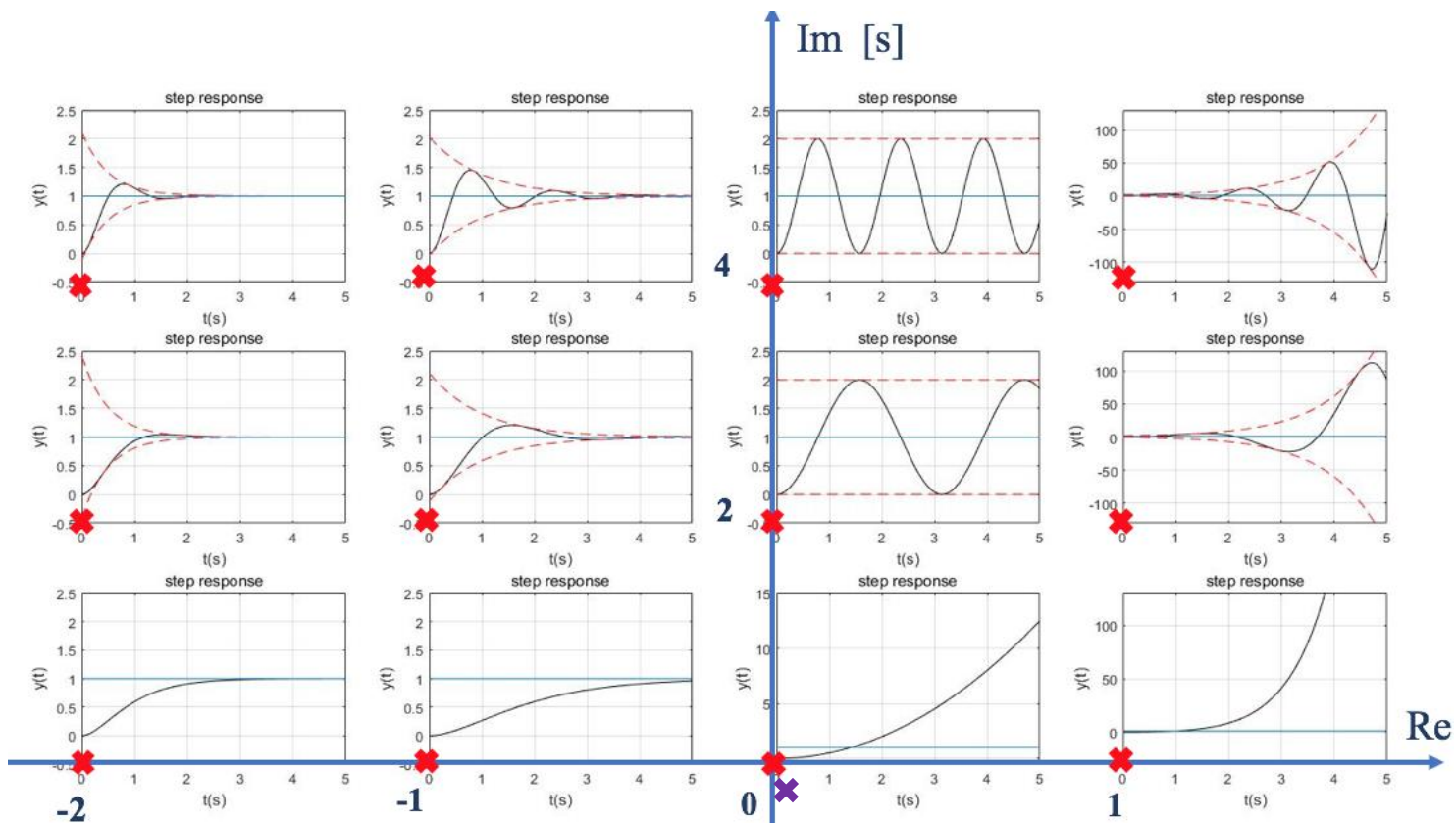
连续系统瞬态响应 与 系统极点位置密切相关

$$s = -\sigma_i$$

单位阶跃响应

$$s = -\alpha_k \pm j\omega_k$$

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^N D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \theta_k)$$





## 3.1 传递函数时域分析

离散系统瞬态响应 与 系统极点位置密切相关？

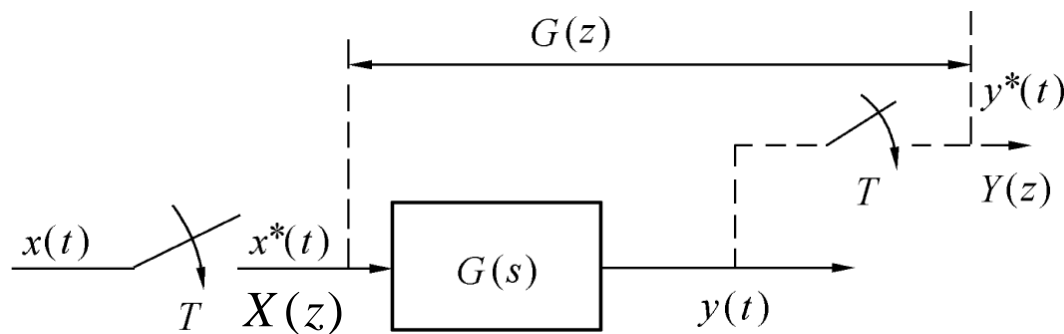


# 3.1 传递函数时域分析

## 基于脉冲传递函数的离散系统时域分析

参考：  
裴、宋 6.8节

脉冲传递函数（z传递函数） 
$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[y^*(t)]}{\mathcal{Z}[x^*(t)]} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

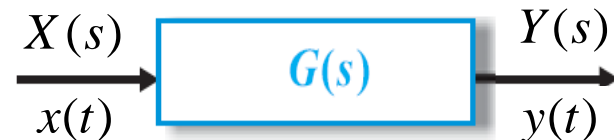


表 6.4.1 Z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	$e^{-kTs}$	$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
8	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		$a^k$	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k \cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$





## 3.1 传递函数时域分析

### ► 离散系统的极点与瞬态响应的关系

设系统的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{k \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}, \quad n > m$$

其中  $z_i$  为系统的闭环零点；  $p_i$  为系统的闭环极点。



## 3.1 传递函数时域分析

### 阶跃响应

当  $r(t) = 1(t)$ ,  $R(z) = \frac{z}{z-1}$  时, 系统输出的  $Z$  变换为

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{k \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \frac{z}{z-1}$$

当特征方程无重根时,  $Y(z)$  可展开为

$$Y(z) = \frac{Az}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i z}{z-p_i} \quad (6.8.2)$$

式中

$$A = ?$$

(3min)

$$B_i = ?$$

对式(6.8.2) 进行  $Z$  反变换可得

$$y(kT) = A + \sum_{i=1}^n B_i p_i^k$$

思考：瞬态分量  
与什么有关？



## 3.1 传递函数时域分析

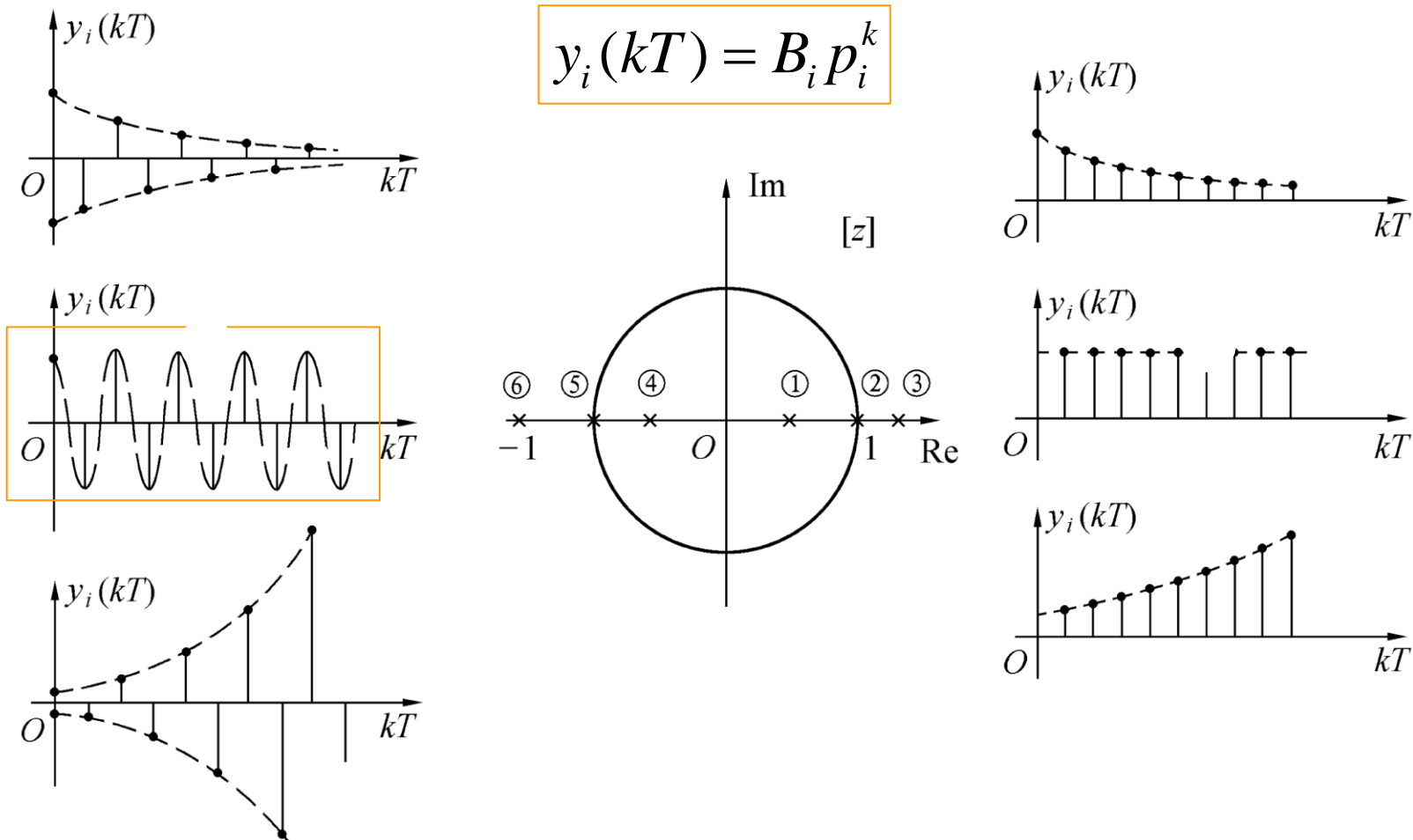
- Case 1: 实极点

第  $i$  个实极点所对应的瞬态响应分量为

$$y_i(kT) = B_i p_i^k$$



# 3.1 传递函数时域分析



有无振荡？  
振荡的角频率？

图 6.8.1 实数极点的瞬态响应





## 3.1 传递函数时域分析

- (1) 若  $0 < p_i < 1$ , 极点在单位圆内正实轴上, 其对应的瞬态响应序列单调地衰减;
- (2) 若  $p_i = 1$ , 相应的瞬态响应是不变号的等幅序列;
- (3) 若  $p_i > 1$ , 极点在单位圆外正实轴上, 对应的瞬态响应序列单调地发散;
- (4) 若  $-1 < p_i < 0$ , 极点在单位圆内负实轴上, 对应的瞬态响应是正、负交替变号的衰减

振荡序列, 振荡的角频率为  $\frac{\pi}{T}$ ;

- (5) 若  $p_i = -1$ , 对应的瞬态响应是正、负交替变号的等幅序列, 振荡的角频率为  $\frac{\pi}{T}$ ;
- (6) 若  $p_i < -1$ , 极点在单位圆外负实轴上, 相应的瞬态响应序列是正、负交替变号的发散序列, 振荡的角频率为  $\frac{\pi}{T}$ 。



## 3.1 传递函数时域分析

### • Case 2: 复数共轭极点

如果闭环脉冲传递函数有共轭复数极点  $p_{i,i+1} = a \pm jb$ , 可以证明, 这一对共轭复数极点所对应的瞬态响应分量为

$$y_i(kT) = A_i \lambda_i^k \cos(k \theta_i + \phi_i)$$

式中  $A_i, \phi_i$ ——由部分分式展开式的系数所决定的常数。

$$\lambda_i = \sqrt{a^2 + b^2} = |p_i|$$

$$\theta_i = \arctan \frac{b}{a}$$

课后思考：  
如何证明？

(参考：胡寿松  
ed5, pp363)



# 3.1 传递函

$$y_i(kT) = A_i \lambda_i^k \cos(k\theta_i + \phi_i)$$

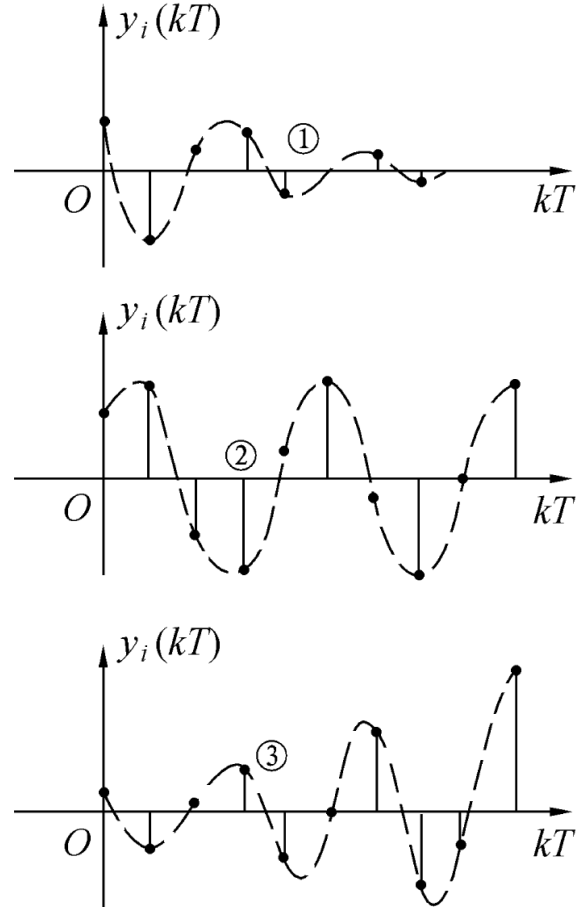
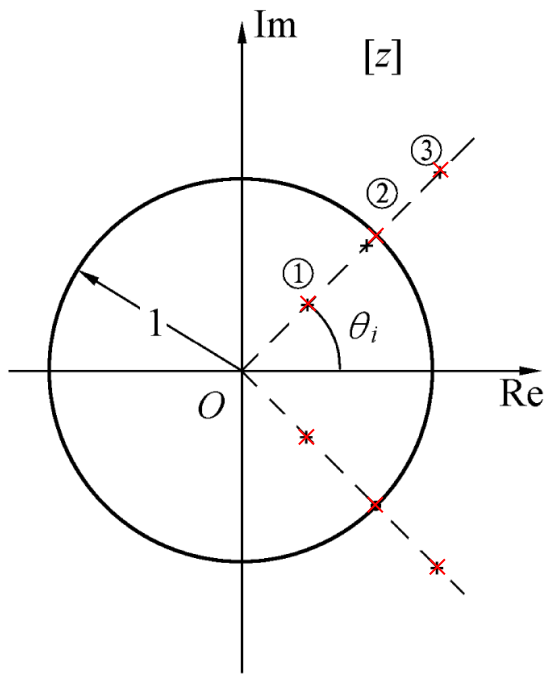


图 6.8.2 复数极点的瞬态响应

(1) 若  $\lambda_i = |p_i| < 1$ , 极点在单位圆之内, 这对共轭复数极点所对应的瞬态响应是收敛振荡的脉冲序列, 振荡的角频率为  $\theta_i/T$ ;

(2) 若  $\lambda_i = |p_i| = 1$ , 则这对共轭复数极点在单位圆上, 其瞬态响应是等幅振荡的脉冲序列, 振荡的角频率为  $\theta_i/T$ ;

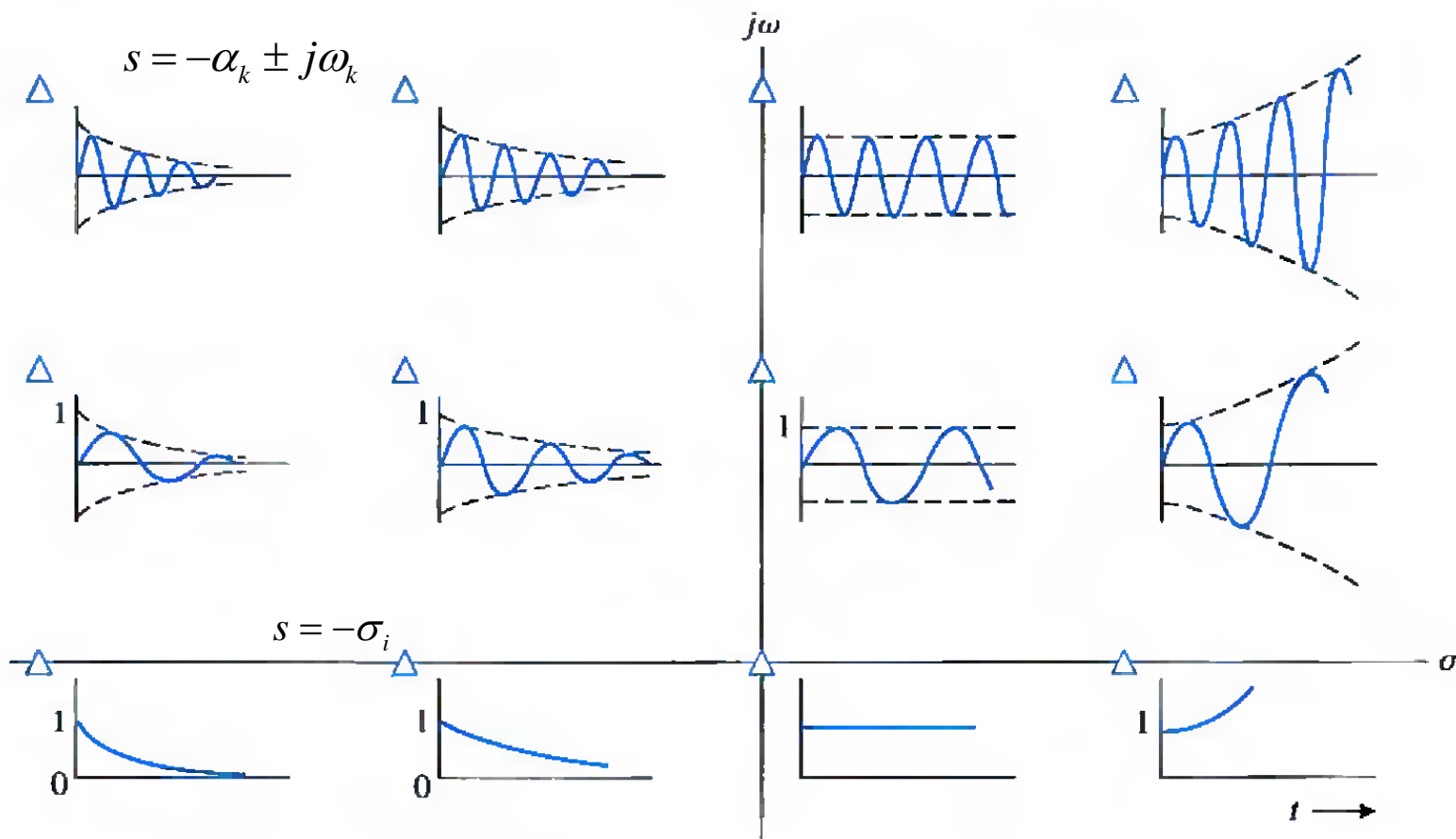
(3) 若  $\lambda_i = |p_i| > 1$ , 极点在单位圆之外, 这对共轭复数极点所对应的瞬态响应是振荡发散的脉冲序列, 振荡的角频率为  $\theta_i/T$ 。



# 3.1 传递函数时域分析

回顾连续系统的瞬态响应：振荡与极点有什么关系？

图5.17 不同位置特征根对应的脉冲响应



**FIGURE 5.17** Impulse response for various root locations in the s-plane. (The conjugate root is not shown.)



## 3.1 传递函数时域分析

离散系统：振荡与极点有什么关系？

上述振荡过程，不论是发散的、衰减的还是等幅振荡，振荡的角频率都由相角  $\theta_i$  决定。 $\theta_i$  是极点  $p_i$  与正实轴的夹角，由  $Z$  变换的定义

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

$$|z| = e^{\sigma T} \quad \angle z = \omega T$$

所以有

$$\theta_i = \omega_i T$$

于是振荡角频率为

$$\omega_i = \theta_i / T$$

思考：  
CT, DT系统极点的对应关系

角度  $\theta_i$  越小，振荡的频率越低，一个振荡周期中包含的采样周期越多；角度  $\theta_i$  越大，振荡的频率越高，一个振荡周期中包含的采样周期越少。一个振荡周期中所含采样周期的个数  $N$  可由下式求出，即

$$N = \frac{\omega_s}{\omega_i} = \frac{2\pi}{\theta_i}$$

当  $\theta_i = \pi$  时，极点在负实轴上， $\omega_i = \frac{\pi}{T} = \frac{1}{2} \omega_s$ ，对应离散系统中频率最高的振荡。这种高

频振荡即使是收敛的，也会使执行机构频繁动作，加剧磨损。所以在设计离散系统时应避免极点位于单位圆内负实轴上，或者是极点与正实轴夹角接近  $\pi$  的情况。



## 3.1 传递函数时域分析

### ► 基于脉冲传函的离散系统的瞬态响应分析

离散系统中所研究的是过渡过程中各采样时刻上的离散信号

- 求输出 $Y(z)$ ，利用 $z$ 的反变换，求解 $y^*(t)$
- 根据输出序列 $y(kT)$ ，求出动态性能指标



## 3.1 传递函数时域分析

**例 6.8.1** 一线性离散系统的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 1.0259z^{-1} + 0.4733z^{-2}}$$

输入信号  $r(t) = 1(t)$ , 采样周期  $T = 0.2$  s, 试分析该系统的动态响应。

**解**

$$r(t) = 1(t) \quad R(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

则系统输出的  $Z$  变换为

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 1.0259z^{-1} + 0.4733z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}} =$$

$$\frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 2.0259z^{-1} + 0.5526z^{-2} - 0.4733z^{-3}}$$

通过长除法, 可将  $Y(z)$  展成无穷级数形式, 即

$$Y(z) = 0.2385z^{-1} + 0.692077z^{-2} + 1.04452z^{-3} + 1.19141z^{-4} + 1.1753z^{-5} + 1.08924z^{-6} +$$

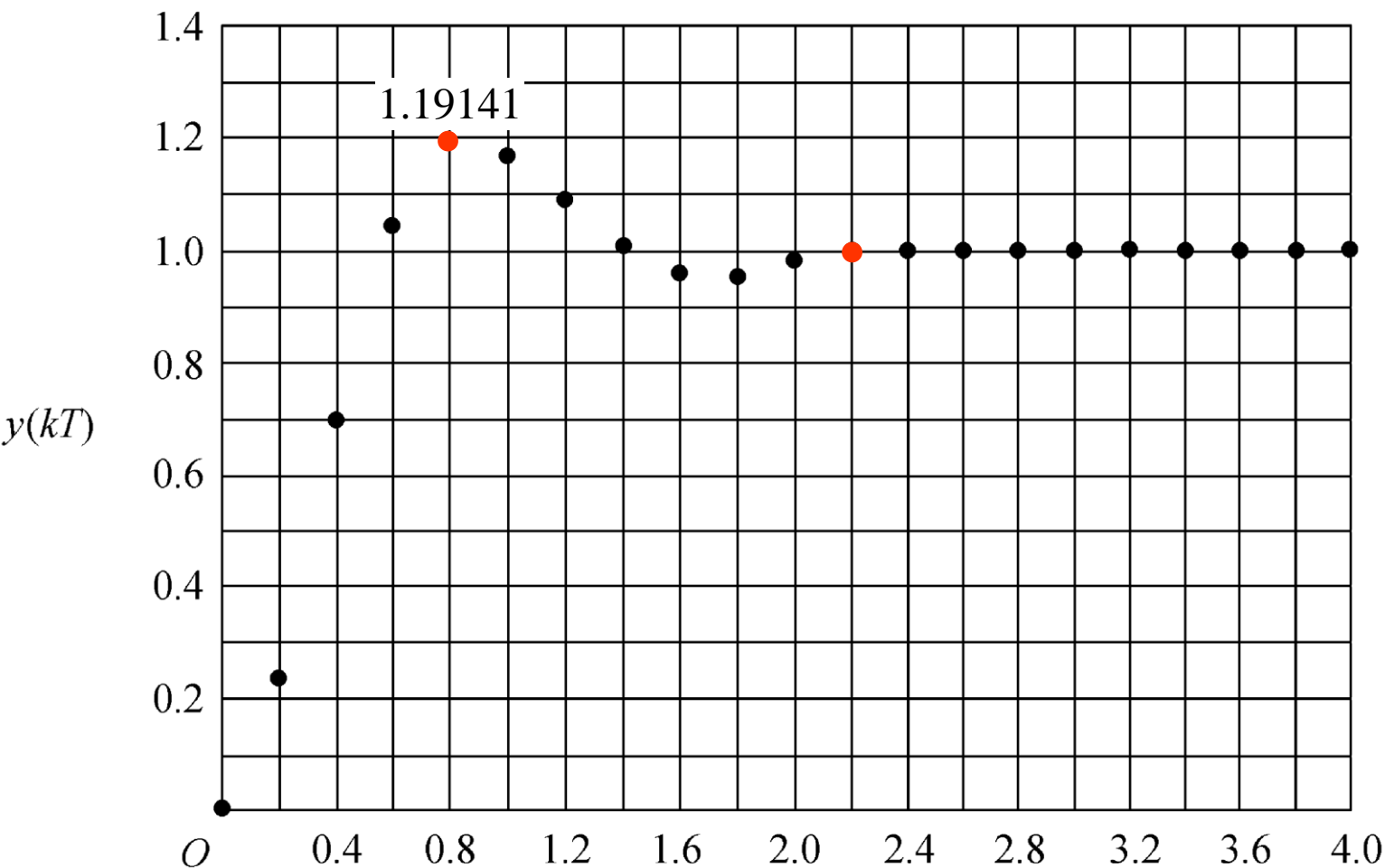
$$1.00859z^{-7} + 0.96657z^{-8} + 0.96164z^{-9} + 0.976469z^{-10} + 0.994016z^{-11} +$$

$$1.005z^{-12} + 1.00796z^{-13} + 1.0058z^{-14} + 1.00218z^{-15} + 0.99495z^{-16} +$$

$$0.998449z^{-17} + 0.998648z^{-18} + 0.999347z^{-19} + 0.99997z^{-20} + \dots$$



## 3.1 传递函数时域分析



注意：  
离散系统的性能指标只能根据采样值来计算。

$$\sigma\% \approx 19\%$$

$$t_s(2\%) \approx 2.2s$$

图 6.8.3 例 6.8.1 中离散系统单位阶跃响应





# 3.1 传

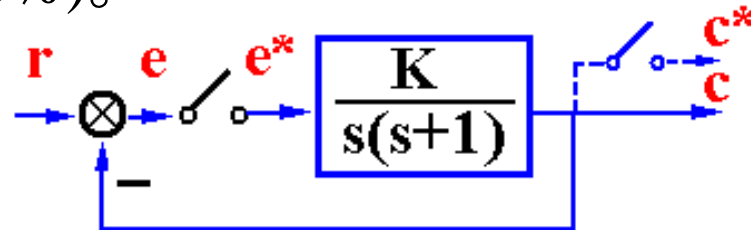
若  $Z[x(t)] = X(z)$ , 且  $(z-1)X(z)$  的全部极点都位于单位圆内

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

## A 课堂练习: 8 min



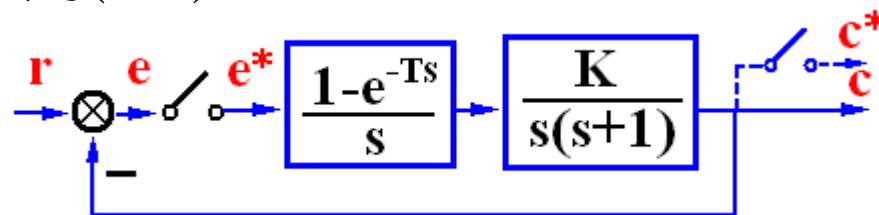
**<例3.5>**: 系统结构如图所示,  $K=1$ , 采样周期  $T=1s$ , 试求系统阶跃响应的超调量和调节时间(5%)。



## B 课堂练习: 8 min



**<例3.6>**: 系统结构如图所示,  $K=1$ , 采样周期  $T=1s$ , 试求系统阶跃响应的超调量和调节时间(5%)。

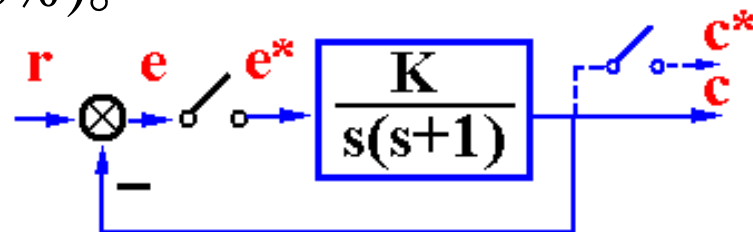




# 3.1 传递函数时域分析



**<例3.5>**: 系统结构如图所示,  $K=1$ , 采样周期  $T=1s$ , 试求系统阶跃响应的超调量和调节时间(5%)。



解: 
$$G(z) = Z \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] = \frac{K(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\stackrel{K=T=1}{=} \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$

$$c(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = 1$$

$$C(z) = \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0.632z^2}{z^3 - 1.736z^2 + 1.104z - 0.368}$$

$$c(0) = 0$$

$$c(1) = 0.632$$

$$c(2) = 1.097$$

$$c(3) = 1.207$$

$$c(4) = 1.117$$

$$c(5) = 1.014$$

$$c(6) = 0.964$$

$$c(7) = 0.970$$

$$c(8) = 0.991$$

$$c(9) = 1.004$$

$$c(10) = 1.007$$

$$c(11) = 1.003$$

$$c(12) = 1.000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_p = 3T \\ \sigma\% = 20.7\% \\ t_s = 5T \end{array} \right.$$

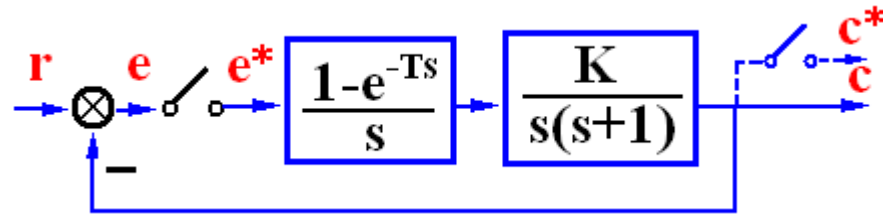
用长除法求系统单位阶跃响应序列  $c(k)$ .



# 3.1 传递函数时域分析



**<例3.6>**: 系统结构如图所示,  $K=1$ , 采样周期  $T=1s$ , 试求系统阶跃响应的超调量和调节时间(5%)。



解:

$$G(z) = K \frac{z-1}{z} Z \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right]$$

$$= K \frac{(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\stackrel{K=T=1}{=} \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

$$c(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = 1$$

$$C(z) = \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{(0.368z + 0.264)z}{z^3 - 2z^2 + 1.632z - 0.632}$$

$$c(0) = 0$$

$$c(1) = 0.3679$$

$$c(2) = 1.0000$$

$$c(3) = 1.3996$$

$$c(4) = 1.3996$$

$$c(5) = 1.1470$$

$$c(6) = 0.8944$$

$$c(7) = 0.8015$$

$$c(8) = 0.8682$$

$$c(9) = 0.9937$$

$$c(10) = 1.0770$$

$$c(11) = 1.0810$$

$$c(12) = 1.0323$$

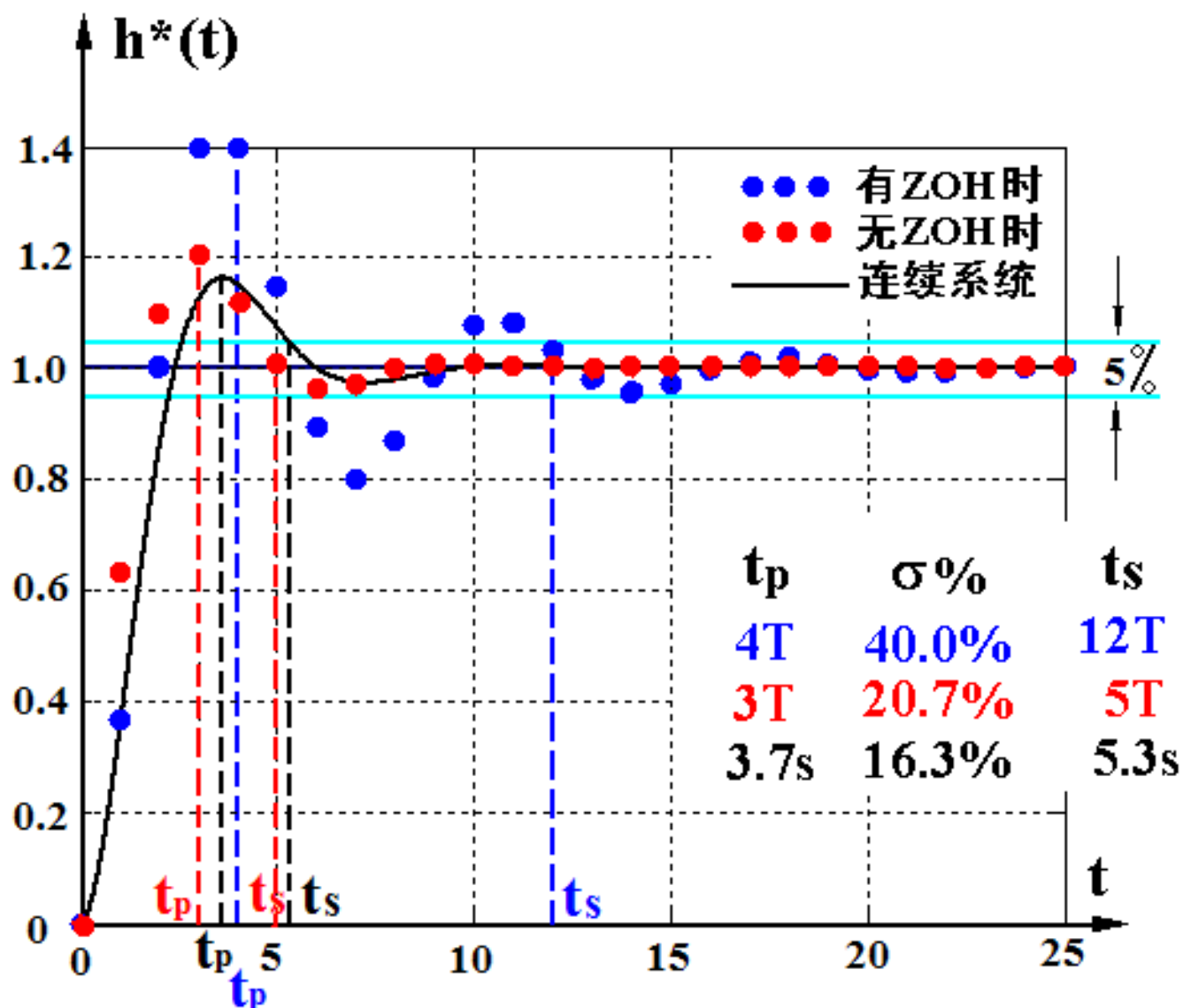
$$c(13) = 0.9811$$

$$c(14) = 0.9607$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_p = 4T \\ \sigma\% = 40\% \\ t_s = 12T \end{array} \right.$$



# 3.1 传递函数时域分析





10.19 (Thu)

## 第14讲

特征根、特征向量  
约旦标准型  
坐标变换 等

郑大钟：2.5,2.6,2.8



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### □ 连续线性时不变系统(LTI)的时域分析

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \text{状态方程}$$

$$t \geq 0, x_0 = x(0)$$

$$\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^m$$

参考：  
郑大钟：第3章  
裴、润：第8章

系统的运动分析/时域分析：本质上是求解系统状态方程，以解析形式或数值形式，建立系统状态随着输入和初始状态的演化规律，特别是对系统结构和参数的依赖关系

解的存在性和唯一性：输入向量 $\mathbf{u}(t)$ 的各个元素在时间定义区间上平方可积

$$\int_{t_0}^{t_a} [u_i(t)]^2 dt < \infty, \quad i = 1, \dots, m$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### 线性系统满足叠加性原理

零输入响应:  $\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad x_{0u}(t) = \phi(t, t_0, x_0, 0)$   
(自由运动)

零状态响应:  $x_{0x}(t) = \phi(t, t_0, 0, u)$   
(强迫运动)

系统响应:  $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, 0) + \phi(t, t_0, 0, u)$

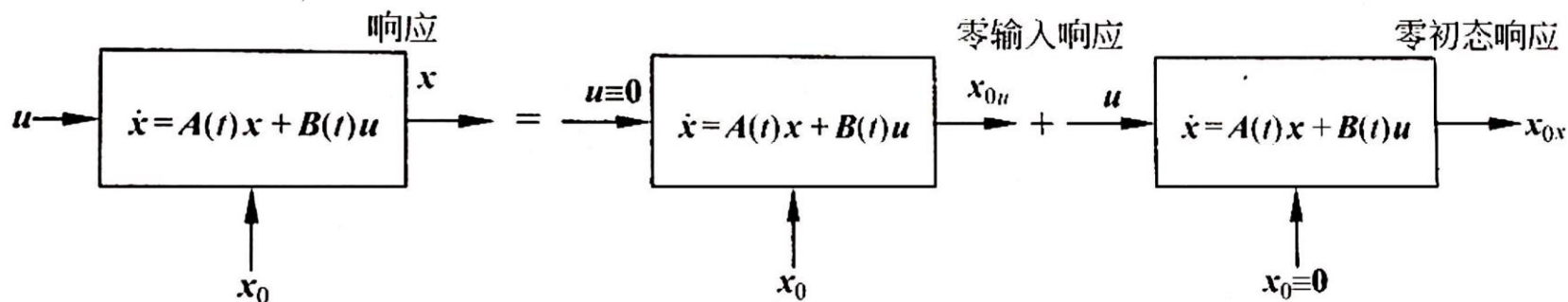


图 3.1 线性系统运动的分解



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 零输入响应

如：卫星在未级火箭脱落后的轨迹

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad \leftarrow \underline{u=0} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

连续时间LTI系统的  
零输入响应具有如  
下表达式

$$x(t) = e^{At} x_0$$

其中

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

$$e^a \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e^a \triangleq 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

$$e^A \triangleq I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$\sum_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$





## 3.2 基于状态空间的时域分析

证明：假设方程的解是系数待定的一个幂级数

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots \quad (1)$$

其中  $b_0 = x(0) = x_0$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots \quad (2)$$

将(1)(2)代入状态方程得：

$$b_1 + 2b_2 t + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots) \quad (3)$$

由(3)可得：
$$b_k = \frac{1}{k!} A^k b_0 = \frac{1}{k!} A^k x_0$$

因此 
$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots) x_0 = e^{At} x_0$$

课后思考：为什么  
可以做此假设？



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 矩阵指数函数的性质

注意：  
证明需从定义出发

$$(1) \quad e^{At} \Big|_{t=0} = I$$

$$(2) \quad e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau}$$

$$(3) \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

$$(4) \quad \mathbf{AF} = \mathbf{FA} \rightarrow \underline{e^{(A+F)t} = e^{At} e^{Ft} = e^{Ft} e^{At}}$$

注意：如果A, F不可交换，则此式不成立

$$(5) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

$$(6) \quad \frac{d}{dt} (e^{At})^{-1} = \frac{d}{dt} e^{-At} = -A e^{-At} = -e^{-At} A$$

$$(7) \quad (e^{At})^m = e^{A(mt)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 矩阵指数函数的性质

注意：  
证明需从定义出发

(8) 如果 $A$ 是 $n \times n$ 阶对角阵，则 $e^{At}$ 也是 $n \times n$ 阶对角阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \implies e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 矩阵指数函数的计算

#### (1) 定义法

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

#### (2) 特征根法—distinct eigenvalues

适合于计算机编程

给定矩阵 $A$ ，其 $n$ 个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 两两相异，令由 $A$ 的属于各个特征根的右特征向量组成的变换矩阵为 $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ ，则

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

郑大钟教材P91

证 上一章关于约当规范形讨论中已经证明,对特征值两两相异情形,基于(3.30)的变换阵,可以导出:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

通常用  $\mathbf{\Lambda}$  表示对角矩阵

将上式左乘  $\mathbf{P}$  和右乘  $\mathbf{P}^{-1}$ ,得到:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (3.32)$$

基此,进而还可导出:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (3.33)$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^3 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (3.34)$$

.....

于是,由  $e^{\mathbf{A}t}$  定义式(3.13),并利用上述导出的关系式,即可证得:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots \\ &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 t^2 + \frac{1}{3!}\lambda_1^3 t^3 + \dots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n t + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 t^2 + \frac{1}{3!}\lambda_n^3 t^3 + \dots \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

至此,证明完成。



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 矩阵指数函数的计算

#### (2) 特征根法—重根情况

简便起见，假设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ ，其特征根  $\lambda_1$  具有代数重数**3**和几何重数**1**，另一特征根  $\lambda_2$  具有代数重数**2**和几何重数**1**。标记由矩阵  $A$  的属于  $\lambda_1, \lambda_2$  的广义特征向量所构成的变换矩阵为  $Q$ ，且

$$A = Q \left[ \begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right] Q^{-1}$$

$$\text{则 } e^{At} = Q \left[ \begin{array}{ccc|cc} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array} \right] Q^{-1}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析



特征根的代数重数 (algebraic multiplicity)

特征根  $\lambda_i$  的代数重数  $\sigma_i$ :  $A$  的特征根中值为  $\lambda_i$  的特征根的个数

$$\sigma_i \triangleq \left\{ \sigma \in \mathbb{Z} \mid \det(sI - A) = (s - \lambda_i)^{\sigma_i} \beta_i(s), \quad \beta_i(\lambda_i) \neq 0 \right\}$$

特征根的几何重数 (geometric multiplicity)

特征根  $\lambda_i$  的几何重数  $\alpha_i$ :  $\alpha_i \triangleq n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$

矩阵  $(\lambda_i I - A)$  右零空间: 满足  $(\lambda_i I - A)h = 0$  的非零向量  $h$  的集合

$(\lambda_i I - A)$  的右零空间的维数 = 特征根  $\lambda_i$  的几何重数

特征根  $\lambda_i$  对应的特征向量所构成的空间 (i.e., 特征子空间) 的维数

特征根的代数重数和几何重数的关系

$\lambda_i$  为单根:  $\sigma_i = \alpha_i = 1$

$\lambda_i$  为重根:  $1 \leq \alpha_i \leq \sigma_i$





## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 矩阵指数函数的计算

#### (3) 预解矩阵法/拉氏变换法

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$



$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$



$$(sI - A)X(s) = x(0)$$



$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x(0)$$



$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

$$x(t) = e^{At}x(0)$$





## 3.2 基于状态空间的时域分

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**<例3.7>**: 分别用特征根法和拉普拉斯变换法求解状态方程

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

课堂练习: 6 min

1. 特征根法:

求出矩阵的特征根  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$

特征根对应的右特征向量  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

变换矩阵  $P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{验证: } A = P \Lambda P^{-1} = P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

求矩阵指数函数  $e^{At}$


系统的零输入相应为：

$$x(t) = e^{At} x_0$$



## 3.2 基于状态空间的时域分

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

 **<例3.7>**: 分别用特征根法和拉普拉斯变换法求解状态方程

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

课堂练习: 6 min

2. 拉普拉斯法:

$$(sI - A)^{-1}$$


$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[ (sI - A)^{-1} \right] =$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} x_0 =$$



## 3.2 基于状态空间的时域分

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

 **<例3.7>**: 分别用特征根法和拉普拉斯变换法求解状态方程

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

课堂练习: 6 min

2. 拉普拉斯法:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[ (sI - A)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$



# 3.2 基于状态空间的时域分

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**<例3.8>**: 求解状态方程

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

课堂练习: 6 min

解:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}$$



$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 4} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \\ 2 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} & \frac{s}{s^2 + 4} \end{bmatrix}$$



$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 4} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \\ 2 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} & \frac{s}{s^2 + 4} \end{bmatrix}$$



$$x(t) = e^{At} x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2} \sin 2t \\ 2 \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2} \sin 2t \\ 2 \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 零状态响应

考虑系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $x(0) = 0$ ,  $t \geq 0$ , 其中  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$

则该系统的零状态响应为

$$x_{0x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

证明:  $\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = \frac{d}{dt}(e^{-At})x + e^{-At}\frac{dx}{dt} = e^{-At}(-Ax) + e^{-At}(Ax + Bu) = e^{-At}Bu$

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \xrightarrow{x(0)=0} e^{-At}x(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\longrightarrow x(t) = \int_0^t e^{At}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析



**<例3.9>**: 如以下线性时不变系统, 求单位阶跃输入下, 系统方程的解。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad \text{课堂练习: 6 min}$$

解:  $X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$

$$\downarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} X(s) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$





## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 系统状态运动规律的基本表达

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$



$$x(t) = x_{0u} + x_{0x}(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 基于特征结构的状态响应表达

假设系统矩阵  $A$  的特征根两两相异

$$\text{右特征向量 } A v_i = \lambda_i v_i$$

$$\text{左特征向量 } w_i^T A = w_i^T \lambda_i$$

$$\text{右特征向量矩阵 } P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1^T \\ \bar{v}_2^T \\ \vdots \\ \bar{v}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \bar{v}_i^T = I$$

$$\text{左特征向量矩阵 } T = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = [\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n]$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{w}_i w_i^T = I$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 对于特征值两两相异的n维连续时间LTI系统

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n v_i \bar{v}_i e^{\lambda_i t}$$

证明:

$$e^{At} = P e^{\Lambda t} P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \bar{v}_i e^{\lambda_i t}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 对于特征值两两相异的n维连续时间LTI系统

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \bar{w}_i^T e^{\lambda_i t}$$

证明:

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \bar{w}_i w_i^T e^{\lambda_i t}
 \end{aligned}$$



10.24 (Tue)

第15讲



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 基于特征结构的零输入响应（特征根两两相异）

$$x_{0u}(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^n \left( v_i \bar{v}_i^T \right) x_0 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0$$

$$x_{0u}(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^n \left( \bar{w}_i w_i^T \right) x_0 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0$$

- 基于特征结构的零状态响应（特征根两两相异）

$$x_{0x}(t) = \sum_{i=1}^n \left( v_i \bar{v}_i^T \right) \left[ \sum_{j=1}^p b_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0$$

$$x_{0x}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \bar{w}_i w_i^T \right) \left[ \sum_{j=1}^p b_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 基于特征结构的状态响应（特征根两两相异）

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \left( v_i \bar{v}_i^T \right) \left[ x_0 e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^p b_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0$$

或

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \left( \bar{w}_i w_i^T \right) \left[ x_0 e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^p b_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 结论

### (1) 特征值对状态响应的影响

状态响应的运动模式主要由特征值决定。对实数特征值，运动模式为指数函数模式；共轭复数特征值，对应指数正余弦函数形式；特征值具有负实部，则运动模式随时间单调地或振荡地衰减至稳态过程；特征值具有正实部，则运动模式随时间单调地或振荡地扩散到无穷大而不能达到稳态。

课下思考：

系统矩阵的特征值与相应传递函数的极点有什么关系？





## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 结论

### (2) 特征向量对状态响应的影响

状态响应可以看成是各个特征值相应运动模式的一个线性组合，特征向量的影响体现于对于不同运动模式的“权重”上。特征向量对状态响应的影响本质上属于“量”而非“质”的范畴，即只能影响各个运动模式在组合中的比重，一般不能影响各个运动模式本身。

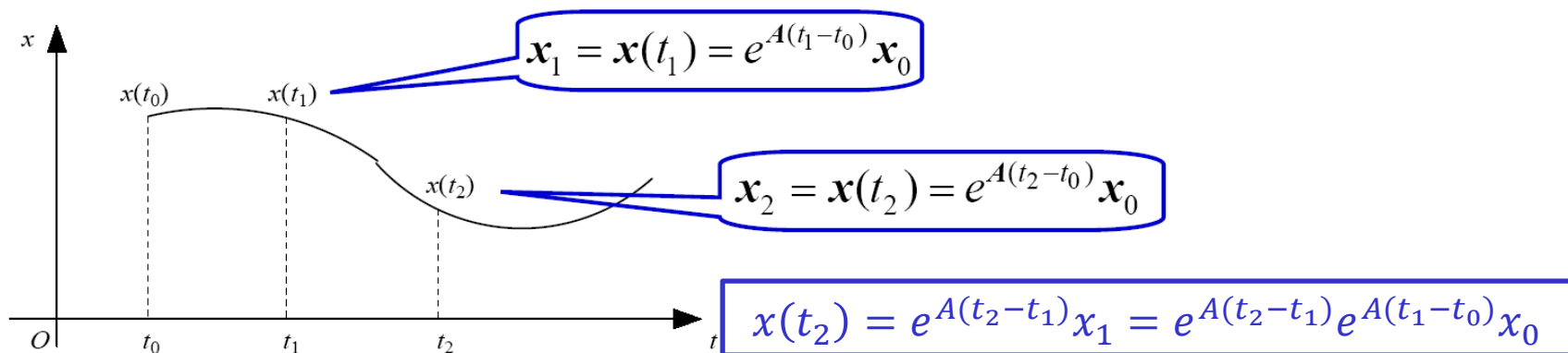


## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► LTI系统的状态转移矩阵

对于齐次状态方程，若有  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ ，则称  $\Phi(t, t_0)$  为系统的状态转移矩阵。系统做自由运动时，它的运动形态唯一由状态转移矩阵决定，它包含了系统自由运动的全部信息。

$\dot{x}(t) = Ax(t)$  的状态轨线  $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$



$$x(t) = \underline{\Phi(t, t_0)}x_0 = e^{A(t-t_0)}x_0$$



状态转移矩阵：将初始状态转移到终值状态



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 状态转移矩阵的定义 (参考: 郑大钟 P102)

$$\text{考虑 } \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0$$

定义系统的状态转移矩阵为下列矩阵方程的解  $\Phi(t, t_0)$

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

- 状态转移矩阵的特性

(1) 状态转移矩阵的初始阵:  $\Phi(0) = \Phi(t_0, t_0) = I$

(2) 状态转移矩阵的逆:  $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t),$

(3) 状态转移矩阵的传递性:  $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$

- (3) 状态转移矩阵对时间求导:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0)A$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► LTI系统的状态响应和输出响应

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) Bu(\tau) d\tau$$

$$y(t) = C\Phi(t, t_0)x_0 + C \int_{t_0}^T \Phi(t, \tau) Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

零输入响应

零状态响应

直接传输部分



# 3.2 基

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) Bu(\tau) d\tau$$

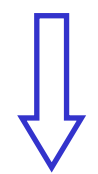
## 离散系统的时域分析

参考：  
 裴、润 8.10  
 郑大钟 3.6、3.7

### 连续系统状态方程的离散化

线性定常连续系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$



离散方程

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

目的：  
 $x(k) = x(t)|_{t=kT}$   
 $u(k) = u(t)|_{t=kT}$

思考：G=?, H=? →  $x(k+1) = x(t)|_{t=(k+1)T}$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

定理 8.10.2 线性连续定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} & t \geq 0 \end{cases}$$

的时间离散化模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

其中

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{H} = \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B}$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(t)|_{t=kT}, \quad \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(t)|_{t=kT}, \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(t)|_{t=kT}$$

注：时间离散化不改变系统的时变或时不变属性。



## 3.2 基于状态空间的时域分析

**例 8.10.1** 给定线性连续定常系统

$$(郑: 例3.4) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad t \geq 0$$

且采样周期  $T = 0.1$  s, 试建立其时间离散化模型。

**解** 首先定出给定连续的矩阵指数函数  $e^{At}$ 。考虑到

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

对其求拉普拉斯反变换, 即得

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[ (sI - A)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

$$G = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H &= \left( \int_0^T e^{At} dt \right) B = \left( \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} T & 0.5T + 0.25e^{-2T} - 0.25 \\ 0 & -0.5e^{-2T} + 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0.5T + 0.25e^{-2T} - 0.25 \\ -0.5e^{-2T} + 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是离散化后的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$





## 3.2 基于状态空间的时域分析

► 线性时不变离散系统状态方程的解

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0 \quad (8.10.24)$$

- 迭代法

**定理 8.10.3** 对于由(8.10.24)所描述的线性定常离散系统,其状态运动的表达式为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(i) \quad (8.10.25)$$

或

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^i \mathbf{H} \mathbf{u}(k-i-1) \quad (8.10.26)$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0)$$

$$x(2) = Gx(1) + Hu(1)$$

$$x(3) = Gx(2) + Hu(2)$$

⋮

$$x(k) = Gx(k-1) + Hu(k-1)$$

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0)$$

$$x(2) = G \color{blue}{Gx(0) + Hu(0)} + Hu(1) = G^2 x(0) + GHu(0) + Hu(1)$$

$$x(3) = G \color{blue}{G^2 x(0) + GHu(0) + Hu(1)} + Hu(2) = G^3 x(0) + G^2 Hu(0) + GHu(1) + Hu(2)$$

⋮

$$x(k) = Gx(k-1) + Hu(k-1) = G^k x(0) + G^{k-1} Hu(0) + G^{k-2} Hu(1) + \dots + Hu(k-1)$$

$$x(k) = G^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} G^i Hu(k-i-1) = G^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} G^{k-i-1} Hu(i)$$

零输入响应

零状态响应



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- Z变换法

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

$$zX(z) - zx_0 = GX(z) + HU(z)$$

$$zI - G \quad X(z) = zx_0 + HU(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{zI - G} zx_0 + \frac{1}{zI - G} HU(z)$$

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \frac{1}{zI - G} z x_0 + \mathcal{Z}^{-1} \frac{1}{zI - G} HU(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \frac{1}{zI - G} z = G^k$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \frac{1}{zI - G} HU(z) = \sum_{i=0}^{k-1} G^i Hu(k-i-1)$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析



**<例3.10>**: 考虑以下离散时间线性时不变系统，分别用迭代法和 $Z$ 变换法求系统方程的解。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$u(k) = 1, (k = 0, 1, 2, \dots); \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



# 线性定常离散系统状态方程的解

解：（迭代法）

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = Gx(1) + Hu(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = Gx(2) + Hu(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{bmatrix}$$

⋮

$$x(k) = Gx(k-1) + Hu(k-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



# 线性定常离散系统状态方程的解

解：(z变换法)

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ (zI - G)^{-1} z \right\} x(0) + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ (zI - G)^{-1} H u(z) \right\}$$

$$|zI - G| = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{vmatrix} = z^2 + z + 0.16 = (z + 0.2)(z + 0.8)$$

$$(zI - G)^{-1} = \frac{1}{(z + 0.2)(z + 0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}$$

$$X(z) = (zI - G)^{-1} [zx(0) + HU(z)]$$

$$= \frac{1}{(z + 0.2)(z + 0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix} \left\{ z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} \right\}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z^2 + 2)z}{(z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1)} \\ \frac{(-z^2 + 1.84z)z}{(z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{17}{6}z}{z + 0.2} + \frac{\frac{22}{9}z}{z + 0.8} + \frac{\frac{25}{18}z}{z - 1} \\ \frac{\frac{3.4}{6}z}{z + 0.2} + \frac{-\frac{17.6}{9}z}{z + 0.8} + \frac{\frac{7}{18}z}{z - 1} \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{bmatrix}, \dots$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

### ► 离散系统的状态转移矩阵

对于离散时间线性时不变系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

其状态转移矩阵定义为下列矩阵方程的解：

$$\Phi(k+1) = G\Phi(k), \quad \Phi(0) = I$$

即：  $\Phi(k) = G^k$

- 状态转移矩阵求法-定义法

$$\Phi(k) = G^k$$





## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 状态转移矩阵求法—z变换法

$$\Phi(k) = G^k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1} z]$$

- 状态转移矩阵求法—化矩阵G为标准型

### Case 1: G的特征根为单根

当离散系统矩阵  $G$  的特征根均为单根时，经过变换矩阵  $P$  可将系统矩阵  $G$  化为对角线标准形，即

$$P^{-1}GP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

如何求  $P$  ?

参考:

矩阵的约旦标准型

$$\longrightarrow \Phi(k) = G^k = P\Lambda^k P^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

**<例3.11>**: 考虑以下离散时间线性时不变系统，求其状态

转移矩阵  $\Phi(k)$ 。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} x(k)$$

解： 求解系统的特征方程

$$|\lambda I - G| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0.16 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 0.2)(\lambda + 0.8) = 0$$

得其特征根为：  $\lambda_1 = -0.2$ ,  $\lambda_2 = -0.8$

特征根所对应的特征向量分别为：  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$   $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}$

化系统矩阵  $G$  为对角线标准形的变换矩阵  $P$  为

$$P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

$$\text{求得 } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{因为 } P^{-1}GP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} = \Lambda$$

$$\text{所以 } G = P\Lambda P^{-1}$$

系统的转移矩阵为

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= G^k \\ &= P\Lambda^k P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4(-0.2)^k - (-0.8)^k & 5(-0.2)^k - 5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k + 0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k + 4(-0.8)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## 3.2 基于状态空间的时域分析

- 状态转移矩阵求法—化矩阵**G**为标准型

Case 2: **G**的特征根有重根

$$\Phi(k) = G^k = QJ^k Q^{-1}$$

式中 **J**—约旦标准形；

**Q**—化系统矩阵**G**为约旦标准形的变换矩阵。

- 状态转移矩阵求法—化为**G**的有限项

应用凯莱-哈密尔顿定理，系统矩阵 **G** 满足其自身的零化多项式。离散系统状态转移矩阵可化为**G**的有限项，即

$$\Phi(k) = \alpha_0(k)I + \alpha_1(k)G + \alpha_2(k)G^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(k)G^{n-1}$$

式中 $\alpha_i(k)$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ )为待定系数，可仿照连续系统的方法来求



# 补充知识

约旦标准型的幂 (参考Brogan “Modern Control Theory” , pp.293)

## *Powers of a Jordan Block*

Let  $\mathbf{J}_1$  be an  $m \times m$  Jordan block. Show that for any integer  $k > 0$ ,

$$\mathbf{J}_1^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-2} & \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)\lambda^{k-3} & \dots & \frac{k!\lambda^{k-m+1}}{(k-m+1)!(m-1)!} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-2} & & \\ 0 & 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & k\lambda^{k-1} \\ & & & & & \lambda^k \end{bmatrix}$$



With  $k = 1$ ,  $\mathbf{J}_1$  satisfies the preceding equation. To see this, it must be recalled that  $(k - m + 1)! = \infty$  if  $k - m + 1 < 0$ . Multiplying gives  $\mathbf{J}_1$  squared:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_1^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 \\ \vdots & & & & & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

Use induction, assuming the stated form holds for  $k$ , and show that it holds for  $k + 1$  by computing

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-2} & \cdots \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^k & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-1} + k\lambda^{k-1} & \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)\lambda^{k-2} + \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda^{k-2} & \cdots \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

But

$$\left[ \frac{1}{2!}k(k-1) + k \right] \lambda^{k-1} = \frac{k}{2!}(k-1+2)\lambda^{k-1} = \frac{(k+1)k}{2!}\lambda^{k-1}$$

$$\left[ \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2) + \frac{1}{2!}k(k-1) \right] \lambda^{k-2} = \frac{1}{3!}k(k-1)(k+1)\lambda^{k-2}$$

etc.

so the stated result holds.



# 补充知识

## 凯莱-哈密尔顿定理 (Caley-Hamilton Theorem)

若  $n \times n$  矩阵  $A$  的特征方程为

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0$$

则矩阵  $A$  必为其特征方程的一个“矩阵根”，即：

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1A + \alpha_0I = 0$$

注意：该定理揭示了对于  $n \times n$  矩阵  $A$ ，有且仅有  $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$  线性无关，所有  $A^i (i = n, n+1, \dots)$  均可表示为它们的线性组合。

(参考 Brogan “Modern Control Theory” , pp.284)



凯莱-哈密尔顿定理揭示了对于  $n \times n$  矩阵  $A$ , 有且仅有  $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$  线性无关, 所有  $A^i (i = n, n+1, \dots)$  均可表示为它们的线性组合。

(课后阅读: Brogan书 PP.288-290)

**EXAMPLE 8.8** Let  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$ . Compute  $P(A) = A^4 + 3A^3 + 2A^2 + A + I$ .

*Method 2:* From the Cayley-Hamilton theorem,

$$A^2 - 5A + 5I = [0] \quad \text{or} \quad A^2 = 5(A - I)$$

Hence

$$A^4 = A^2 A^2 = 25(A - I)(A - I) = 25(A^2 - 2A + I) = 25[5(A - I) - 2A + I] = 25[3A - 4I]$$

$$A^3 = A(A^2) = 5(A^2 - A) = 5[5(A - I) - A] = 5[4A - 5I]$$

Thus

$$P(A) = 25[3A - 4I] + 15[4A - 5I] + 10(A - I) + A + I = 146A - 184I \quad \blacksquare$$





凯莱-哈密尔顿定理揭示了对于  $n \times n$  矩阵  $A$ , 有且仅有  $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$  线性无关, 所有  $A^i (i = n, n+1, \dots)$  均可表示为它们的线性组合。

(课后阅读: Brogan书 PP.288-290)

**EXAMPLE 8.8** Let  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$ . Compute  $P(A) = A^4 + 3A^3 + 2A^2 + A + I$ .

*Method 1:* By long division,

$$\frac{P(x)}{\Delta(x)} = x^2 + 8x + 37 + \frac{146x - 184}{x^2 - 5x + 5} \quad \text{or} \quad P(x) = (x^2 + 8x + 37)\Delta(x) + (146x - 184)$$

Therefore,  $R(x) = 146x - 184$  and the Cayley-Hamilton theorem guarantees that  $P(A) = R(A) = 146A - 184I$ .



# 补充知识

## ► 矩阵指数函数 $e^A$ 的计算

### (4) 利用凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理计算

$$e^{At} = I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots$$



仅有  $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$  线性无关

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$$

① 当  $A$  为  $n$  阶方阵, 且具有互异特征值  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 则

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (8.4.9)$$



# 补充知识

a的多项式，最高  
次幂为n-1

$$p(a) = e^{at} = 1 + at + \frac{t^2}{2!}a^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}a^k + \cdots = f(a)\Delta(a) + q(a)$$

$$p(A) = e^{At} = q(A) = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$$

A的特征多项式.

$$p(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} = q(\lambda_1) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}$$

$$\Delta(\lambda_i) = 0$$

$$\Delta(A) = 0$$

$$e^{\lambda_n t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$



# 补充知识

## ► 矩阵指数函数 $e^A$ 的计算

### (4) 利用凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理计算

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$$

② 当  $A$  具有重特征值但为循环阵时,如其特征值为  $\lambda_1$ (三重),  $\lambda_2$ (二重) 和  $\lambda_3, \dots, \lambda_{n-3}$ , 此时有

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!} \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_2^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!} \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-3} & \lambda_{n-3}^2 & \lambda_{n-3}^3 & \cdots & \lambda_{n-3}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{n-3} t} \end{bmatrix}$$

**EXAMPLE 8.10**

Find the closed form expression for  $e^{At}$  if  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 27 & -27 & 9 \end{bmatrix}$ .

We have

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \Delta(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = (3 - \lambda)^3$$

Therefore,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ , and

$$e^{At} = R(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2$$

$$e^{\lambda t} = R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2$$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = t e^{\lambda t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} e^{\lambda t} = t^2 e^{\lambda t} = 2\alpha_2$$

$$\lambda = 3$$

$$e^{3t} = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2$$

$$t e^{3t} = \alpha_1 + 6\alpha_2$$

$$t^2 e^{3t} = 2\alpha_2$$

Solving for  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , and  $\alpha_2$  gives

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} t^2 e^{3t}, \quad \alpha_1 = t e^{3t} - 6\alpha_2 = (t - 3t^2) e^{3t},$$

$$\alpha_0 = e^{3t} - 3\alpha_1 - 9\alpha_2 = (1 - 3t + \frac{9}{2} t^2) e^{3t}$$

Using these coefficients in  $R(\mathbf{A})$  gives

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 - 3t + \frac{9}{2} t^2 & t - 3t^2 & \frac{1}{2} t^2 \\ \frac{27}{2} t^2 & 1 - 3t - 9t^2 & t + \frac{3}{2} t^2 \\ 27t + \frac{81}{2} t^2 & -27t - 27t^2 & 1 + 6t + \frac{9}{2} t^2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

参考

Brogan “Modern Control Theory”



哈爾濱工業大學(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

# 自动控制理论 A

## (Principles of Automatic Control)

主讲人：张宏伟、张颖

机电工程与自动化学院

哈尔滨工业大学(深圳)



# 课程半期复习

10. 26 (Thu)

第16讲



# 课程体系结构

## 自动控制理论A: 自动控制系统模型与分析

系统数学  
模型描述

离散系统模型  
状态空间模型  
传递函数模型  
微分方程模型

控制系统  
时域分析

基于状态方程的分析  
基于脉冲传函数的分析  
基于传函数的分析

系统稳定  
性分析

稳态误差分析  
基于根轨迹的稳定性  
基于状态空间的稳定性  
基于传函数的稳定性

系统频域  
分析

闭环系统稳定性分析  
控制系统的频率特性  
频率特性





# 课程体系结构

## 线性时不变系统的模型

		连续系统	离散系统	
输入输出模型	微分方程	$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$ $a_i (i = 0, 1, \dots, n), b_j (j = 0, 1, \dots, m)$ 均为实数	差分方程	$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_2 y(k+n-2) + \dots + a_n y(k) = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_m r(k)$
	传递函数	$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{r(t)\}}$	脉冲传递函数	$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[y^*(t)]}{\mathcal{Z}[x^*(t)]} = \frac{Y(z)}{X(z)}$
	方框图		方框图	
	信号流图	$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$		
状态空间模型	$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$	$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$		



# 补充知识：约旦标准型

当矩阵 $A$ 的特征根两两相异(or simple eigenvalues), 则其与一对角矩阵相似 / 可以对角化

当矩阵 $A$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是 $A$ 的最小多项式没有重根。

$A$ 的最小多项式：对于 $N$ 阶矩阵 $A$ ，次数最低的首项系数为1的以 $A$ 为根的多项式。

当矩阵 $A$ 的特征根有重根时(repeated eigenvalues), 则其与一约旦矩阵相似, 该约旦矩阵可能是对角矩阵



## 补充知识：约旦标准型

例：求矩阵A的最小多项式  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解：其特征多项式为  $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^3$

所以A的最小多项式为  $(\lambda - 1)^3$  的因式

$$\text{因为 } A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0$$

所以A的最小多项式为  $(\lambda - 1)^2$ 。



# 补充知识：约旦标准型

一个4阶的约旦块 (Jordan block)  $J \triangleq$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

对应的特征多项式为  $\Delta(J) = \det(sI - J) = (s - \lambda)^4$

$$(\lambda I - J) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda I - J)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda I - J)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - J)^4 = 0$$

**幂零矩阵 (nilpotent)** : 若存在正整数 $k$ , 使得  $A^k = 0$ , 则称 $A$ 为幂零矩阵。

$J$  的最小多项式为  $(s - \lambda)^4$



# 补充知识：约旦标准型

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_1 & \vdots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$  代数重数：4  
几何重数：1

$$\alpha = n - \text{rank}(\lambda_1 I - A) = 5 - 4 = 1$$

特征向量：1  
广义特征向量：4-1=3

$\lambda_1$  代数重数：4  
几何重数：2  
特征向量：2  
广义特征向量：4-2=2



# 补充知识：约旦标准型

$$\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$  代数重数：4  
几何重数：2  
特征向量：2  
广义特征向量：4-2=2

$$\hat{A}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_1 & \vdots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_1 & \vdots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$  代数重数：4  
几何重数：3  
特征向量：3  
广义特征向量：4-3=1

$$\hat{A}_5 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$  代数重数：4  
几何重数：4  
特征向量：4



# 补充知识：约旦标准型

**特征向量**  $(\lambda_i I - A)v_i = 0$  (郑大钟, 线性系统理论第2版, pp52)

矩阵A的与特征根 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 对应的一组特征向量 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 线性无关, 当且仅当特征根 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 两两相异。

如何证明？

## 广义特征向量

若 $\lambda_i$ 为n维矩阵A的一个 $\sigma_i$ 重特征根, 则A的属于 $\lambda_i$ 的k级广义右特征向量为

满足 $\{(\lambda_i I - A)^k v_i = 0, (\lambda_i I - A)^{k-1} v_i \neq 0\}$ 的非零向量



# 补充知识：约旦标准型

**EXAMPLE 7.4** Find the eigenvalues, eigenvectors, generalized eigenvectors, if needed, and the Jordan form for the companion form matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -20 & -18 & -7 \end{bmatrix}$$

特征方程：  $\lambda^4 + 7\lambda^3 + 18\lambda^2 + 20\lambda + 8 = 0$

特征根：  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -2$

特征向量：  $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = [-1, 1, -1, 1]^T$   $\lambda_1$  对应的特征向量

$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})x_2 = 0 \longrightarrow x_2 = [1, -2, 4, -8]^T$   $\lambda_2$  对应的特征向量

$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})x_3 = x_2 \longrightarrow x_3 = [1, -1, 0, 4]^T$   $\lambda_2$  对应的广义特征向量

$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})x_4 = x_3 \longrightarrow x_4 = [1, -1, 1, -2]^T$   $\lambda_2$  对应的广义特征向量

令  $\mathbf{Q} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$





# 补充知识：约旦标准型

$$Q = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -20 & -18 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J$$

约旦/约当/若尔当 标准型  
Jordan normal form  
Jordan canonical form



# 补充知识：约旦标准型

$$Q = [x_1 \quad \underline{x_4 \quad x_3 \quad x_2}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 & -1 \\ -4 & -8 & -5 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -20 & -18 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & 1 & -2 & \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



# 补充知识：约旦标准型

$$Q = [x_1 \quad \underline{x_4 \quad x_2 \quad x_3}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 & -1 \\ -4 & -8 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -20 & -18 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -8 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & & -2 & 1 \\ & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



期末 再见

# 《自动控制理论A》 (10~17周)

---

- 主讲教师: 张颖 (A504)  
Email: [zhangyinghit@hit.edu.cn](mailto:zhangyinghit@hit.edu.cn)  
Tel: 13528420050
  
  - 助教: 张嘉灏 (A407)  
Email: 1584746540@qq.com  
Tel: 18027447505
  
  - 助教: 姜博涛 (A407)  
Email: 3028660989@qq.com  
Tel: 18744378339
  
  - 助教: 龙飞雄 (A407)  
Email: 1337408747@qq.com  
Tel: 18711053519
-

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

**“稳定压倒一切”**

---

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则

2. 根轨迹法分析控制系统性能

3. 特殊根轨迹

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov 意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov 第一法 (间接法)

3. Lyapunov 第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析

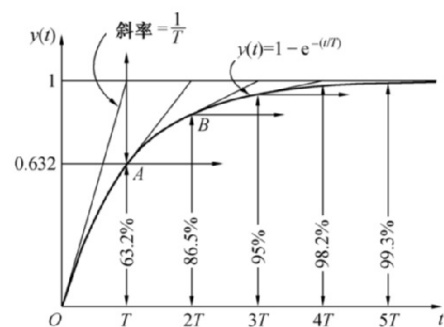
---

## 1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据

系统稳定  $\longleftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{暂态分量} = 0$

标准一阶:  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$

标准二阶:  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$



欠阻尼:  $h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$

临界阻尼:  $h(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$

负阻尼:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad t \geq 0$$

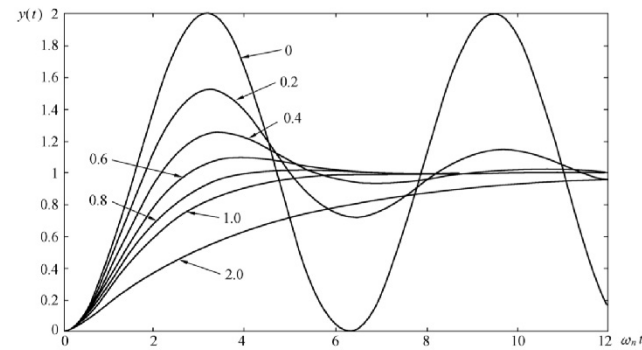


图 3.4.8 二阶系统的单位阶跃响应



# 4.1 基于传递函数的稳定性分析

## 1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据

### (1) 稳定性的概念：

稳定是控制系统正常工作的首要条件。分析、判定系统的稳定性，并提出确保系统稳定的条件是自动控制理论的基本任务之一。

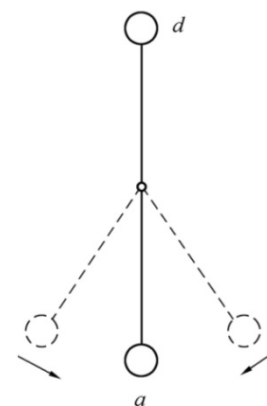


图 3.8.1 单摆运动示意图

**定义：**在扰动作用下系统偏离了原来的平衡状态，如果扰动消除后，系统能够以足够的准确度恢复到原来的平衡状态，则系统是稳定的；否则，系统不稳定。

# 稳定性概念

---

## □ 数学意义上的稳定概念

根据上述稳定性的定义，可以用  $\delta(t)$  函数作为扰动来讨论系统的稳定性。

设线性定常系统在初始条件为零时，输入一个理想单位脉冲  $\delta(t)$ ，这相当于系统在零平衡状态下，受到一个扰动信号的作用，如果当  $t$  趋于  $\infty$  时，系统的输出响应  $k(t)$  收敛到原来的零平衡状态，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$$

该系统就是稳定的。

---

# 系统稳定的充要条件

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$k(t) = \mathbf{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{k \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^q (s - s_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}\right] =$$

$$\sum_{j=1}^q A_j e^{s_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t)$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

闭环系统的特征方程，决定闭环系统稳定性。

系统稳定的充要条件：系统的所有闭环极点均具有负的实部，  
或所有闭环极点均严格位于左半s平面。

稳定性是系统的一种固有特性，只取决于系统的结构和参数。

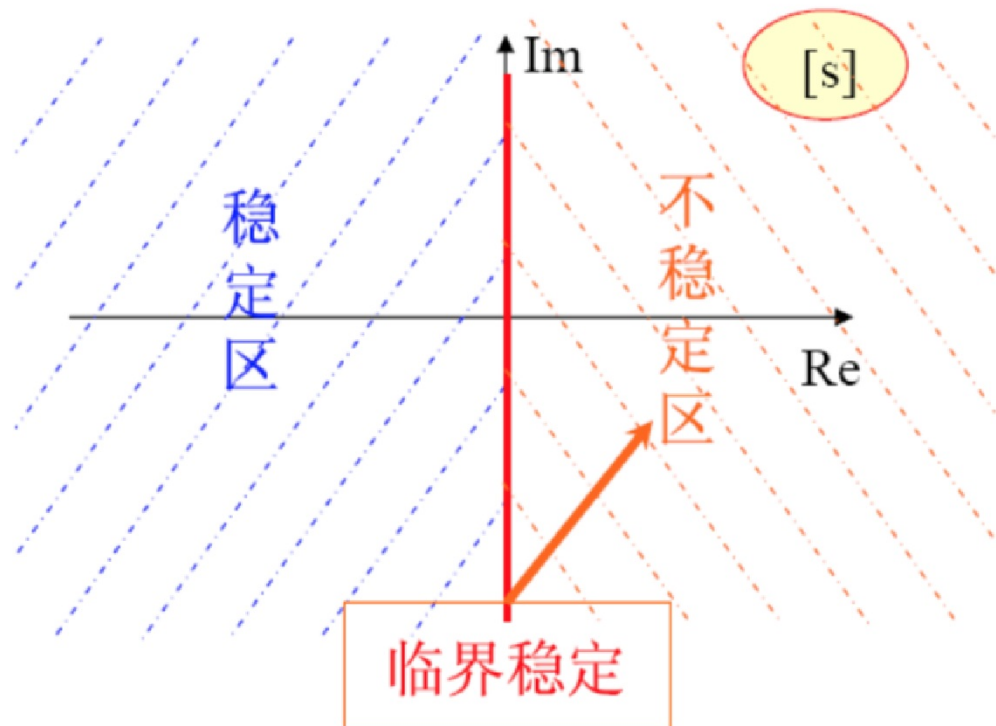
# 系统稳定的充要条件

系统稳定的充要条件:

系统的**全部**特征根都具有负实部



系统的**全部**特征根**都**位于[s]的左半平面



当特征根位于虚轴——  
临界稳定状态

在经典控制理论中，  
临界稳定也归为不稳定。

只要求出系统的**全部**特征根，便可确定其稳定性。

$$k(t) = \sum_{j=1}^q A_j e^{s_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t)$$

# 稳定性判据

---

给定线性定常控制系统

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

其特征方程为

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

**问题：如何判断系统是否稳定，即如何判断特征方程的根是否都具有负实部呢？**

□ 求解特征方程的根

□ 利用特征多项式的系数判断：**劳斯稳定判据**

---



# 稳定性判据

---

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

(1) 必要条件  $a_i > 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$

说明:

$$\begin{aligned} D(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) && (s^2+3s+2)(s+3) \\ &= (s^2+3s+2)(s+3) && = s^3+3s^2+2s \\ &= s^3+6s^2+11s+6 && \frac{3s^2+9s+6}{=} \\ &&& = s^3+6s^2+11s+6 \end{aligned}$$

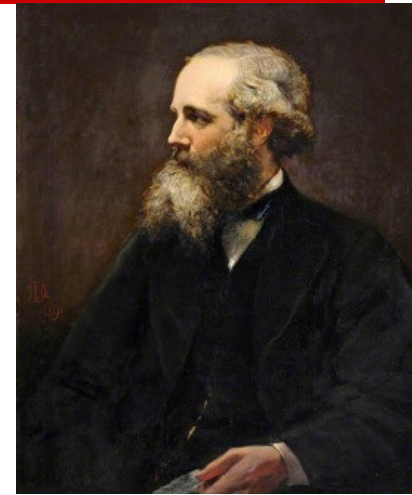
例1

$$\left\{ \begin{array}{ll} D(s) = s^5 + 6s^4 + 9s^3 - 2s^2 + 8s + 12 = 0 & \text{不稳定} \\ D(s) = s^5 + 4s^4 + 6s^2 + 9s + 8 = 0 & \text{不稳定} \\ D(s) = -s^4 - 5s^3 - 7s^2 - 2s - 10 = 0 & \text{可能稳定} \end{array} \right.$$

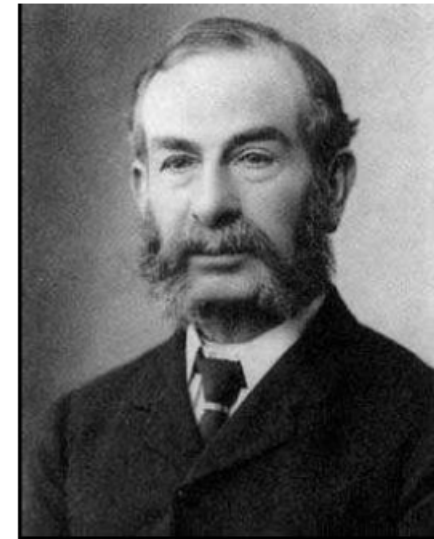
---

## (2) 劳斯稳定判据

- 在蒸汽机时代，调速器的稳定性问题是一个时髦的问题，困扰了当时的很多科学家和发明家。
- 1868年，Maxwell在论文《On Governor》中系统地研究了几类调速器的稳定性问题，被认为是第一个系统地分析反馈控制系统的理论研究。该论文利用特征方程判断系统的稳定性，并得到了三阶系统稳定的判据。尽管其没有进一步得到更高阶特征方程的根都具有负实部的充要条件，但是将这一问题明确地提了出来，并希望得到数学家的关注。（在科学的发展中，准确地提出问题和解决问题同样重要。）
- 1877年，Routh 解决了Maxwell提出的判断多项式所有根都有负实部的系数条件，获得了Adams Prize（Maxwell 是评奖委员会委员）。
- 1854年，Routh与Maxwell分别以第一和第二的成绩毕业于剑桥大学三一学院。（追求分数，更要追求能力。）



J. C. Maxwell, 1831-1879



E. J. Routh, 1831- 1907

## (2) 劳斯稳定判据

设  $n$  阶线性系统的闭环特征方程为：

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

### 1 劳斯表（劳斯阵列）

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$\vdots$					
$s^1$					
$s^0$					

逐行计算下去

算法：

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\ b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \\ &\vdots \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\ c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

**注意：**  $n$  阶系统的劳斯表共有  $n+1$  行



$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	
$\vdots$					逐行计算下去
$s^1$					
$s^0$					

对于特征方程:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

劳斯稳定判据的结论是:

系统稳定  $\longleftrightarrow$  劳斯表的第一列系数全部大于零

而且: 劳斯表中第一列元素符号改变的次数就等于正实部根的个数。

正实部根的个数就是S右半平面根的个数

劳斯稳定判据说明了两方面的问题:

- (1) 给出了系统稳定的判断方法
- (2) 给出了 不稳定情况下 判断右根个数的方法

说明: 在计算劳斯表的过程中, 某行同乘或同除一个正数, 结果不变。

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	
$\vdots$					逐行计算下去
$s^1$					
$s^0$					

## 劳斯稳定判据歌 (仓粒/2020-05-30)

列写特征式，各项均在编。  
 系数全为正，才需往下干。  
 序号是幂次，从高到低传。  
 系数分两行，奇偶幂高先。  
 四数成方阵，对角把手牵。  
 反角减正角，脚踩左下元。  
 一列总是有，余者顺次延。  
 横向有缺数，添零来补全。  
 竖向依次算，直到零幂完。  
 判稳很简单，且把一列看。  
 符号全为正，稳定是必然。  
 实正根几个，符号就几变。  
 某行同乘除，结论不改换。

算法：

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots$$

---

**例2** 已知系统特征方程：

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

试用劳斯稳定判据判断其稳定性。

解：特征方程中各项系数 $>0$  —— 满足稳定的必要条件

列劳斯表：

$s^4$	1	3	5
-------	---	---	---

$s^3$	<del>2</del> <sup>1</sup>	<del>4</del> <sup>2</sup>	
-------	---------------------------	---------------------------	--

$s^2$	1	5	
-------	---	---	--

$s^1$	-3		
-------	----	--	--

$s^0$	5		
-------	---	--	--

由“+”到“-”  
符号变化1次

由“-”到“+”  
符号变化1次

第一列元素符号变化两次

系统不稳定

有2个特征根在右半平面。

---

劳斯表第一列元素均大于零时系统稳定，否则系统不稳定；  
且第一列元素符号改变的次数等于特征方程中正实部根的个数。

例2 已知系统特征方程：

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

试用劳斯稳定判据判断其稳定性。

解：特征方程中各项系数 $>0$  —— 满足稳定的必要条件

列劳斯表：

$s^4$	1	3	5	
$s^3$	<del>2</del> <sup>1</sup>	<del>4</del> <sup>2</sup>		
$s^2$	1	5		
$s^1$	-3			第一列元素符号变化两次
$s^0$	5			系统不稳定

由“+”到“-”  
符号变化1次

由“-”到“+”  
符号变化1次

有2个特征根在右半平面。

劳斯表第一列元素均大于零时系统稳定，否则系统不稳定；  
且第一列元素符号改变的次数等于特征方程中正实部根的个数。

例3:  $D(s)=s^4+5s^3+7s^2+2s+10=0$

解. 列劳斯表

$s^4$	1	7	10
$s^3$	5	2	
$s^2$	$\frac{33}{5}$	10	
$s^1$	$-\frac{184}{33}$		
$s^0$	10		

$$\frac{5 \times 7 - 2}{5} = \frac{33}{5} \quad \frac{5 \times 10 - 1 \times 0}{5} = 10$$

$$\frac{33/5 \times 2 - 5 \times 10}{33/5} = -\frac{184}{33}$$

$$\frac{-184/33 \times 10}{-184/33} = 10$$

劳斯表第一列元素均大于零时系统稳定，否则系统不稳定；  
且第一列元素符号改变的次数等于特征方程中正实部根的个数。

例3:  $D(s)=s^4+5s^3+7s^2+2s+10=0$

解. 列劳斯表

$s^4$	1	7	10	
$s^3$	5	2		
$s^2$	$\frac{33}{5}$	10		
$s^1$	$-\frac{184}{33}$			
$s^0$	10			

$\frac{5 \times 7 - 2}{5} = \frac{33}{5}$	$\frac{5 \times 10 - 1 \times 0}{5} = 10$
$\frac{33/5 \times 2 - 5 \times 10}{33/5} = -\frac{184}{33}$	
$\frac{-184/33 \times 10}{-184/33} = 10$	

劳斯表第一列元素变号 2 次，有 2 个正根，系统 **不稳定**。



### (3) 劳斯判据特殊情况处理

---

例4 已知系统特征方程:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 10s + 15 = 0$$

试用劳斯稳定判据判断其稳定性。

解: 特征方程中各项系数  $> 0$  —— 满足稳定的必要条件

列劳斯表:

$s^5$	1	3	10
-------	---	---	----

$s^4$	2	6	15
-------	---	---	----

$s^3$	0 ?	2.5	
-------	-----	-----	--

$s^2$			
-------	--	--	--

① 劳斯表某行第一个元素为零, 而该行不全为零

首先应该肯定: 系统不稳定。

$s^1$			
-------	--	--	--

$s^0$			
-------	--	--	--

---

### (3) 劳斯判据特殊情况处理

---

例4 已知系统特征方程:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 10s + 15 = 0$$

试用劳斯稳定判据判断其稳定性。

解: 特征方程中各项系数  $> 0$  —— 满足稳定的必要条件

列劳斯表:

$s^5$	1	3	10
-------	---	---	----

$s^4$	2	6	15
-------	---	---	----

$s^3$	0 ?	2.5	
-------	-----	-----	--

$s^2$	① 劳斯表某行第一个元素为零, 而该行不全为零		
-------	-------------------------	--	--

首先应该肯定: 系统不稳定。

$s^1$			
-------	--	--	--

以很小的正数  $\varepsilon$  代替零项, 继续计算劳斯表。

$s^0$			
-------	--	--	--

再令:  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 检验劳斯表第一列元素符号的变化,

符号变化次数为正实部根的个数——系统不稳定

---



### (3) 劳斯判据特殊情况处理

**例4** 特征方程:  $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 10s + 15 = 0$

试用劳斯稳定判据判断其稳定性。

解: 特征方程中各项系数  $> 0$  —— 满足稳定的必要条件

列劳斯表:

	$s^5$	1	3	10	
	$s^4$	2	6	15	
由“+”到“-” 符号变化1次	$s^3$	$0\varepsilon$	2.5	—— 属情形 ①	
	$s^2$	$\frac{6\varepsilon - 5}{\varepsilon}$	15		
由“-”到“+” 符号变化1次	$s^1$	$\frac{2.5(6\varepsilon - 5) - 15\varepsilon^2}{6\varepsilon - 5}$			令 $\varepsilon \rightarrow 0$ :
	$s^0$	15			

→  $-\infty$   
→ 2.5

第一列元素符号变化两次, 系统不稳定, 有2个特征根在右半平面。

### (3) 劳斯判据特殊情况处理

例5:  $D(s)=s^3-3s+2=0$  判定在右半s平面的极点数。

解. 列劳斯表

$s^3$	1	-3	
$s^2$	$\varepsilon$	2	$\frac{-3\varepsilon-2}{\varepsilon}=-\infty$
$s^1$	$-\infty$	0	$\frac{-2 \times \infty - 0}{-\infty} = 2$
$s^0$	2		

若某行第一列元素为0,  
而该行元素不全为0时:  
将此0改为 $\varepsilon$ ,  
继续运算。

劳斯表第一列元素变号 2次, 有2个正根, 系统不稳定。

---

## ② 劳斯表中出现了全为零的行

处理方法：

- 1) 用全零行的上一行各元素构造辅助多项式；
- 2) 对辅助多项式求导，用其系数代替全零行，继续算完劳斯表；
- 3) 检验劳斯表第一列元素符号的变化，  
符号变化次数为正实部根的个数——系统不稳定

若想进一步了解导致系统不稳定的根的情况，可以求解辅助方程，辅助方程的根也是系统的特征根。

---

例6  $D(s)=s^5+3s^4+12s^3+20s^2+35s+25=(s\pm j\sqrt{5})(s+1)(s+1\pm j2)$

解. 列劳斯表

$s^5$	1	12	35
$s^4$	3	20	25
$s^3$	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	
$s^2$	5	25	
$s^1$	10	0	
$s^0$	25		

出现全零行时:

用上一行元素组成辅助方程,  
将其对S求导一次,  
用新方程的系数代替全零行系数,  
之后继续运算。

列辅助方程:  $5s^2 + 25 = 0$

$$\frac{d}{ds}(5s^2 + 25) = 10s + 0$$

结论: 系统不稳定, 但第一列元素未改变符号, 所以系统没有位于s右半平面的根, 有位于虚轴上的根。

例7  $D(s)=s^5+2s^4-s-2=0 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$

解. 列劳斯表

$s^5$	1	0	-1
$s^4$	2	0	-2
$s^3$	8	0	
$s^2$	$\epsilon$	-2	
$s^1$	$16/\epsilon$	0	
$s^0$	-2		

列辅助方程:  $2s^4 - 2 = 0$

$$\frac{d}{ds}(2s^4 - 2) = 8s^3 = 0$$

第一列元素变号一次, 有一个正根, 系统**不稳定**

辅助方程的根是原特征方程根的一部分。辅助方程一般为偶次方程, 它的根是成对出现的, 由绝对值相同、符号相反的根组成。求解辅助方程能够求出系统不稳定的根。

---

例 3.8.4 系统的特征方程为

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

试用劳斯判据分析该系统的稳定性。

解 对原特征方程  $D(s) = 0$  列写劳斯行列表

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{array}$$

在  $s^1$  行出现全零。用  $s^2$  行构造辅助方程

$$F(s) = 2s^2 + 2 = 0$$

$F(s)$  对  $s$  求导, 得  $4s = 0$ 。将系数 4 代入劳斯行列表中的  $s^1$  行, 得

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & \end{array}$$

虽然代换后劳斯行列表的第一列为正数, 但不说明系统稳定, 因为辅助方程  $F(s) = 2s^2 + 2 = 0$  的根  $s = \pm j$  是原特征方程的根, 所以原系统是临界稳定的。

---



**例 3.8.5** 系统的特征方程为

$$D(s) = s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$$

求该系统在右半平面特征根的数目。

**解** 因为特征方程各项系数有正有负,所以系统不稳定。列劳斯行列表

$s^6$	1	-4	-7	10	
$s^5$	4	4	-8	0	
$s^4$	-5	-5	10		各元皆除以 5
	-1	-1	2		
$s^3$	0	0			做辅助方程 $-s^4 - s^2 + 2 = 0$
	-4	-2			求导得 $-4s^3 - 2s = 0$
$s^2$	$-\frac{1}{2}$	2			各元同乘以 2
	-1	4			
$s^1$	-18				
$s^0$	4				

劳斯行列表第一列两次变号,说明系统有两个特征根具有正实部。此外,解辅助方程  $-s^4 - s^2 + 2 = 0$ ,辅助方程的 4 个根是  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$  和  $s_{3,4} = \pm 1$ ,说明特征方程还有一对位于  $S$  平面虚轴上的纯虚根。

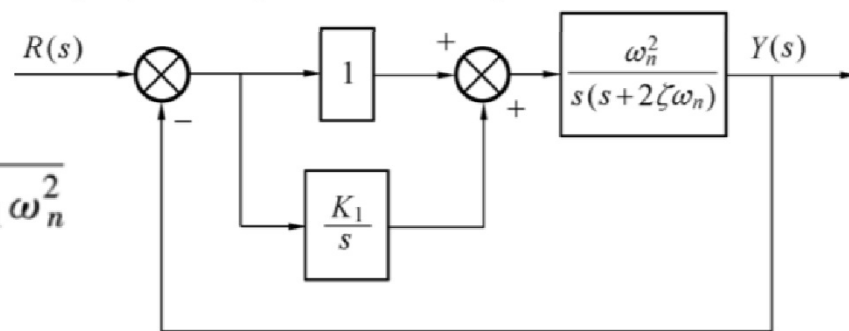
## (4) 利用劳斯判据求取保证系统稳定的条件

### ① 确定某个参数的取值范围

例3.9.1 某控制系统的方框图如图所示，已知参数  $\zeta = 0.2$ ， $\omega_n = 86.6$ ，试确定参数  $K_1$  取何值时系统方能稳定。

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 (s + K_1)}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K_1 \omega_n^2}$$

$$D(s) = s^3 + 34.6s^2 + 7500s + 7500K_1 = 0$$



列出相应的劳斯行列表

$s^3$	1	7500
$s^2$	34.6	7500 $K_1$
$s^1$	$\frac{34.6 \times 7500 - 7500K_1}{34.6}$	0
$s^0$	7500 $K_1$	



## (4) 利用劳斯判据求取保证系统稳定的条件

### ① 确定某个参数的取值范围

例 3.9.2 某控制系统的特征方程为

$$D(s) = s^3 + (\lambda + 1)s^2 + (\lambda + \mu - 1)s + (\mu - 1) = 0$$

解 根据给定的特征方程列写出劳斯行列表

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & \lambda + \mu - 1 \\ \lambda + 1 & \mu - 1 \\ \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{\lambda + 1} & 0 \\ \mu - 1 & \end{array}$$

表中第一列各元全大于零的条件是

$$\begin{aligned} \lambda + 1 &> 0 \\ \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{\lambda + 1} &> 0 \\ \mu - 1 &> 0 \end{aligned}$$

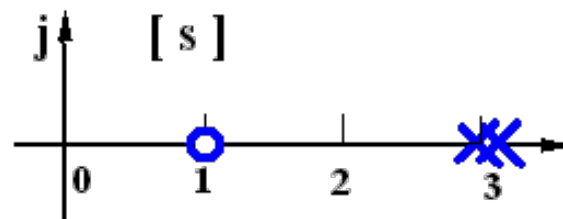
综合上面三个不等式,得出保证系统稳定的条件是  $\lambda > 0$  和  $\mu > 1$ 。

## (4) 利用劳斯判据求取保证系统稳定的条件

### ① 确定某个参数的取值范围

例8 某单位反馈系统的开环零、极点分布如图所示，判定系统能否稳定，若能稳定，试确定相应开环增益K的范围。

解 依题意有



$$G(s) = \frac{K(-s+1)}{(-s/3+1)^2} = \frac{-9K(s-1)}{(s-3)^2}$$

$$D(s) = (s-3)^2 - 9K(s-1) = s^2 - (9K+6)s + 9(1+K) = 0$$

$$\begin{cases} -9K - 6 > 0 \\ 1 + K > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < K < -\frac{2}{3}$$

$$G(s) = \frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}$$

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^k (T_j s + 1) \prod_{k=1}^r (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}$$

系统闭环稳定与开环稳定之间没有直接关系

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则

2. 根轨迹法分析控制系统性能

3. 特殊根轨迹

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

# 4.1 基于传递函数的稳定性分析

## 1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据

定义：在扰动作用下系统偏离了原来的平衡状态，如果扰动消除后，系统能够以足够的准确度恢复到原来的平衡状态，则系统是稳定的；否则，系统不稳定。

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

闭环系统的特征方程，决定闭环系统稳定性。

系统稳定的充要条件：系统的所有闭环极点均具有负的实部，  
或所有闭环极点均严格位于左半s平面。

稳定性是系统的一种固有特性，只取决于系统的结构和参数。

(1) 必要条件  $a_i > 0 \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, n$



## (2) 劳斯稳定判据

设  $n$  阶线性系统的闭环特征方程为：

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

### 1 劳斯表（劳斯阵列）

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$\vdots$					
$s^1$					
$s^0$					

逐行计算下去

算法：

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\ b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \\ &\vdots \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\ c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

**注意：**  $n$  阶系统的劳斯表共有  $n+1$  行

---

对于特征方程:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

劳斯稳定判据的结论是:

系统稳定  $\longleftrightarrow$  劳斯表的第一列系数全部大于零

而且: 劳斯表中第一列元素符号改变的次数就等于正实部根的个数。

正实部根的个数就是S右半平面根的个数

劳斯稳定判据说明了两方面的问题:

- (1) 给出了系统稳定的判断方法
- (2) 给出了 不稳定情况下 判断右根个数的方法

说明: 在计算劳斯表的过程中, 某行同乘或同除一个正数, 结果不变。

---

### (3) 劳斯判据特殊情况处理

---

例4 已知系统特征方程:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 10s + 15 = 0$$

试用劳斯稳定判据判断其稳定性。

解: 特征方程中各项系数  $> 0$  —— 满足稳定的必要条件

列劳斯表:

$s^5$	1	3	10
-------	---	---	----

$s^4$	2	6	15
-------	---	---	----

$s^3$	0 ?	2.5	
-------	-----	-----	--

$s^2$	① 劳斯表某行第一个元素为零, 而该行不全为零		
-------	-------------------------	--	--

首先应该肯定: 系统不稳定。

$s^1$			
-------	--	--	--

以很小的正数  $\varepsilon$  代替零项, 继续计算劳斯表。

$s^0$			
-------	--	--	--

再令:  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 检验劳斯表第一列元素符号的变化,

符号变化次数为正实部根的个数——系统不稳定

---

---

## ② 劳斯表中出现了全为零的行

处理方法：

- 1) 用全零行的上一行各元素构造辅助多项式；
- 2) 对辅助多项式求导，用其系数代替全零行，继续算完劳斯表；
- 3) 检验劳斯表第一列元素符号的变化，  
符号变化次数为正实部根的个数——系统不稳定

若想进一步了解导致系统不稳定的根的情况，可以求解辅助方程，辅助方程的根也是系统的特征根。

---

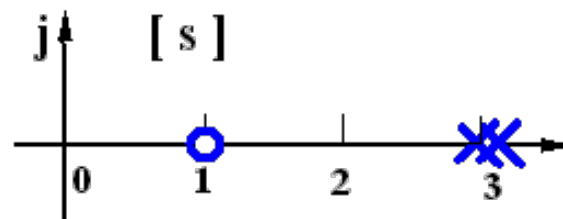


## (4) 利用劳斯判据求取保证系统稳定的条件

### ① 确定某个参数的取值范围

例8 某单位反馈系统的开环零、极点分布如图所示，判定系统能否稳定，若能稳定，试确定相应开环增益K的范围。

解 依题意有



$$G(s) = \frac{K(-s+1)}{(-s/3+1)^2} = \frac{-9K(s-1)}{(s-3)^2}$$

$$D(s) = (s-3)^2 - 9K(s-1) = s^2 - (9K+6)s + 9(1+K) = 0$$

$$\begin{cases} -9K - 6 > 0 \\ 1 + K > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < K < -\frac{2}{3}$$

$$G(s) = \frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}$$

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^k (T_j s + 1) \prod_{k=1}^r (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}$$

系统闭环稳定与开环稳定之间没有直接关系

## (4) 利用劳斯判据求取保证系统稳定的条件

### ② 确定某些参数间的相互关系

例 3.9.3 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)(2s + 1)} \quad (K > 0, T > 0)$$

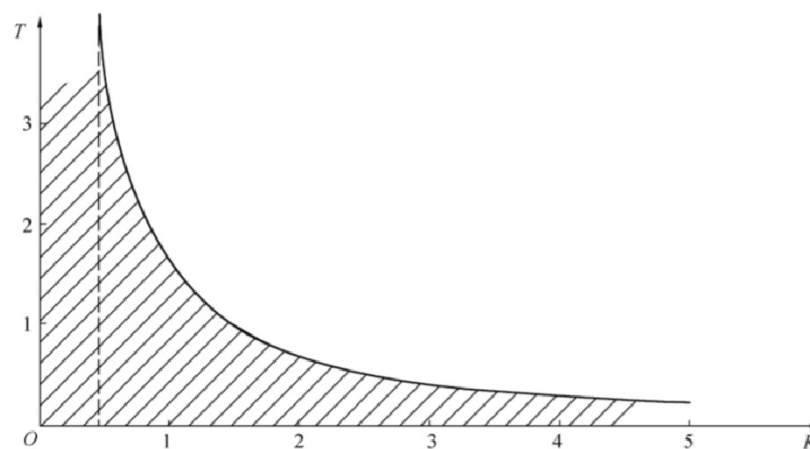
(1) 为使闭环系统稳定,  $K$  和  $T$  应满足什么关系? 在  $K - T$  直角坐标中画出使闭环系统稳定的区域。

(2) 若闭环系统处于临界稳定, 持续振荡频率为  $1 \text{ rad/s}$ , 求  $K$  和  $T$  的值。

$$D(s) = s(Ts + 1)(2s + 1) + K = 2Ts^3 + (2 + T)s^2 + s + K = 0$$

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2T \\ 2 + T \\ \frac{2 + T - 2KT}{2 + T} \\ K \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ K \\ 0 \\ \end{array}$$

$$K < \frac{1}{T} + \frac{1}{2}$$



## (4) 利用劳斯判据求取保证系统稳定的条件

### ② 确定某些参数间的相互关系

(2) 若系统有频率为  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  的持续振荡,说明系统的特征方程有一对纯虚根  $\pm j$ 。根据特征方程出现纯虚根和劳斯行列表的关系,令劳斯行列表中行  $s^1$  为零,得

$$K = \frac{1}{T} + \frac{1}{2} \quad (3.9.1)$$

由  $s^2$  行得辅助方程

$$(2 + T)s^2 + K = 0$$

$$s = \pm j\sqrt{\frac{K}{2 + T}}$$

故

$$\frac{K}{2 + T} = 1 \quad K = 2 + T \quad (3.9.2)$$

由式(3.9.1)和式(3.9.2)解出

$$T = \frac{1}{2} \quad K = \frac{5}{2}$$

这个问题的另一解法是:将  $s = j\omega$  (且  $\omega = 1$ ) 代入特征方程,再令实部、虚部分别等于零,即可解出  $T$  和  $K$  的值。

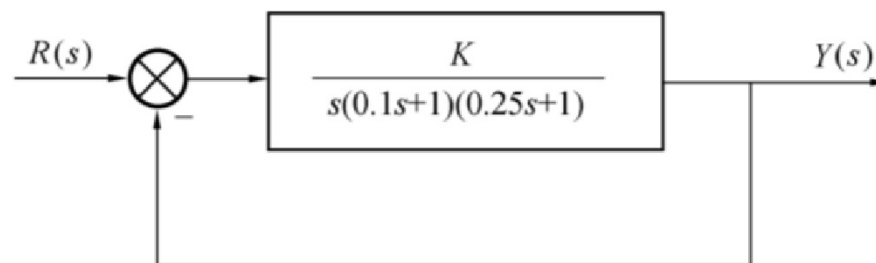
辅助方程的根是原特征方程根的一部分。辅助方程一般为偶次方程,它的根是成对出现的,由绝对值相同、符号相反的根组成。求解辅助方程能够求出系统不稳定的根。

$s^3$	$2T$	$1$
$s^2$	$2 + T$	$K$
$s^1$	$\frac{2 + T - 2KT}{2 + T}$	$0$
$s^0$	$K$	

## (4) 利用劳斯判据求取保证系统稳定的条件

### ③ 保证系统稳定并且闭环极点远离虚轴

例3.9.4 系统的方框图如图3.9.3所示。要求闭环系统的特征根全部在  $s = -1 \pm j\omega$  线的左侧, 试确定参数  $K$  的取值范围。



$$s^3 + 14s^2 + 40s + 40K = 0$$

$$\text{令 } s = z - 1 \quad z^3 + 11z^2 + 15z + (40K - 27) = 0$$

$z^3$	1	15
$z^2$	11	$40K - 27$
$z^1$	$\frac{11 \times 5 - (40K - 27)}{11}$	0
$z^0$	$40K - 27$	

$$11 \times 15 - (40K - 27) > 0$$

$$40K - 27 > 0$$

$$0.675 < K < 4.8$$

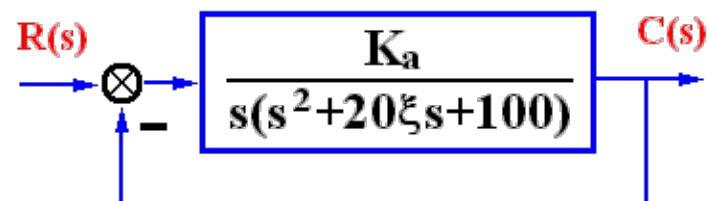
$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^k (T_j s + 1) \prod_{k=1}^r (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}$$

例9 系统结构图如右，设K为系统开环增益

- (1) 确定使系统稳定的参数(K, ξ) 的范围；
- (2) 当ξ=2时，确定使全部极点均位于s=-1之左的K值范围。

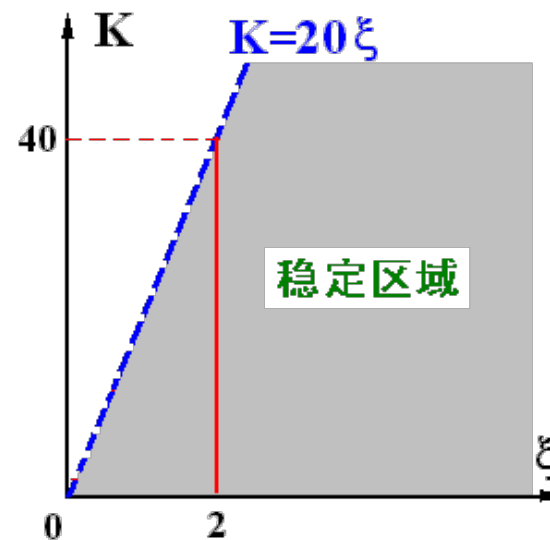
解.

$$(1) G(s) = \frac{K_a}{s(s^2 + 20\xi s + 100)} \quad K = \frac{K_a}{100}$$



$$D(s) = s^3 + 20\xi s^2 + 100s + 100K = 0$$

$s^3$	1	100	
$s^2$	$20\xi$	$100K$	$\Rightarrow \xi > 0$
$s^1$	$\frac{2000\xi - 100K}{20\xi}$	0	$\Rightarrow K < 20\xi$
$s^0$	$100K$		$\Rightarrow K > 0$



(2) 当  $\xi=2$  时，确定使全部极点均位于  $s=-1$  之左的  $K$  值范围。

当  $\xi=2$  时，进行平移变换： $s = \hat{s} - 1$

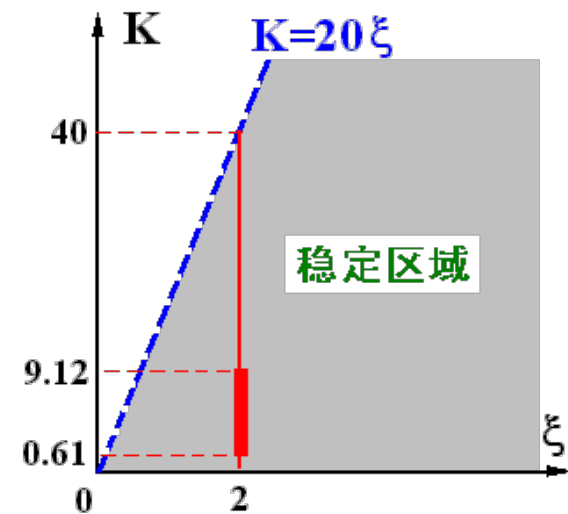
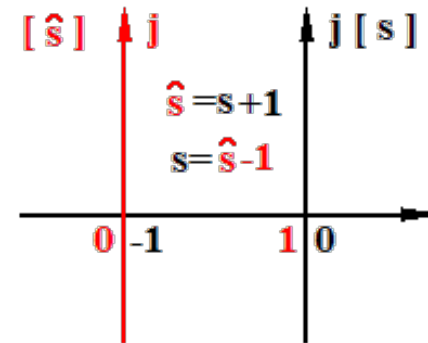
$$D(s) = s^3 + 20 \times 2 s^2 + 100 s + 100 K = 0$$

$$\downarrow s = \hat{s} - 1$$

$$D(\hat{s}) = (\hat{s} - 1)^3 + 40 (\hat{s} - 1)^2 + 100 (\hat{s} - 1) + 100 K = 0$$

$$= \hat{s}^3 + 37 \hat{s}^2 + 23 \hat{s} + (100 K - 61) = 0$$

$s^3$	1	23	
$s^2$	37	$100K - 61$	
$s^1$	$\frac{912 - 100K}{37}$	0	$\Rightarrow K < 9.12$
$s^0$	$100K - 61$		$\Rightarrow K > 0.61$





# 课程小结

---

## 1. 稳定性的概念

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$$

## 2. 稳定的充要条件

系统闭环特征方程的所有根都具有负的实部  
或所有闭环极点均严格位于左半s平面

## 3. 稳定判据

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

(1) 判定稳定的必要条件  $a_i > 0$

(2) 劳斯判据

(3) 劳斯判据特殊情况的处理

(4) 劳斯判据的应用（判定稳定性，使系统稳定的参数范围）

---

# 关于系统的稳定性：

---

**(1)** 稳定性是系统自身的属性，与输入的类型，形式无关。

**(2)** 系统稳定与否，只取决于闭环极点，与闭环零点无关。

$$\Phi(s) = \frac{k \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^q (s - s_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}$$

$$k(t) = \sum_{j=1}^q A_j e^{s_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t)$$

闭环零点影响系数 $A_i, B_i, C_i$ ，会改变动态性能，但不影响稳定性。

闭环极点决定模态，因此决定系统的稳定性，也影响动态性能。

**(3)** 闭环系统的稳定性与其开环是否稳定无直接关系。

---



# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则

2. 根轨迹法分析控制系统性能

3. 特殊根轨迹

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

## 2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据

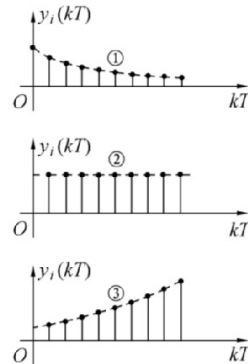
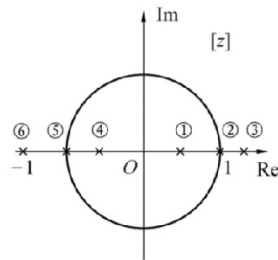
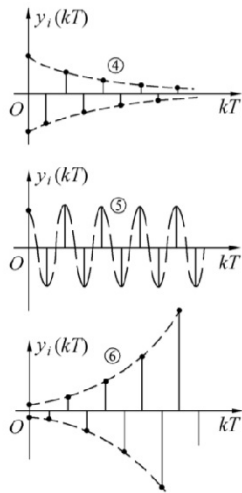
### 1. s域到z域的映射

$$z = e^{sT} \quad s = \sigma + j\omega \quad z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad |z| = e^{\sigma T} \quad \angle z = \omega T$$

离散系统极点位置与系统瞬态响应的关系

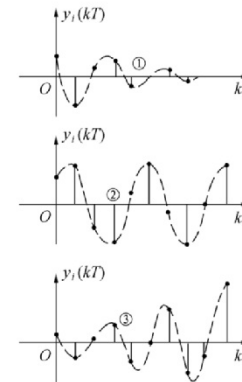
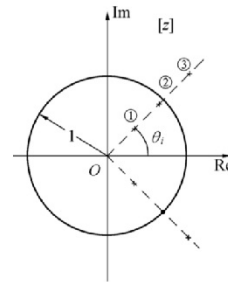
#### ① 实数极点

$$y(kT) = A + \sum_{i=1}^n B_i p_i^k$$



#### ② 共轭复数极点

$$y_i(kT) = A_i \lambda_i^k \cos(k \theta_i + \phi_i)$$



## 2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据

### 1. s域到z域的映射

采样角频率

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

$$z = e^{sT} \quad s = \sigma + j\omega \quad z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad |z| = e^{\sigma T} \quad \angle z = \omega T$$

**s域虚轴** (  $\sigma = 0$   
 $-\infty < \omega < \infty$  )

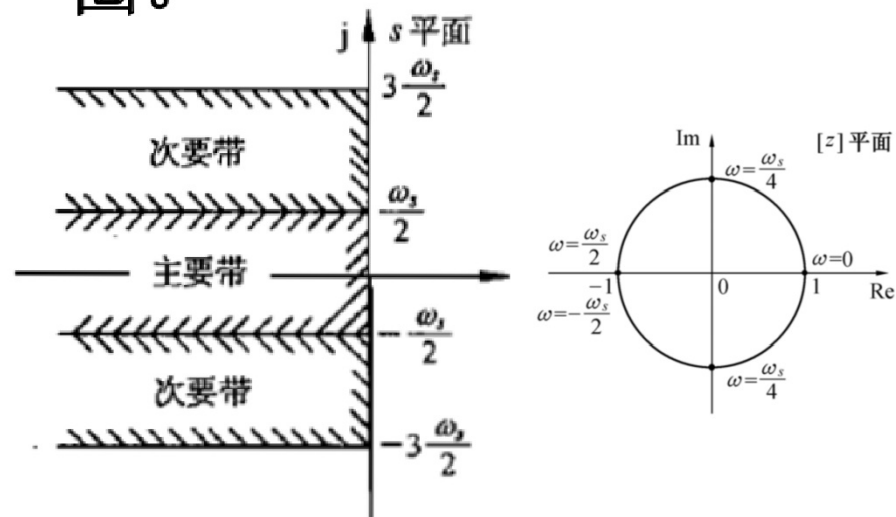


**单位圆** (  $|z| = 1$   
 $-\infty < \angle z < \infty$  )

➤ **主要带**:  $-\omega_s/2$  到  $\omega_s/2$  的周期带, z平面点从  $-\pi$  逆时针变化到  $\pi$ , 转了一圈。

➤ **次要带**: 其余的周期带。

➤ **稳定区**: s域左半平面, 主要带和次要带, 映射成z平面的单位圆内部。



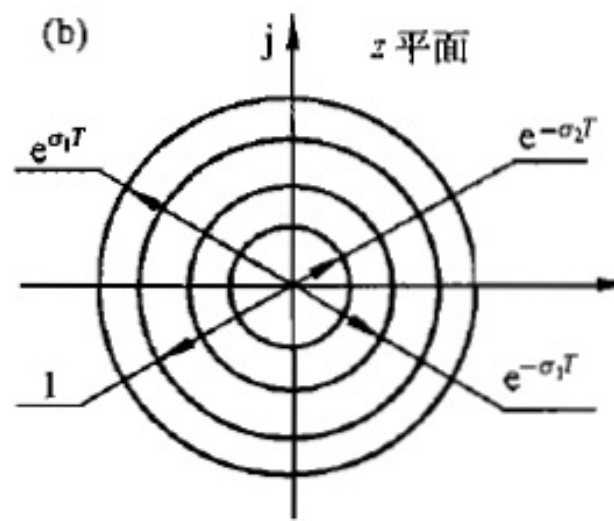
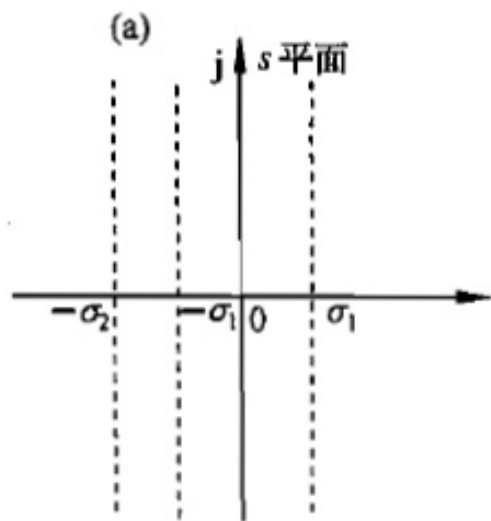
## (1) 等 $\sigma$ 线映射

S平面等  $\sigma$  线，映射到Z平面以原点为圆心， $|z| = e^{\sigma T}$  为半径的同心圆。

S平面虚轴  $\longleftrightarrow$  Z平面原点为圆心的单位圆

S平面虚轴左侧  $\longleftrightarrow$  Z平面单位圆内部同心圆

S平面虚轴右侧  $\longleftrightarrow$  Z平面单位圆外部同心圆

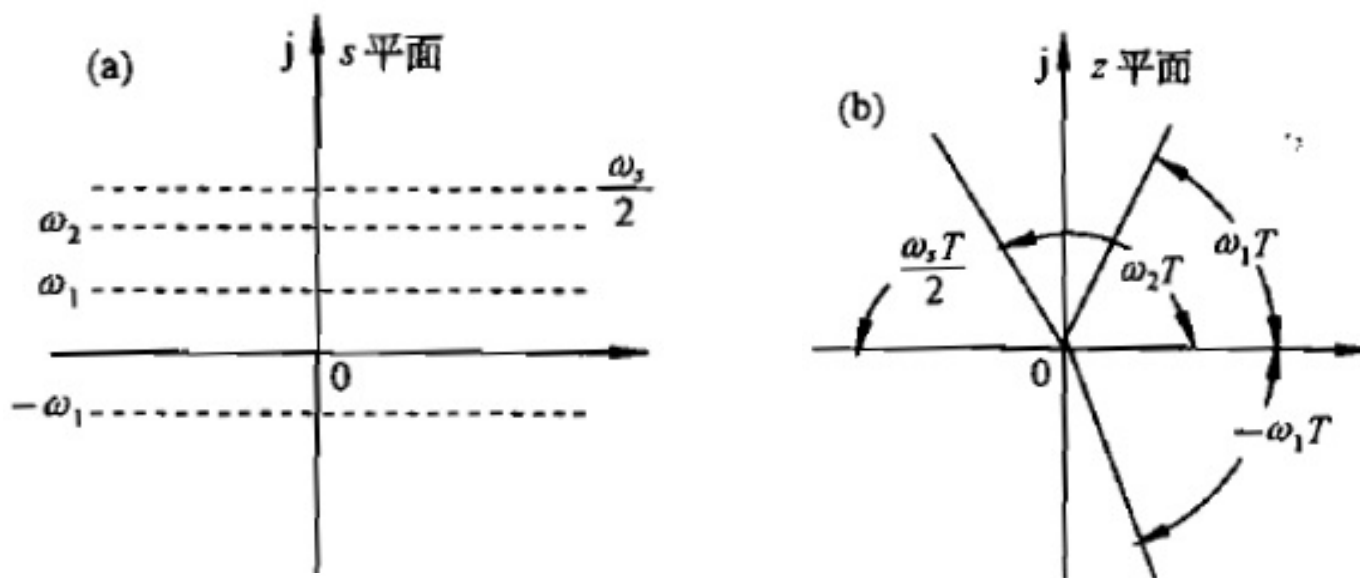


## 离散系统稳定性

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

### (2) 等 $\omega$ 线映射

在特定 $T$ 的情况下，由 $\angle z = \omega T$ 可知， $s$ 平面等 $\omega$ 线映射成 $z$ 平面一族从原点出发的射线，相角从正实轴开始计量。



在 $s$ 平面  $\omega = \omega_s/2$  处水平线，映射为 $z$ 平面负实轴。



## 离散系统稳定性

---

设闭环线性离散系统的特征方程的根,或闭环脉冲传递函数的极点为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 则线性离散系统稳定性有如下定理。

**定理 6.7.1** 线性离散系统稳定的充要条件为:线性离散系统的全部特征根  $z_i (i = 1, 2, \dots, n)$  都分布在  $z$  平面的单位圆之内,或者说全部特征根的模都必须小于1,即  $|z_i| < 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 。如果在上述特征根中,有位于  $z$  平面单位圆之外者时,则闭环系统将是不稳定的。

**例 6.7.1** 一线性离散系统闭环脉冲传递函数为

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

试判断系统的稳定性。

**解** 该线性离散系统的特征方程为

$$z^2 - z + 0.632 = 0$$

特征根为

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 0.632}}{2} = 0.5 \pm j 0.618$$

该系统的两个特征根  $z_1$  和  $z_2$  是一对共轭复根,模是相等的,即

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{0.5^2 + 0.618^2} = 0.795 < 1$$

由于两个特征根  $z_1$  和  $z_2$  都分布在  $z$  平面单位圆之内,所以该系统是稳定的。

---

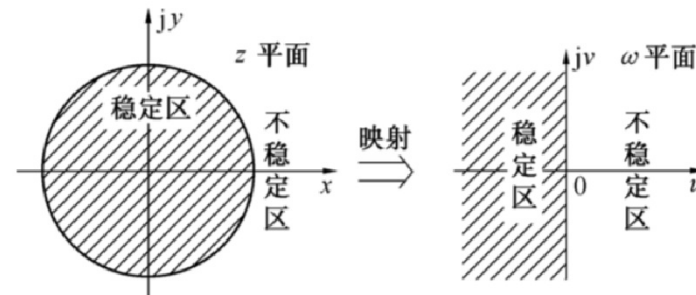
# 劳斯稳定判据

连续系统劳斯稳定判据，实质是判断系统特征方程根是否都在 $s$ 左半平面。

离散系统的稳定性判据就是寻找某个 $z$ 域到 $w$ 域的映射，使 $z$ 平面上单位圆内映射成 $w$ 平面上左半平面，这种坐标变换称为双线性变换，或称 $w$ 变换。然后，在 $w$ 平面上，利用劳斯稳定判据进行间接判别。

## (1) $w$ 变换与劳斯稳定判据

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad w = \frac{z+1}{z-1}$$



$$z = x + jy$$

$$w = u + jv$$

$$u + jv = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x-1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$u = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x-1)^2 + y^2}, \quad v = \dots$$

# 劳斯稳定判据

$$w = u + jv$$

$$z = x + jy$$

$u$  的分母  $(x-1)^2 + y^2$  始终为正，则：

① 当  $u = 0$  时， $(x^2 + y^2) = 1$  即：**w虚轴**  $\rightarrow$  **z单位圆周**。

② 当  $u < 0$  时， $(x^2 + y^2) < 1$  即：**w左半**  $\rightarrow$  **z单位圆内**。

③ 当  $u > 0$  时， $(x^2 + y^2) > 1$  即：**w右半**  $\rightarrow$  **z单位圆外**。

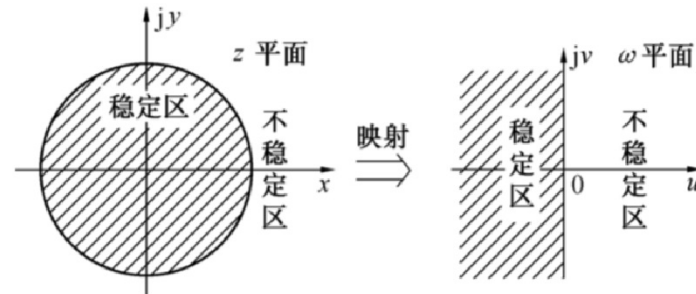
$$1 + GH(z) = 0$$

$$1 + GH(w) = 0$$

**Z稳定**，特征方程根都在Z单位圆内。

**W稳定**，特征方程根都在W左半平面。

**W域**，可用劳斯判据。



$$u = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x-1)^2 + y^2}$$



## 劳斯稳定判据

例 6.7.2 一线性离散系统的闭环脉冲传递函数为

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

用劳斯判据判断系统的稳定性。

解 系统的特征方程为

$$z^2 - z + 0.632 = 0$$

将  $z = \frac{w+1}{w-1}$  代入上式有

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + \left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0.632 = 0$$

经整理后可得到以  $w$  为变量的特征方程

$$0.632w^2 + 0.736w + 2.632 = 0$$

由此可列出劳斯表

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 0.632 \quad 2.632 \\ w^1 \quad 0.736 \\ w^0 \quad 2.632 \end{array}$$

由劳斯表可以看出,这个系统是稳定的,与例 6.7.1 中的结论相同。

例 6.7.1 一线性离散系统闭环脉冲传递函数为

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

试判断系统的稳定性。

解 该线性离散系统的特征方程为

$$z^2 - z + 0.632 = 0$$

特征根为

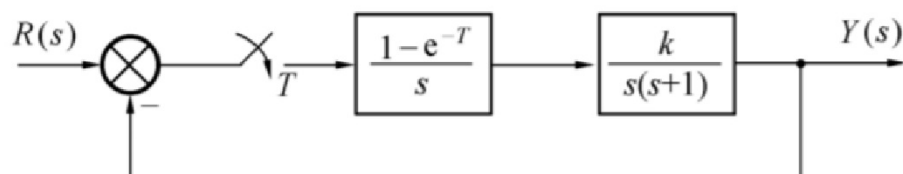
$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 0.632}}{2} = 0.5 \pm j 0.618$$

该系统的两个特征根  $z_1$  和  $z_2$  是一对共轭复根,模是相等的,即

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{0.5^2 + 0.618^2} = 0.795 < 1$$

## 劳斯稳定判据

例 6.7.3 线性离散系统的框图如图 6.7.3 所示,试分析当  $T = 0.5 \text{ s}$  和  $T = 1 \text{ s}$  时增益  $k$  的临界值。



解 系统的闭环脉冲传递函数为

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{k[(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})]}{z^2 + [k(T-1+e^{-T}) - (1+e^{-T})]z + [k(1-e^{-T}-Te^{-T}) + e^{-T}]}$$

特征方程为

$$D(z) = z^2 + [k(T-1+e^{-T}) - (1+e^{-T})]z + [k(1-e^{-T}-Te^{-T}) + e^{-T}] = 0$$

(1) 当采样周期  $T = 0.5 \text{ s}$  时,特征方程为

$$D(z) = z^2 + (0.107k - 1.607)z + (0.09k + 0.607) = 0$$

经过  $w$  变换可能得到以  $w$  为变量的特征方程

$$D(w) = 0.197kw^2 + (0.786 - 0.18k)w + (3.214 - 0.017k) = 0$$

## 劳斯稳定判据

---

劳斯表为

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 0.197k \quad 3.214 - 0.017k \\ w^1 \quad 0.786 - 0.18k \\ w^0 \quad 3.214 - 0.017k \end{array}$$

由此可得,当  $T = 0.5$  s 时,欲使系统稳定, $k$  的取值范围是

$$0 < k < 4.37$$

则当  $T = 0.5$  s 时, $k$  的临界值  $k_c = 4.37$ 。

(2) 当采样周期  $T = 1$  s 时,特征方程为

$$D(z) = z^2 + (0.368k - 1.368)z + (0.264k + 0.368) = 0$$

经过  $w$  变换得到以  $w$  为变量的特征方程

$$D(w) = 0.632kw^2 + (1.264 - 0.528k)w + (2.763 - 0.104k) = 0$$

劳斯表为

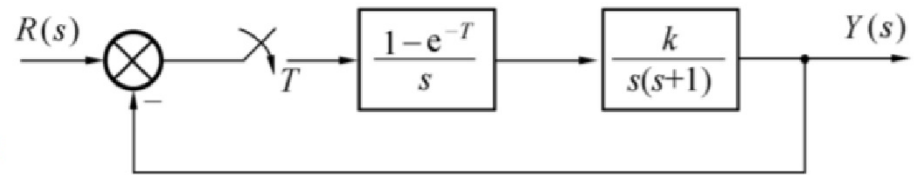
$$\begin{array}{r} w^2 \quad 0.632k \quad 2.736 - 0.104k \\ w^1 \quad 1.264 - 0.528k \\ w^0 \quad 2.736 - 0.104k \end{array}$$

由此得到,当  $T = 1$  s 时,在保证系统稳定的条件下, $k$  的取值范围为

$$0 < k < 2.39$$

即当  $T = 1$  s 时, $k$  的临界值  $k_c = 2.39$ 。

---



说明:(1) 在图 6.7.3 所示系统中,如果没有采样开关和零阶保持器,就是一个二阶线性连续系统,无论开环增益  $k$  取何值,系统始终是稳定的。而二阶线性离散系统却不一定是稳定的,它与系统的参数有关。当开环增益比较小时系统可能稳定,当开环增益比较大(超过临界值)时,系统就会不稳定。

(2) 采样周期  $T$  是离散系统的一个重要参数。采样周期变化时,系统的开环脉冲传递函数、闭环脉冲传递函数和特征方程都要变化,因此系统的稳定性也发生变化。一般情况下,缩短采样周期可使线性离散系统的稳定性得到改善,增大采样周期对稳定性不利。这是因为缩短采样周期将导致采频率的提高,从而增加离散控制系统获取的信息量,使其在特性上更加接近相应的连续系统。

(3) 用劳斯判据判断离散系统稳定性时也会遇到某行第一个元素为零、其他不为零以及某行全为零的特殊情况。处理这两种特殊情况的方法与连续系统情形的处理方法类似。

### **K与T对离散系统稳定性有如下影响:**

- ①当  $T$  一定时, 增大  $K$  会使离散系统的稳定性变差, 甚至使系统变得不稳定。
- ②当  $K$  一定时, 越增大  $T$ , 丢失的信息越多, 对离散系统的稳定性及动态性能均不利, 甚至使系统变得不稳定。

**总之,  $K$ 大、 $T$ 大, 离散系统稳定性差。**

## 课堂练习

---

➤ **例 10:** 检验特征方程式  $2s^3 + 10s^2 + 13s + 4 = 0$   
是否有根在右半平面, 并检验有几个根在直线  $s = -1$  的右边。

**例 12:** 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

试确定: ① 系统产生等幅振荡的  $K$  值及相应的振荡角频率。  
② 全部闭环极点位于  $s = -2$  垂直线左侧时的  $K$  取值范围。

---

## 课堂练习

➤ 例 10: 检验特征方程式

$$2s^3 + 10s^2 + 13s + 4 = 0$$

是否有根在右半平面, 并检验有几个根在直线  $s = -1$  的右边。

解: 劳斯阵列为

$s^3$	2	13
$s^2$	10	4
$s^1$	12.2	0
$s^0$	4	0

第一列无符号改变, 故没有根在S平面右半平面。再令  $s = z - 1$ , 代入原特征方程式, 得

$$2(z - 1)^3 + 10(z - 1)^2 + 13(z - 1) + 4 = 0$$

$$2z^3 + 4z^2 - z - 1 = 0$$

新的劳斯阵列为

$s^3$	2	-1
$s^2$	4	-1
$s^1$	-0.5	0
$s^0$	-1	0

从表中可以看出, 第一列符号改变一次, 故有一个根在直线  $s = -1$  的右边 (即新坐标虚轴的右边)。



## 课堂练习

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

**例 12:** 设单位反馈系统的开环传递函数为

试确定: ① 系统产生等幅振荡的 $K$ 值及相应的振荡角频率。

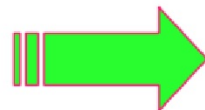
② 全部闭环极点位于 $s = -2$  垂直线左侧时的 $K$  取值范围。

**解: 1)** 闭环特征方程  $\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 17s + K$

劳斯行列式:	$s^3$	1	17
	$s^2$	7	$K$
	$s^1$	?	
	$s^0$	$K$	

等幅振荡:  $s^1$ 行全0。  $\therefore K - 119 = 0, K = 119$

振荡频率: 辅助多项式  $7s^2 + K = 0 \quad \omega_n = ?$



$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{119/7} = \pm j\sqrt{17}; \quad \omega_n = \sqrt{17}$$

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

**例 12:** 设单位反馈系统的开环传递函数为

试确定: ① 系统产生等幅振荡的 $K$ 值及相应的振荡角频率。

② 全部闭环极点位于 $s=-2$  垂直线左侧时的 $K$  取值范围。

**解: 2)** 令  $s = z - 2$

$$\begin{aligned} \text{则 } Q(z) &= (z-2)^3 + 7(z-2)^2 + 17(z-2) + K \\ &= z^3 + z^2 + z + K - 14 \end{aligned}$$

新的劳斯行列式:

$z^3$	1	1
$z^2$	1	$K-14$
$z^1$	$-K+15$	0
$z^0$	$-14+K$	

$$-K+15 > 0 \text{ 和 } -14+K > 0$$



$$14 < K < 15$$

若取 $14 < K < 15$ , 全部闭环极点位于 $s=-2$  垂直线左侧。



---

单位反馈系统，设开环传递函数如下，确定系统的稳定性或求使系统稳定的 $K$ 的取值范围。

$$G_a(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+5)}$$

$$1 + G_a(s) = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + (K-5)s + K = 0$$

$$K > \frac{20}{3}$$

开环不稳定，但闭环可以稳定

$$G_b(s) = \frac{11.25}{(s+0.5)(s+1)(s+2)}$$

$$1 + G_b(s) = 0$$

$$s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 12.25 = 0$$

含有一对虚根  $s = \pm j1.87$

开环稳定，但闭环未必稳定

---

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则

2. 根轨迹法分析控制系统性能

3. 特殊根轨迹

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

# 线性系统的稳态误差

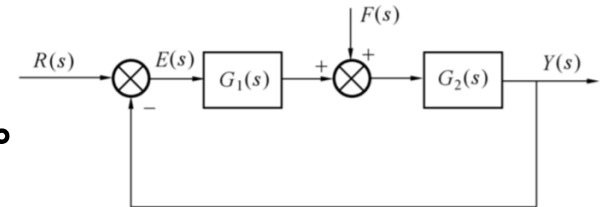
稳态误差是系统的稳态性能指标，  
是对系统控制精度的度量。

对稳定的系统研究稳态误差才有意义，  
所以计算稳态误差以系统稳定为前提。

此处只讨论系统的原理性误差，  
不考虑由于非线性因素引起的误差。

## 阶跃输入作用下

没有原理性误差的系统成为“**无差系统**”，  
有原理性稳态误差的系统称为“**有差系统**”。



## 稳态误差（两种）：

由给定输入引起的稳态误差称为**给定稳态误差**；

由扰动输入引起的稳态误差称为**扰动稳态误差**。

当线性系统既受到给定输入作用同时又受到扰动作用时，它的  
稳态误差是上述两项误差的代数和。

# 控制系统的稳态误差

## 1. 误差与稳态误差

- (1) 误差定义：按输入端定义误差；按输出端定义误差
- (2) 稳态误差：静态误差；动态误差

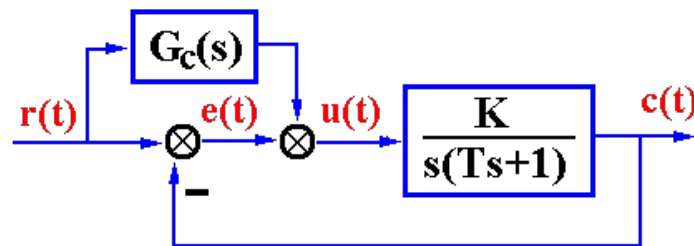
## 2. 计算稳态误差的一般方法

- (1) 判定系统的稳定性
- (2) 求误差传递函数
- (3) 用终值定理求稳态误差

## 3. 给定输入下的稳态误差（静态误差系数法）

- (1) 静态误差系数 $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$
- (2) 计算误差方法

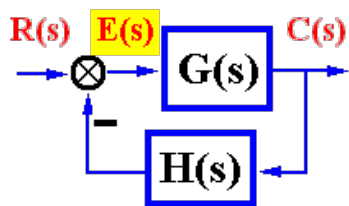
- (3) 适用条件
  - 1) 系统稳定
  - 2) 按输入端定义误差
  - 3)  $r(t)$ 作用，且 $r(t)$ 无其他前馈通道



## 4. 干扰作用引起的稳态误差

# 误差及稳态误差

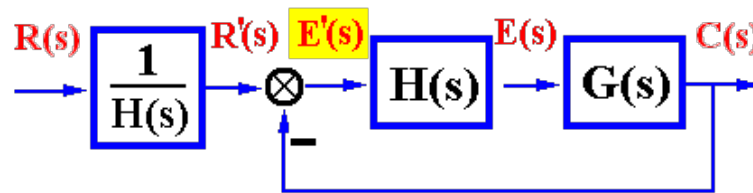
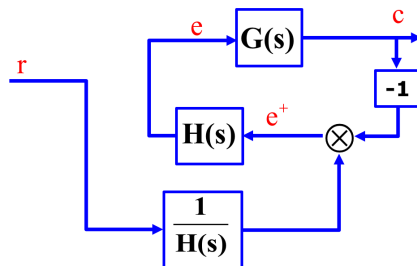
## (1) 线性控制系统的稳态误差 ① 误差和稳态误差定义



按输入端定义的误差

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

给定—反馈



按输出端定义的误差

$$E'(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s)$$

希望的输出—实际输出

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

对于单位反馈系统:

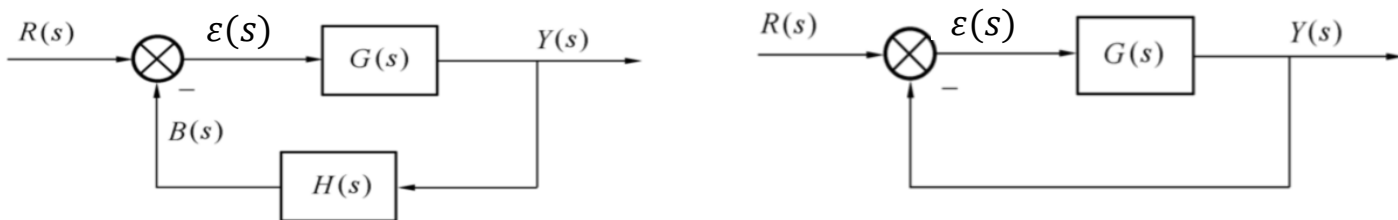
$$E(s) = E'(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

稳态误差

静态误差:  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e(\infty)$   
 动态误差: 误差中的稳态分量  $e_s(t)$

# 误差及稳态误差

## (1) 线性控制系统的稳态误差 ① 误差和稳态误差定义



期望输出信号  $y_r(t)$  与实际输出信号  $y(t)$  之差定义为**误差**： $e(t) \triangleq y_r(t) - y(t)$

对于负反馈系统， $Y_r(s) = \frac{1}{H(s)} B_r(s) = \frac{1}{H(s)} R(s)$

希望的输出—实际输出

$$E(s) = Y_r(s) - Y(s) = \frac{1}{H(s)} (R(s) - B(s)) = \frac{1}{H(s)} \varepsilon(s) = \frac{1}{H(s)} \Phi_\varepsilon(s) R(s) = \frac{1}{H(s)} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

对于单位反馈系统， $H(s) = 1$ ， $\varepsilon(s) = E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$       $e(t) = L^{-1}[E(s)]$

**稳态误差**：误差信号的稳态值，记为  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

# 稳态误差的定义

$$e(t) = L^{-1}[E(s)]$$

当  $t \rightarrow \infty$  时，系统误差称为稳态误差，用  $e_{ss}$  表示，即

对于稳定系统，有：

$$e_{ss} = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \end{cases}$$

注意：终值定理应用的条件是  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  存在，这相当于  $sE(s)$  的极点都在  $S$  平面的左半平面（包括坐标原点）。

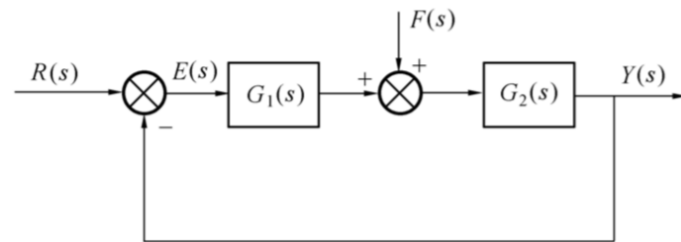
## ② 计算稳态误差的一般方法

(1) 判定系统的稳定性

(2) 求误差传递函数  $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$ ,  $\Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)}$

(3) 用终值定理求稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[\Phi_e(s)R(s) + \Phi_{ef}(s)F(s)]$$



注意：终值定理应用的条件是  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  存在，这相当于  $sE(s)$  的极点都在  $S$  平面的左半平面（包括坐标原点）。

$$e_{ss} = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \end{cases}$$

例 某单位反馈系统开环传递函数为  $G(s)=1/Ts$ ,  $T>0$

输入信号  $r(t)=1(t)$ ,  $t$ ,  $t^2/2$  以及  $r(t)=\sin \omega t$  ( $t>0$ )，求系统稳态误差  $e_{ss}$

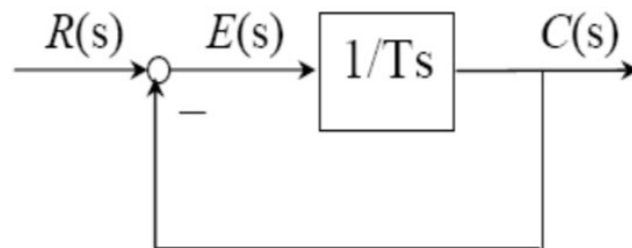
解: 
$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Ts}{Ts+1}$$

1)  $R(s) = \frac{1}{s}$  
$$E(s) = \frac{Ts}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{T}{Ts+1}$$

满足终值定理的应用条件, 
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sT}{Ts+1} = 0$$

2)  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  
$$E(s) = \frac{Ts}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{T}{s(Ts+1)}$$

满足终值定理的应用条件, 
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T}{Ts+1} = T$$





注意：终值定理应用的条件是  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  存在，这相当于  $sE(s)$  的极点都在  $S$  平面的左半平面（包括坐标原点）。

$$e_{ss} = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \end{cases}$$

$$3) R(s) = \frac{1}{s^3} \quad E(s) = \frac{T}{s^2(Ts+1)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T}{s(Ts+1)} = \infty$$

$$e(t) = L^{-1}[E(s)] = L^{-1}\left[\frac{T}{s^2} - \frac{T^2}{s} + \frac{T^2}{s + 1/T}\right] = T(t-T) + T^2 e^{-\frac{t}{T}}$$

$$e_{ss}(t) = T(t-T)$$

$$4) R(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad E(s) = \frac{Ts}{Ts+1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

不满足终值定理的应用条件，不能求终值。

$$e(t) = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} (\cos \omega t + T\omega \sin \omega t)$$

$$e_{ss}(t) = \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} (\cos \omega t + T\omega \sin \omega t)$$

**例** 系统结构图如图所示，已知  $r(t) = n(t) = t$ ，求系统的稳态误差。  $T, K > 0$

解.

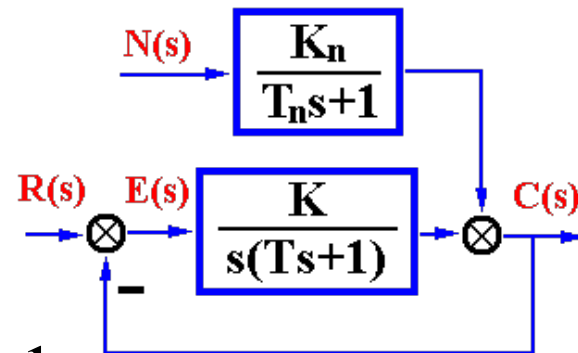
$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + K}$$

$$D(s) = Ts^2 + s + K = 0$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + K} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-\frac{K_n}{Ts+1}}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{-K_n s(Ts+1)}{(Ts+1)[s(Ts+1) + K]}$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{en}(s) N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-K_n s(Ts+1)}{(Ts+1)[s(Ts+1) + K]} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{-K_n}{K}$$



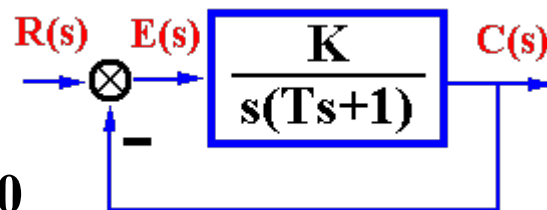
$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = \frac{1 - K_n}{K}$$

$e_{ss}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{与系统自身的结构参数有关} \\ \text{与外作用的类型有关（控制量，扰动量及作用点）} \end{array} \right.$

# 误差及稳态误差

例 系统结构图如图所示，求  $r(t)$  分别为  $A \cdot 1(t)$ ,  $At$ ,  $At^2/2$  时系统的稳态误差。

解. 
$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$



$$r(t) = A \cdot 1(t) \quad e_{ss1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K} \cdot \frac{A}{s} = 0$$

$$r(t) = A \cdot t \quad e_{ss2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K} \cdot \frac{A}{s^2} = \frac{A}{K}$$

$$r(t) = \frac{A}{2} \cdot t^2 \quad e_{ss3} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K} \cdot \frac{A}{s^3} = \infty$$

影响  $e_{ss}$  的因素:

系统自身的结构参数

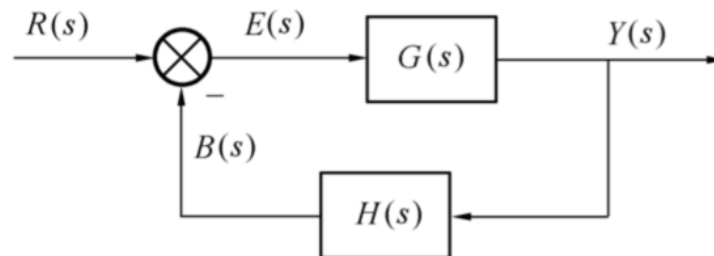
外作用的类型（控制量，扰动量及作用点）

外作用的形式（阶跃、斜坡或加速度等）

# 控制系统的型别

系统开环传递函数记为：

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$



$K$ ——开环放大倍数；  $K = \lim_{s \rightarrow 0} s^v G(s)H(s)$

$v$ ——开环传递函数中串联积分环节的个数。

**定义：**开环传递函数包含积分环节的个数  $v$  称为**系统的型别**（类型）

$v=0$  —— **零型系统**；  $v=1$  —— **I型系统**；  $v=2$  —— **II型系统**

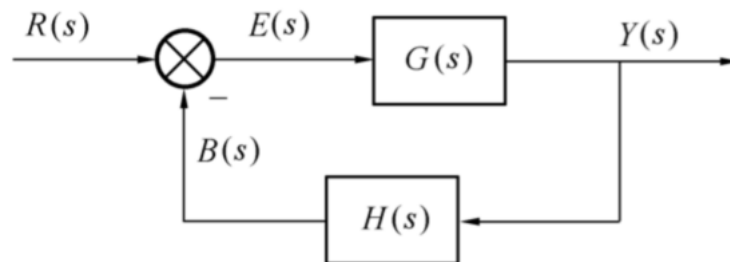
★影响稳态误差的因素有：

- ① 输入信号  $r(t)$  的形式
- ② 开环放大倍数  $K$
- ③ 开环传递函数中积分环节的个数  $v$

# 给定输入下的稳态误差 (静态误差系数法)

## 1. 阶跃输入作用下的稳态误差

设  $r(t) = A$ , 则  $R(s) = A/s$



$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v}} = \frac{A}{1 + K_p}$$

定义  $K_p$  为静态位置误差系数

$$K_p = \begin{cases} K & v = 0 \\ \infty & v \geq 1 \end{cases} \quad \text{0 型系统}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \frac{A}{1 + K_p} & v = 0 \\ 0 & v \geq 1 \end{cases} \quad \text{0 型系统}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

结论:

0 型系统能跟踪阶跃输入但有位置误差;  
I 型及以上系统能完全跟踪阶跃输入.

# 给定输入下的稳态误差

## 2. 斜坡信号输入下的稳态误差

设  $r(t) = At$ , 则  $R(s) = A/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{A}{K_v}$$

定义  $K_v$  为静态速度误差系数

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-1}} = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ K & v = 1 \\ \infty & v = 2 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & v = 0 \\ \frac{A}{K_v} & v = 1 \\ 0 & v = 2 \end{cases}$$

0型系统不能跟踪斜坡输入;

I型系统能跟踪斜坡输入, 但有稳态误差;

II型及以上系统, 能准确跟踪斜坡输入信号,  
无稳态误差

# 给定输入下的稳态误差

## 3. 加速度信号输入下的稳态误差

设  $r(t) = At^2/2$ , 则  $R(s) = A/s^3$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 + s^2G(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)} = \frac{A}{K_a}$$

定义  $K_a$  为静态加速度误差系数

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-2}} = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ 0 & v = 1 \\ K & v = 2 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & v = 0 \\ \infty & v = 1 \\ \frac{A}{K_a} & v = 2 \end{cases}$$

0, I 型系统不能跟踪加速度输入;

II 型系统能跟踪加速度输入, 但有稳态误差;

III 型及以上系统, 能准确跟踪加速度输入,

无稳态误差;

一个表格四句话

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
	<b>(V)</b>	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GH$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}}$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$
<b>0</b>	$K$	0	0	$\frac{A}{1 + K}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$	$\infty$
<b>II</b>	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$



---

◆由表可知：

1. 0 型系统对单位阶跃输入信号的稳态误差为常数。
2. I 型系统单位阶跃输入信号的稳态误差为零。
3. II 型系统对阶跃输入信号和斜坡信号的稳态误差为零。
4. 系统的型别越高，跟踪输入信号的能力越强。但型别越高，稳定性越难以保证。

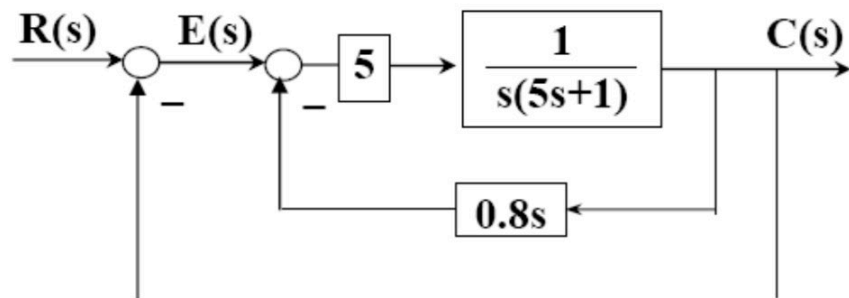
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

---

例 系统如图。计算 $r(t)=1(t)$ ,  $t$ ,  $t^2/2$ 时系统稳态误差。

解. 系统稳定, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



本系统为 I 型系统,  $v = 1$ ,  $K = 1$

其静态误差系数和稳态误差为:

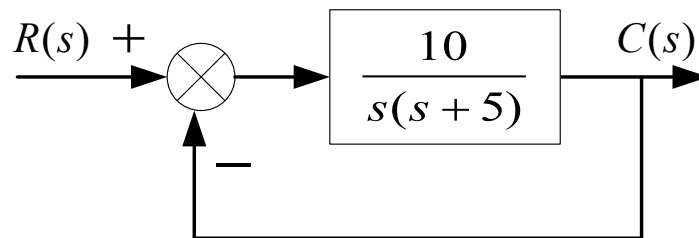
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = s \frac{1}{s(s+1)} = 1 \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = s^2 \frac{1}{s(s+1)} = 0 \quad e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

类型	静态误差系数			稳态误差计算		
	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-1}}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-2}}$	$r=A \cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	$r=A \cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$r=A \cdot t^2/2$ $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
0	$K$	0	0	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
I	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$	$\infty$
II	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$

**例** 对于如下系统，试求当输入信号 $r(t)$ 分别为  $2$ ， $2t$  和  $t^2$  时，系统的稳态误差。



**解：** 由劳斯判据判定系统是稳定的。

**I 型系统， $K = 2$**

在阶跃、斜坡、加速度信号作用下的稳态误差系数和稳态误差分别为

$$K_p = \infty \quad e_{ss} = \frac{2}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = 2 \quad e_{ss} = \frac{2}{K_v} = 1$$

$$K_a = 0 \quad e_{ss} = \frac{2}{K_a} = \infty$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2-1}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2GH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2-2}$	$r=A \cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	$r=A \cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$r=A \cdot t^2/2$ $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
0	$K$	0	0	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$	$\infty$
II	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$

V	$r=A \cdot 1(t)$	$r=A \cdot t$	$r= A \cdot t^2/2$
0	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
I	0	$\frac{A}{K}$	$\infty$
II	0	0	$\frac{A}{K}$

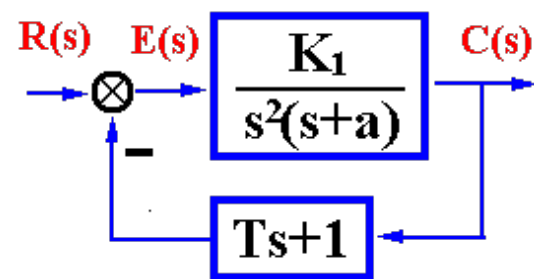
例3 系统结构图如图所示，已知输入  $r(t) = 2t + 4t^2$ ，求系统的稳态误差。

解.  $G(s) = \frac{K_1(Ts+1)}{s^2(s+a)} \quad \begin{cases} K = K_1/a \\ v = 2 \end{cases}$

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2(s+a) + K_1(Ts+1)}$$

$$D(s) = s^3 + as^2 + K_1Ts + K_1 = 0$$

$s^3$	1	$K_1T$	
$s^2$	a	$K_1$	$\Rightarrow a > 0$
$s^1$	$\frac{(aT-1)K_1}{a}$	0	$\Rightarrow aT > 1$
$s^0$	$K_1$		$\Rightarrow K_1 > 0$



$$r_1(t) = 2t$$

$$e_{ss1} = 0$$

$$r_2(t) = 4t^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} t^2 \quad e_{ss2} = \frac{A}{K} = \frac{8a}{K_1}$$

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = \frac{8a}{K_1}$$

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则

2. 根轨迹法分析控制系统性能

3. 特殊根轨迹

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

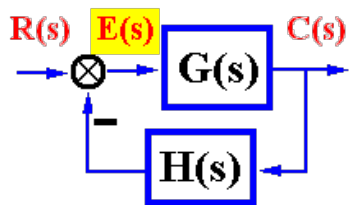
3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

# 误差及稳态误差

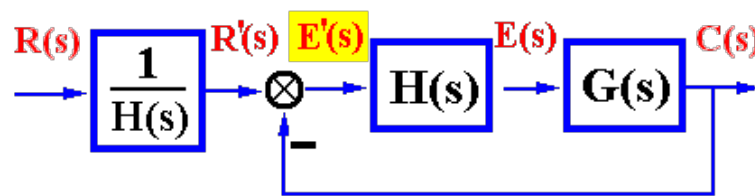
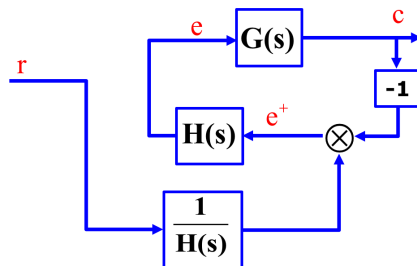
## (1) 线性控制系统的稳态误差 ① 误差和稳态误差定义



按输入端定义的误差

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

给定—反馈



按输出端定义的误差

$$E'(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s)$$

希望的输出—实际输出

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

对于单位反馈系统:

$$E(s) = E'(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

稳态误差

静态误差:  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e(\infty)$   
 动态误差: 误差中的稳态分量  $e_s(t)$

# 稳态误差的定义

$$e(t) = L^{-1}[E(s)]$$

当  $t \rightarrow \infty$  时，系统误差称为稳态误差，用  $e_{ss}$  表示，即

对于稳定系统，有：

$$e_{ss} = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \end{cases}$$

注意：终值定理应用的条件是  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  存在，这相当于  $sE(s)$  的极点都在  $S$  平面的左半平面（包括坐标原点）。

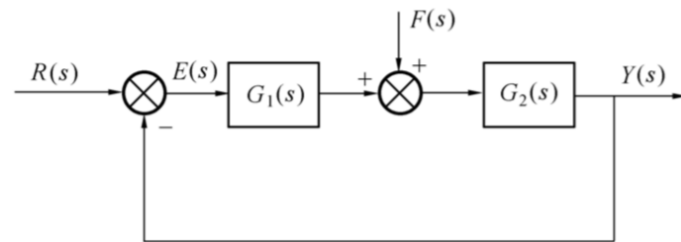
## ② 计算稳态误差的一般方法

(1) 判定系统的稳定性

(2) 求误差传递函数  $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$ ,  $\Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)}$

(3) 用终值定理求稳态误差

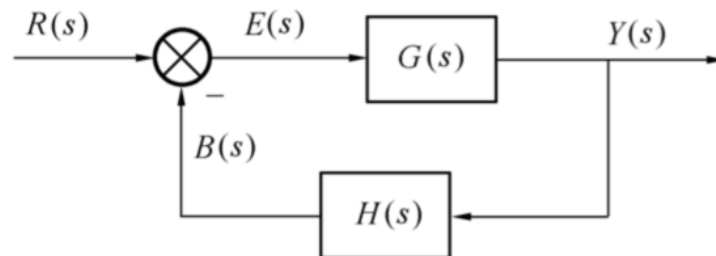
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[\Phi_e(s)R(s) + \Phi_{ef}(s)F(s)]$$



# 控制系统的型别

系统开环传递函数记为：

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$



$K$ ——开环放大倍数；  $K = \lim_{s \rightarrow 0} s^v G(s)H(s)$

$v$ ——开环传递函数中串联积分环节的个数。

**定义：**开环传递函数包含积分环节的个数  $v$  称为**系统的型别**（类型）

$v=0$  —— **零型系统**；  $v=1$  —— **I型系统**；  $v=2$  —— **II型系统**

★影响稳态误差的因素有：

- ① 输入信号  $r(t)$  的形式
- ② 开环放大倍数  $K$
- ③ 开环传递函数中积分环节的个数  $v$

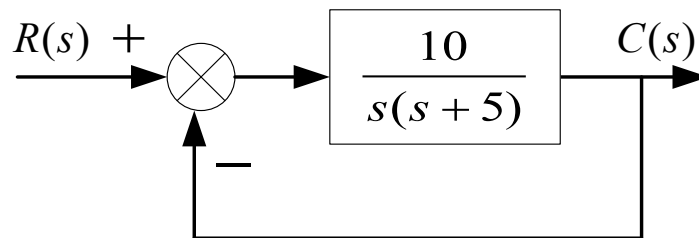


一个表格四句话

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GH$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}}$	$r=A \cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	$r=A \cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$r=A \cdot t^2/2$ $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
<b>V</b>						
<b>0</b>	$K$	$0$	$0$	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	$\infty$	$K$	$0$	$0$	$\frac{A}{K}$	$\infty$
<b>II</b>	$\infty$	$\infty$	$K$	$0$	$0$	$\frac{A}{K}$

**例** 对于如下系统，试求当输入信号 $r(t)$ 分别为  $2$ ， $2t$  和  $t^2$  时，系统的稳态误差。



**解：**由劳斯判据判定系统是稳定的。

**I** 型系统， $K = 2$

在阶跃、斜坡、加速度信号作用下的稳态误差系数和稳态误差分别为

$$K_p = \infty \quad e_{ss} = \frac{2}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = 2 \quad e_{ss} = \frac{2}{K_v} = 1$$

$$K_a = 0 \quad e_{ss} = \frac{2}{K_a} = \infty$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2-1}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2GH = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2-2}$	$r=A \cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	$r=A \cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$r=A \cdot t^2/2$ $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
<b>0</b>	$K$	0	0	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$	$\infty$
<b>II</b>	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{A}{K}$

V	$r=A \cdot 1(t)$	$r=A \cdot t$	$r= A \cdot t^2/2$
0	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
I	0	$\frac{A}{K}$	$\infty$
II	0	0	$\frac{A}{K}$

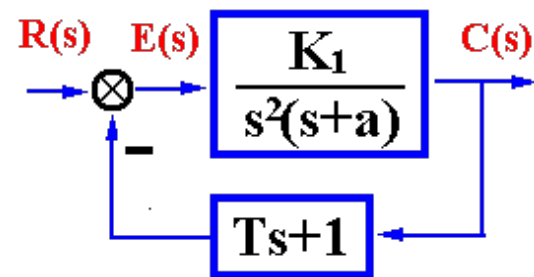
例3 系统结构图如图所示，已知输入  $r(t) = 2t + 4t^2$ ，求系统的稳态误差。

解.  $G(s) = \frac{K_1(Ts+1)}{s^2(s+a)} \quad \begin{cases} K = K_1/a \\ v = 2 \end{cases}$

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2(s+a) + K_1(Ts+1)}$$

$$D(s) = s^3 + as^2 + K_1Ts + K_1 = 0$$

$s^3$	1	$K_1T$	
$s^2$	a	$K_1$	$\Rightarrow a > 0$
$s^1$	$\frac{(aT-1)K_1}{a}$	0	$\Rightarrow aT > 1$
$s^0$	$K_1$		$\Rightarrow K_1 > 0$



$$r_1(t) = 2t \quad e_{ss1} = 0$$

$$r_2(t) = 4t^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} t^2 \quad e_{ss2} = \frac{A}{K} = \frac{8a}{K_1}$$

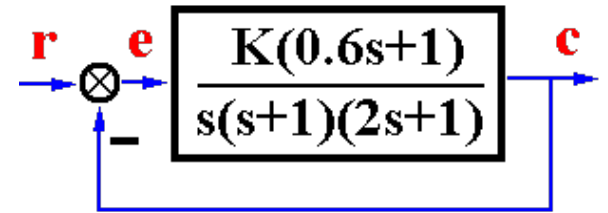
$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = \frac{8a}{K_1}$$

# 举例

**例** 系统结构图如图所示，当 $r(t)=t$ 时，要求 $e_{ss}<0.1$ ，求 $K$ 的范围。

解 ·  $G(s) = \frac{K(0.6s+1)}{s(s+1)(2s+1)} \quad \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$

$$r(t) = t \quad e_{ss} = \frac{1}{K} < 0.1 \quad \Rightarrow \quad K > 10$$



$$D(s) = s(s+1)(2s+1) + K(0.6s+1) = 2s^3 + 3s^2 + (1+0.6K)s + K = 0$$

<b>Routh</b>	$s^3$	2	1+0.6K	
	$s^2$	3	K	
	$s^1$	$\frac{3(1+0.6K)-2K}{3}$	0	$\rightarrow 3-0.2K > 0 \rightarrow K < 15$
	$s^0$	K		$\rightarrow K > 0$

$10 < K < 15$

**例** 系统方块图如图所示，当输入为单位斜坡函数时，如何调整 $K$ 值才能使稳态误差小于0.1？

**解：** 先判断稳定性

$$2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$$

由劳斯判据知稳定的条件为：  $0 < K < 6$

系统的误差传递函数为

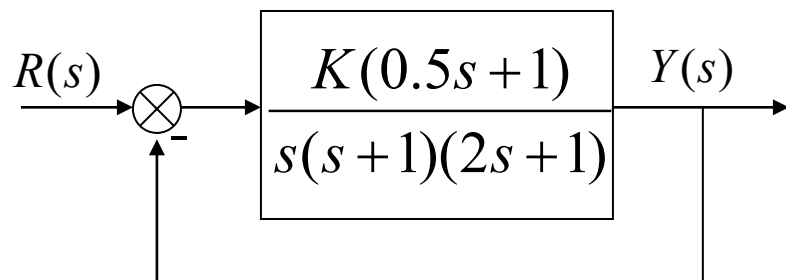
$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad E(s) = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

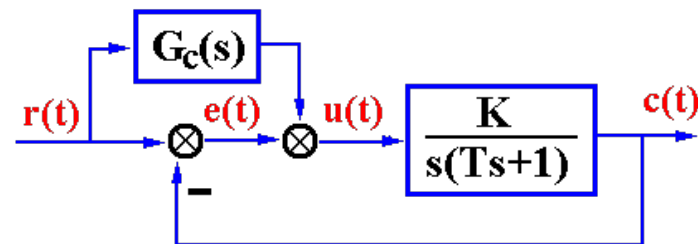
为使稳态误差小于0.1，需满足 $e_{ss}=1/K < 0.1$ ，即 $K > 10$ 。

由稳定的条件知，当 $K > 10$ 时，系统不稳定，故无法通过选择 $K$ 来满足 $e_{ss} < 0.1$ 的要求。



例 4 系统结构图如图所示，已知输入  $r(t) = At$ ，求  $G_c(s)$ ，使稳态误差为零。

解.  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \quad \begin{cases} K = K \\ \nu = 1 \end{cases}$



$$D(s) = Ts^2 + s + K = 0$$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{KG_c(s)}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{s(Ts+1) - KG_c(s)}{s(Ts+1) + K}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A \left[ sT + 1 - \frac{K}{s} G_c(s) \right]}{s(Ts+1) + K} = \frac{A \left[ 1 - \frac{K}{s} G_c(s) \right]}{K} = 0$$

$$G_c(s) = \frac{s}{K}$$

按前馈补偿的复合控制方案可以有效提高系统的稳态精度

# 控制系统的稳态误差

## 1. 误差与稳态误差

- (1) 误差定义：按输入端定义误差；按输出端定义误差
- (2) 稳态误差：静态误差；动态误差

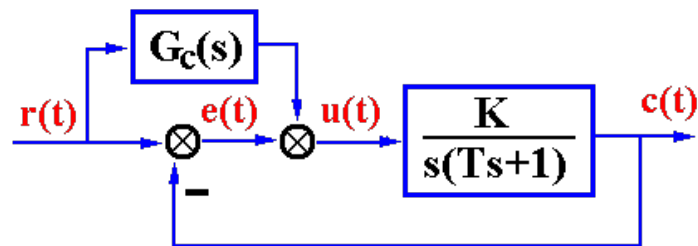
## 2. 计算稳态误差的一般方法

- (1) 判定系统的稳定性
- (2) 求误差传递函数
- (3) 用终值定理求稳态误差

## 3. 给定输入下的稳态误差（静态误差系数法）

- (1) 静态误差系数 $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$
- (2) 计算误差方法

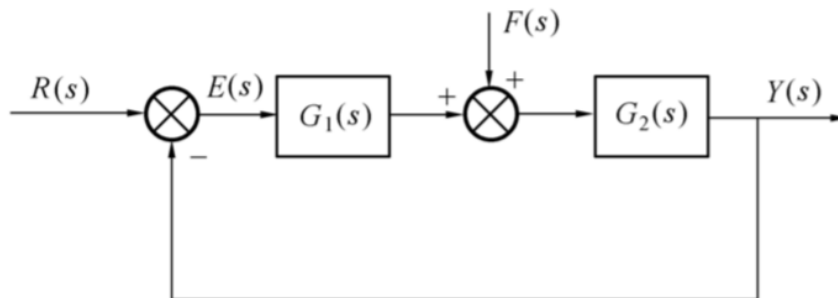
- (3) 适用条件
  - 1) 系统稳定
  - 2) 按输入端定义误差
  - 3)  $r(t)$ 作用，且 $r(t)$ 无其他前馈通道



## 4. 干扰作用引起的稳态误差

# 干扰信号作用下的稳态误差

- ◆ 系统在扰动作用下的稳态误差的大小，反映了系统的抗扰动能力。
- ◆ 由于给定输入与扰动信号作用在系统的不同位置上，即使系统对某一给定输入的稳态误差为零，对同一形式的扰动作用的稳态误差未必是零。
- ◆ 同一系统面对同一形式的扰动作用，由于扰动的作用点不同，其稳态误差也不一定相同。



令  $R(s) = 0$ , 由干扰引起的偏差信号  $E_f(s)$  为

$$E_f(s) = \Phi_{ef}(s) \cdot F(s) = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot F(s)$$

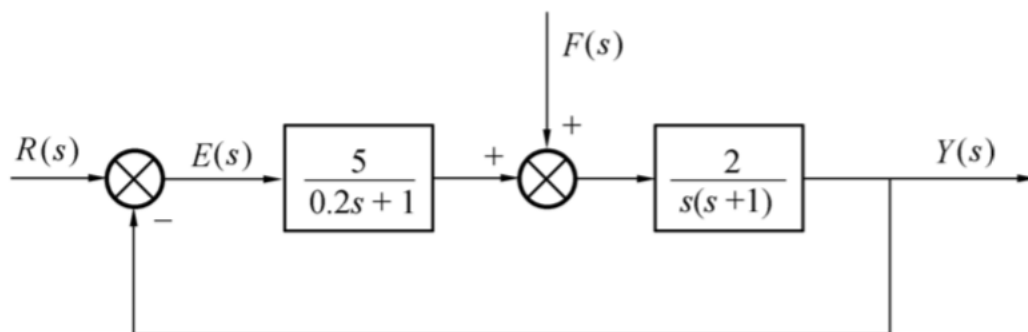
对于不同形式的干扰信号  $f(t)$ , 如单位阶跃、单位斜坡等, 可以用终值定理求出  $e_f(t)$  的稳态值

$$e_{ssf} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{ef}(s) \cdot F(s)$$



# 干扰信号作用下的稳态误差

例 3.10.1 控制系统如图 3.10.5 所示,同时作用有  $r(t) = t, f(t) = 1(t)$ 。试计算该系统的稳态误差。



<b>V</b>	$r=A \cdot 1(t)$	$r=A \cdot t$	$r=A \cdot t^2/2$
<b>0</b>	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	<b>0</b>	$\frac{A}{K}$	$\infty$
<b>II</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{A}{K}$

解 该系统是 I 型系统,由特征方程判断该系统是稳定的。首先,求输入信号  $r(t) = 1(t)$  作用下的稳态误差(令  $f(t) = 0$ )

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

然后,求干扰信号作用下引起的稳态误差(令  $r(t) = 0$ )

$$e_{ssf} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{ef}(s) \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-2(0.02s + 1)}{s(s + 1)(0.02s + 1) + 10} \cdot \frac{1}{s} = -0.2$$

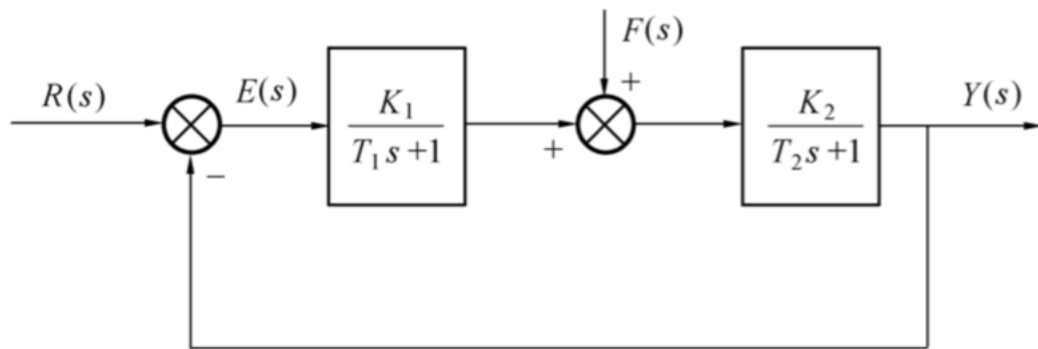
在输入信号和干扰信号同时作用下的稳态误差

$$e_{ss} = e_{ssf} + e_{ssr} = -0.1$$

# 干扰信号作用下的稳态误差

例 3.10.2 对于图 3.10.6 所示系统,试求

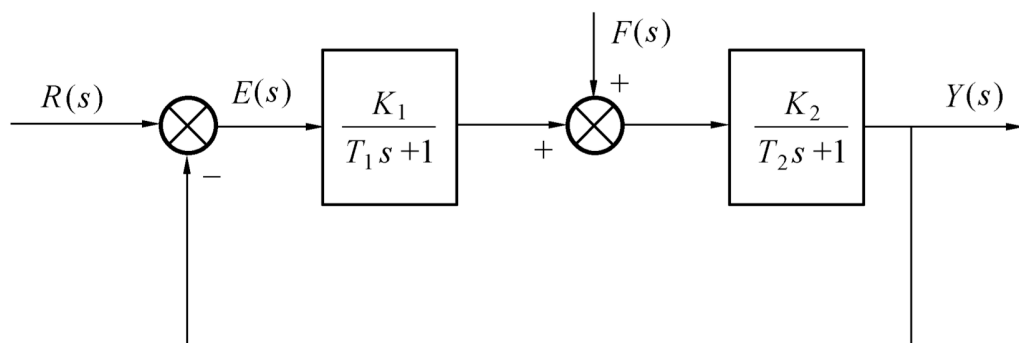
- (1) 当  $r(t) = 0, f(t) = 1(t)$  时,系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。
- (2) 当  $r(t) = 1(t), f(t) = 1(t)$  时,系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。
- (3) 若要减少  $e_{ss}$ ,应如何调整  $K_1$  和  $K_2$ ?
- (4) 如分别在扰动点之前或之后加入积分环节,对系统的稳态误差有何影响?



# 干扰信号作用下的稳态误差

例 3.10.2 对于图 3.10.6 所示系统,试求

- (1) 当  $r(t) = 0, f(t) = 1(t)$  时,系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。
- (2) 当  $r(t) = 1(t), f(t) = 1(t)$  时,系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。



解 图 3.10.6 所示系统是 0 型系统。可以证明,只要  $K_1 > 0, K_2 > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$ , 闭环系统即是稳定的。

(1) 求干扰引起的稳态误差

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{-K_2(T_1s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K_1K_2}$$

按终值定理,有

$$e_{ssf} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{ef}(s) \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2(T_1s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K_1K_2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-K_2}{1 + K_1K_2}$$

例 3.10.2 对于图 3.10.6 所示系统,试求

(1) 当  $r(t) = 0, f(t) = 1(t)$  时,系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。

(2) 当  $r(t) = 1(t), f(t) = 1(t)$  时,系统的稳态误差  $e_{ss}$ 。

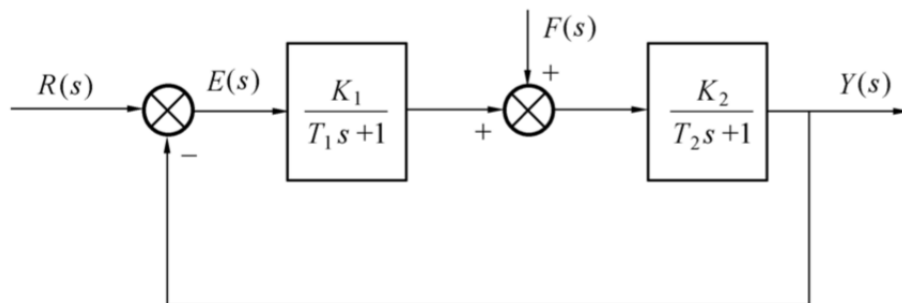
$$e_{ssf} = \frac{-K_2}{1 + K_1 K_2}$$

(2) 求输入信号作用下的稳态误差

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K_1 K_2}$$

总的稳态误差为二者相加

$$e_{ss} = e_{ssf} + e_{ssr} = \frac{1 - K_2}{1 + K_1 K_2}$$



# 干扰信号作用下的稳态误差

例 3.10.3 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

若输入信号  $r(t) = a \times 1(t) + bt$  ( $a, b$  为正的常数), 欲使系统的稳态误差  $e_{ss} < \epsilon_0$  (正的常数), 求系统各参数应满足的条件。

解 首先应满足系统稳定的条件。系统的特征方程是

$$D(s) = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K = 0$$

列出劳斯行列表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T_1T_2 & 1 \\ s^2 & T_1 + T_2 & K \\ s^1 & \frac{T_1 + T_2 - T_1T_2K}{T_1 + T_2} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

系统稳定的条件是

$$T_1 > 0 \quad T_2 > 0 \quad 0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2} \quad e_{ss} = \frac{b}{k_v} = \frac{b}{K}$$

按题意  $e_{ss} < \epsilon_0$ , 所以  $K > b/\epsilon_0$ 。综合以上各项条件, 系统参数应满足的条件是

$$T_1 > 0 \quad T_2 > 0 \quad \frac{b}{\epsilon_0} < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}$$

# 课程小结

## 1. 误差与稳态误差

- (1) 误差定义：按输入端定义误差；按输出端定义误差
- (2) 稳态误差：静态误差；动态误差

## 2. 计算稳态误差的一般方法

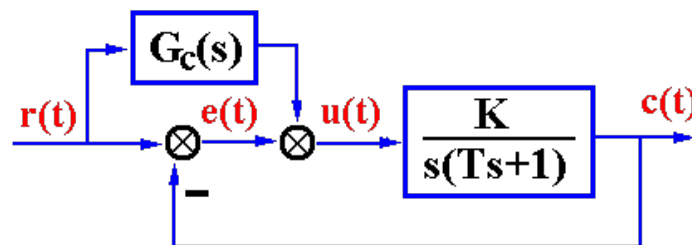
- (1) 判定系统的稳定性
- (2) 求误差传递函数
- (3) 用终值定理求稳态误差

## 3. 给定输入下的稳态误差（静态误差系数法）

- (1) 静态误差系数  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$

- (2) 计算误差方法

- (3) 适用条件  $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 系统稳定} \\ 2) \text{ 按输入端定义误差} \\ 3) \text{ } r(t) \text{ 作用, 且 } r(t) \text{ 无其他前馈通道} \end{array} \right.$



## 4. 干扰作用引起的稳态误差

## 5. 动态误差系数法

# 动态误差系数法

---

## 动态误差系数法

用静态误差系数法只能求出误差的稳态值  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ ；而稳态误差随时间变化的规律无法获得。

用动态误差系数法可以研究误差中的稳态分量  $e_s(t)$  随时间的变换规律。

---

---

## (1) 动态误差系数法解决问题的思路

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \Phi_e(0) + \frac{1}{1!} \Phi_e'(0)s + \frac{1}{2!} \Phi_e''(0)s^2 + \cdots + \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0)s^i + \cdots$$

$$C_i = \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$= C_0 + C_1s + C_2s^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i s^i$$

$$E(s) = \Phi_e(s) \cdot R(s)$$

$$= C_0 R(s) + C_1 s R(s) + C_2 s^2 R(s) + \cdots + C_i s^i R(s) + \cdots$$

$$e_s(t) = C_0 r(t) + C_1 \dot{r}(t) + C_2 \ddot{r}(t) + \cdots + C_i r^{(i)}(t) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)}(t)$$

---



---

例 3.10.4 控制系统的闭环偏差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{0.02s^3 + 1.02s^2 + s}{0.02s^3 + 1.02s^2 + s + 10}$$

求动态误差系数。

解 首先将  $\Phi_e(s)$  的分子与分母分别按  $s$  的升幂排列,然后做多项式除法

$$\begin{array}{r} 0.1s + 0.92s^2 + \cdots \\ 10 + s + 1.02s^2 + 0.02s^3 \overline{) s + 1.02s^2 + 0.02s^3} \\ \underline{s + 0.1s^2 + 0.102s^3 + 0.002s^4} \\ 0.92s^2 - 0.082s^3 - 0.002s^4 \end{array}$$

商式与式(3.10.20)对比,可得到各动态误差系数

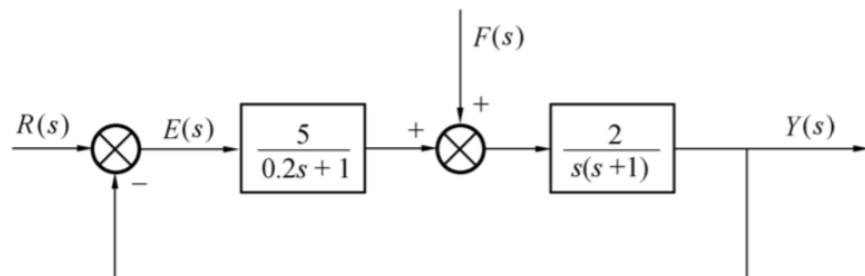
$$c_0 = 0 \quad c_1 = 0.1 \quad c_2 = 0.092$$

$$\Phi_e(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \cdots + c_l s^l + \cdots$$

---

$$e(t) = c_0 r(t) + c_1 r^{(1)}(t) + c_2 r^{(2)}(t) + \cdots + c_l r^{(l)}(t) + \cdots$$

**例 3.10.5** 单位反馈系统如图 3.10.5 所示,用动态误差系数法求  $r(t) = t, f(t) = 1(t)$  时的稳态误差。



**解** 首先求输入信号作用的稳态误差,即

$$\Phi_e(s) = \frac{s + 1.02s^2 + 0.02s^3}{10 + s + 1.02s^2 + 0.02s^3}$$

在例 3.10.4 中已求出  $c_0 = 0, c_1 = 0.1, c_2 = 0.092$ 。根据题意  $r(t) = t, \dot{r}(t) = 1, \ddot{r}(t) = 0$ , 由式(3.10.23) 得出  $r(t)$  作用下的稳态误差为

$$e_{ssr}(t) = 0.1$$

然后求干扰作用下的稳态误差,即

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{-2(0.02s + 1)}{s(0.02s + 1)(s + 1) + 10} = \frac{-2 - 0.4s}{10 + s + 1.02s^2 + 0.02s^3}$$

用多项式除法求得  $c_{0f} = -0.2, c_{1f} = -0.02$ , 根据题意,  $f(t) = 1(t), \dot{f}(t) = 0$ , 所以  $f(t)$  作用下的稳态误差

$$e_{ssf}(t) = -0.2$$

二者叠加,得

$$e_{ss}(t) = e_{ssr}(t) + e_{ssf}(t) = -0.1$$

$$e(t) = c_0 r(t) + c_1 r^{(1)}(t) + c_2 r^{(2)}(t) + \cdots + c_l r^{(l)}(t) + \cdots$$

例 3.10.6 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s(0.1s + 1)}$$

求当输入信号  $r(t) = 1(t) + 2t + t^2$  时的稳态误差  $e_{ss}(t)$

解 
$$\Phi_e(s) = \frac{s(0.1 + 1)}{s(0.1s + 1) + 100} = \frac{s + 0.1s^2}{100 + s + 0.1s^2}$$

用多项式除法可求得

$$c_0 = 0 \quad c_1 = 0.1 \quad c_2 = 0.0009$$

$r(t)$  的各阶导数分别是

$$r(t) = 1 + 2t + t^2$$

$$\dot{r}(t) = 2 + 2t$$

$$\ddot{r}(t) = 2$$

...

$$r^{(l)}(t) = 0$$

最后求得

$$e_{ss}(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + c_2 \ddot{r}(t) = 0.01(2 + 2t) + 0.0009 \times 2 = 0.0218 + 0.02t$$

# 课程回顾

## 1. 误差与稳态误差

- (1) 误差定义:
- (2) 稳态误差: 静态误差; 动态误差

## 2. 计算稳态误差的一般方法

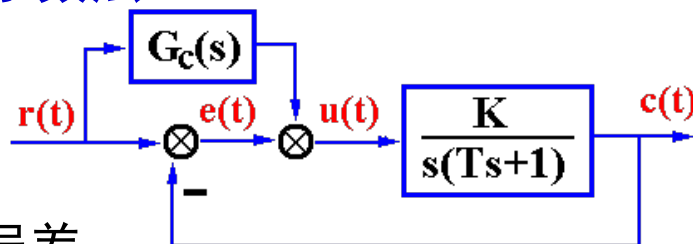
- (1) 判定系统的稳定性
- (2) 求误差传递函数
- (3) 用终值定理求稳态误差

## 3. 给定输入下的稳态误差 (静态误差系数法)

- (1) 静态误差系数  $K_p, K_v, K_a$

- (2) 计算误差方法

- (3) 适用条件
  - 1) 系统稳定
  - 2) 按输入端定义误差
  - 3)  $r(t)$ 作用, 且 $r(t)$ 无其他前馈通道



## 4. 干扰作用引起的稳态误差

## 5. 动态误差系数法

$$\Phi_e(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_l s^l + \dots$$

$$E(s) = \Phi_e(s) \cdot R(s) = C_0 R(s) + C_1 s R(s) + C_2 s^2 R(s) + \dots + C_l s^l R(s) + \dots$$

$$e(t) = c_0 r(t) + c_1 r^{(1)}(t) + c_2 r^{(2)}(t) + \dots + c_l r^{(l)}(t) + \dots$$

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

## 线性离散系统稳态误差

---

只有稳定的系统，才有稳态误差。

对于稳定的线性离散系统，当过渡过程结束以后，系统误差信号的脉冲序列就是离散系统的稳态误差  $e_{ss}^*(t), t \geq t_s$ 。

当时间  $t \rightarrow \infty$  时，可求得线性离散系统在采样点上的稳态误差终值  $e_{ss}^*(\infty)$ 。

---







$$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \Phi_e(z) R(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot R(z) \cdot \frac{1}{1+GH(z)}$$

$$r(t) = A \cdot 1(t) \quad e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{Az}{z-1} \cdot \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{A}{1+\lim_{z \rightarrow 1} GH(z)} = \frac{A}{1+K_p}$$

静态位置误差系数

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$$

$$r(t) = A \cdot t \quad e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{ATz}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{AT}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)} = \frac{AT}{K_v}$$

静态速度误差系数

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)$$

$$r(t) = \frac{A}{2} t^2 \quad e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \cdot \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{AT^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)} = \frac{AT^2}{K_a}$$

静态加速度误差系数

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$$

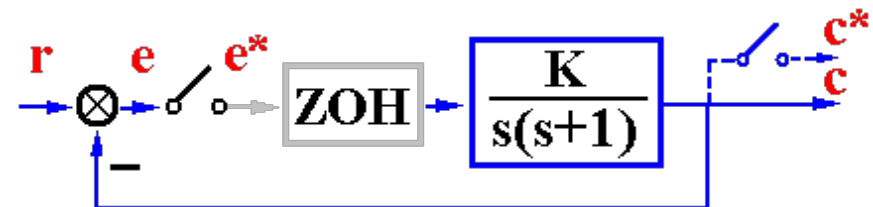
$$\begin{cases} GH(z) = \frac{1}{(z-1)^v} GH_0(z) \\ \lim_{z \rightarrow 1} GH_0(z) = K \end{cases}$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
<b>V</b>	$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$	$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)$	$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{A}{1+k_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT}{k_v}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT^2}{k_a}$
<b>0</b>	$K_p$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{A}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	$\infty$	$K_v$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{AT}{K_v}$	$\infty$
<b>II</b>	$\infty$	$\infty$	$K_a$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{AT^2}{K_a}$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$	$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)$	$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss}(\infty) = \frac{A}{1+K_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss}(\infty) = \frac{AT}{K_p}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e_{ss}(\infty) = \frac{AT^2}{K_a}$
0	$K_p$	0	0	$\frac{A}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
I	$\infty$	$K_v$	0	0	$\frac{AT}{K_v}$	$\infty$
II	$\infty$	$\infty$	$K_a$	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

例1 稳定离散系统的结构图如图

所示, 已知 $r(t)=2t$ , 试讨论有或没有ZOH 时的 $e_{ss}^*(\infty)$ 。



解.

$$\text{无ZOH时} \begin{cases} G(z) = Z \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] = \frac{K(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} & \nu = 1 \\ K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K(1-e^{-T})z}{(z-e^{-T})} = K \end{cases}$$

$$e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT}{k_v} = \frac{2T}{K}$$

—与T有关

$$\text{有ZOH时} \begin{cases} G(z) = Z \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)} \right] = K \frac{z-1}{z} \cdot Z \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right] \\ = K \frac{(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} & \nu = 1 \\ K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K(T - Te^{-T})}{z - e^{-T}} = KT \end{cases}$$

$$e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT}{k_v} = \frac{2}{K}$$

—与T无关

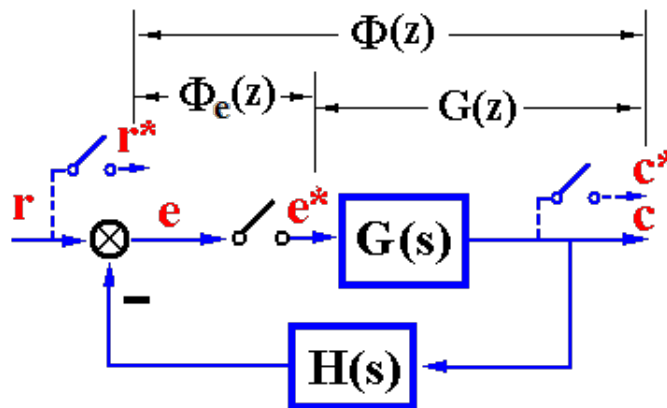


(适用于系统稳定,  $r(t)$ 作用, 对误差采样的线性定常离散系统)

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
<b>V</b>	$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$	$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)$	$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{A}{1+k_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT}{k_v}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT^2}{k_a}$
<b>0</b>	$K_p$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{A}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	$\infty$	$K_v$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{AT}{K_v}$	$\infty$
<b>II</b>	$\infty$	$\infty$	$K_a$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{AT^2}{K_a}$

# 动态误差系数法

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + GH(z)}$$



$$\Phi_e^*(s) = \Phi_e^*(z) \Big|_{z=e^{Ts}}$$

$$= \Phi_e(0) + \frac{1}{1!} \Phi_e'(0)s + \frac{1}{2!} \Phi_e''(0)s^2 + \dots + \frac{1}{m!} \Phi_e^{(m)}(0)s^m + \dots$$

$$\downarrow$$

$$c_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m \Phi_e^*(s)}{ds^m} \Big|_{s=0}$$

( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) (动态误差系数)

$$\Phi_e^*(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_m s^m + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i$$

$$E^*(s) = \Phi_e^*(s)R(s) = c_0 R(s) + c_1 s R(s) + \dots + c_m s^m R(s) + \dots$$

$$e_{ss}^*(kT) = c_0 r(kT) + c_1 \dot{r}(kT) + c_2 \ddot{r}(kT) + \dots + c_m r^{(m)}(kT) + \dots$$

$$KT > t_s$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$	$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)$	$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss}(\infty) = \frac{A}{1+K_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss}(\infty) = \frac{AT}{K_v}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e_{ss}(\infty) = \frac{AT^2}{K_a}$
0	$K_p$	0	0	$\frac{A}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
I	$\infty$	$K_v$	0	0	$\frac{AT}{K_v}$	$\infty$
II	$\infty$	$\infty$	$K_a$	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

例 6.8.2 单位负反馈离散系统的开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{e^{-T}z + (1 - 2e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})}$$

采样周期  $T = 1$  s, 闭环系统输入信号为  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 。

- (1) 用稳态误差系数求终值稳态误差  $e_{ss}^*(\infty)$ ;
- (2) 用动态误差系数求  $t = 20$  s 时的稳态误差。

解 (1)  $G(z) = \frac{e^{-T}z + 1 - 2e^{-T}}{(z - 1)(z - e^{-T})} \Big|_{T=1} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368}$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = 1$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = 0$$

当  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$  时, 稳态误差终值为

$$e_{ss}^*(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

$$c_m = \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \Phi_e^*(s)}{ds^m} \right|_{s=0} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \Phi_e^*(s) &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_m s^m + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i \\ E^*(s) &= \Phi_e^*(s)R(s) = c_0 R(s) + c_1 s R(s) + \dots + c_m s^m R(s) + \dots \\ e_{ss}^*(kT) &= c_0 r(kT) + c_1 \dot{r}(kT) + c_2 \ddot{r}(kT) + \dots + c_m r^{(m)}(kT) + \dots \end{aligned}$$

## (2) 系统闭环误差脉冲传递函数

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + G(z)} = \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 - z + 0.632}$$

因为  $t > 0$  时,  $\dot{r}(t) = t, \ddot{r}(t) = 1, \overset{\dots}{r}(t) = 0$ , 所以动态误差系数只需求出  $c_0, c_1$  和  $c_2$ 。

$$\Phi_e^*(s) = \Phi_e(z) \Big|_{z=e^{Ts}} = \frac{e^{2s} - 1.368e^s + 0.368}{e^{2s} - e^s + 0.632}$$

$$c_0 = \Phi_e^*(0) = 0$$

$$c_1 = \left. \frac{d}{ds} \Phi_e^*(s) \right|_{s=0} = 1$$

$$c_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Phi_e^*(s) \right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

系统稳态误差在采样时刻的值为

$$e_{ss}(kT) = c_0 r(kT) + c_1 \dot{r}(kT) + c_2 \ddot{r}(kT) = kT + 0.5$$

由此可见, 系统的稳态误差是随时间线性增长的, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 稳态误差终值为无穷大; 当  $t = 20$  s 时, 系统的稳态误差为  $e_{ss}^* = 20.5$ 。



# 离散系统的稳态误差

---

(1) 一般方法

$$\left\{ \begin{array}{l} G(z) \rightarrow \Phi_e(z) \\ G(z) \rightarrow \Phi_e(z) \text{判定稳定性} \\ e_{ss}^*(\infty) \end{array} \right.$$

(2) 静态误差系数法

(3) 动态误差系数法

---

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

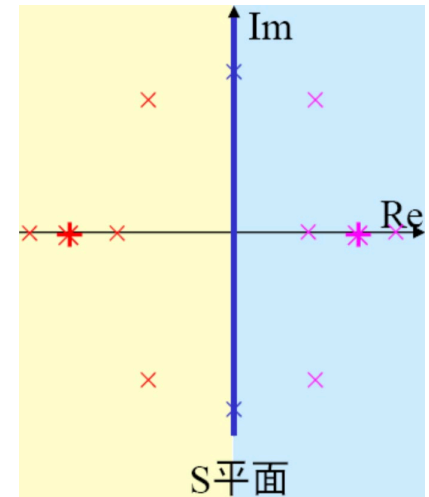
# 二阶系统的时域分析

(1) 二阶系统的数学模型  $\omega_d$ ——有阻尼振荡频率,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

## ⑤ 标准二阶系统的特征方程和特征根

特征根:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

$\zeta > 0$ 实部为负	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \zeta < 1 \\ \zeta = 1 \\ \zeta > 1 \end{array} \right.$	一对共扼复根
		两个相等的实根
		两个不相等的实根
$\zeta = 0$ 实部为零, 即纯虚根, 即: $s_{1,2} = \pm j\omega_n$		
$\zeta < 0$ 实部为正	$\left\{ \begin{array}{l} -1 < \zeta < 0 \\ \zeta = -1 \\ \zeta < -1 \end{array} \right.$	一对共扼复根
		两个相等的实根
		两个不相等的实根

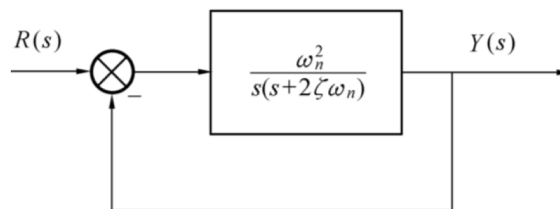


- $0 < \zeta < 1$  ——欠阻尼
- $\zeta = 1$  ——临界阻尼
- $\zeta > 1$  ——过阻尼
- $\zeta = 0$  ——无阻尼
- $-1 < \zeta < 0$  ——负阻尼

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## 0 ≤ ξ < 1 (欠阻尼, 零阻尼) 时系统动态性能指标的计算

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad 0 \leq \xi < 1$$

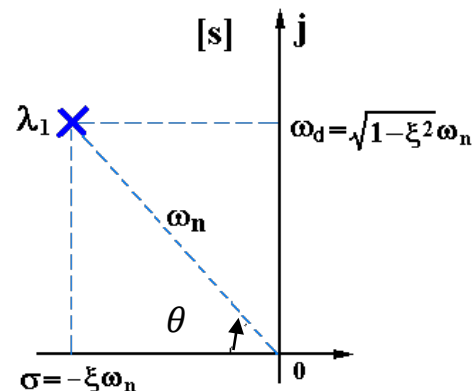
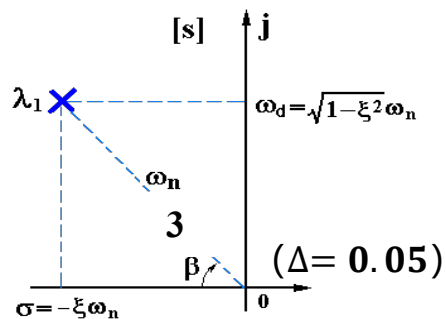


(1) 0 ≤ ξ < 1 时系统极点的两种表示方法

(2) 单位阶跃响应 y(t) 表达式

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \theta)$$

(3) 动态指标计算公式



(4) 动态性能随系统极点分布变化的规律

# 二阶系统动态性能随极点位置分布的变化规律

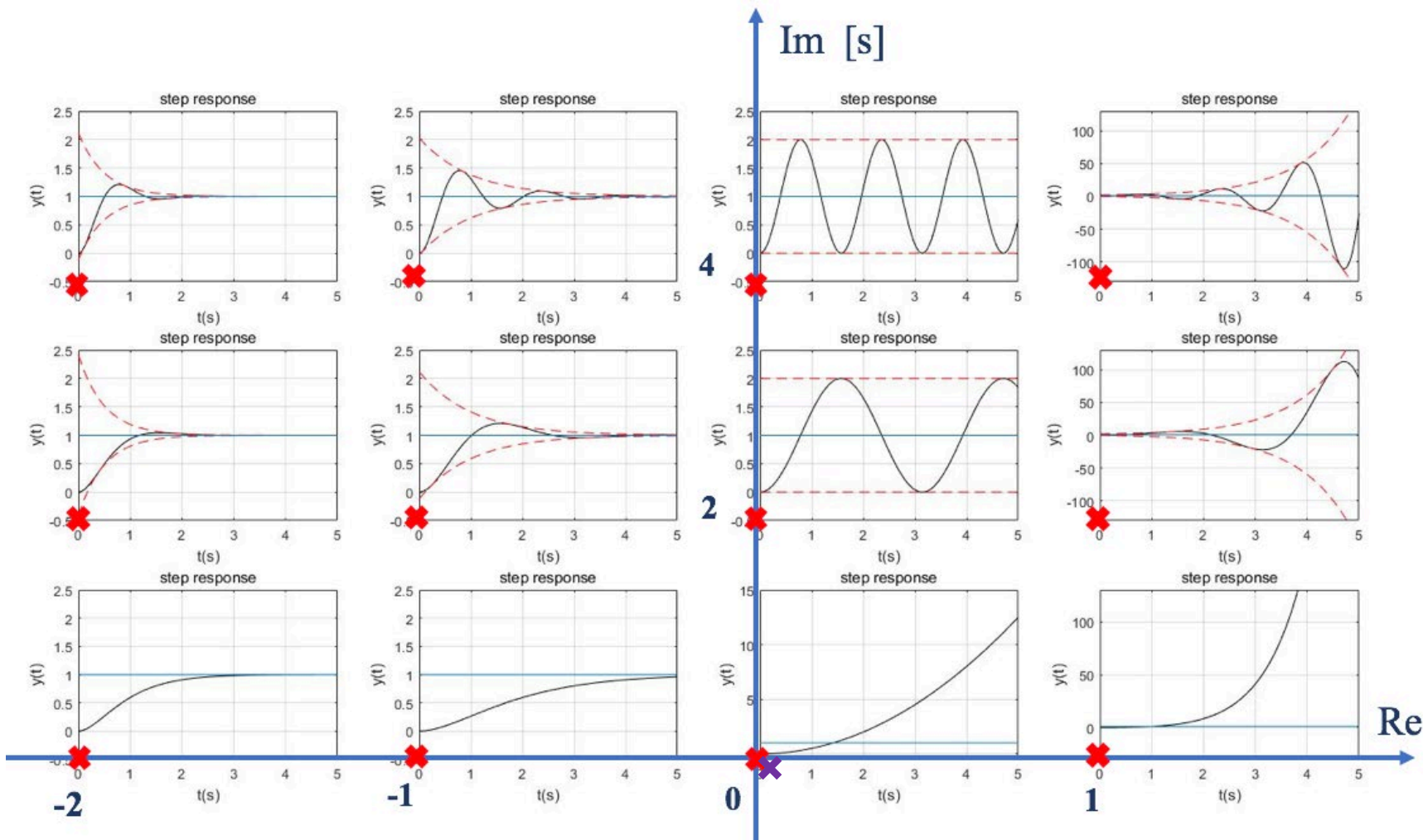
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\Delta = 0.05$$



---

## 两个问题:

- 一是如何通过**闭环系统特征根**的分布来全面了解闭环系统的**动态特性**;
- 二是如何通过对闭环系统的**动态特性**要求来决定**闭环特征根**的合理分布, 进而确定控制器的结构和参数

图解方法: **根轨迹法**———本章; **频率响应法**——— 下一章

## 根轨迹法: 三大分析、设计方法之一

- **根轨迹的概念**
    - 什么是根轨迹?
    - 为什么要用根轨迹?
  - **根轨迹的绘制**
    - 如何简单方便地绘制根轨迹?
  - **系统性能分析**
    - 如何使用根轨迹分析系统性能指标?
-

- 
- 根轨迹的概念
    - 什么是根轨迹?
    - 为什么要用根轨迹?
  - 根轨迹的绘制
    - 如何简单方便地绘制根轨迹?
  - 系统性能分析
    - 如何使用根轨迹分析系统性能指标?

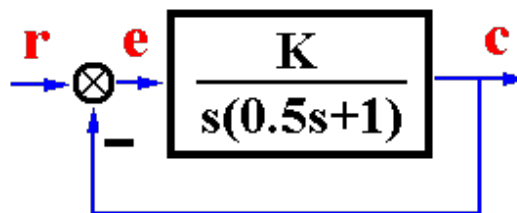
### 根轨迹定义:

当系统某一参数（如开环增益）变化时，**闭环系统特征方程**的根在S平面上变化的轨迹。

该方法是1948年Evans提出的，并广泛应用于控制工程中

---

例1 系统结构图如图所示，分析闭环极点随开环增益K变化的趋势。



解.  $G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{K^* = 2K}{s(s+2)}$

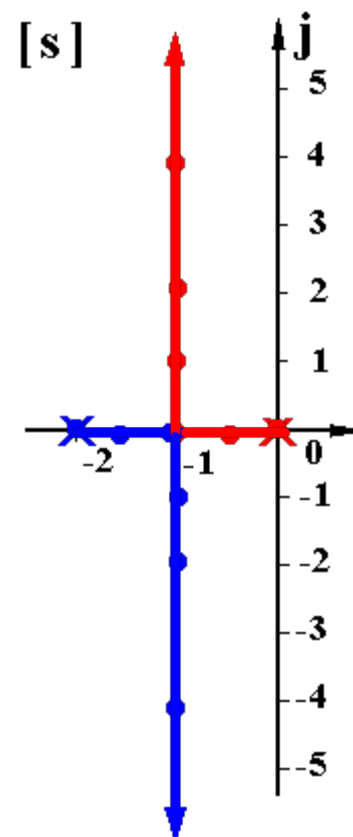
$\left\{ \begin{array}{l} K : \text{开环增益} \\ K^* : \text{根轨迹增益} \end{array} \right.$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K^*}{s^2 + 2s + K^*}$$

$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$

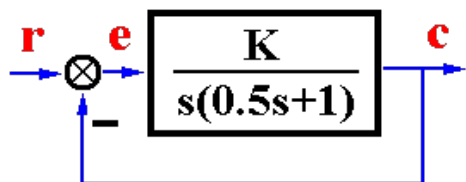
$K^*=2K$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0	0	-2
0.64	-0.4	-1.6
1	-1	-1
2	-1+j1	-1-j1
5	-1+j2	-1-j2
17	-1+j4	-1-j4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	$-1+j\infty$	$-1-j\infty$





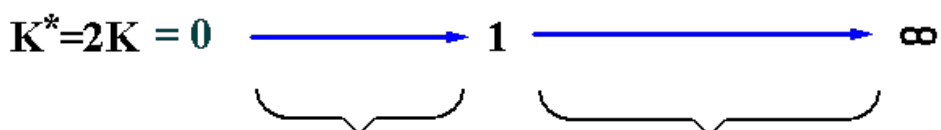
# 根轨迹与系统性能

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad \Delta = 0.05$$



$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$



动态性能

$$\xi > 1 \quad 0 < \xi < 1$$

$$\sigma\% = 0 \quad \theta \uparrow \Rightarrow \xi \downarrow \Rightarrow \sigma\% \uparrow$$

$$t_s \downarrow \quad t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} \sim$$

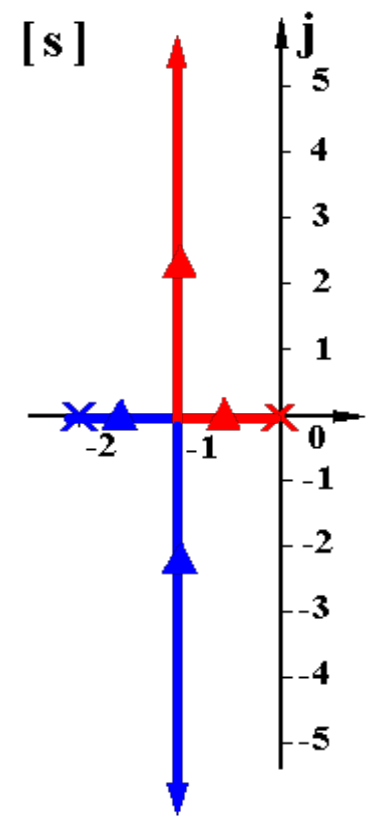
稳定性

$$\text{Re}[\lambda_{1,2}] < 0, \text{ 系统绝对稳定}$$

稳态误差

$$[r(t) = At]$$

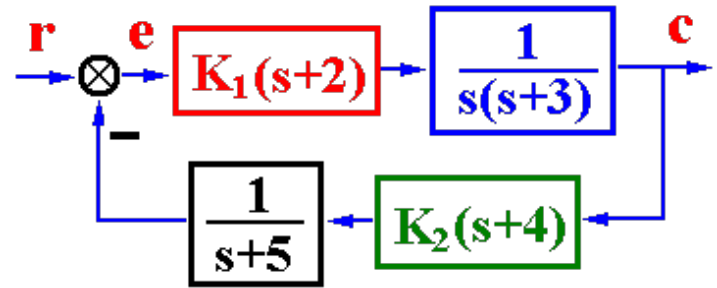
$$K^* \uparrow \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{K} = \frac{2A}{K^*} \downarrow$$



# 闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

系统结构图如图所示，确定闭环零点

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 (s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)} \quad \begin{cases} K^* = K_1 K_2 \\ K = \frac{8}{15} K_1 K_2 \\ v = 1 \end{cases}$$



$$\Phi(s) = \frac{\frac{K_1(s+2)}{s(s+3)}}{1 + \frac{K_1 K_2 (s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}} = \frac{K_1(s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+5) + K_1 K_2 (s+2)(s+4)}$$

闭环零点 = 前向通道开环零点 + 反馈通道开环极点

闭环极点与开环零点、开环极点及  $K^*$  均有关

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

---

# 根轨迹法的基本概念

## 根轨迹

当系统某一参数（如开环增益）变化时，**闭环系统特征方程**的根在S平面上变化的轨迹。

## 闭环零点与开环零极点之间的关系

闭环零点=前向通道开环零点+反馈通道开环极点

闭环极点与开环零点、开环极点及  $K^*$  均有关

## 根轨迹方程

---

# 根轨迹方程及其含义

$$G(s) = \frac{K^*}{s-p}$$

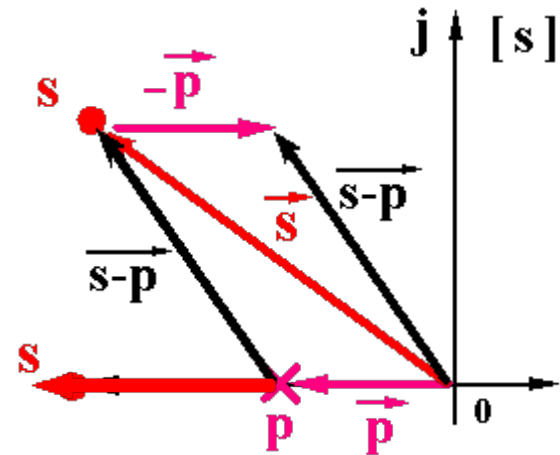
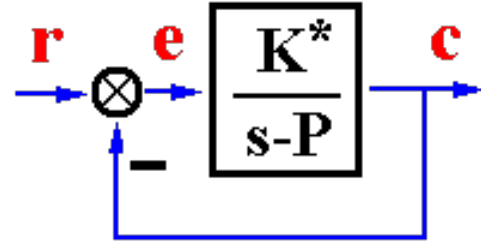
$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$1+G(s) = 0$$

根轨迹方程

$$G(s) = -1$$

$$\begin{cases} |G(s)| = \frac{K^*}{|s-p|} = 1 \\ \angle G(s) = -\angle(s-p) = (2k+1)\pi \end{cases}$$



# 根轨迹方程及其含义

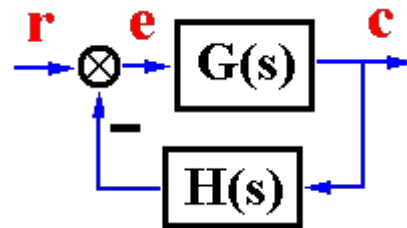
一般情况下

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = -1$$

根轨迹方程



$$K = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |z_i|}{\prod_{j=1}^n |p_j|}$$

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s - z_1| \cdots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \cdots |s - p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = 1$$

— 模值条件

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

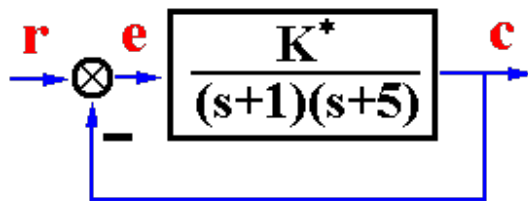
— 相角条件

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s - z_1| L |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| L |s - p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = 1$$

例2 判定  $s_i$  是否为根轨迹上的点。  $\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$

解.  $G(s) = \frac{K^*}{(s+1)(s+5)}$

由p指向s的向量



模值条件  $K^* = |s+1| |s+5|$

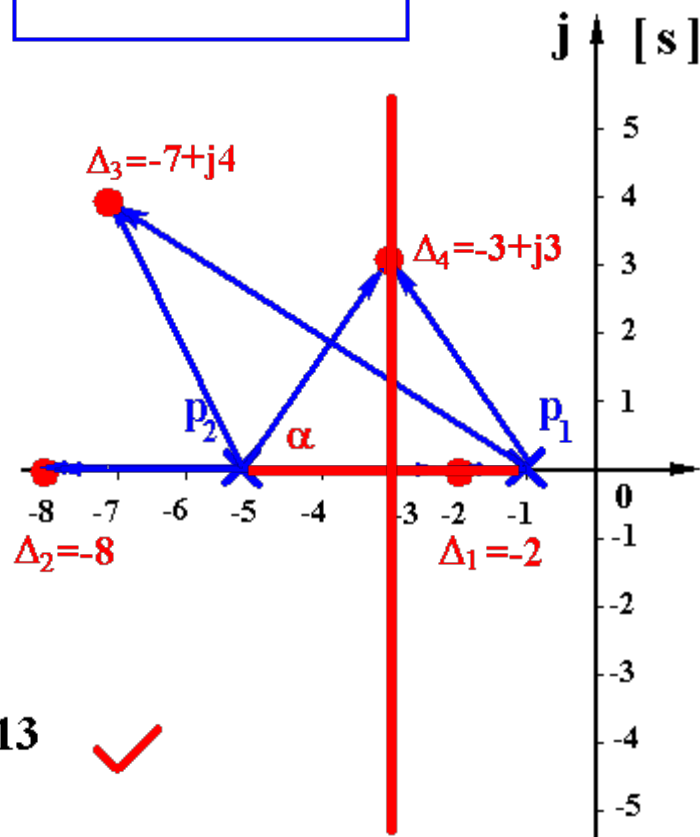
相角条件  $-\angle s - p_1 - \angle s - p_2 = (2k+1)\pi$

$\Delta_1 = -2$   $\begin{cases} K_{\Delta_1}^* = |-2+1| |-2+5| = 3 \\ -\angle -2+1 - \angle -2+5 = -180 - 0 = -180 \end{cases}$  ✓

$\Delta_2 = -8$   $\begin{cases} K_{\Delta_2}^* = |-8+1| |-8+5| = 21 \\ -\angle -8+1 - \angle -8+5 = -180 - 180 = -360 \end{cases}$  ✗

$\Delta_3 = -7+j4$   $\begin{cases} K_{\Delta_3}^* = |-7+j4+1| |-7+j4+5| \\ = \sqrt{6^2+4^2} \cdot \sqrt{2^2+4^2} = 32.25 \\ -\angle -7+j4+1 - \angle -7+j4+5 \neq (2k+1)\pi \end{cases}$  ✗

$\Delta_4 = -3+j3$   $\begin{cases} K_{\Delta_4}^* = |-3+j3+1| |-3+j3+5| = \sqrt{2^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2} = 13 \\ -\angle -3+j3+1 - \angle -3+j3+5 = -(180-\alpha) - \alpha = -180 \end{cases}$  ✓



---

- 对s平面上任意的点，总存在一个  $K^*$ ，使其满足模值条件，但该点不一定是根轨迹上的点。

- s平面上满足相角条件的点（必定满足模值条件）一定在根轨迹上。

满足相角条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件。

- 根轨迹上某点对应的  $K^*$  值，应由模值条件来确定。

---



# 绘制根轨迹

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s - z_1| \dots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \dots |s - p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

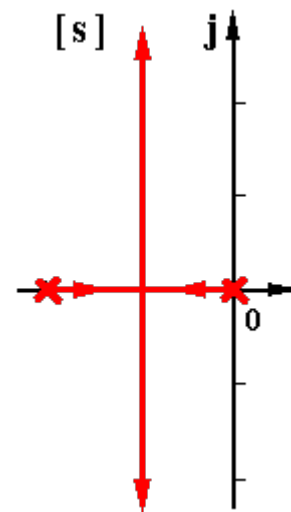
## 法则1 根轨迹的起点和终点:

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环极点个数  $n$  大于开环零点个数  $m$ ，则有  $n - m$  条根轨迹终止于无穷远处。

$$K^* = \frac{|s - p_1| \dots |s - p_n|}{|s - z_1| \dots |s - z_m|} = \frac{s^{n-m} \left|1 - \frac{p_1}{s}\right| \dots \left|1 - \frac{p_n}{s}\right|}{\left|1 - \frac{z_1}{s}\right| \dots \left|1 - \frac{z_m}{s}\right|} = 0 \quad s = p_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$K^* = \frac{|s - p_1| \dots |s - p_n|}{|s - z_1| \dots |s - z_m|} = \frac{s^{n-m} \left|1 - \frac{p_1}{s}\right| \dots \left|1 - \frac{p_n}{s}\right|}{\left|1 - \frac{z_1}{s}\right| \dots \left|1 - \frac{z_m}{s}\right|} = \infty \quad \begin{cases} s = z_j \\ s = \infty \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$



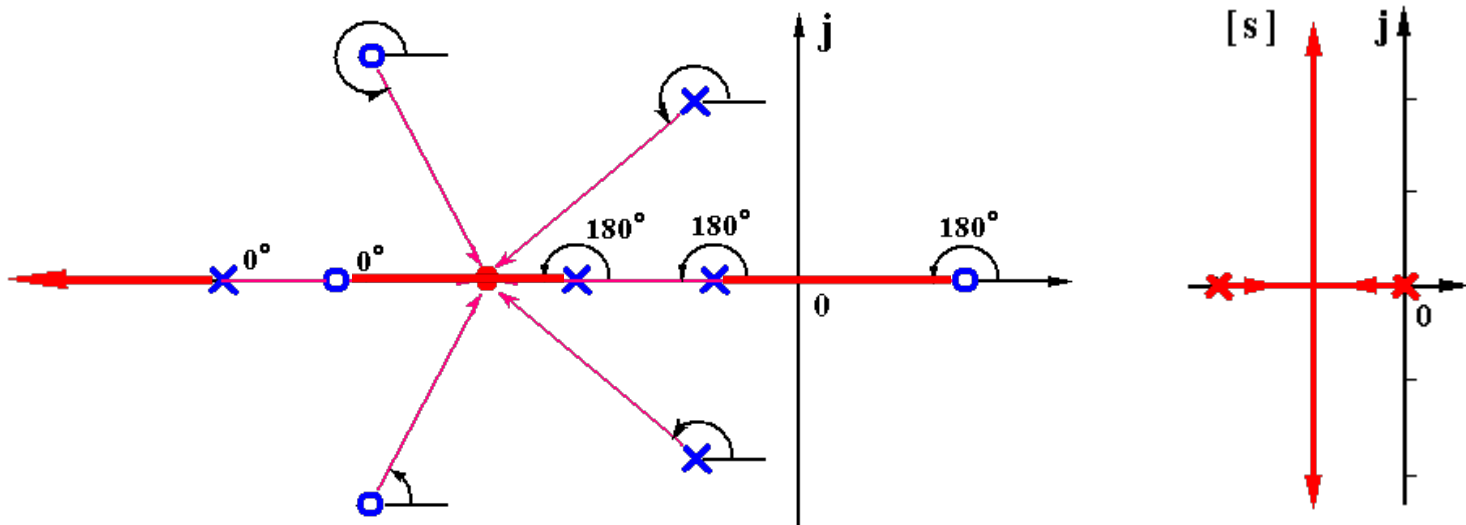
$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

## 法则2 根轨迹的分支数，对称性和连续性：

根轨迹的分支数=开环极点数；根轨迹连续且对称于实轴。

## 法则3 实轴上的根轨迹：

从实轴上最右端的开环零、极点算起，奇数开环零、极点到偶数开环零、极点之间的区域必是根轨迹。



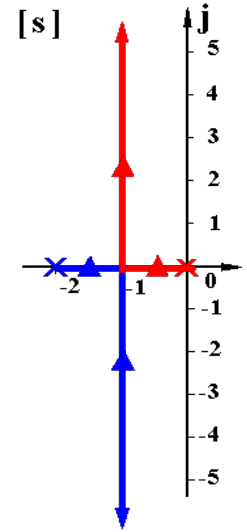
$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{K^* = 2K}{s(s+2)}$$

法则4 根之和:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = C \quad (n-m \geq 2)$

$n-m \geq 2$ 时, 闭环根之和保持一个常值。

证明:  $G(s)H(s) = \frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} = \frac{K^*(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$

由代数定理:  $-a_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i = -a_{n-1} = C$



$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots + a_0$$

$$+ K^*s^{n-2} + K^*b_{n-3}s^{n-3} + \cdots + K^*b_0$$

$$= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + (a_{n-2} + K^*)s^{n-2} + (a_{n-3} + K^*b_{n-3})s^{n-3} + \cdots + (a_0 + K^*b_0)$$

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\cdots(s - \lambda_n) = 0$$

$n-m \geq 2$ 时, 一部分根左移, 另一部分根必右移, 且移动总量为零。

例3 某单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ ,  $K^* = 0 \rightarrow \infty$ , 证明复平面的根轨迹为圆弧。

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)} \quad \begin{cases} K = 2K^* \\ \nu = 1 \end{cases} \quad [s]$$

$$D(s) = s(s+1) + K^*(s+2) = s^2 + (1+K^*)s + 2K^*$$

$$s_{1,2} = \frac{-(1+K^*) \pm \sqrt{(1+K^*)^2 - 8K^*}}{2}$$

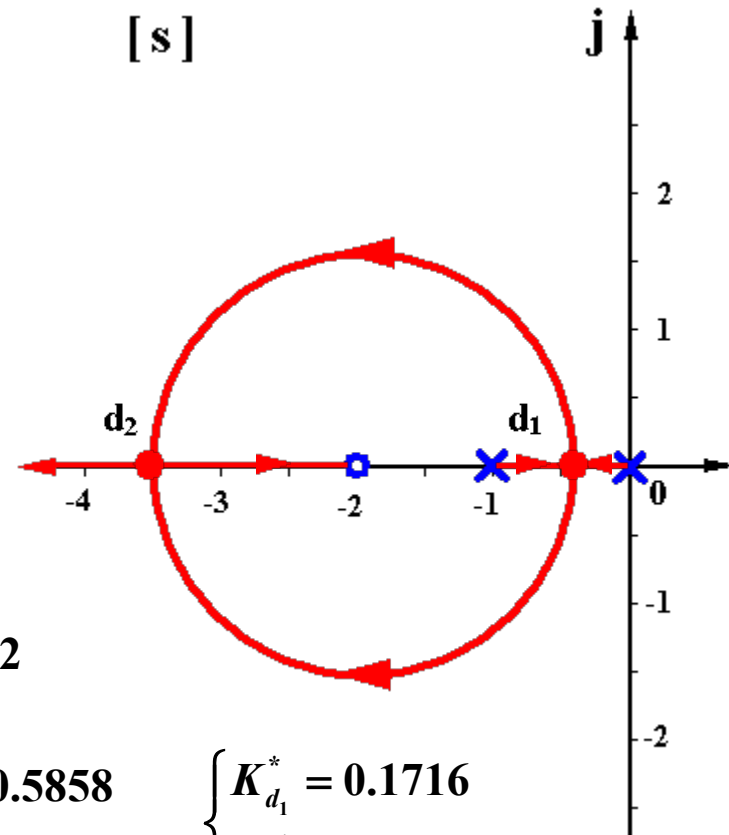
$$= \frac{-(1+K^*)}{2} \pm j \frac{\sqrt{8K^* - (1+K^*)^2}}{2} = \sigma \pm j\omega$$

$$\sigma = \frac{-(1+K^*)}{2} \Rightarrow K^* = -2\sigma - 1$$

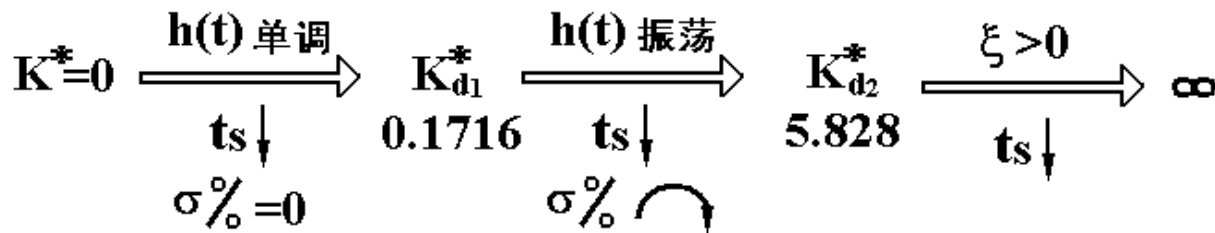
$$\omega^2 = \frac{8K^* - (1+K^*)^2}{4} = \frac{-8(2\sigma+1) - 4\sigma^2}{4} = -\sigma^2 - 4\sigma - 2$$

$$\sigma^2 + 4\sigma + 4 + \omega^2 = 2 \quad (\sigma + 2)^2 + \omega^2 = \sqrt{2}^2$$

$$\Delta = (1+K^*)^2 - 8K^* = K^{*2} - 6K^* + 1 = 0 \quad \begin{cases} d_1 = -0.5858 \\ d_2 = -3.4142 \end{cases} \quad \begin{cases} K_{d_1}^* = 0.1716 \\ K_{d_2}^* = 5.828 \end{cases}$$

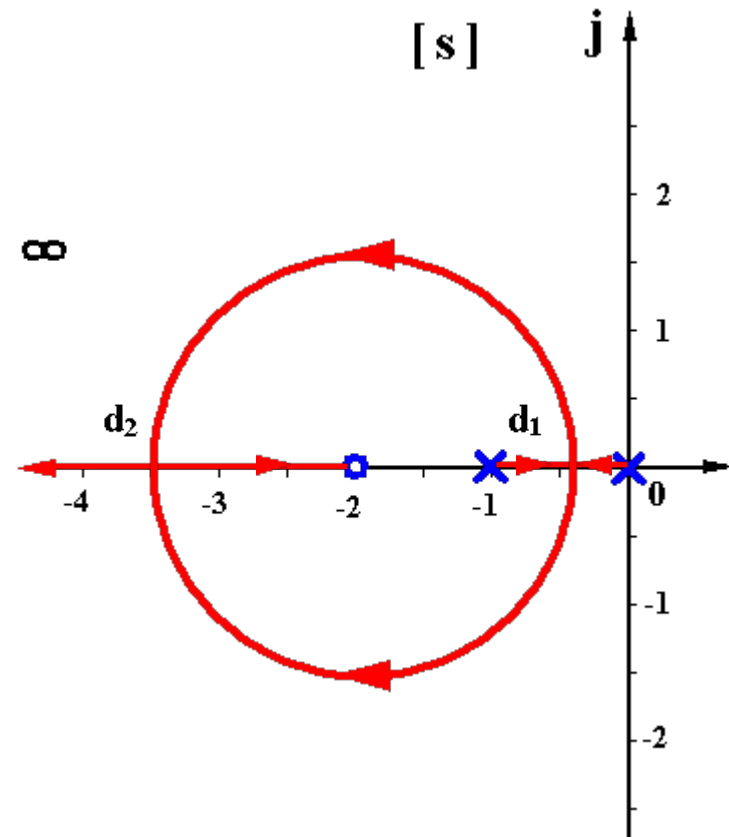


例3 某单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ ,  $K^* = 0 \rightarrow \infty$ , 证明复平面的根轨迹为圆弧。



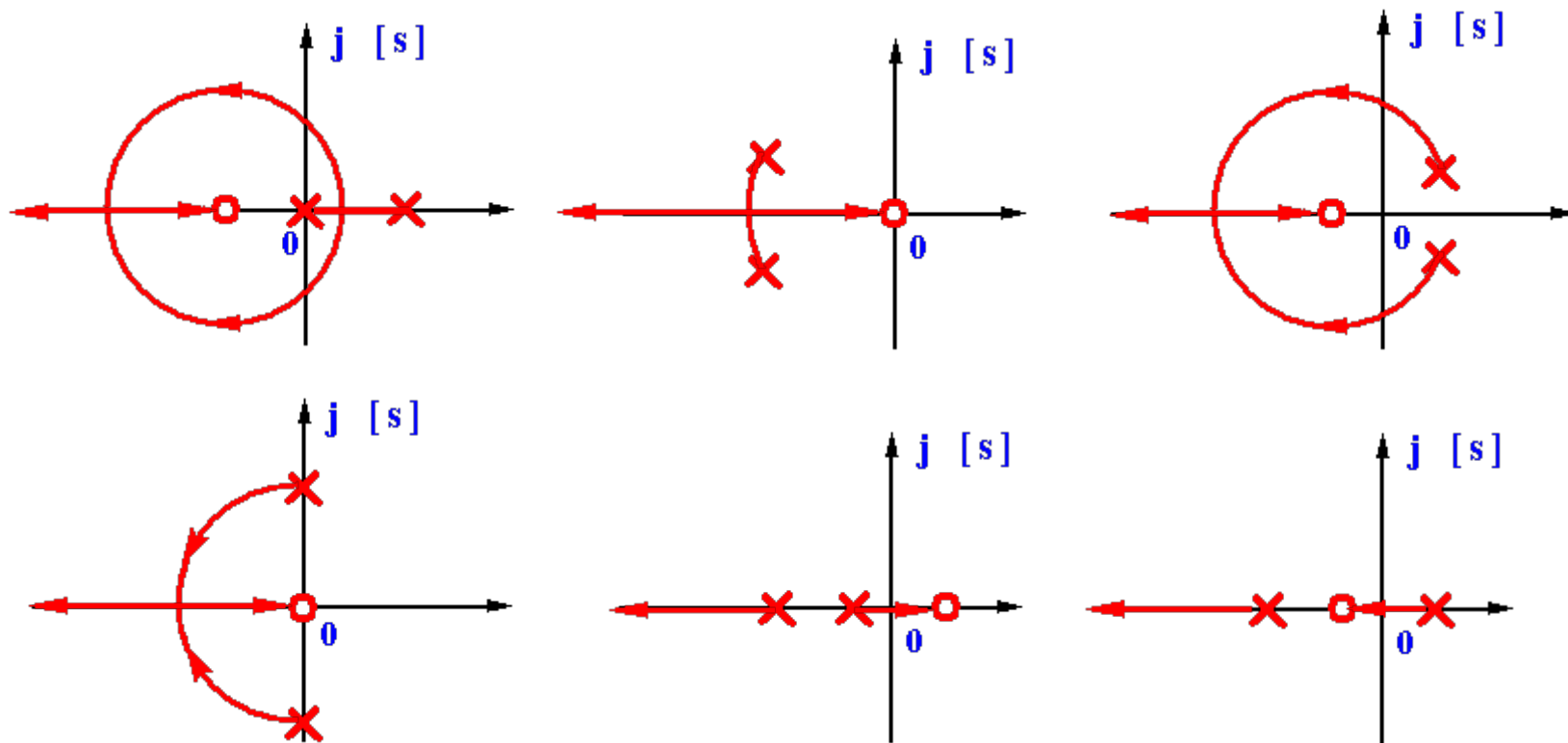
系统绝对稳定

$$K^* \uparrow \Rightarrow e_{ss} \xrightarrow{r(t)=t} \frac{A}{K} = \frac{1}{2K^*} \downarrow$$



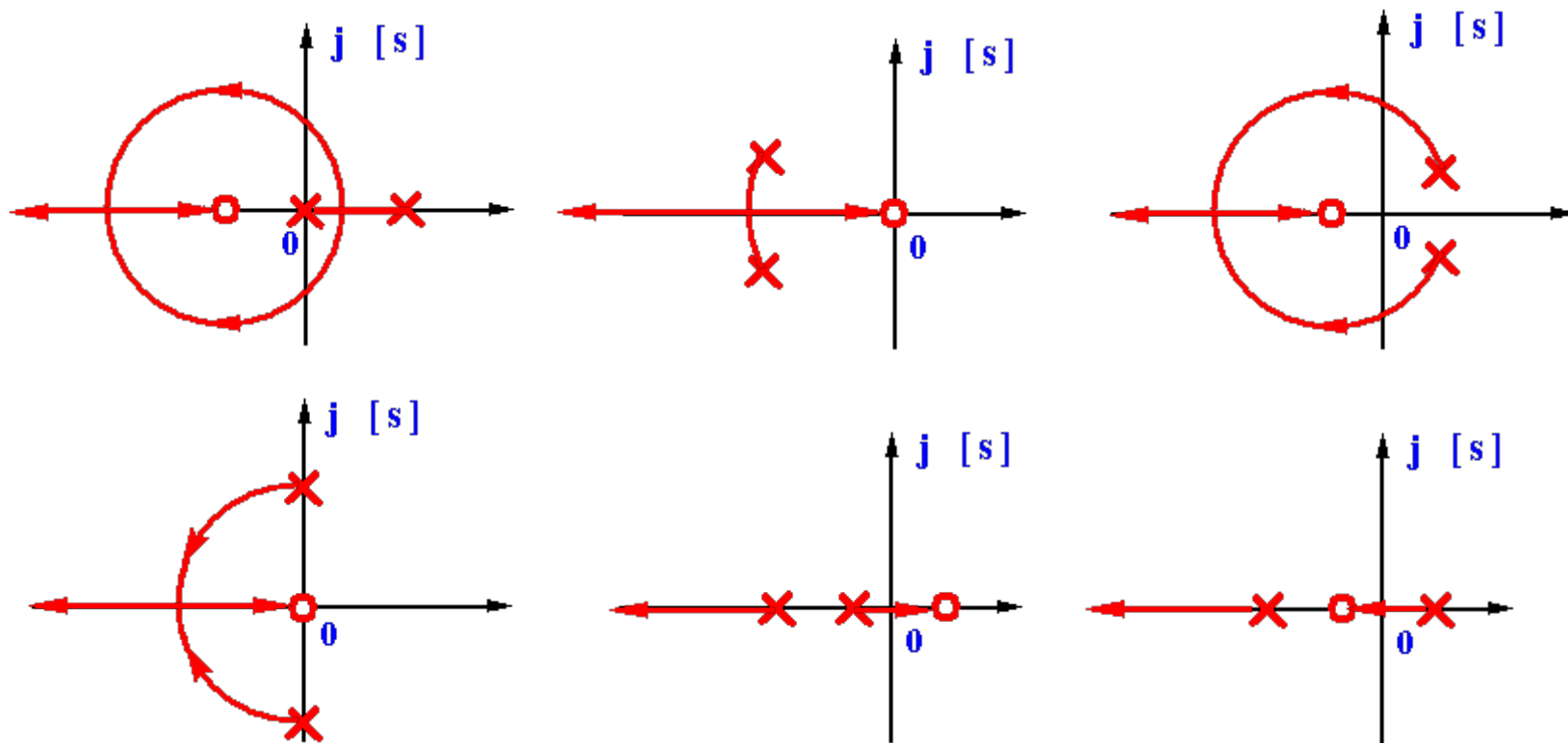
---

定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，  
则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



---

定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，  
则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



# 课程回顾

---

- **根轨迹：** 系统中某一参数由  $0 \rightarrow \infty$  变化时，闭环极点在  $s$  平面相应变化所描绘出来的轨迹

- **闭环极点** 与开环零点、开环极点及  $K^*$  均有关

- **闭环零点** = 前向通道零点 + 反馈通道极点

- **根轨迹方程**  $\left\{ \begin{array}{l} \text{模值条件: } \left| \mathbf{G(s)H(s)} \right| = \frac{\mathbf{K^*} \left| \mathbf{s-z_1} \right| \cdots \left| \mathbf{s-z_m} \right|}{\left| \mathbf{s-p_1} \right| \cdots \left| \mathbf{s-p_n} \right|} = \mathbf{1} \\ \text{相角条件: } \angle \mathbf{G(s)H(s)} = \sum_{i=1}^m \angle \mathbf{s-z_i} - \sum_{j=1}^n \angle \mathbf{s-p_j} = (2k+1)\pi \end{array} \right.$

- **K与K\*的关系**  $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{K^*} \prod_{i=1}^m \left| -\mathbf{z_i} \right|}{\prod_{j=1}^n \left| -\mathbf{p_j} \right|}$
-



# 课程回顾

---

## 法则1 根轨迹的起点和终点:

根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点; 当开环极点个数 $n$ 大于开环零点个数 $m$ 时, 有  $n-m$  条根轨迹分支趋向于无穷远处。

## 法则2 根轨迹的分支数, 对称性和连续性:

根轨迹的分支数 = 系统阶数; 根轨迹连续且对称于实轴。

## 法则3 实轴上的根轨迹:

从实轴上最右端的开环零点或极点向左算起, 奇数开环零、极点 到偶数开环零、极点之间的区域必是根轨迹。

## 法则4 根之和:

$n-m \geq 2$ 时, 闭环根之和为常数。

定理: 若系统有2个开环极点, 1个开环零点, 且在复平面存在根轨迹, 则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。

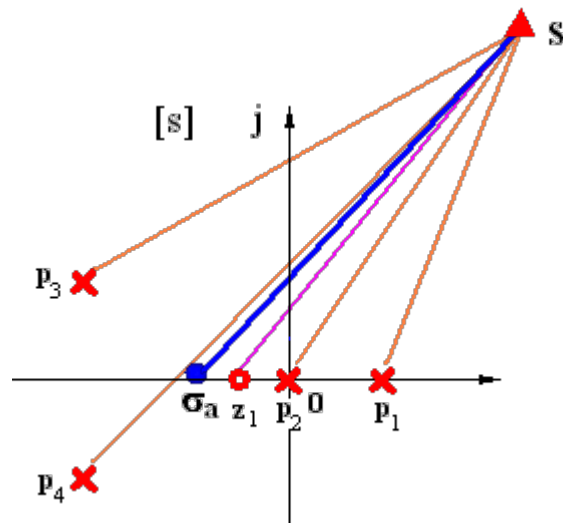
---

**根轨迹方程**

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = -1$$

法则5 渐近线:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \\ \varphi_a &= \frac{(2k + 1)\pi}{n - m} \end{aligned} \right.$$



$n > m$ 时,  $n - m$ 条根轨迹趋于无穷远处的规律。

证明: (1) 
$$\frac{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)} = -K^* = (s - \sigma_a)^{n-m} \quad \text{根轨迹方程}$$

$$= s^{n-m} - \sigma_a (n - m) s^{n-m-1} + \dots$$

**长除法求系数**

$$\frac{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)} = \frac{s^n - (\sum_{j=1}^n p_j) s^{n-1} + \dots}{s^m - (\sum_{i=1}^m z_i) s^{m-1} + \dots} = s^{n-m} - (\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i) s^{n-m-1} + \dots$$

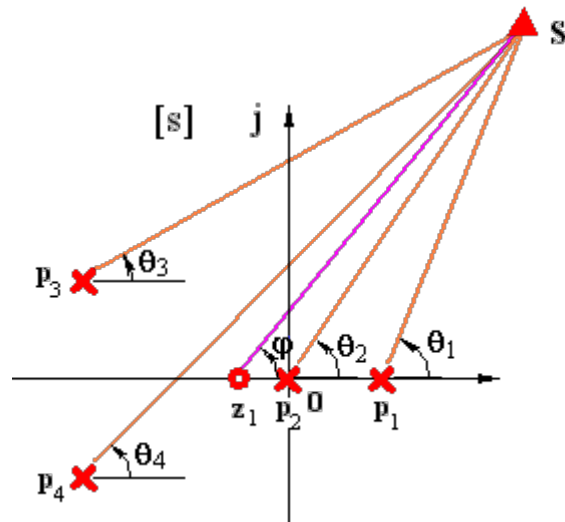
根轨迹方程

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = -1$$

法则5 渐近线:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \\ \varphi_a &= \frac{(2k + 1)\pi}{n - m} \end{aligned} \right.$$

$n > m$ 时,  $n - m$ 条根轨迹趋于无穷远处的规律。



证明: (2) 由相角条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) &= -(2k + 1)\pi \\ &= m\varphi_a - n\varphi_a = (m - n)\varphi_a \end{aligned}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

法则5 渐近线:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \\ \varphi_a &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{aligned} \right.$$

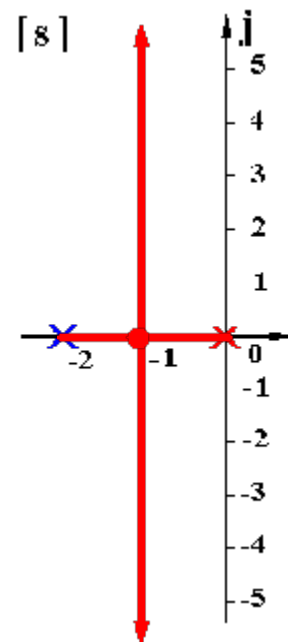
$n > m$ 时,  $n-m$ 条根轨迹趋于无穷远处的规律。

例1 系统开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+2)}$ , 试绘制根轨迹。

解. ① 实轴上的根轨迹:  $[-2, 0]$

② 渐近线:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-2+0}{2-0} = -1 \\ \varphi_a &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 90^\circ \end{aligned} \right.$$

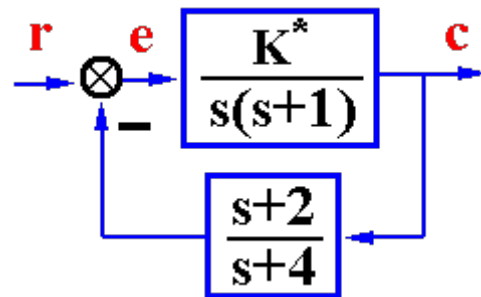


$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

例2 系统结构图如图所示。

(1) 绘制当  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  时系统的根轨迹;

(2) 当  $\text{Re}[\lambda_1] = -1$  时,  $\lambda_3 = ?$

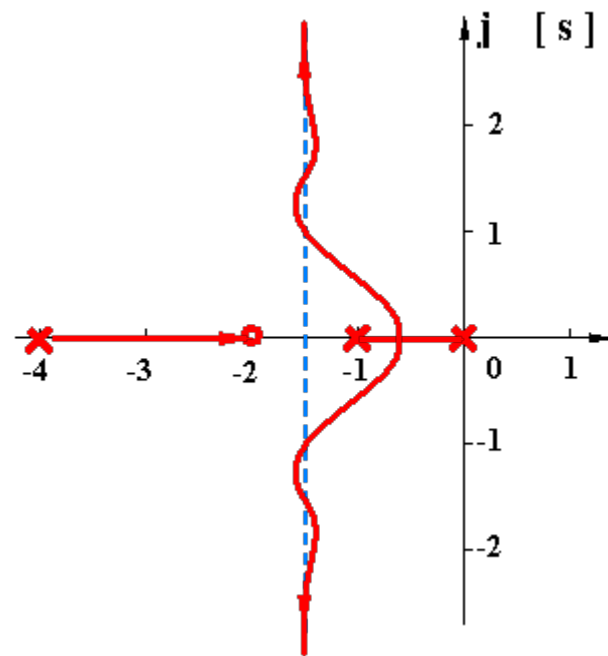


解. (1) 
$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K^*/2 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹:  $[-4, -2], [-1, 0]$

② 渐近线: 
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-1-4+2}{3-1} = -\frac{3}{2} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

用根之和法则分析绘制根轨迹:

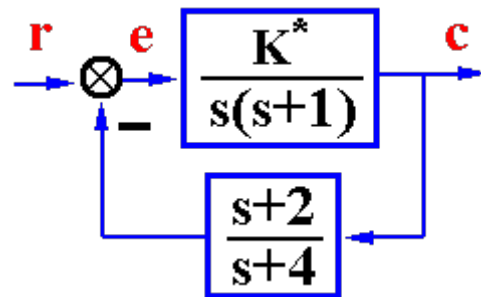


$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

例2 系统结构图如图所示。

(1) 绘制当  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  时系统的根轨迹；

(2) 当  $\text{Re}[\lambda_1] = -1$  时,  $\lambda_3 = ?$

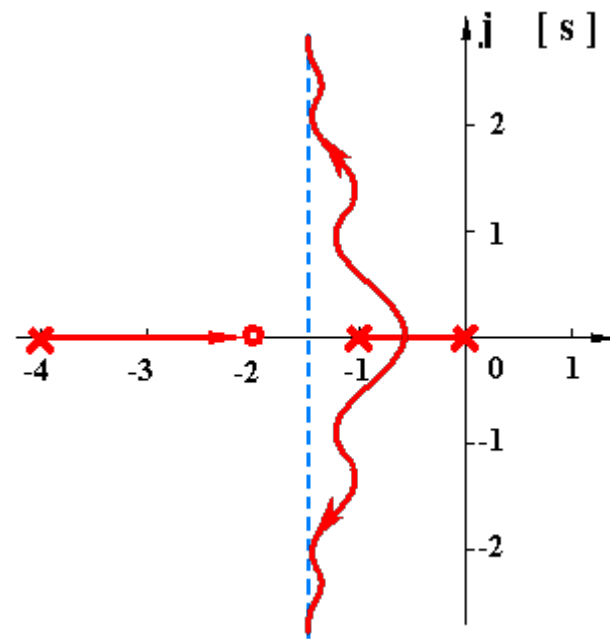


解. (1) 
$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K^*/2 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹:  $[-4, -2], [-1, 0]$

② 渐近线: 
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-1-4+2}{3-1} = -\frac{3}{2} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

用根之和法则分析绘制根轨迹:

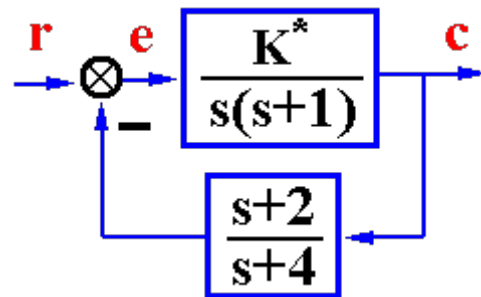


$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

例2 系统结构图如图所示。

(1) 绘制当  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  时系统的根轨迹;

(2) 当  $\text{Re}[\lambda_1] = -1$  时,  $\lambda_3 = ?$

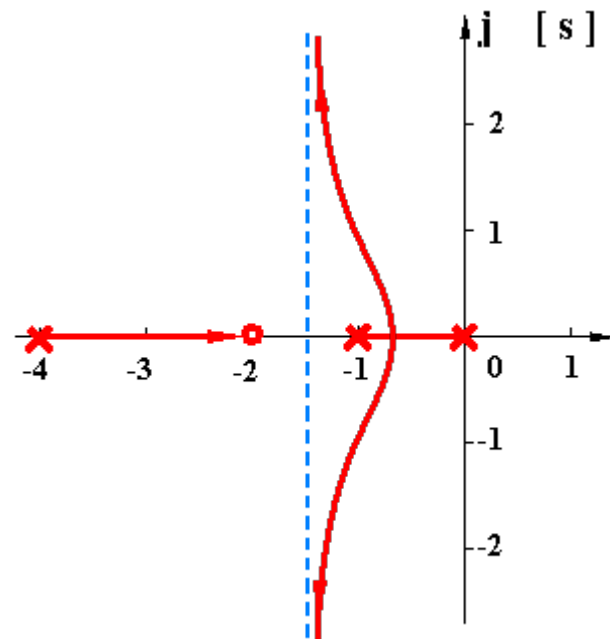


解. (1) 
$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K^*/2 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹:  $[-4, -2], [-1, 0]$

② 渐近线: 
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-1-4+2}{3-1} = -\frac{3}{2} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

用根之和法则分析绘制根轨迹:

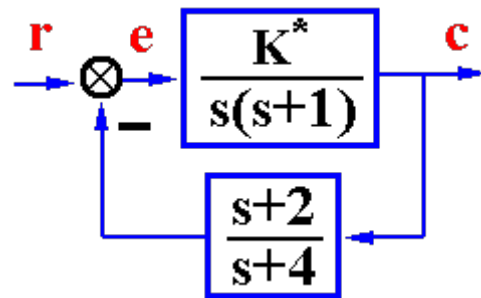


$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

例2 系统结构图如图所示。

(1) 绘制当  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  时系统的根轨迹；

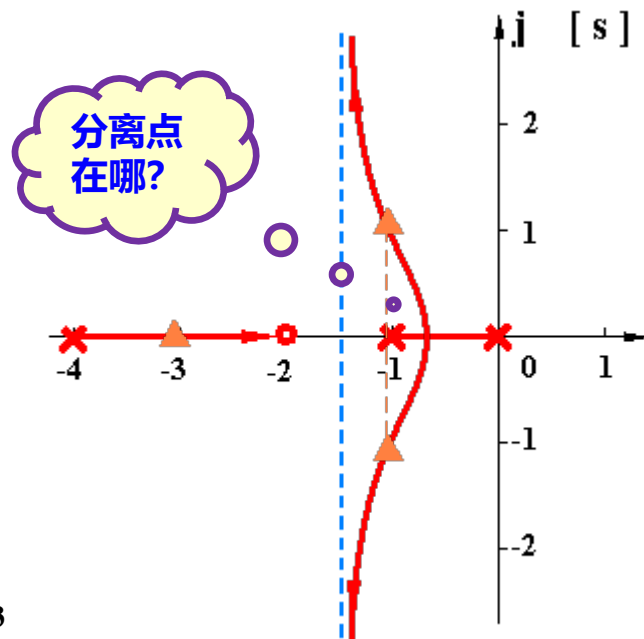
(2) 当  $\text{Re}[\lambda_1] = -1$  时,  $\lambda_3 = ?$



解. (1)  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K^*/2 \\ \nu = 1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹:  $[-4, -2], [-1, 0]$

② 渐近线: 
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-1-4+2}{3-1} = -\frac{3}{2} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$$



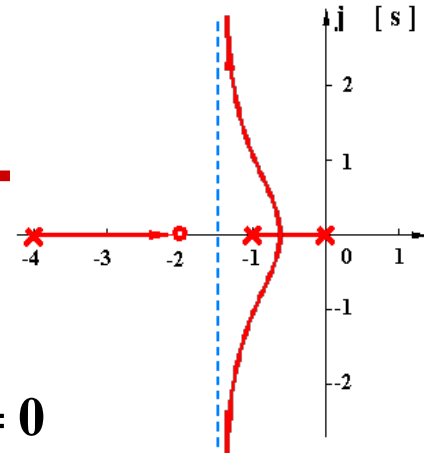
用根之和法则分析绘制根轨迹:

(2)  $a_{n-1} = 0 - 1 - 4 = -5 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2(-1) + \lambda_3$

$\lambda_3 = -5 + 2 = -3$



$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$



法则6 分离点 d:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$  (对应重根)

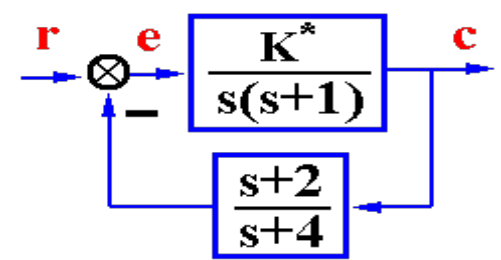
说明:  $D(s) = \underline{s(s+1)(s+4)} + \underline{K^*(s+2)} \stackrel{s=d}{=} (s - \lambda_3)(s - d)^2 = 0$

$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{d}{ds} [s(s+1)(s+4)] + K^* \frac{d}{ds} (s+2) \stackrel{s=d}{=} (s-d)^2 + 2(s-d)(s-\lambda_3) = 0$$

$$\frac{\frac{d}{ds} [s(s+1)(s+4)]}{s(s+1)(s+4)} \stackrel{s=d}{=} \frac{-K^* \frac{d}{ds} (s+2)}{-K^* (s+2)} = \frac{\frac{d}{ds} (s+2)}{s+2}$$

$$\frac{d}{ds} \ln [s(s+1)(s+4)] \stackrel{s=d}{=} \frac{d}{ds} \ln (s+2)$$

$$\frac{d}{ds} [\ln s + \ln (s+1) + \ln (s+4)] \stackrel{s=d}{=} \frac{d}{ds} \ln (s+2)$$



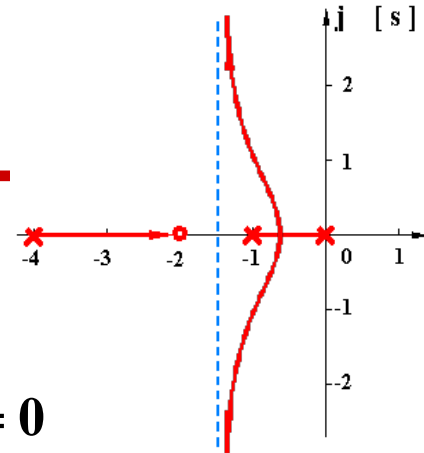
试根:  $d \in [-1, -0.5]$   
 $d_1 = -0.5$   
 $d_2 = -0.6$   
 $d_3 = -0.55$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+4} = \frac{1}{d+2} \quad (\text{无零点时右端为0})$$

$$K_d^* = \frac{|d||d+1||d+4|}{|d+2|} \stackrel{d=-0.55}{=} 0.589$$

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

法则6 分离点 d:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$  (对应重根)



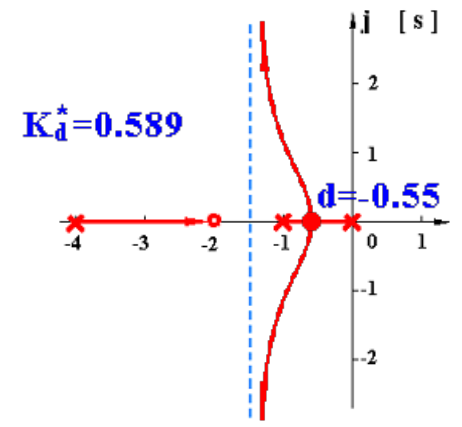
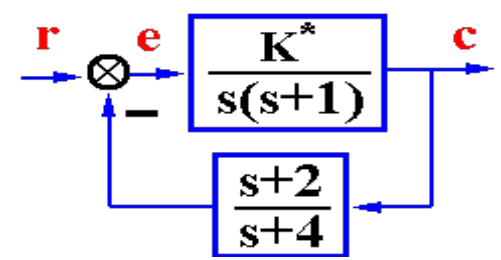
说明:  $D(s) = \underline{s(s+1)(s+4)} + \underline{K^*(s+2)} \stackrel{s=d}{=} (s-\lambda_3)(s-d)^2 = 0$

$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{d}{ds} [s(s+1)(s+4)] + K^* \frac{d}{ds} (s+2) \stackrel{s=d}{=} (s-d)^2 + 2(s-d)(s-\lambda_3) = 0$$

$$\frac{\frac{d}{ds} [s(s+1)(s+4)]}{s(s+1)(s+4)} \stackrel{s=d}{=} \frac{-K^* \frac{d}{ds} (s+2)}{-K^* (s+2)} = \frac{\frac{d}{ds} (s+2)}{s+2}$$

$$\frac{d}{ds} \ln [s(s+1)(s+4)] \stackrel{s=d}{=} \frac{d}{ds} \ln (s+2)$$

$$\frac{d}{ds} [\ln s + \ln(s+1) + \ln(s+4)] \stackrel{s=d}{=} \frac{d}{ds} \ln (s+2)$$



$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+4} = \frac{1}{d+2} \quad (\text{无零点时右端为0})$$

分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$

渐近线  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$   $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例3 单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ ，绘制根轨迹。

解.  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$   $\begin{cases} K = K^*/2 \\ v = 1 \end{cases}$  [s]

① 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -2], [-1, 0]$

② 渐近线:  $\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$

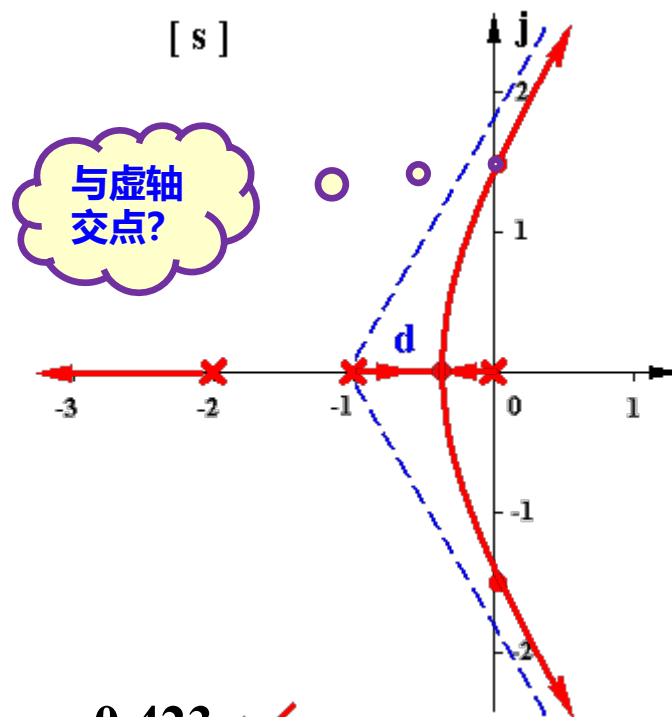
③ 分离点:  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0$

整理得:  $3d^2 + 6d + 2 = 0$

解根:  $\begin{cases} d_1 = -0.423 \checkmark \\ d_2 = -1.577 \times \end{cases}$

④ 与虚轴交点: ?

$K_d^* = |d||d+1||d+2|^{d=-0.423} = 0.385$



法则7 与虚轴交点:  $\begin{cases} 1) \text{ 系统临界稳定点} \\ 2) s = j\omega \text{ 是根的点} \end{cases}$

[接例3] 
$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

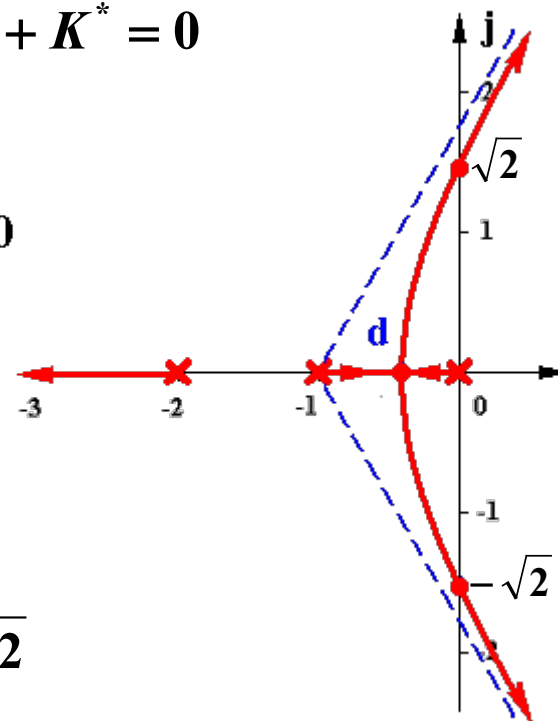
稳定范围:  $0 < K < 3$

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$

解法I: Routh:

$s^3$	1	2		
$s^2$	3	$K^*$	$\Rightarrow$	令 $K^*=6$
$s^1$	$\frac{6-K^*}{3}$		$\Rightarrow$	$K^* < 6$
$s^0$	$K^*$		$\Rightarrow$	$K^* > 0$

$$\begin{cases} 3s^2 + 6 = 0 \\ s = \pm j\sqrt{2} \end{cases}$$



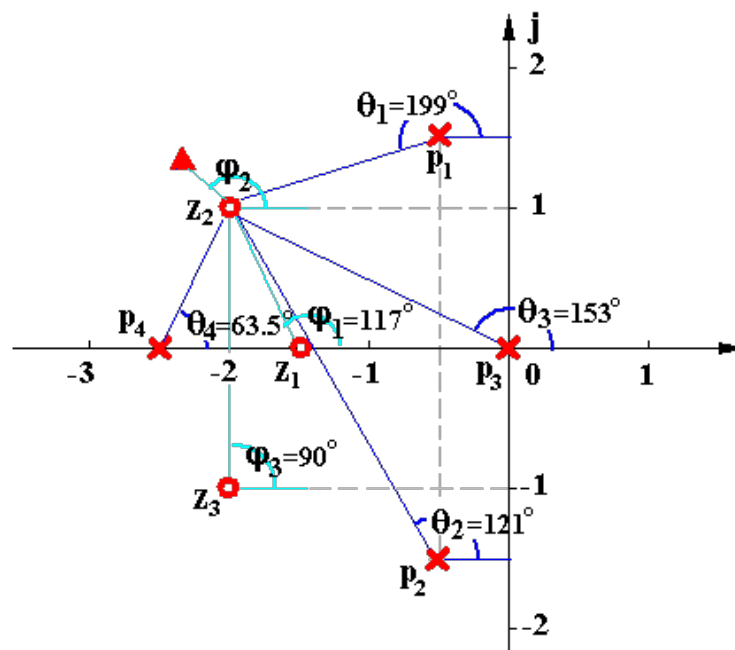
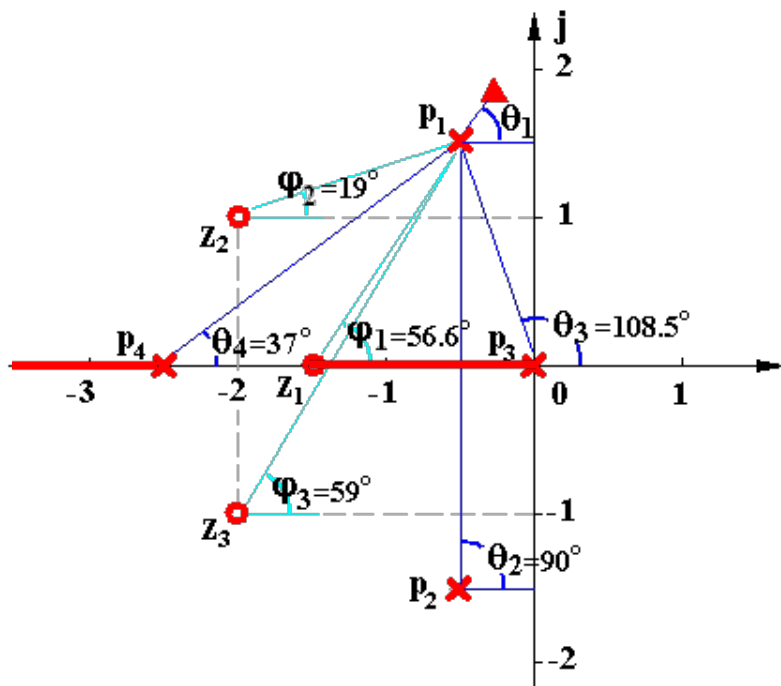
解法II:  $D(j\omega) = -j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K^* = 0$

$$\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = -3\omega^2 + K^* = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K^* = 6 \end{cases}$$

法则8 出射角/入射角  
(起始角/终止角)

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

例4 单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+1.5)(s+2 \pm j)}{s(s+2.5)(s+0.5 \pm j1.5)}$ ，绘制根轨迹。



$$56.5^\circ + 19^\circ + 59^\circ - [\theta_1 + 90^\circ + 108.5^\circ + 37^\circ] = -180^\circ$$

$$\theta_1 = 79^\circ$$

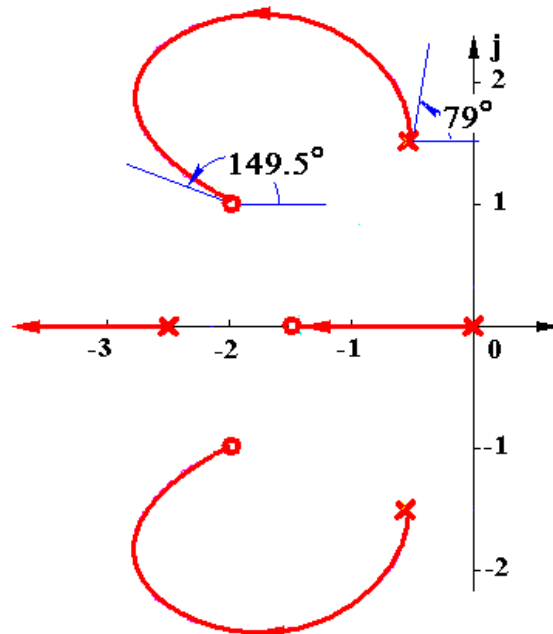
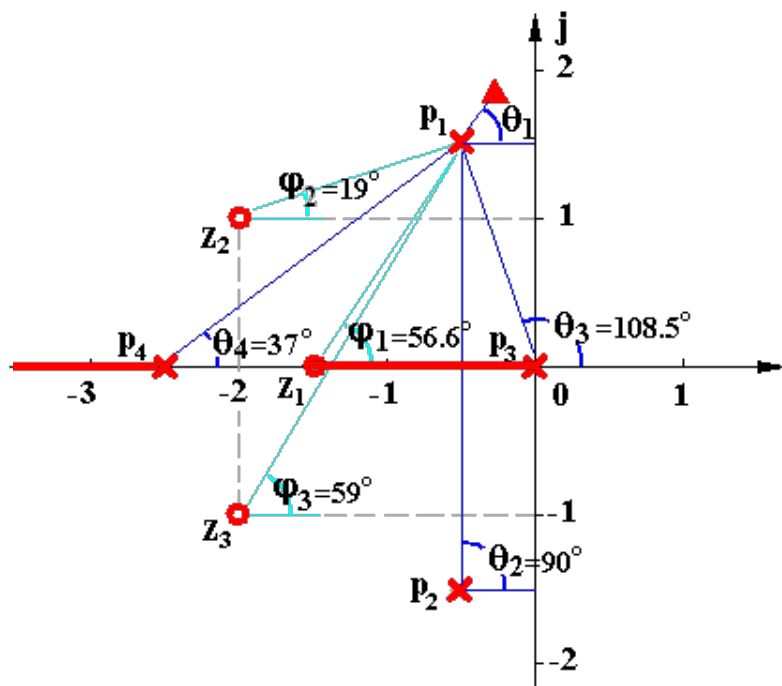
$$[117^\circ + \varphi_2 + 90^\circ] - [199^\circ + 121^\circ + 153^\circ + 63.5^\circ] = -180^\circ$$

$$\varphi_2 = 149.5^\circ$$

法则8 出射角/入射角  
(起始角/终止角)

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

例4 单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+1.5)(s+2 \pm j)}{s(s+2.5)(s+0.5 \pm j1.5)}$ ，绘制根轨迹。



$$56.5^\circ + 19^\circ + 59^\circ - [\theta_1 + 90^\circ + 108.5^\circ + 37^\circ] = -180^\circ$$

$$\theta_1 = 79^\circ$$

$$[117^\circ + \varphi_2 + 90^\circ] - [199^\circ + 121^\circ + 153^\circ + 63.5] = -180^\circ$$

$$\varphi_2 = 149.5^\circ$$

# 绘制根轨迹的基本法则

---

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数, 对称性和连续性

法则 3 实轴上的根轨迹

法则 4 根之和 
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = C \quad (n - m \geq 2)$$

法则 5 渐近线 
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

法则 6 分离点 
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

法则 7 与虚轴交点 
$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = \operatorname{Im}[D(j\omega)] = 0$$

法则 8 出射角/入射角 
$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

---

分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$

渐近线  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$   $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例5 单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$ , 绘制根轨迹。

解.  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+20)(s+2 \pm j4)}$   $\begin{cases} K = K^*/400 \\ \nu = 1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹:  $[-20, 0]$

② 渐近线:  $\sigma_a = \frac{0-20-2-2}{4} = -6$   $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

③ 出射角:  $-\theta_1 + 90^\circ + 116.5^\circ + 12.5^\circ = -180^\circ \Rightarrow \theta_1 = -39^\circ$

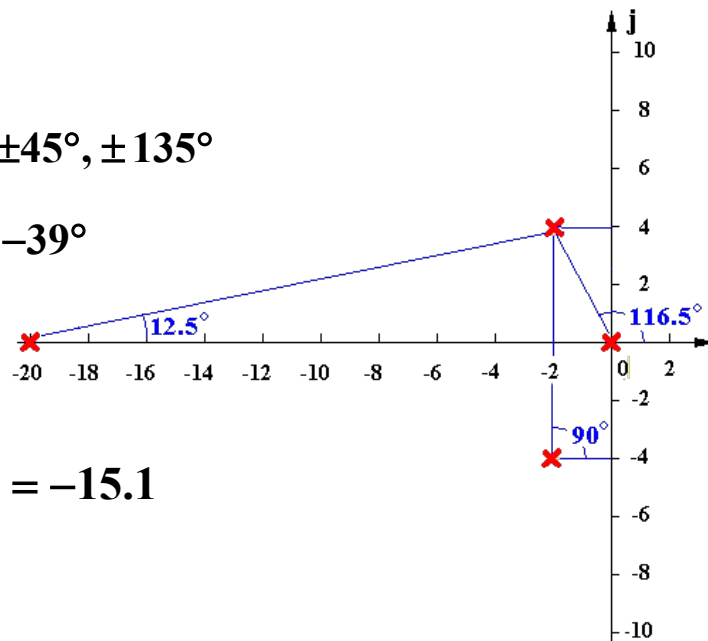
④ 分离点:  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+20} + \frac{1}{d+2+j4} + \frac{1}{d+2-j4} = 0$

$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+20} + \frac{2(d+2)}{(d+2)^2 + 4^2} = 0$  试根得:  $d = -15.1$

$K_d^* = |d||d+20|(d+2)^2 + 4^2 \Big|_{d=-15.1} = 13881$

⑤ 虚轴交点:  $D(s) = s^4 + 24s^3 + 100s^2 + 400s + K^* = 0$

$\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 100\omega^2 + K^* = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -24\omega^3 + 400\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{400/24} = 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$





出射角  $\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$

例5  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+20)(s+2 \pm j4)}$   
 $\begin{cases} K = K^*/400 \\ v = 1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹:  $[-20, 0]$

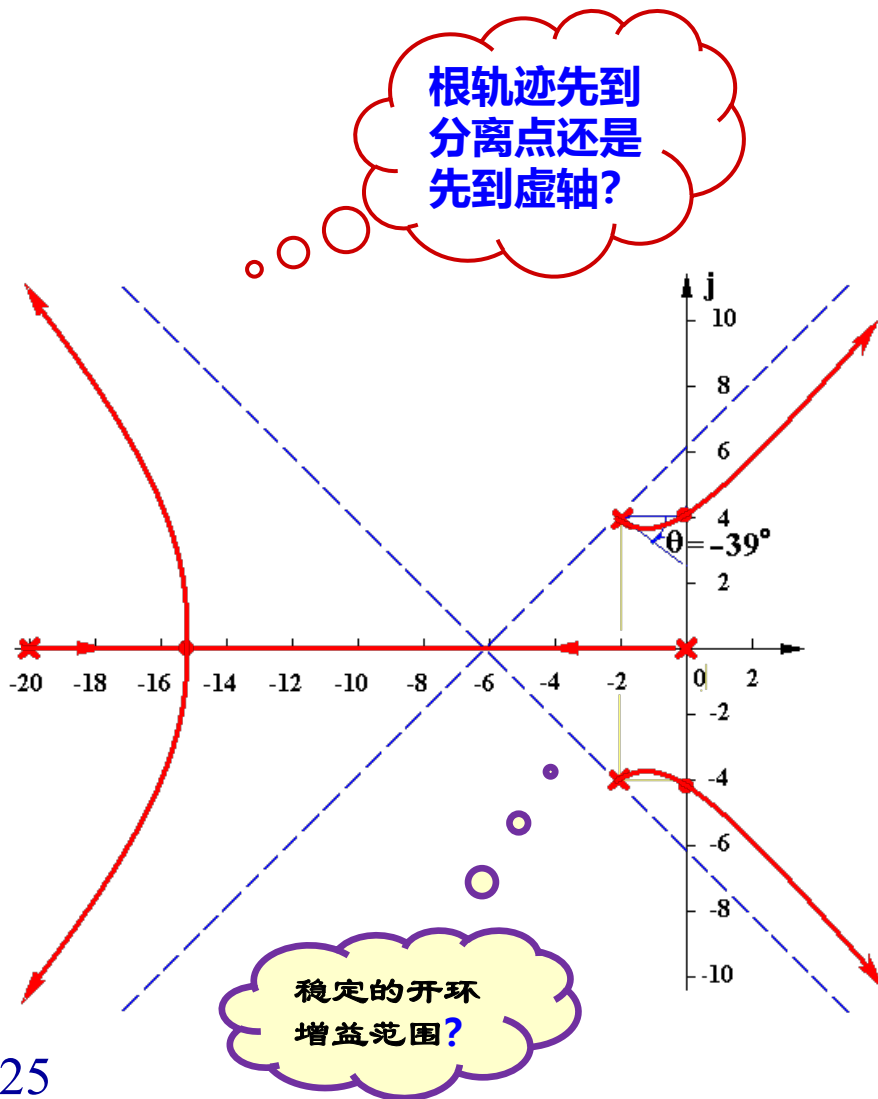
② 渐近线:  $\begin{cases} \sigma_a = -6 \\ \varphi_a = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ \end{cases}$

③ 出射角:  $\theta = -39^\circ$

④ 分离点:  $d = -15.1$   
 $K_d^* = 13881$

⑤ 虚轴交点:  $\begin{cases} \omega = 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$

稳定的开环增益范围:  $0 < K < 3.4725$



分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

例 4.3.9 负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s + 4)(s^2 + 4s + 20)}$$

试绘制系统的根轨迹。

根轨迹起始于开环极点  $p_1 = 0, p_2 = -4, p_3 = -2 + j4, p_4 = -2 - j4$ , 无零点

根轨迹有四条、连续且对称于实轴

① 实轴上的根轨迹  $[-4, 0]$

② 渐近线与实轴交点为  $-2$ , 渐近线与实轴正负夹角为  $45$  度、 $135$  度

③  $p_3$  出射角

$-90^\circ$

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

④ 分离点:

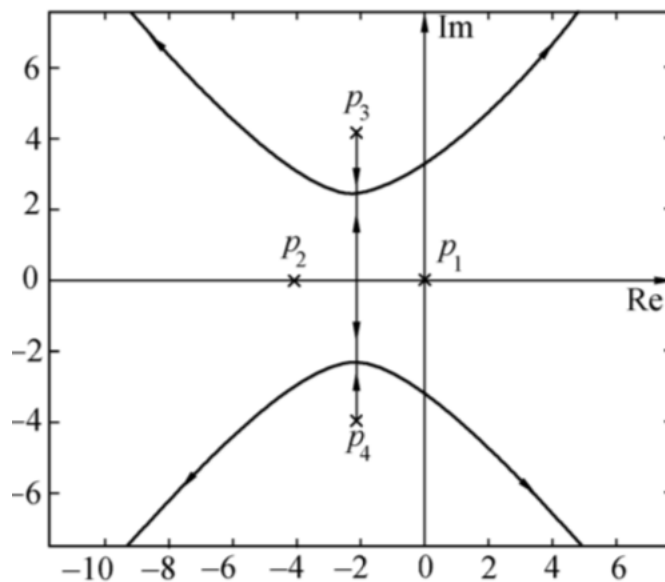
$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{d}{ds} [s(s + 4)(s^2 + 4s + 20) + k] = 0$$

$$d_1 = -2, d_2 = -2 + j2.45, d_3 = -2 - j2.45$$

可以验证  $d_2, d_3$  是系统根轨迹上的点, 也是分离点

⑤ 与虚轴交点

$$\omega = 0, k = 0 \text{ 或 } \omega = \pm\sqrt{10}, k = 260$$



# 绘制根轨迹的基本法则

---

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数, 对称性和连续性

法则 3 实轴上的根轨迹

法则 4 根之和 
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = C \quad (n - m \geq 2)$$

法则 5 渐近线 
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

法则 6 分离点 
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

法则 7 与虚轴交点 
$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = \operatorname{Im}[D(j\omega)] = 0$$

法则 8 出射角/入射角 
$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

---

分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$   $\frac{dD(s)}{ds} = 0$  渐近线  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$   $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例 4.3.9 负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试绘制系统的根轨迹。

根轨迹起始于开环极点  $p_1 = 0, p_2 = -4, p_3 = -2 + j4, p_4 = -2 - j4$ , 无零点

根轨迹有四条、连续且对称于实轴

- ① 实轴上的根轨迹  $[-4, 0]$
- ② 渐近线与实轴交点为  $-2$ , 渐近线与实轴正负夹角为  $45$  度、 $135$  度
- ③ 分离点:

$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{d}{ds} [s(s+4)(s^2+4s+20) + k] = 0$$

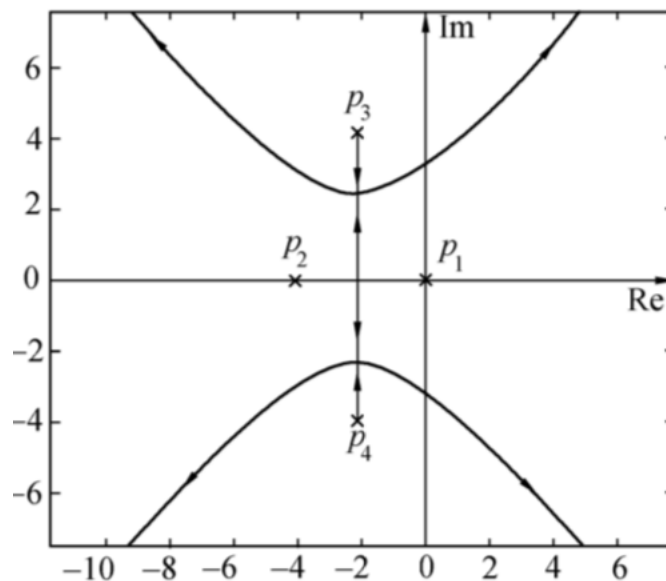
$$d_1 = -2, d_2 = -2 + j2.45, d_3 = -2 - j2.45$$

可以验证  $d_2, d_3$  是系统根轨迹上的点, 也是分离点

- ④  $p_3$  出射角  $-90^\circ$   $\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

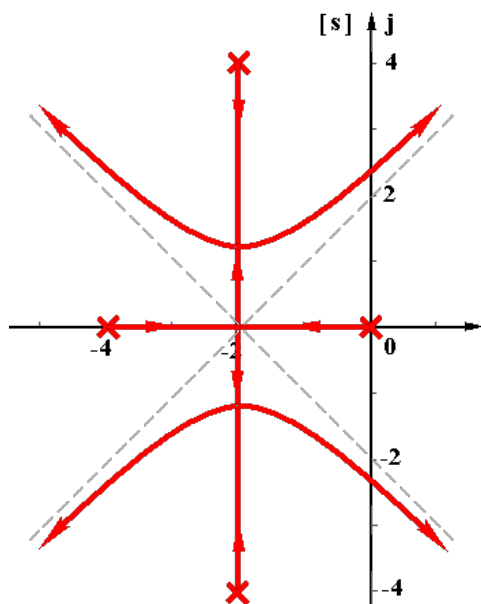
- ⑤ 与虚轴交点

$$\omega = 0, k = 0 \text{ 或 } \omega = \pm\sqrt{10}, k = 260$$



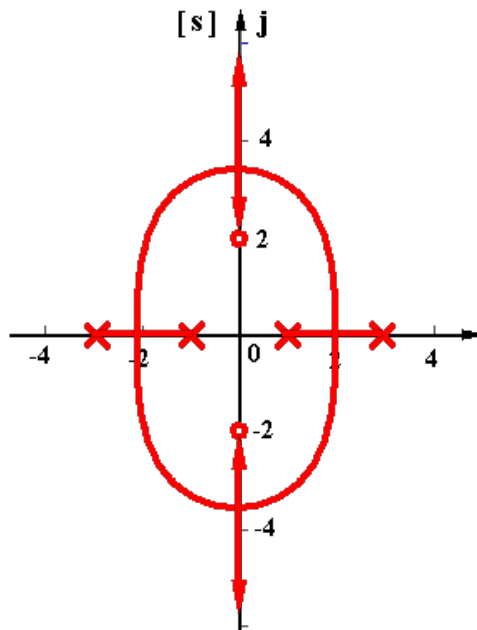
## 关于根轨迹对称性的一个定理：

若开环零极点均为偶数个，且关于一条平行于虚轴的直线左右对称分布，则根轨迹一定关于该直线左右对称。



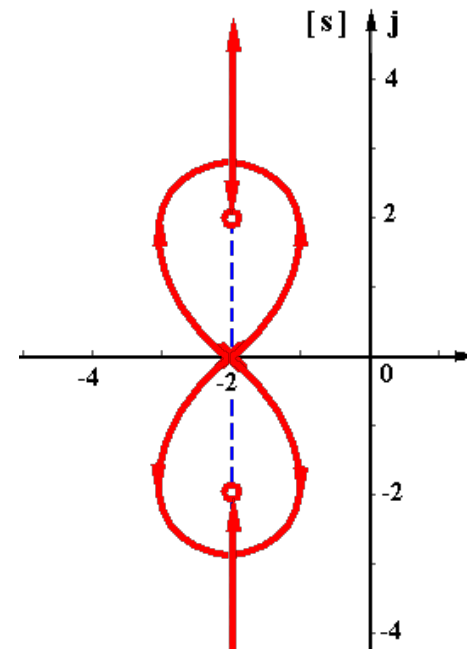
$K^*$

$$\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$



$K^*(s^2+4)$

$$\frac{K^*(s^2+4)}{(s^2-1)(s^2-9)}$$



$K^*(s^2+4s+8)$

$$\frac{K^*(s^2+4s+8)}{(s+2)^4}$$

分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

例 4.3.10 单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k(s + 0.4)}{s^2(s + 3.6)}$$

试绘制该系统根轨迹的大致图形。

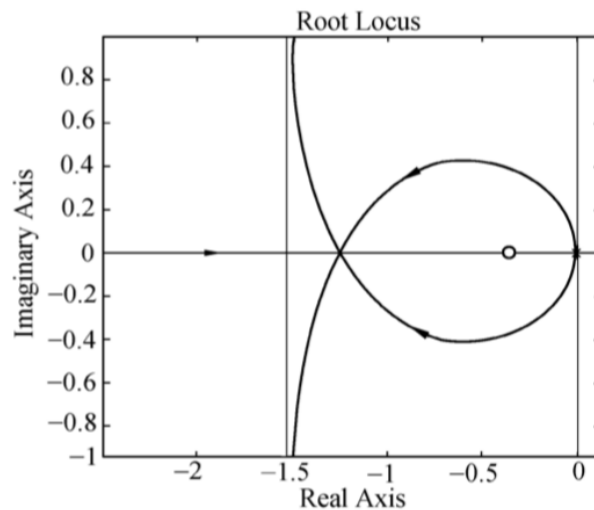
解 该系统的开环传递函数已是典型零极点形式,有三个开环极点: $p_{1,2} = 0, p_3 = -3.6$ ; 有一个开环零点  $z_1 = -0.4$ 。

根轨迹起始于开环极点, 一条终止于零点  $z_1 = -0.4$ , 其他两条趋于渐近线。

- ① 实轴上的根轨迹  $[-3.6, -0.4]$
- ② 渐近线与实轴交点为 -1.6 , 渐近线与实轴正方向夹角为 90 度
- ③ 分离点:  $d = -1.2$

④ 出射角:  $\pm 90^\circ$

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

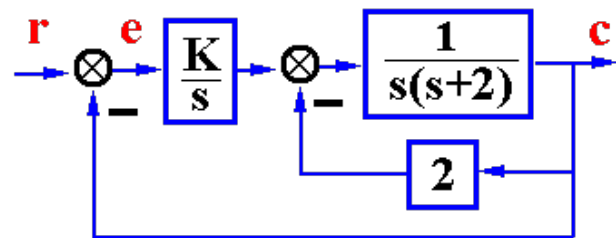


出射角  $\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

渐近线  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$   $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例6 已知系统结构图，绘制根轨迹。

解.  $G(s) = \frac{K}{s} \frac{1}{1 + \frac{2}{s(s+2)}} = \frac{K}{s[s^2 + 2s + 2]}$   $\begin{cases} K_k = K/2 \\ v = 1 \end{cases}$

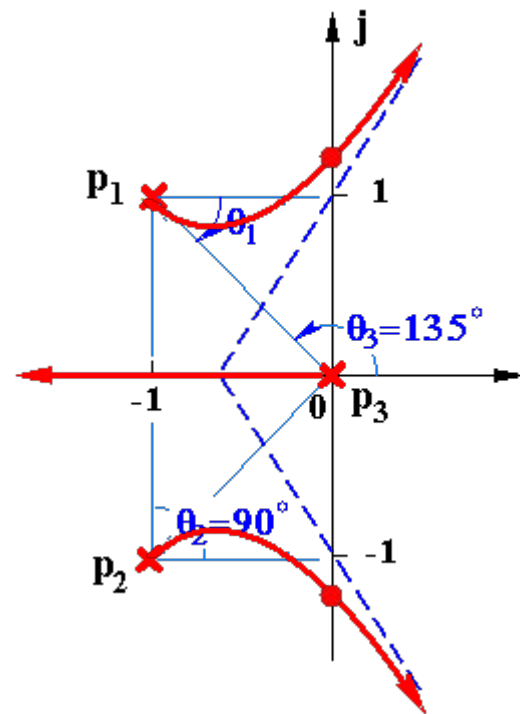


① 实轴上的根轨迹  $(-\infty, 0]$

② 渐近线:  $\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-1-1}{3} = -\frac{2}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$

③ 出射角:  $0 - [\theta_1 + 90^\circ + 135^\circ] = -180^\circ \Rightarrow \theta_1 = -45^\circ$

④ 与虚轴交点:  $D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$



$$\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = -2\omega^2 + K = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 4 \end{cases}$$

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

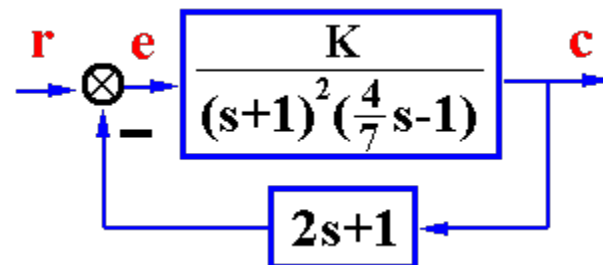




# 根轨迹法分析控制系统性能

例1 系统结构图如图所示

- (1) 绘制当  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  时系统的根轨迹;
- (2) 分析系统稳定性随  $K$  变化的规律。



解. (1) 
$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)} = \frac{3.5K(s+1/2)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})} \quad \begin{cases} K^* = 3.5K \\ \nu = 0 \end{cases}$$

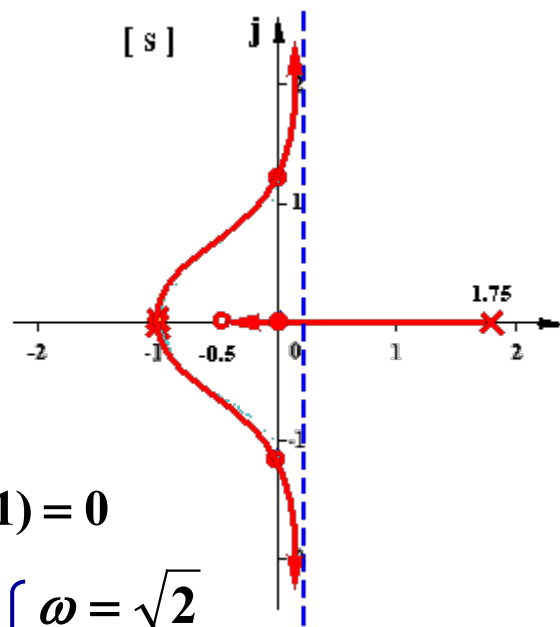
① 实轴上的根轨迹:  $[-0.5, 1.75]$

② 渐近线: 
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2 + 7/4 + 1/2}{3-1} = \frac{1}{8} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

③ 出射角:  $180^\circ - [2\theta + 180^\circ] = -180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$

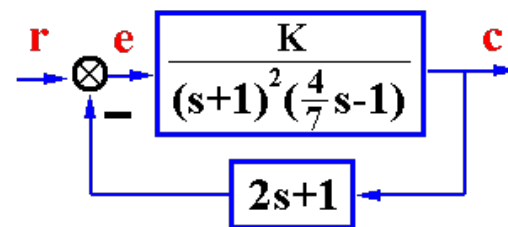
④ 与虚轴交点:  $D(s) = 4s^3 + s^2 + (14K - 10)s + 7(K - 1) = 0$

$$\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + 7(K-1) = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -4\omega^3 + (14\omega - 10)\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \sqrt{2} \\ K = 9/7 \end{cases}$$

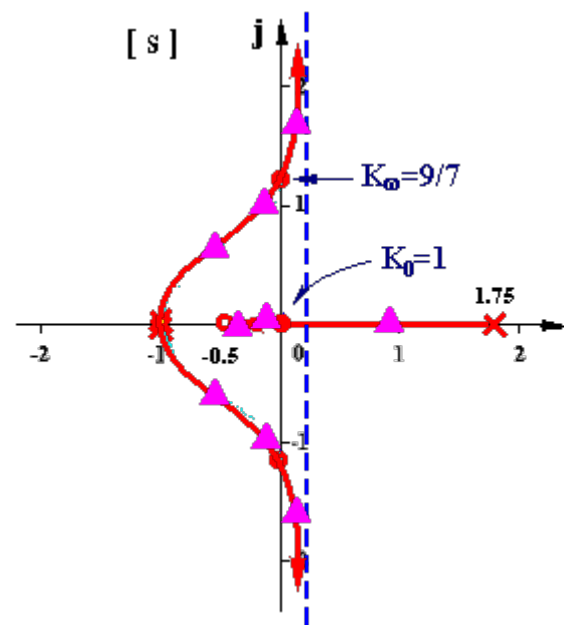
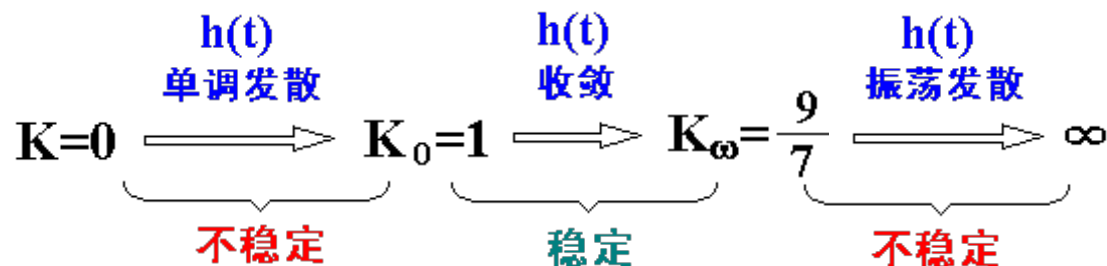


例1 系统结构图如图所示

- (1) 绘制当  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  时系统的根轨迹;
- (2) 分析系统稳定性随  $K$  变化的规律。



解. (2) 分析:

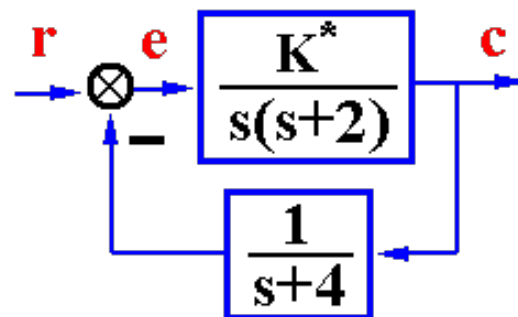


# 根轨迹法分析控制系统性能

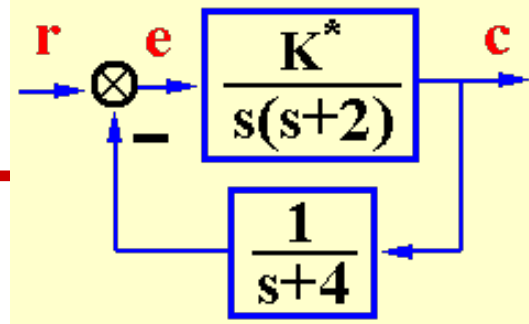
---

例2 已知系统结构图,  $K^* = 0 \rightarrow \infty$ , 绘制系统根轨迹并确定:

- (1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益  $K$  的取值范围;
- (2) 复极点对应  $\xi=0.5$  ( $\theta=60^\circ$ ) 时的  $K$  值及闭环极点位置;
- (3) 当  $\lambda_3=-5$  时,  $\lambda_{1,2}=?$  相应  $K=?$



分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$  渐近线  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$   $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$



(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益  $K$  的取值范围;

解. 绘制系统根轨迹  $G(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$   $\begin{cases} K = K^*/8 \\ \nu = 1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -4], [-2, 0]$

② 渐近线:  $\begin{cases} \sigma_a = (-2-4)/3 = -2 \\ \varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$

③ 分离点:  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+4} = 0$

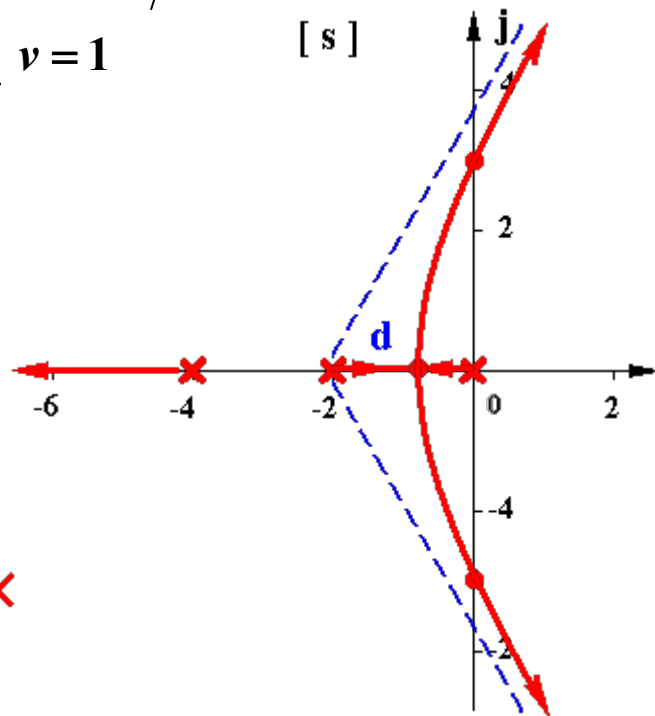
整理得:  $3d^2 + 12d + 8 = 0$

解根:  $d_1 = -0.845; \checkmark$   $d_2 = -3.155 \times$

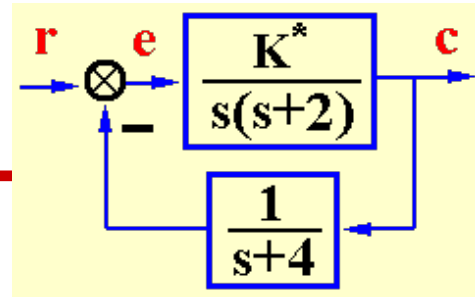
$K_d^* = |d||d+2||d+4|_{d=-0.845} = 3.08$

④ 虚轴交点:  $D(s) = s(s+2)(s+4) + K^* = s^3 + 6s^2 + 8s + K^* = 0$

$\begin{cases} \text{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 8\omega = 0 \\ \text{Re}[D(j\omega)] = -6\omega^2 + K^* = 0 \end{cases} \begin{cases} \omega = \sqrt{8} = 2.828 \\ K_\omega^* = 48 \end{cases}$



$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$$



(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益  $K$  的取值范围

依题, 对应  $0 < \xi < 1$  有: 
$$\begin{cases} K_d^* = 3.08 < K^* < 48 = K_\omega^* \\ \frac{3.08}{8} < K = \frac{K^*}{8} < \frac{48}{8} = 6 \end{cases}$$

(2) 复极点对应  $\xi=0.5$  ( $\theta=60^\circ$ ) 时的  $K$  值及闭环极点位置

设  $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$

由根之和  $C = 0 - 2 - 4 = -6 = -2\xi\omega_n + \lambda_3$

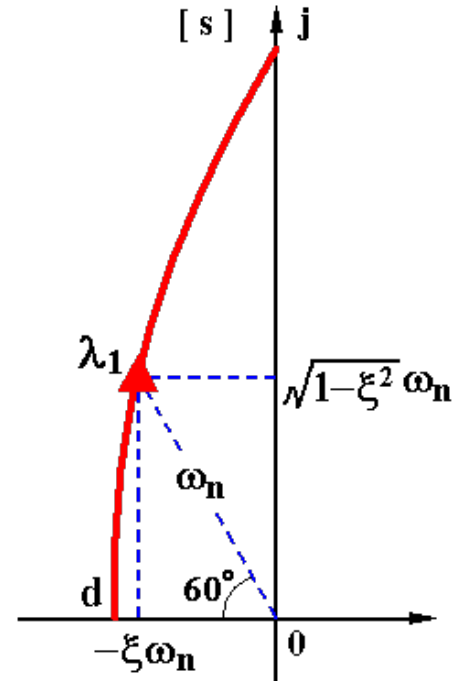
$$\lambda_3 = -6 + 2\xi\omega_n \stackrel{\xi=0.5}{=} -6 + \omega_n$$

应有:  $D(s) = s(s+2)(s+4) + K^* = s^3 + 6s^2 + 8s + K^*$

$$= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + 6 - \omega_n)$$

$$= s^3 + 6s^2 + 6\omega_n s + \omega_n^2(6 - \omega_n)$$

比较系数 
$$\begin{cases} 6\omega_n = 8 \\ \omega_n^2(6 - \omega_n) = K^* \end{cases} \quad \text{解根: } \begin{cases} \omega_n = 4/3 \\ K^* = 8.3 \end{cases} \quad \begin{cases} K = K^*/8 = 1.0375 \\ \lambda_{1,2} = -0.667 \pm j1.1547 \\ \lambda_3 = -6 + \omega_n = -4.667 \end{cases}$$



$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$$

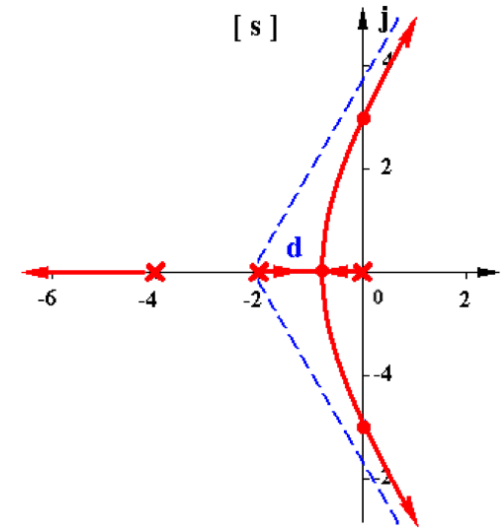
(3) 当  $\lambda_3 = -5$  时,  $\lambda_{1,2} = ?$  相应  $K = ?$

$$\begin{aligned} D(s) &= s(s+2)(s+4) + K^* = s^3 + 6s^2 + 8s + K^* \\ &= (s+5)(s^2 + as + b) \end{aligned}$$

$$a = 1, \quad b = 3, \quad K^* = 15$$

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j1.6583$$

$$K = K^*/8 = 15/8 = 1.875$$



$$\begin{aligned} D(s) &= s^3 + 6s^2 + 8s + K^* \\ &= (s+5)(s^2 + s + 3) \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j1.6583$$

$$K^* = 15$$

$$K = K^*/8 = 15/8 = 1.875$$

$$\begin{array}{r} s^2 + s + 3 \\ s + 5 \overline{) s^3 + 6s^2 + 8s + K^*} \\ \underline{s^3 + 5s^2} \phantom{+ 8s + K^*} \\ s^2 + 8s \phantom{+ K^*} \\ \underline{s^2 + 5s} \phantom{+ K^*} \\ 3s + K^* \\ \underline{3s + 15} \\ 0 \end{array}$$

$$K^* = 15 \quad \Leftarrow$$

分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$

例 4.4.1 负反馈系统的开环传递函数是

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-3)}$$

试用根轨迹法分析该系统的性能。

### 绘制根轨迹

根轨迹起始于开环极点，一条终止于零点  $z_1 = -1$ ，另一条趋于渐近线，渐近线为负实轴。

① 实轴上的根轨迹

② 分离点:

$$d_1 = 1, d_2 = -3 \text{ (开环放大倍数 } K = \frac{k}{3} = 3)$$

③ 与虚轴交点:

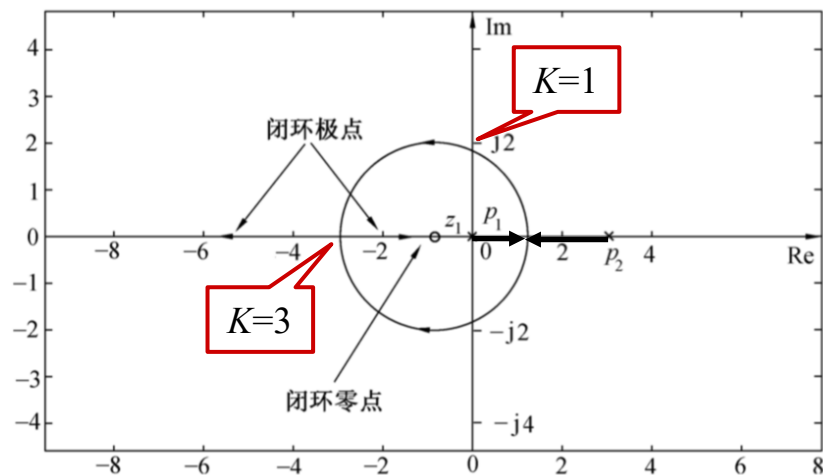
$$\omega = \pm\sqrt{3}, k = 3 \text{ (开环放大倍数 } K = \frac{k}{3} = 1)$$

### 系统性能分析:

① 稳定性分析: 在开环放大倍数  $K < 1$  时不稳定

② 动态过程分析:

③ 稳态误差分析:





分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$

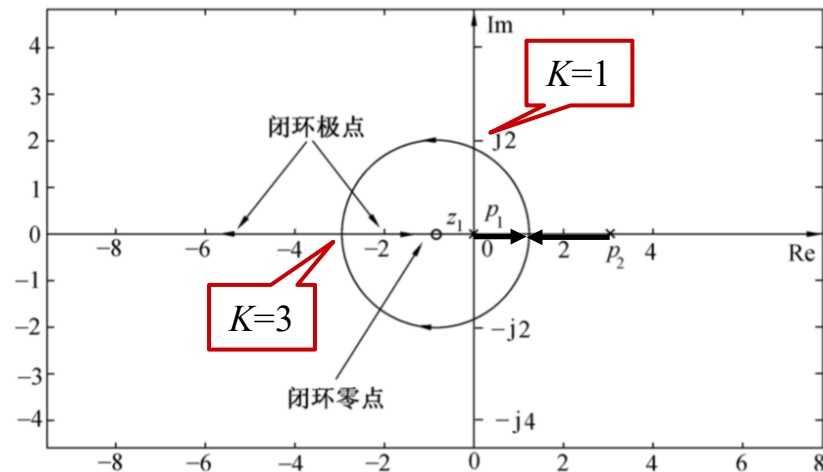
例 4.4.1 负反馈系统的开环传递函数是

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-3)}$$

试用根轨迹法分析该系统的性能。

系统性能分析：

- ① 稳定性分析：在开环放大倍数  $K < 1$  时不稳定
- ② 动态过程分析：
- ③ 稳态误差分析：



(2) 动态过程分析：根轨迹实轴上  $-3$  处汇合分离点对应的  $k = 9$ , 开环放大倍数  $K = 3$ 。当  $1 < K < 3$  时, 闭环传递函数有一对共轭的复数极点和一闭环极点  $z_1 = -1$ , 系统是稳定的, 但动态过程中会出现衰减振荡的分量; 当  $k > 9, K > 3$  时, 系统的闭环传递函数有两个负实数极点和一个零点  $z_1 = -1$ , 系统稳定, 动态过程中无衰减振荡分量。由于系统的闭环传递函数中存在一个零点  $z = -1$  和两个极点, 所以需用拉氏反变换或用 MATLAB 求取系统的阶跃响应曲线, 再求出各项动态性能指标。

(3) 稳态误差分析：该系统的开环传递函数有一个  $p_1 = 0$  的极点, 所以系统是 I 型系统。根据闭环极点的位置可以求出该点对应的  $k$  与  $K$  的值, 开环放大倍数  $K = K_v$ , 可以由此计算出稳态误差。

分离点  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$

#### 例 4.4.2 负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

试用根轨迹法分析该系统的性能。并计算闭环阻尼比为  $\zeta = 0.5$  时的各项性能指标。

绘制根轨迹

系统性能分析：

(1) 稳定性分析：根轨迹与虚轴交点坐标  $\pm j\sqrt{2}$  ( $k=6, K=3$ )，当  $0 < K < 3$  时闭环稳定。

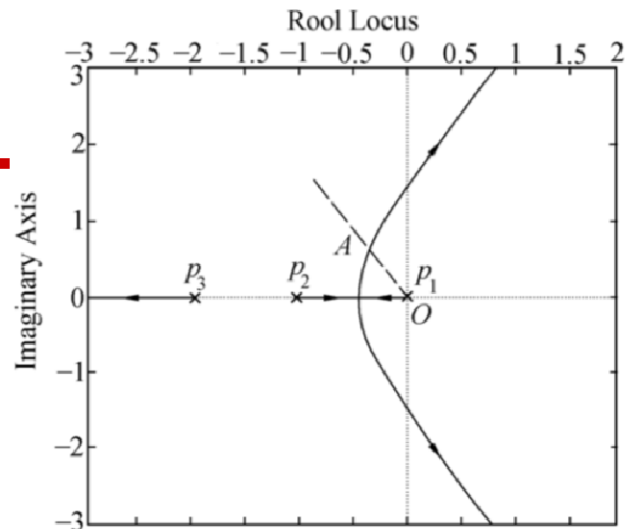
(2) 动态过程分析：根轨迹在实轴上的分离点  $d=-0.423$  ( $k=0.385, K=0.193$ )

① 当  $0 < K < 0.193$  时，闭环系统有3个实数极点，单位阶跃响应单调上升；

② 当  $0.193 < K < 3$  时，2个共轭复数极点为主导极点，动态过程呈现欠阻尼二阶系统的特性。随着  $K$  的增加，超调量增大，调整时间增大。

(3) 当闭环极点位于图 4.4.2 中 A 点位置时，闭环系统阻尼比  $\zeta = 0.5$ ，由根轨迹求出 A 点的坐标为  $A = -0.333 + j0.577$ ，对应的  $k = 1.06, K = 0.503$ 。按照第二章给出的方法，求出闭环系统的性能： $\sigma_p = 16\%$ ， $t_s = 12$  s，系统是 I 型， $K_v = K = 0.503$ 。

(4) 稳态误差分析：该系统是 I 型系统，当闭环极点在 A 点时， $K_v = K = 0.503$ 。所以该系统在阶跃函数输入作用下，稳态误差为零；单位斜坡输入作用下稳态误差  $e_{ss} = 1/K_v = 1/0.503$ ；在恒加速度输入信号作用下稳态误差为  $\infty$ 。



# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov第一法 (间接法)

3. Lyapunov第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

---

## 参数根轨迹 — 除 $K^*$ 之外其他参数变化时系统的根轨迹

例1 单位反馈系统:  $G(s) = \frac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$ ,  $a=0 \rightarrow \infty$  变化, 绘制根轨迹;  $\xi=1$ 时,  $\Phi(s)=?$

解. (1)  $D(s) = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}a = 0$

构造 “等效开环传递函数”  $G^*(s) = \frac{a/4}{s^3 + s^2 + s/4} = \frac{a/4}{s(s+0.5)^2}$

① 实轴根轨迹:  $(-\infty, 0]$

② 渐近线:  $\sigma_a = -1/3$   $\varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$

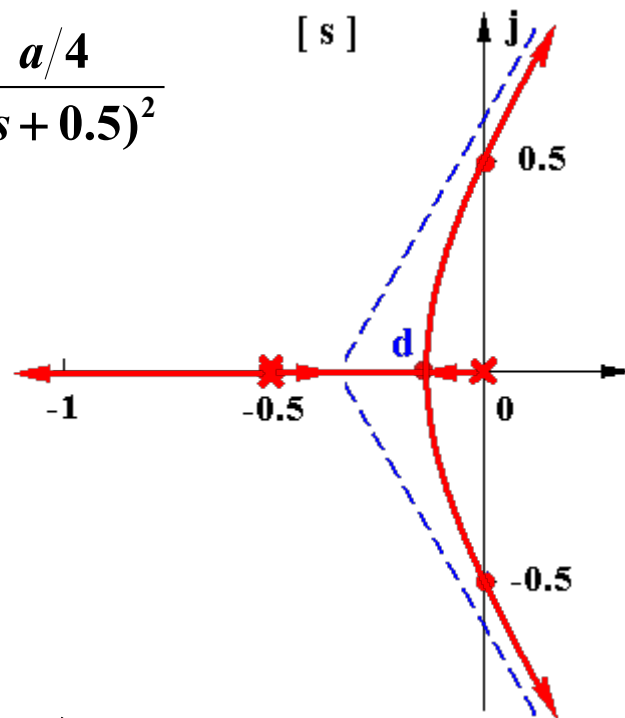
③ 分离点:  $\frac{1}{d} + \frac{2}{d+0.5} = 0$

整理得:  $3d + 0.5 = 0 \Rightarrow d = -1/6$

分离点处a的值:  $a_d = 4|d||d+0.5|^2 = 2/27$

④ 与虚轴交点:  $D(s) = s^3 + s^2 + s/4 + a/4 = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + a/4 = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + \omega/4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \omega = 1/2 \\ a = 1 \end{cases}$$



$$G(s) = \frac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$$

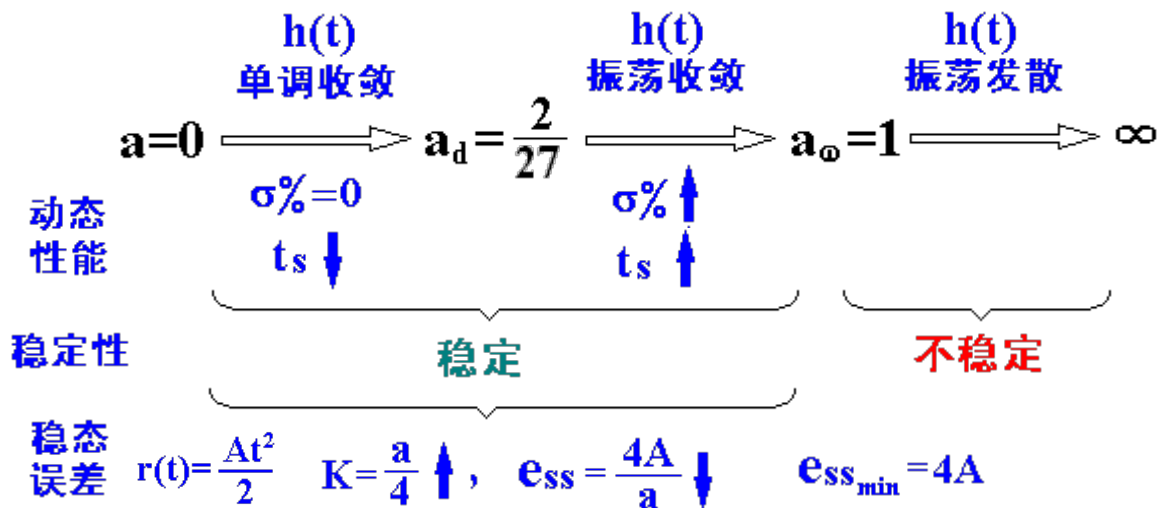
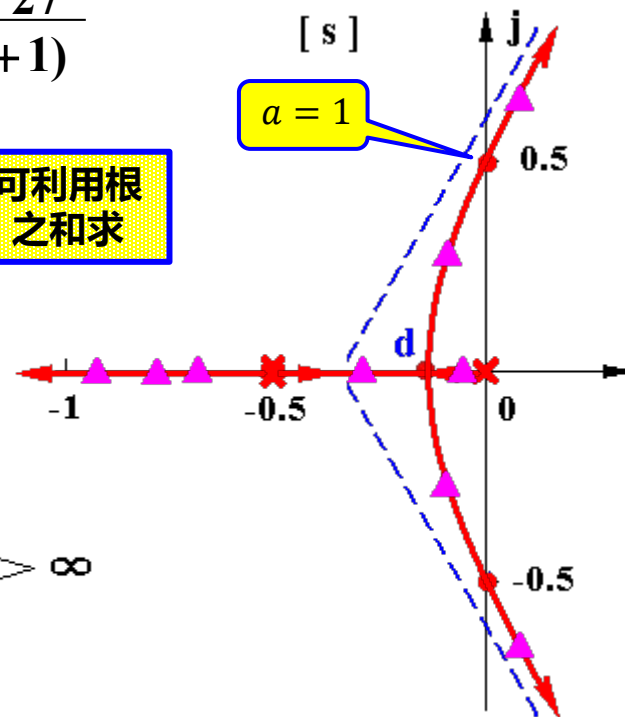
等效传函  
仅用来绘  
制根轨迹

解. (2)  $\xi=1$  时, 对应于分离点  $d$ ,  $a_d=2/27$ ,  $\Phi(s)=?$

$$G^*(s) = \frac{a/4}{s(s+0.5)^2} \quad G(s) = \frac{1}{4} \frac{(s+a)}{s^2(s+1)} \stackrel{a=2/27}{=} \frac{1}{4} \frac{(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)}$$

$$\Phi(s) = \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1) + \frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})} = \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{(s+\frac{1}{6})^2(s+\frac{2}{3})}$$

可利用根  
之和求



例2 单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$ ,  $T=0 \rightarrow \infty$ , 绘制根轨迹。

解 I.  $D(s) = Ts^3 + s^2 + 615s + 15990 = 0$

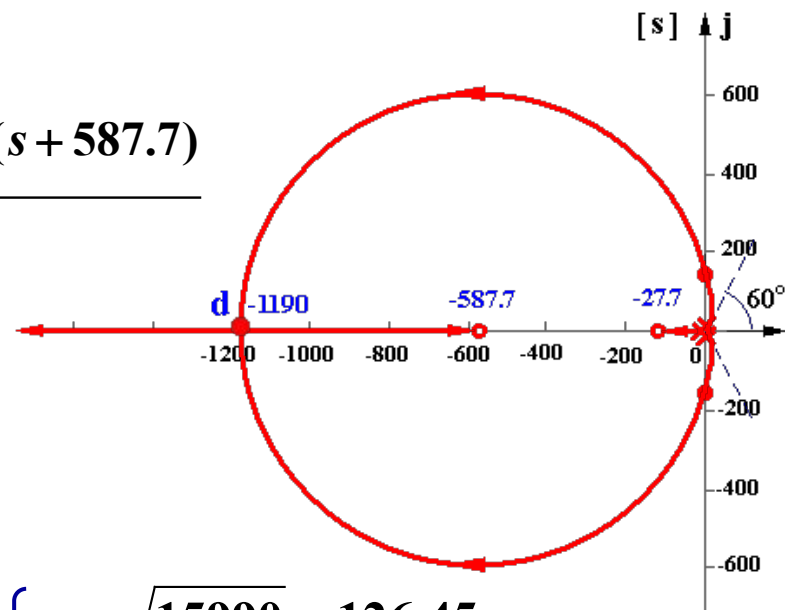
$$G^*(s) = \frac{\frac{1}{T}(s^2 + 615s + 15990)}{s^3} = \frac{\frac{1}{T}(s + 27.7)(s + 587.7)}{s^3}$$

① 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -587.7], [-27.7, 0]$

② 出射角:  $2 \times 0 - 3\theta = (2k+1)\pi$   
 $\theta = \pm 60^\circ, 180^\circ$

③ 虚轴交点:  $\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + 15990 = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -T\omega^3 + 615\omega = 0 \end{cases}$

④ 分离点:  $\frac{3}{d} = \frac{1}{d+27.7} + \frac{1}{d+587.7}$   
 整理得:  $d^2 + 1231d + 47970 = 0$



$$\begin{cases} \omega = \sqrt{15990} = 126.45 \\ T = 615/15990 = 0.0385 \end{cases}$$

解根:  $\begin{cases} d_1 = -40.5, \quad d_2 = -1190 \quad \checkmark \\ T_d = \frac{|d+27.7||d+587.7|}{|d|^3} = 0.00055 \end{cases}$

例2 单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$ ,  $T=0 \rightarrow \infty$ , 绘制根轨迹。

解II.  $D(s) = Ts^3 + s^2 + 615s + 15990 = 0$

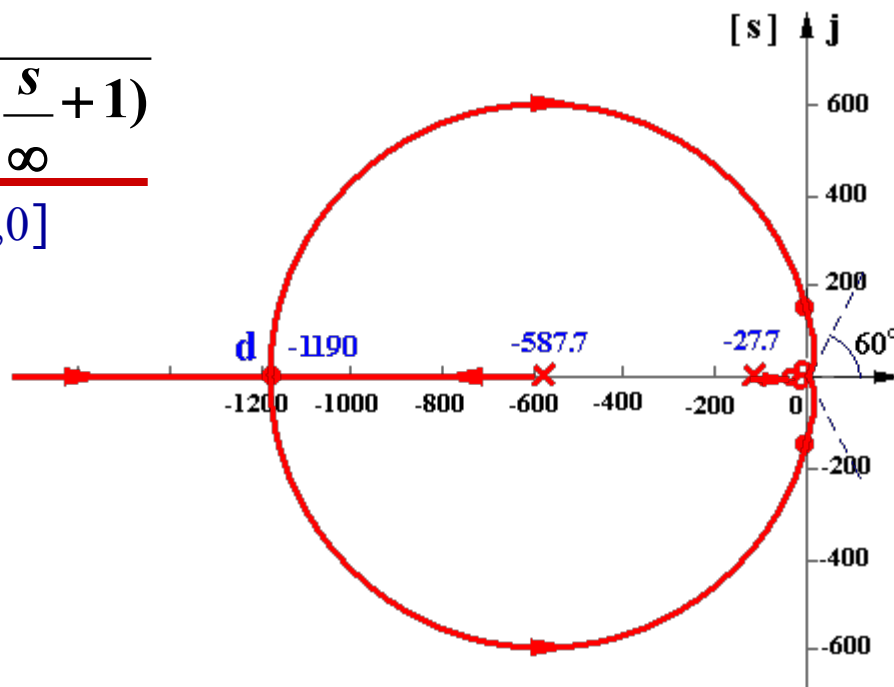
$$G_2^*(s) = \frac{Ts^3}{(s+27.7)(s+587.7)(\frac{s}{\infty}+1)}$$

① 实轴根轨迹:  $(-\infty, -587.7], [-27.7, 0]$

② 分离点:  $d = -1190$   
 $T_d = 0.00055$

③ 虚轴交点:  $\begin{cases} \omega = 126.45 \\ T = 0.0358 \end{cases}$

④ 入射角:  $\theta = \pm 60^\circ, 180^\circ$



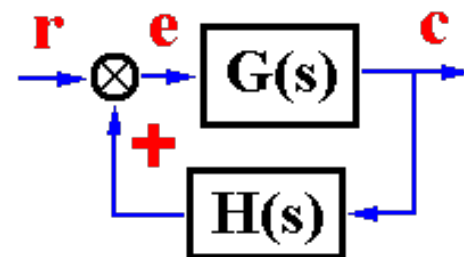
## 零度根轨迹 — 系统实质上处于正反馈时的根轨迹

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

根轨迹方程

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = + 1$$



$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s - z_1| \cdots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \cdots |s - p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1$$

— 模值条件

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = 2k\pi$$

— 相角条件



# 绘制零度根轨迹的基本法则

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数, 对称性和连续性

★ 法则 3 实轴上的根轨迹

法则 4 根之和

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = C \quad (n - m \geq 2)$$

★ 法则 5 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \varphi_a = \frac{2k\pi}{n - m}$$

法则 6 分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

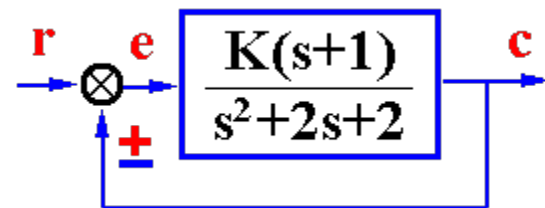
法则 7 与虚轴交点

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = \operatorname{Im}[D(j\omega)] = 0$$

★ 法则 8 出射角/入射角

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = 2k\pi$$

例5 系统结构图如图所示,  $K^* = 0 \rightarrow \infty$ , 变化,  
试分别绘制  $180^\circ$ 、 $0^\circ$  根轨迹。



解.  $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2+2s+2} = \frac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)} \quad \begin{cases} K_k = K/2 \\ \nu = 0 \end{cases}$

(1)  $180^\circ$  根轨迹

(2)  $0^\circ$  根轨迹

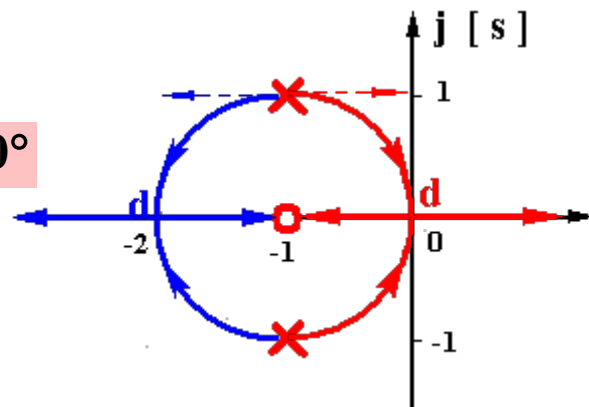
① 实轴轨迹:  $(-\infty, -1]$

$[-1, \infty)$

② 出射角:  $90^\circ - [\theta + 90^\circ] = -180^\circ$   
 $\Rightarrow \theta = 180^\circ$

$90^\circ - [\theta + 90^\circ] = 0^\circ$   
 $\Rightarrow \theta = 0^\circ$

③ 分离点:  $\frac{1}{d+1+j} + \frac{1}{d+1-j} = \frac{2(d+1)}{d^2+2d+2} = \frac{1}{d+1}$



整理得:  $d^2 + 2d = d(d+2) = 0$

解根:  $\begin{cases} d_1 = -2 \\ K_{d_1} = \frac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|} \Big|_{d=-2} = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} d_2 = 0 \\ K_{d_2} = \frac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|} \Big|_{d=0} = 2 \end{cases}$

例6 系统开环传递函数  $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$ , 分别绘制  $0^\circ$ 、 $180^\circ$  根轨迹。

解.  $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3} \quad \begin{cases} K = K^*/27 \\ \nu = 0 \end{cases}$

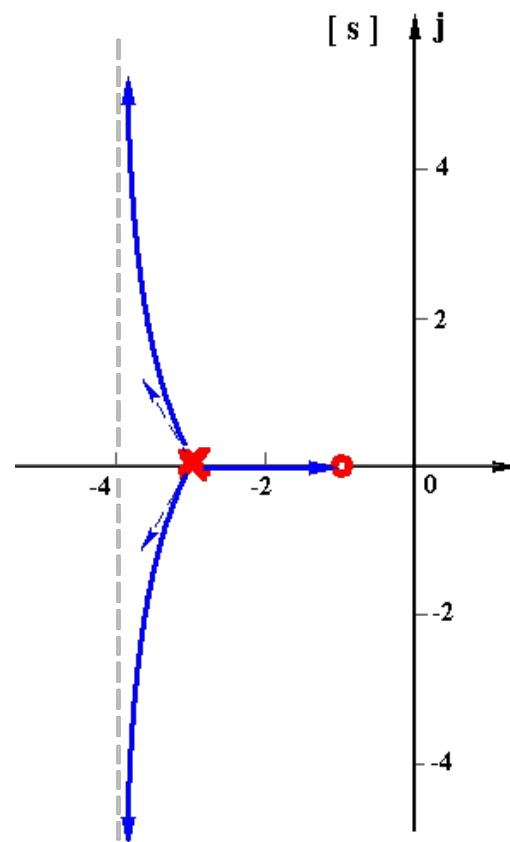
(1) 绘制  $180^\circ$  根轨迹

① 实轴上的根轨迹:  $[-3, -1]$

② 出射角:  $180^\circ - 3\theta = (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{2k\pi}{3} = 0^\circ, \pm 120^\circ$$

③ 渐近线:  $\begin{cases} \sigma_a = \frac{-3 \times 3 + 1}{2} = -4 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ \end{cases}$



解.  $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3} \quad \begin{cases} K = K^*/27 \\ \nu = 0 \end{cases}$

(2) 绘制  $0^\circ$  根轨迹

① 实轴轨迹:  $(-\infty, -3], [-1, \infty)$

② 出射角:  $180^\circ - 3\theta = 2k\pi$

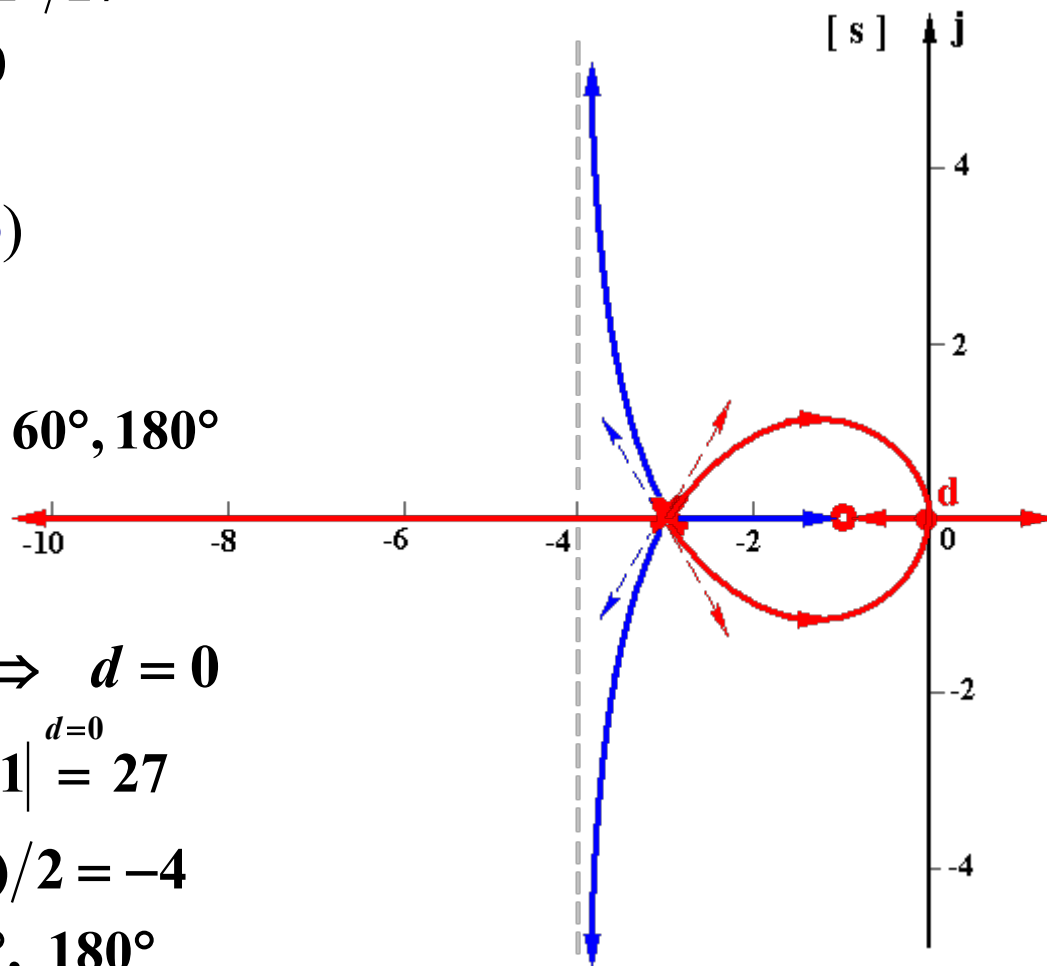
$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

③ 分离点:  $\frac{3}{d+3} = \frac{1}{d+1}$

整理得:  $3d + 3 = d + 3 \Rightarrow d = 0$

$$K_d^* = \left| \frac{d+3}{d+1} \right|^{d=0} = 27$$

④ 渐近线:  $\begin{cases} \sigma_a = (-3 \times 3 + 1)/2 = -4 \\ \varphi_a = 2k\pi/2 = 0^\circ, 180^\circ \end{cases}$



渐近线  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$      $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

例7 已知  $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$ , 绘根轨迹; 求稳定的K范围。

解.  $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+2 \pm j2\sqrt{3})}$      $\begin{cases} K = K^*/16 \\ \nu = 1 \end{cases}$

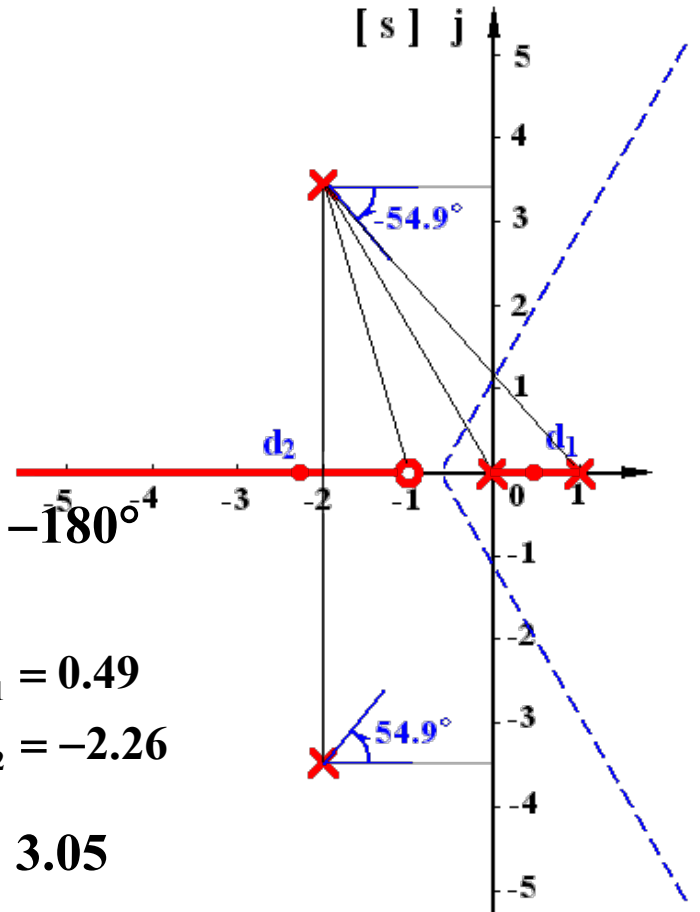
① 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -1], [0, 1]$

② 渐近线:  $\begin{cases} \sigma_a = (1-4+1)/3 = -2/3 \\ \varphi_a = (2k+1)\pi/3 = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$

③ 出射角:  $106.1^\circ - [\theta_1 + 90^\circ + 120^\circ + 130.9^\circ] = -180^\circ$   
 $\Rightarrow \theta_1 = -54.9^\circ$

④ 分离点:  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} + \frac{2(d+2)}{d^2+4d+16} = \frac{1}{d+1}$      $\begin{cases} d_1 = 0.49 \\ d_2 = -2.26 \end{cases}$

$$K_{d_{1,2}}^* = \frac{|d||d-1||d^2+4d+16|}{|d+1|} \begin{cases} d=0.49 & \left\{ \begin{array}{l} 3.05 \\ 70.6 \end{array} \right. \\ d=-2.26 & \end{cases}$$



$$\text{例7 } G(s) = \frac{K^* (s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} \quad \begin{cases} K = K^*/16 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

⑤ 虚轴交点:

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K^* - 16)s + K^* = 0$$

$$\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 12\omega^2 + K^* = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -3\omega^3 + (K^* - 16)\omega = 0 \end{cases}$$

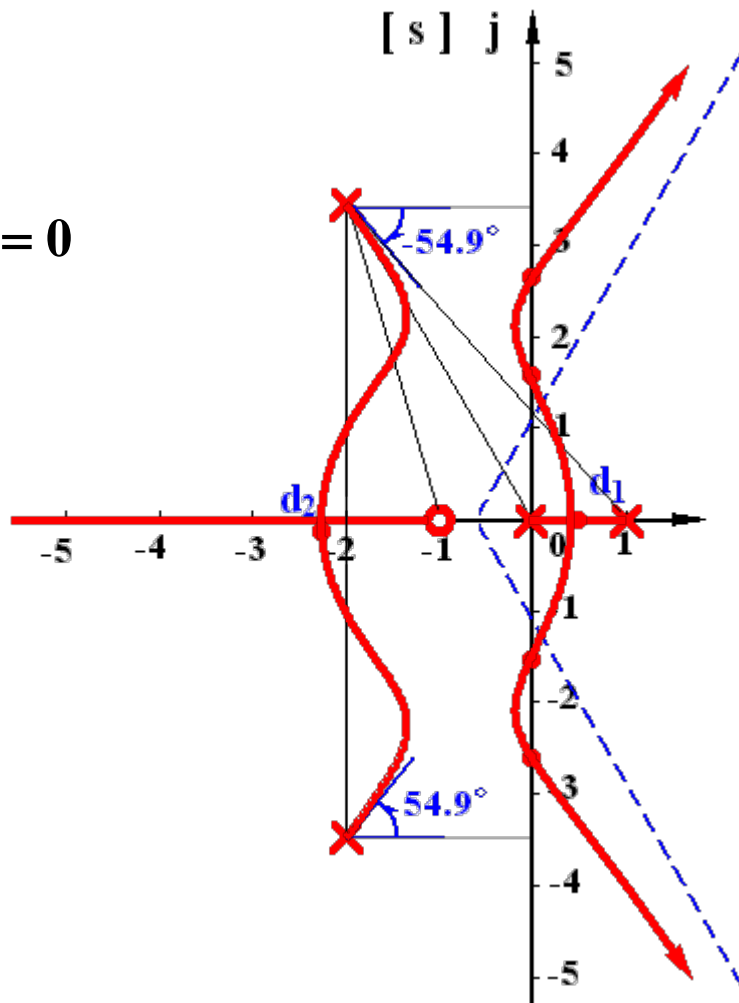
$$K^* = 3\omega^2 + 16$$

$$\omega^4 - 9\omega^2 + 16 = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 1.56 & \begin{cases} K_1^* = 19.7 \\ K_2^* = 35.7 \end{cases} \\ \omega_2 = 2.56 & \end{cases}$$

稳定的  $K^*$  范围:  $19.7 < K^* < 35.7$

稳定的  $K$  范围:  $1.234 < K = \frac{K^*}{16} < 2.23$

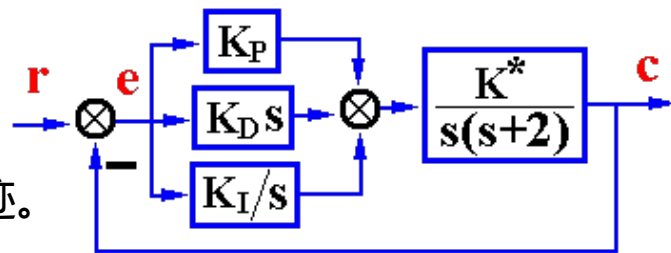


# 讨论：附加开环零、极点对系统动态性能的影响？

根轨迹部分以下内容未讲!!!

例3 PID控制系统结构图如图所示。

设  $\begin{cases} K_P = 1 \\ K_D = 0.25 \\ K_I = 1.5 \end{cases}$ ,  $K^* = 0 \rightarrow \infty$ , 采用  $\begin{cases} P \\ PD \\ PI \\ PID \end{cases}$  控制, 分别绘根轨迹。

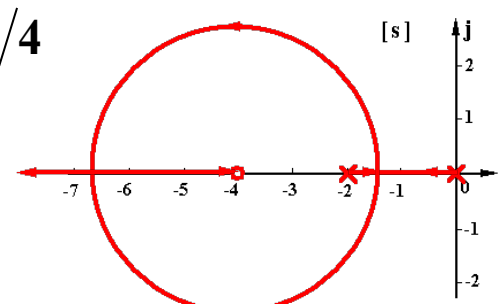
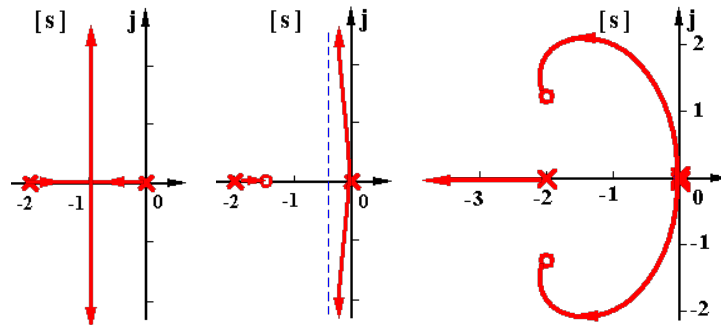


解. (1) P:  $G_P(s) = \frac{K^*}{s(s+2)}$   $\begin{cases} K = K^*/2 \\ v = 1 \end{cases}$

(2) PD:  $G_{PD}(s) = \frac{K^*(0.25s+1)}{s(s+2)}$   $\begin{cases} K = K^*/2 \\ v = 1 \end{cases}$

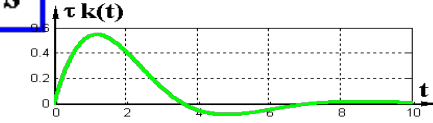
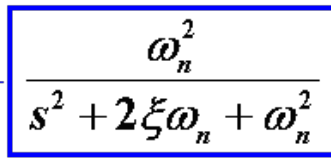
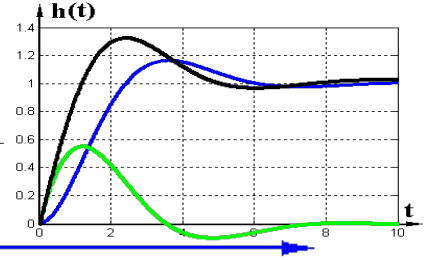
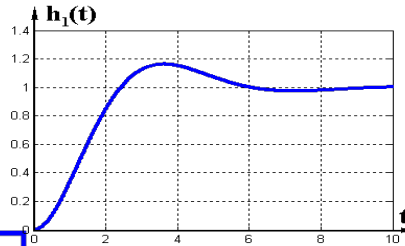
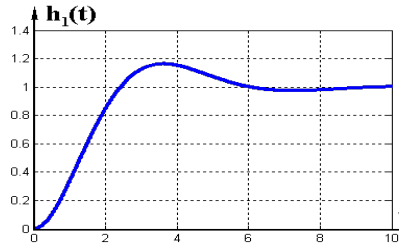
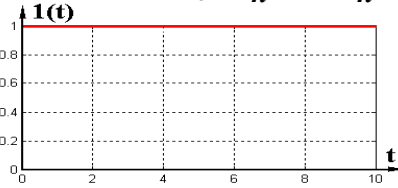
(3) PI:  $G_{PI}(s) = \frac{K^*(1+1.5/s)}{s(s+2)} = \frac{K^*(s+1.5)}{s^2(s+2)}$   $\begin{cases} K = 3K^*/4 \\ v = 2 \end{cases}$

(4) PID:  $G_{PID}(s) = \frac{K^*(1+0.25s+1.5/s)}{s(s+2)}$   
 $= \frac{0.25K^*[s+2 \pm j\sqrt{2}]}{s^2(s+2)}$   $\begin{cases} K = 3K^*/4 \\ v = 2 \end{cases}$

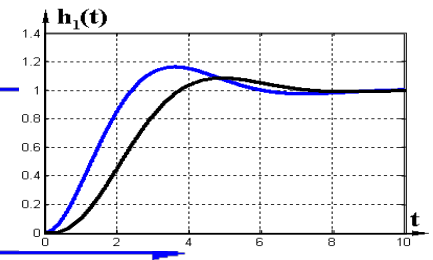
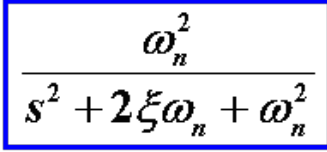
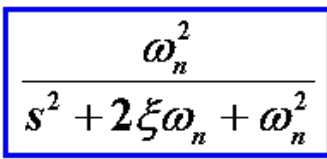
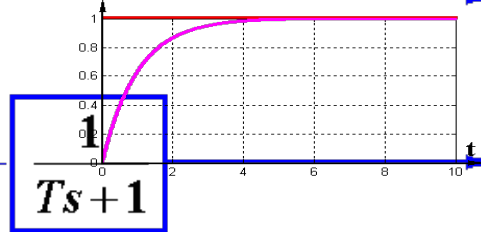
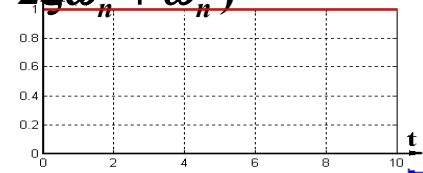


$\begin{cases} \text{出射角 } \theta = \pm 90^\circ \\ \text{入射角 } \varphi = 109.4^\circ \end{cases}$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (\tau s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

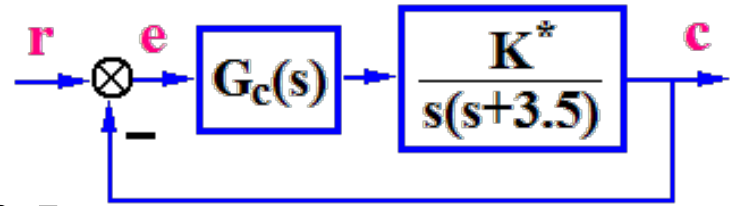


$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{(Ts + 1)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$





例5. 系统结构图如图所示, 设计 $G_c(s)$ 使系统



解. 满足动态指标  $\sigma\% \approx 16.3\%$ ,  $t_s \approx 1''$ 。  
 由  $\begin{cases} \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 16.3\% \\ t_s = 3.5/(\xi\omega_n) = 1'' \end{cases}$  解出  $\begin{cases} \xi = 0.5 \\ \omega_n = 7 \end{cases}$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n = -3.5 \pm j6.06$$

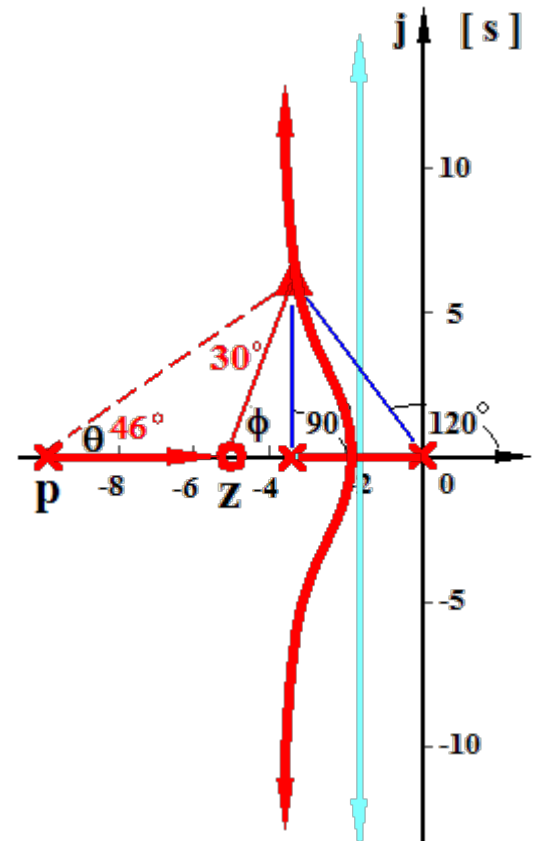
为使 $\lambda_{1,2}$ 位于根轨迹上, 须使之满足相角条件

考虑物理可实现, 设计  $G_c(s) = \frac{s-z}{s-p}$

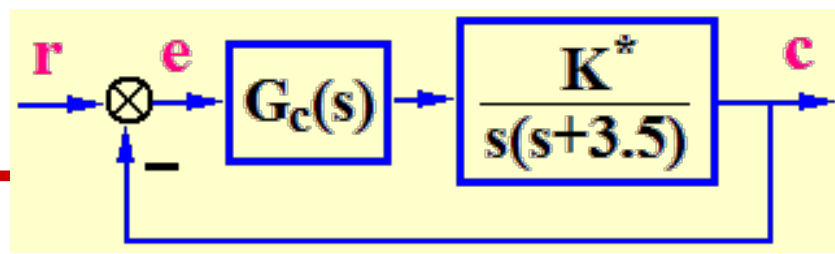
$$\varphi - (\theta + 120^\circ + 90^\circ) = -180^\circ$$

取 $z = -5$ , 有 $\theta = \varphi - 30^\circ = 76^\circ - 30^\circ = 46^\circ$

可确定:  $p = -9.3$        $G_c(s) = \frac{s-z}{s-p} = \frac{s+5}{s+9.3}$



例5. 系统结构图如图所示, 设计 $G_c(s)$ 使系统满足动态指标  $\sigma\% \approx 16.3\%$ ,  $t_s \approx 1''$ 。



验算指标

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+3.5)(s+9.3)}$$

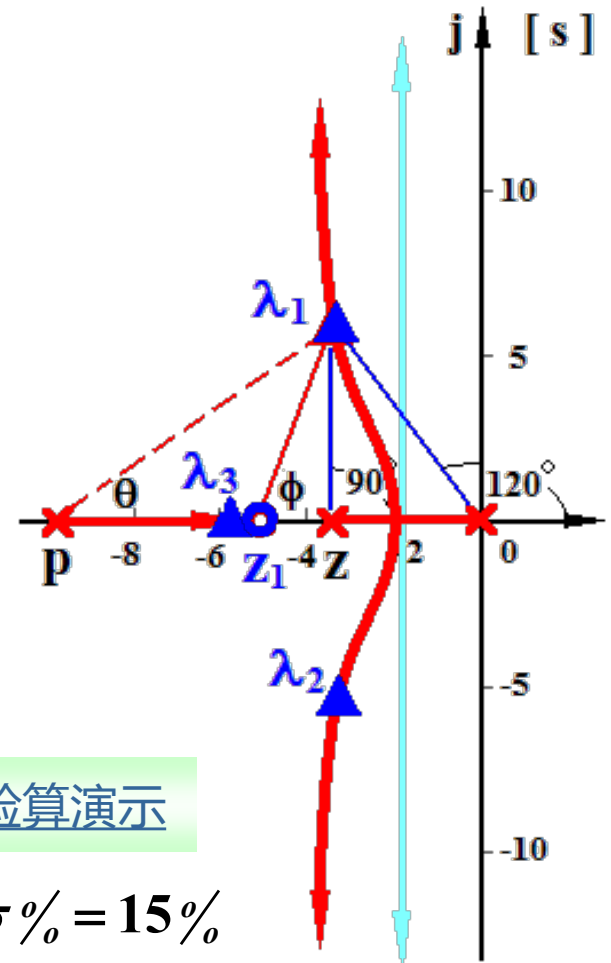
$$\lambda_{1,2} = -3.5 \pm j6.06$$

$$K_{\lambda_1}^* = \frac{|\lambda_1| |\lambda_1 + 3.5| |\lambda_1 + 9.3|}{|\lambda_1 + 5|} = 57$$

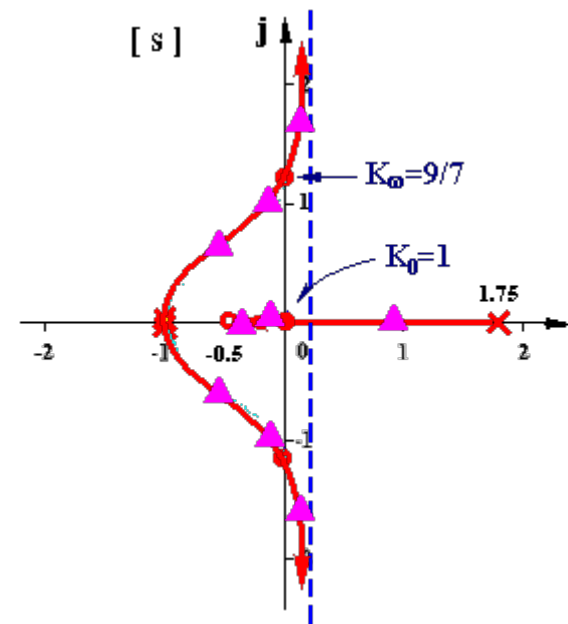
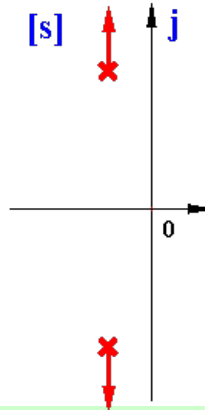
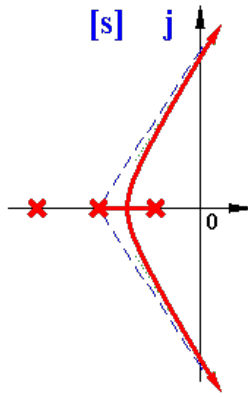
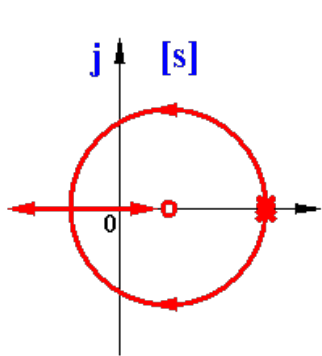
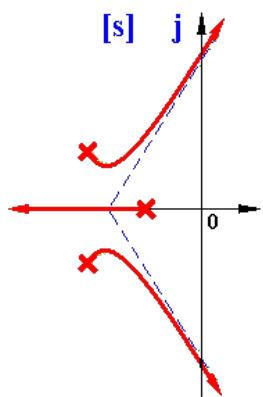
$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{57(s+5)}{s(s+3.5)(s+9.3) + 57(s+5)} \\ &= \frac{57(s+5)}{(s+5.8)(s \pm 3.5 + j6.06)} \end{aligned}$$

计算得:  $\begin{cases} \sigma\% = 21\% \\ t_s = 0.76'' \end{cases}$

调整  $K^* = 40$  得:  $\begin{cases} \sigma\% = 15\% \\ t_s = 0.94'' \end{cases}$



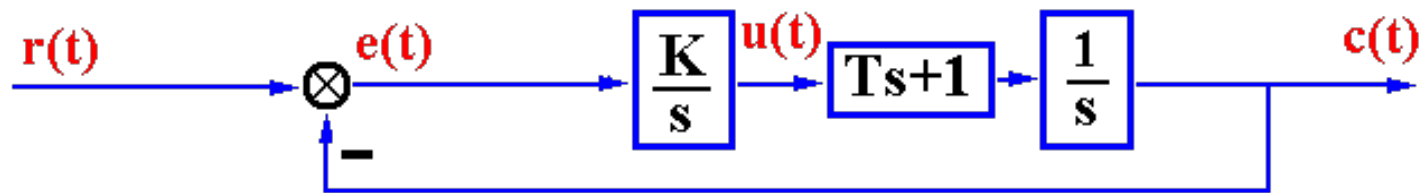
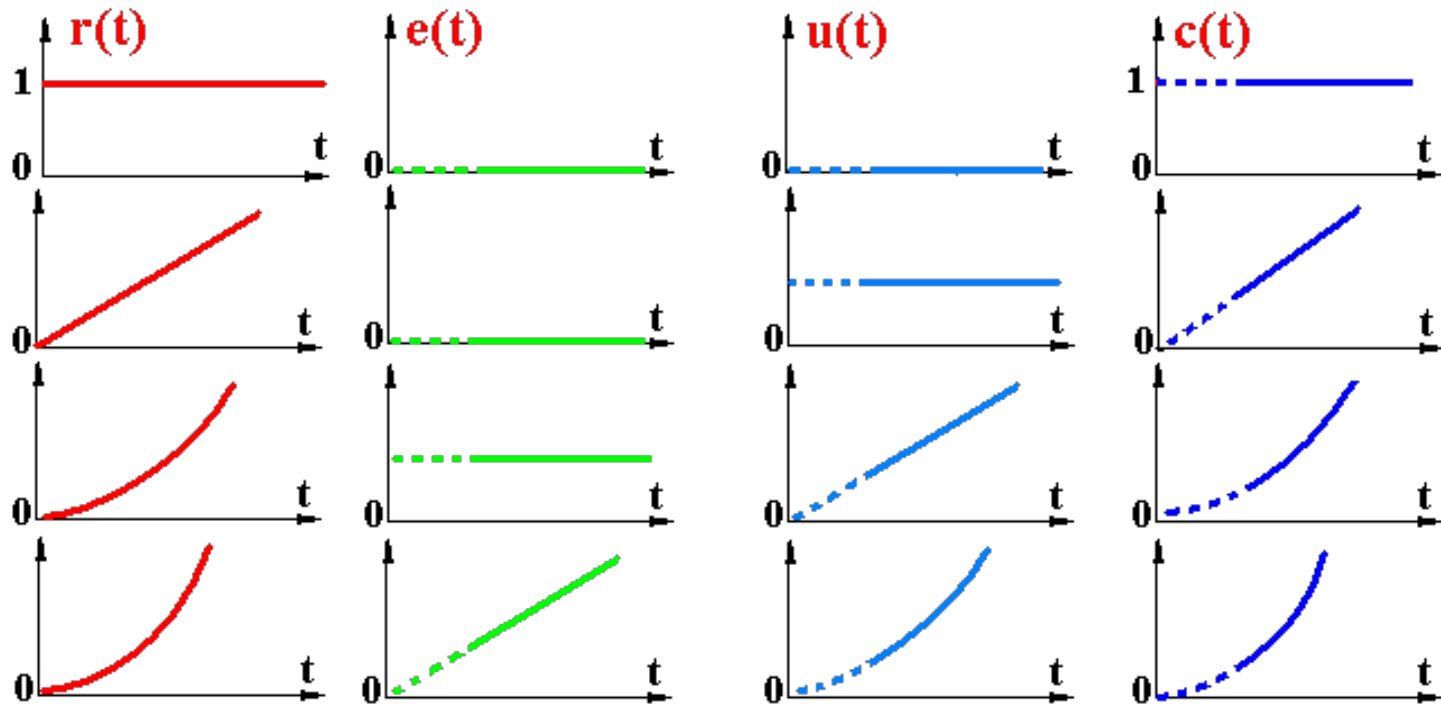
验算演示



开环稳定  $\neq$  闭环稳定

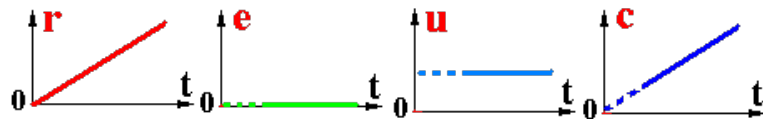
负反馈未必一定能改善系统性能

<b>V</b>	$r=A \cdot 1(t)$	$r=A \cdot t$	$r= A \cdot t^2/2$
<b>0</b>	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
<b>I</b>	<b>0</b>	$\frac{A}{K}$	$\infty$
<b>II</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{A}{K}$

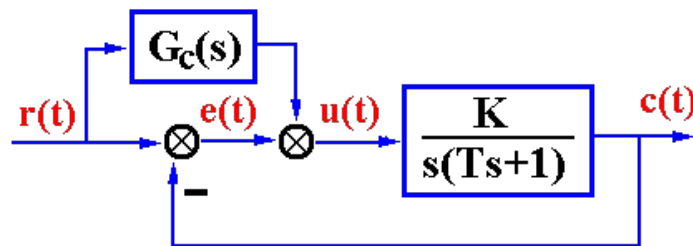


例 4 系统结构图如图所示，已知输入  $r(t) = At$ ，求  $G_c(s)$ ，使稳态误差为零。

$$\text{解. } G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \quad \begin{cases} K = K \\ v = 1 \end{cases}$$



$$D(s) = Ts^2 + s + K = 0$$



$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{KG_c(s)}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{s(Ts+1) - KG_c(s)}{s(Ts+1) + K}$$

$$G_c(s) = \frac{s}{K}$$

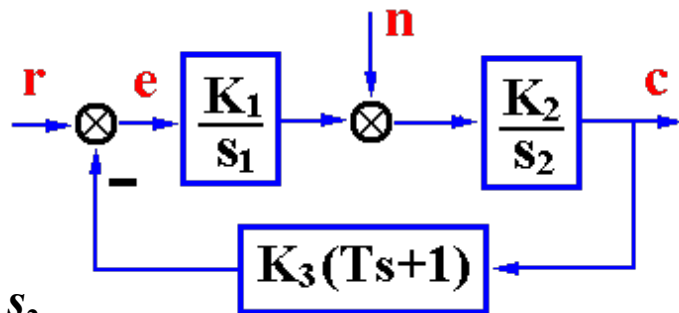
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A \left[ sT + 1 - \frac{K}{s} G_c(s) \right]}{s(Ts+1) + K} = \frac{A \left[ 1 - \frac{K}{s} G_c(s) \right]}{K} = 0$$

按前馈补偿的复合控制方案可以有效提高系统的稳态精度。

## 干扰信号作用下的稳态误差

在主反馈口到干扰作用点之间的前向通道中提高增益、设置积分环节，可以同时减小或消除控制输入和干扰作用下产生的稳态误差。

例 5 系统如图所示，已知输入  $\begin{cases} r(t) = At^2/2 \\ n(t) = At \end{cases}$ ，求系统的稳态误差。



解.  $G(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}{s_1 s_2} \quad \begin{cases} K = K_1 K_2 K_3 \\ \nu = 2 \end{cases}$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}{s_1 s_2}} = \frac{s_1 s_2}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}$$

$$D(s) = s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3 = 0 \quad \begin{cases} K_1 K_2 K_3 > 0 \\ T > 0 \end{cases}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \frac{A}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2} \frac{s_1 s_2}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3} = \frac{A}{K_1 K_2 K_3}$$

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-K_2 K_3 (Ts + 1)/s_2}{1 + K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)/(s_1 s_2)} = \frac{-K_2 K_3 s_1 (Ts + 1)}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3}$$

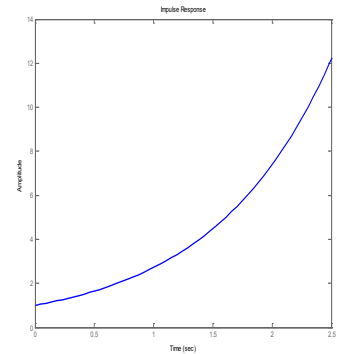
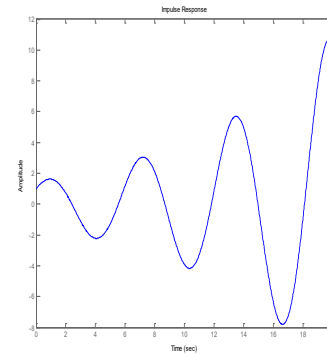
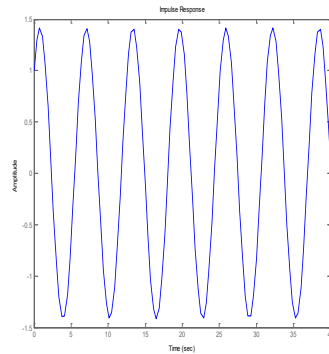
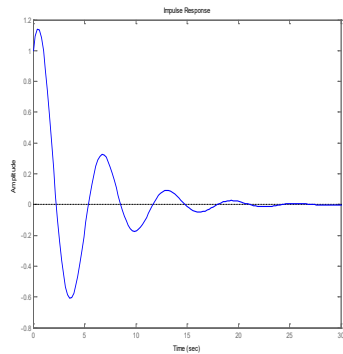
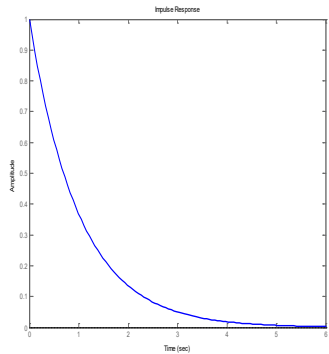
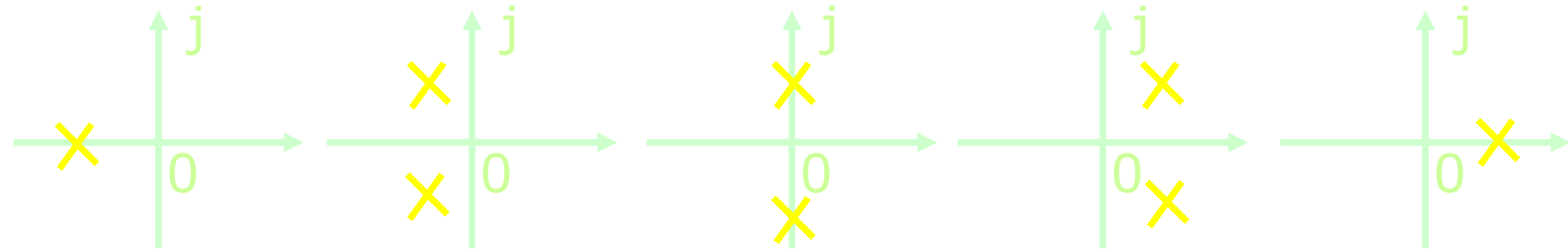
$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_{en}(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^2} \cdot \frac{-K_2 K_3 s_1 (Ts + 1)}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3} = \frac{-A}{K_1}$$

# 穩定性概念

## □ 五種運動模態

$$k(t) = \mathbf{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{k \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^q (s - s_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}\right] =$$

$$\sum_{j=1}^q A_j e^{s_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t)$$



# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov 意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov 第一法 (间接法)

3. Lyapunov 第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析

---



## 4.2 基于状态空间表达式的稳定性分析

---

稳定性是系统的重要性质，是系统正常工作的必要条件。它描述初始条件下系统方程的解是否具有收敛性，与输入作用无关。

1892年俄国学者李雅普诺夫提出的稳定性理论，采用状态向量描述，适用于单变量、线性、定常系统，而且适用于多变量、非线性、时变系统。是确定系统稳定性的更一般的理论。



在数学中以他的姓氏命名的有：李雅普诺夫第一方法，李雅普诺夫第二方法，李雅普诺夫定理，李雅普诺夫函数，李雅普诺夫变换，李雅普诺夫曲线，李雅普诺夫曲面，李雅普诺夫球面，李雅普诺夫数，李雅普诺夫随机函数，李雅普诺夫随机算子，李雅普诺夫特征指数，李雅普诺夫维数，李雅普诺夫系统，李雅普诺夫分式，李雅普诺夫稳定性等等，而其中以他的姓氏命名的定理、条件有多种。

- 第一法：利用微分方程的解判断系统稳定性
  - 第二法：利用Lyapunov函数判断系统稳定性
-

# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

---

设系统方程为

$$\dot{x} = f(x, t)$$

式中  $x$  为  $n$  维状态向量，且显含时间变量  $t$ ;  $f(x, t)$  为线性或非线性、定常或时变的  $n$  维向量函数，展开式为

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t); i = 1, 2, \dots, n$$

假定方程的解为  $x(t; x_0, t_0)$ ，式中  $x_0$  和  $t_0$  分别为初始状态向量和初始时刻，则初始条件  $x_0$  必满足  $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$

- (1) 平衡状态
  - (2) Lyapunov意义下的稳定性
  - (3) 渐近稳定性
  - (4) 大范围（全局）渐近稳定性
  - (5) 不稳定性
-

# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

---

## (1) 平衡状态

李雅普诺夫关于稳定性的研究均针对**平衡状态**而言。对于所有 $t$ ，满足

$$\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0 \text{ (系统方程 } \dot{x} = f(x, t)\text{)}$$

的状态  $x_e$  称为平衡状态。平衡状态的各分量相对于时间不再发生变化。若已知状态方程，令  $\dot{x} = 0$  所求得的解  $x$ ，便是一种平衡状态。

线性定常系统  $\dot{x} = Ax$ ，其平衡状态满足  $Ax_e = 0$ ，**当 $A$ 为非奇异矩阵时，系统只有唯一的零解**，即只存在一个位于状态空间原点的平衡状态。若  $A$ 为奇异矩阵，则系统存在有无穷多个平衡状态。对于非线性系统，可能有一个或多个平衡状态。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

---

# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

## (2) Lyapunov意义下的稳定性

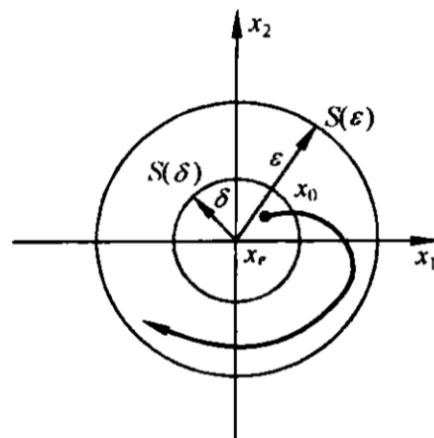
设  $x_e$  为系统的一个平衡状态，如果对于给定的任一实数  $\epsilon > 0$ ，都对应地存在一个实数  $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ ，使得系统初始状态位于以平衡状态  $x_e$  为球心， $\delta(\epsilon, t_0)$  为半径的闭球域  $S(\delta)$  内，即

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\epsilon, t_0)$$

若系统方程的解  $x(t; x_0, t_0)$  在  $t \rightarrow \infty$  的过程中，都位于以  $x_e$  为球心、半径为  $\epsilon$  的闭球域  $S(\epsilon)$  内，即

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon, t \geq t_0$$

则称系统的平衡状态  $x_e$  在李雅普诺夫意义下是稳定的。



式中  $\|\cdot\|$  为欧几里得范数，其几何意义是空间距离的尺度。例如  $\|x_0 - x_e\|$  表示状态空间中  $x_0$  至  $x_e$  点之间距离的尺度，其数学表达式为

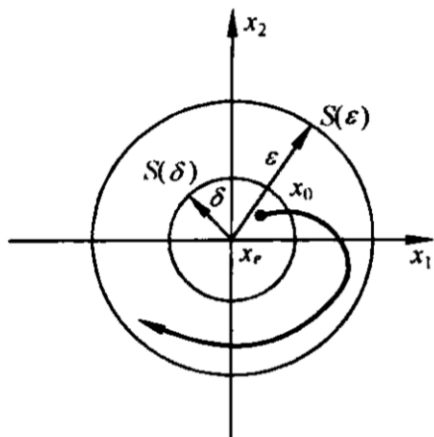
$$\|x_0 - x_e\| = [(x_{10} - x_{1e})^2 + \cdots + (x_{n0} - x_{ne})^2]^{\frac{1}{2}}$$

# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

---

## (2) Lyapunov意义下的稳定性

注意：按李雅普诺夫意义下的稳定性定义，当系统作不衰减的振荡运动时，将在平面描绘出一条封闭曲线，但只要不超出 $S(\varepsilon)$ ，则认为稳定的，这与经典控制理论中线性定常系统稳定性的定义是有差异的。经典控制理论中的稳定，指的是渐近稳定性。



Lyapunov意义下的稳定性

---

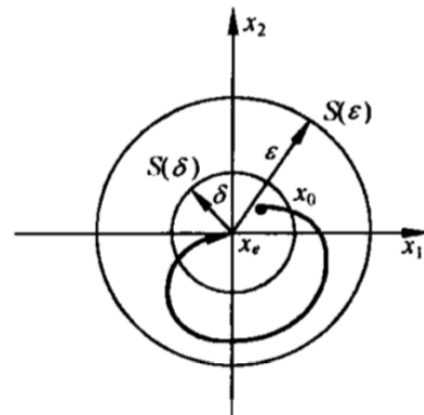
# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

## (3) 渐近稳定性

若系统的平衡状态  $x_e$  不仅具有李雅普诺夫意义下的稳定性，且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| = 0$$

则称此平衡状态是渐近稳定的。此时，从  $S(\delta)$  出发的轨迹不仅不会超出  $S(\varepsilon)$ ，且当  $t \rightarrow \infty$  时收敛于  $x_e$ 。



经典控制理论中的稳定性定义与此处的渐近稳定性对应。

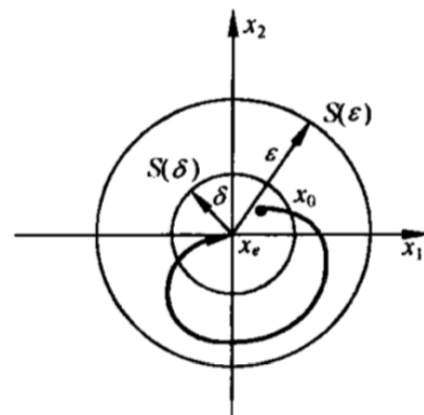
若  $\delta$  与  $t_0$  无关，且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| = 0$  的极限过程与  $t_0$  无关，则称平衡状态是**一致渐近稳定的**。

# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

---

## (4) 大范围（全局）渐近稳定性

当初始条件扩展至整个状态空间，且平衡状态均具有渐近稳定性时，称此平衡状态是大范围渐近稳定的。此时 $\delta \rightarrow \infty$ ， $S(\delta) \rightarrow \infty$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时，由状态空间中任一点出发的轨迹都收敛至 $x_e$ 。



对于线性系统，如果它是渐近稳定的，则必定是大范围渐近稳定的，这是因为线性系统的稳定性与初始条件的大小无关。而对于非线性系统来说，其稳定性往往与初始条件的大小密切相关，系统渐近稳定不一定是大范围渐近稳定。

---

---

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax$$

原点是其平衡点之一。

线性定常系统所有平衡点的稳定性是相同的。因为，对于非零平衡点，经过状态平移，均可转换为原点，并且状态矩阵不变。

事实上，设  $x_e$  是系统的非零平衡点，即  $Ax_e = 0$ ，令  $z = x - x_e$ ，则

$$\dot{z} = \dot{x} - \dot{x}_e = A(x - x_e) = Az$$

可见任意非零平衡点  $x_e$  的稳定性与原点的稳定性是一样的。

因此，当原点是该系统的稳定（渐近稳定）平衡点时，我们称该系统是稳定（渐近稳定）的。

**对于线性系统而言，系统稳定性和平衡状态稳定性是一回事儿。**

---

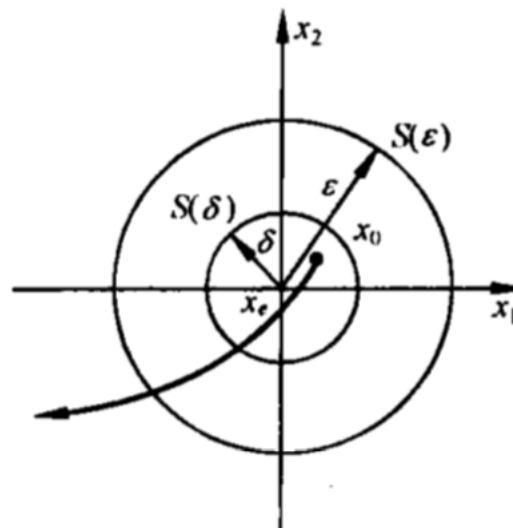


# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

---

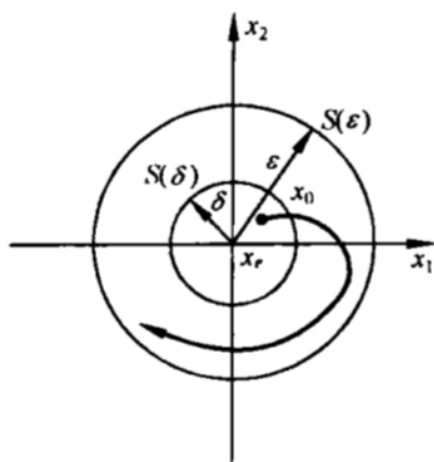
## (5) 不稳定性

如果对于某个实数  $\varepsilon > 0$  和任一个实数  $\delta > 0$ , 不管这两个实数有多么小, 在  $S(\delta)$  内总存在着一个状态  $x_0$ , 使得由这一状态出发的轨迹超出  $S(\varepsilon)$ , 则平衡状态  $x_e$  称为是不稳定的, 如图所示。

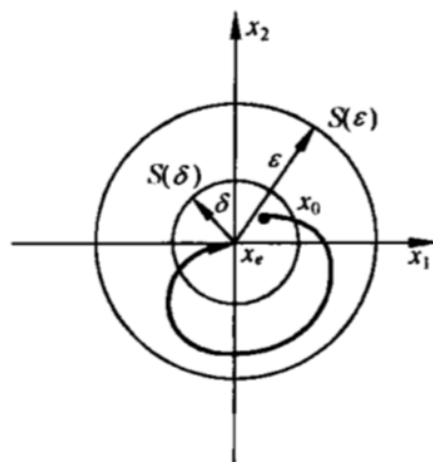


# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

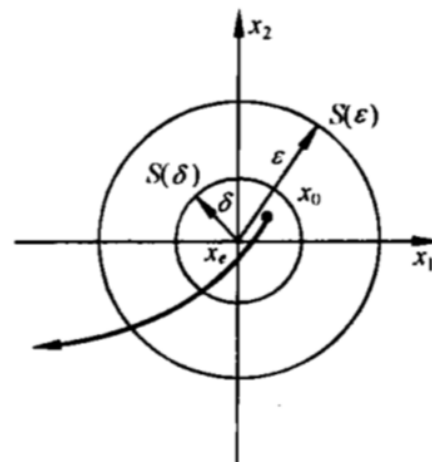
- ◆ 平衡状态  $\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$  (系统方程  $\dot{x} = f(x, t)$ )



(a) 李雅普诺夫意义下的稳定性



(b) 渐近稳定性



(c) 不稳定性

- ◆ 大范围 (全局) 渐近稳定性

当初始条件扩展至整个状态空间, 且平衡状态均具有渐近稳定性

- ◆ 对于线性系统, 如果它是渐近稳定的, 则必定是大范围渐近稳定的

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov 意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov 第一法 (间接法)

3. Lyapunov 第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析

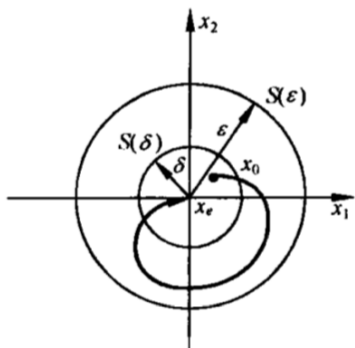
---

## 2. Lyapunov 第一法 (间接法)

李雅普诺夫第一法是利用状态方程解的特性来判断系统稳定性的方法，它适用于线性定常、线性时变以及非线性函数可线性化的情况。我们主要研究线性定常系统，所以在此仅介绍线性定常系统的特征值判据。

**定理9-9** 对于线性定常系统  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$ , 有: 系统的唯一平衡状态  $x_e = 0$  是渐近稳定的充分必要条件是,  $A$  的所有特征值均具有负实部。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| = 0$$



$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (t \geq 0)$$

$$e^{At} = P e^{\bar{A}t} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

**说明:** 由于所讨论的系统为线性定常系统, 当其为稳定时必是一致稳定, 当其为渐近稳定时必是大范围一致渐近稳定。

**定理9-9** 对于线性定常系统  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$ , 有: 系统的唯一平衡状态  $x_e = 0$  是渐近稳定的充分必要条件是,  $A$  的所有特征值均具有负实部。

**证明** 假定  $A$  有相异特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , 存在非奇异线性变换  $x = P \bar{x}$  使  $\bar{A}$  对角化

变换后状态方程的解为  $\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}(0) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t} \dots e^{\lambda_n t}) \bar{x}(0)$

原状态方程的解为  $x(t) = P e^{\bar{A}t} P^{-1} x(0) = e^{At} x(0)$

$$e^{At} = P e^{\bar{A}t} P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_1 t} \dots e^{\lambda_n t}) P^{-1}$$

可以写矩阵多项式的形式

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n R_i e^{\lambda_i t} = R_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + R_n e^{\lambda_n t}$$

故  $x(t) = e^{At} x(0) = [R_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + R_n e^{\lambda_n t}] x(0)$

当  $A$  的所有特征值均具有负实部时, 对于任意  $x(0)$  均有  $x(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , 系统渐近稳定。只要有一个特征值实部大于零, 对于  $x(0) \neq 0$ ,  $x(t)$  便无限增长, 系统不稳定。如果只有一个或一对特征值 (非重根) 的实部等于零, 其余特征值实部均小于零,  $x(t)$  便含有常数项或三角函数项, 则系统是李雅普诺夫意义下稳定的。

---

## 2. Lyapunov 第一法 (间接法)

例9-25 已知线性定常连续系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

试用李雅普诺夫方程判断系统的渐近稳定性。

解：用特征值判据判断。系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

特征值为-2, 1, 故系统不稳定。

**定理9-9** 对于线性定常系统  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$ , 有：系统的唯一平衡状态  $x_e = 0$  是渐近稳定的充分必要条件是,  $A$  的所有特征值均具有负实部。

### 3. Lyapunov 第二法（直接法）

---

根据古典力学中的振动现象，若系统能量（含动能与位能）随时间推移而衰减，系统迟早会达到平衡状态，但要找到实际系统的能量函数表达式并非易事。李雅普诺夫提出，可**虚构一个能量函数**，后来便被称为**李雅普诺夫函数**。一般它与 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 及 $t$ 有关，记为 $V(x, t)$ 。若不显含 $t$ ，则记以 $V(x)$ 。它是一个标量函数，考虑到能量总大于零，故为**正定函数**。能量衰减特性用 $\dot{V}(x, t)$ 或 $\dot{V}(x)$ 表示。**李雅普诺夫第二法利用 $V$ 及 $\dot{V}$ 的符号特征，直接对平衡状态稳定性作出判断，无需求出系统状态方程的解，故称直接法。**

**优点与不足**：此方法解决了一些用其他稳定判据难以解决的非线性系统的稳定性问题，遗憾的是对一般非线性系统仍未找到构造李雅普诺夫函数的通用方法。

**经验结论**：对于线性系统，通常用二次型函数  $x^T P x$  作为李雅普诺夫函数。

只讨论定理的物理概念和应用。

---

# 3. Lyapunov 第二法 (直接法)

---

## (1) 标量函数定号性的简要回顾

**正定性** 标量函数 $V(x)$ 对所有在域 $S$ 中的非零状态 $x$ 有 $V(x) > 0$ 且 $V(0) = 0$ , 则在域 $S$  (域 $S$  包含状态空间的原点) 内的标量函数 $V(x)$ 称为是正定的。

**负定性** 如果 $-V(x)$ 是正定函数, 则标量函数 $V(x)$ 称为负定函数。

**半正定性** 如果标量函数 $V(x)$ 除了原点及某些状态处等于零外, 在域 $S$ 内的所有状态都是正定的, 则 $V(x)$ 称为半正定函数。

**半负定性** 如果 $-V(x)$ 是半正定函数, 则标量函数 $V(x)$ 称为半负定函数。

**不定性** 如果在域 $S$ 内, 不论域 $S$ 多么小,  $V(x)$ 既可为正值也可为负值, 则标量函数 $V(x)$ 称为不定函数。

例如, 在二维空间中:

$$x_1^2 + x_2^2 \quad \text{正定}$$

$$(x_1 + x_2)^2 \quad \text{半正定}$$

$$-(x_1^4 + x_2^2) \quad \text{负定}$$

$$-x_1^2 \quad \text{半负定}$$

$$x_1^2 - x_2^2 \quad \text{不定}$$

---



# 3. Lyapunov 第二法 (直接法)

---

## 标量函数的定号性

考虑二次型函数  $x^T Ax$  的定号性,  $A$  是实对称矩阵

**结论1:** 实对称矩阵  $A$  是正定 (半正定) 的, 当且仅当所有特征值均大于 (大于等于) 零。

**结论2:** 实对称矩阵  $A$  是正定 (半正定) 的, 当且仅当所有主子式均大于 (大于等于) 零。

**经验结论:** 对于线性系统, 通常用二次型函数  $x^T Px$  作为李雅普诺夫函数。

---

# 3. Lyapunov 第二法 (直接法)

---

## (2) Lyapunov第二法主要定理

**定理9-10** (定常系统大范围渐近稳定判别定理1) 对于定常系统

$$\dot{x} = f(x), t \geq 0$$

其中 $f(0) = 0$ , 如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$ ,  $V(0) = 0$ , 并且对于状态空间  $X$  中的一切非零点  $x$  满足以下条件:

- 1)  $V(x)$ 为正定;
- 2)  $\dot{V}(x)$ 为负定;
- 3) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$  时  $V(x) \rightarrow \infty$ 。

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

**[定理9-10]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 负定, 则原点是渐近稳定的; 进而, 若 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

---

**[定理9-10]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 负定, 则原点是渐近稳定的; 进而, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

## (2) Lyapunov第二法主要定理

例9-23 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

试确定系统的稳定性。

解 显然, 原点 ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ) 是该系统唯一的平衡状态。选取正定标量函数  $V(x)$  为

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

则沿任意轨迹  $V(x)$  对时间的导数

$$\dot{V}(x) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

是负定的。这说明  $V(x)$  沿任意轨迹是连续减小的, 因此  $V(x)$  是一个李雅普诺夫函数。由于当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时  $V(x) \rightarrow \infty$ , 所以系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

---

---

## (2) Lyapunov第二法主要定理

**例** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 7x_2$$

解：原点是唯一平衡点。考虑

$$V(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = -6x_1^4 - 56x_2^2 < 0$$

当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时 $V(x) \rightarrow \infty$ ，故原点全局渐近稳定。

**[定理9-10]**  $V(x)$ 正定， $\dot{V}(x)$ 负定，则原点是渐近稳定的；进而，若 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时， $V(x) \rightarrow \infty$ ，则原点是全局渐近稳定的。

---

# 3. Lyapunov 第二法 (直接法)

## (2) Lyapunov第二法主要定理

**定理9-11 (定常系统大范围渐近稳定判别定理2)** 对于定常系统, 如果存在一个具有连续一阶导数的标量 $V(x)$ ,  $V(0) = 0$ , 并且对状态空间  $X$  中的一切非零点  $x$  满足如下的条件:

- 1)  $V(x)$ 为正定;
- 2)  $\dot{V}(x)$ 为负半定;
- 3) 对任意  $x \in X$ ,  $\dot{V}(x(t; x_0, 0)) \neq 0$ ;
- 4) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时 $V(x) \rightarrow \infty$ 。

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

**[定理9-11]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 半负定, 则原点是稳定的; 此外, 若 $\dot{V}(x)$ 除原点外沿状态轨线不恒为零, 则原点是渐近稳定的; 再进一步, 若 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

**[定理9-11]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 半负定, 则原点是稳定的; 此外, 若 $\dot{V}(x)$ 除原点外沿状态轨线不恒为零, 则原点是渐近稳定的; 再进一步, 若 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

例 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

(1) 取  $V(x) = 2x_1^2 + x_2^2 > 0$

得  $\dot{V}(x) = 2x_1x_2 - 2x_2^2$  不定, 不能判定。

(2) 取  $V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

得  $\dot{V}(x) = -2x_2^2$  半负定, 故原点稳定。

若 $\dot{V}(x)=0$ , 则 $x_2 = \dot{x}_1=0$ , 代入原方程得 $x_1=0$ , 因而 $\dot{V}(x)=0$ 仅发生在原点处。而当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 所以原点全局渐近稳定。

(3) 取  $V(x) = 1.5x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = x^T \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} x > 0$

得  $\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$

且当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 所以原点全局渐近稳定。

◆ 此例说明, 选择不同的 $V$ 函数, 可能得到不同的结果, 但得到的结论是不矛盾的。找到“好”的 $V$ 函数, 需要经验和运气。

# 3. Lyapunov 第二法 (直接法)

---

## (2) Lyapunov第二法主要定理

**定理9-12 (不稳定判别定理)** 对于定常系统, 如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$  (其中 $V(0) = 0$ ), 和围绕原点的域  $\Omega$ , 使得对于一切 $x \in \Omega$ 和一切  $t \geq t_0$ 满足如下条件:

- 1)  $V(x)$ 为正定;
- 2)  $\dot{V}(x)$ 为正定。

则系统平衡状态为不稳定。

**[定理9-12]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 也正定, 则原点是不稳定的。

---

# 3. Lyapunov 第二法（直接法）

---

## (2) Lyapunov第二法主要定理

**[定理9-10]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 负定, 则原点是渐近稳定的; 进而, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

**[定理9-11]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 半负定, 则原点是稳定的; 此外, 若 $\dot{V}(x)$ 除原点外沿状态轨线不恒为零, 则原点是渐近稳定的; 再进一步, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$ 时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

**[定理9-12]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 也正定, 则原点是稳定的。

- ◆ 以上均为充分条件。某 $V(x)$ 不满足定理条件时, 不能下结论。
  - ◆ 若 $V(x)$ 代表广义能量, 则 $\dot{V}(x)$ 代表广义功率。 $\dot{V}(x) < 0$ , 说明沿状态轨线运动是消耗能量的。
-



# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov 意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov 第一法 (间接法)

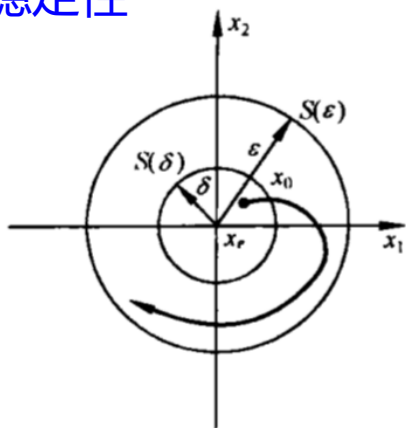
3. Lyapunov 第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析

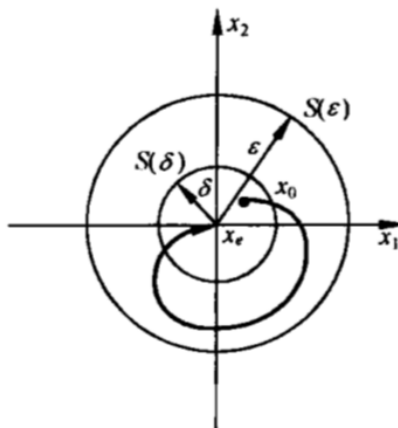
---

# 1. Lyapunov意义下的稳定性基本概念

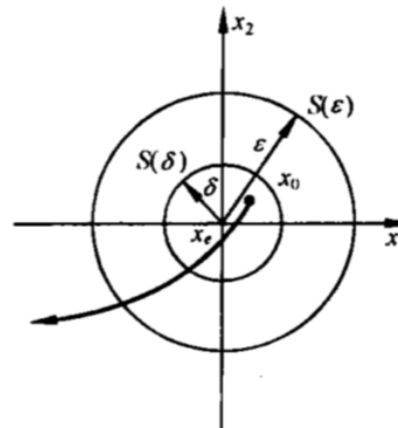
- ◆ 平衡状态  $\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$  (系统方程  $\dot{x} = f(x, t)$ )
- ◆ Lyapunov意义下的稳定性
- ◆ 渐近稳定性
- ◆ 不稳定性



(a) 李雅普诺夫意义下的稳定性



(b) 渐近稳定性



(c) 不稳定性

- ◆ 大范围 (全局) 渐近稳定性

当初始条件扩展至整个状态空间, 且平衡状态均具有渐近稳定性

- ◆ 对于线性系统, 如果它是渐近稳定的, 则必定是大范围渐近稳定的

# Lyapunov 稳定性判定定理

---

- 第一法：利用微分方程的解判断系统稳定性
- 第二法：利用Lyapunov函数判断系统稳定性

**定理9-9** 对于线性定常系统  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$ , 有：系统的唯一平衡状态  $x_e = 0$  是渐近稳定的充分必要条件是,  $A$  的所有特征值均具有负实部。

**[定理9-10]**  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  负定, 则原点是渐近稳定的; 进而, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

**[定理9-11]**  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  半负定, 则原点是稳定的; 此外, 若  $\dot{V}(x)$  除原点外沿状态轨线不恒为零, 则原点是渐近稳定的; 再进一步, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

**[定理9-12]**  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  也正定, 则原点是稳定的。

---

# 第4章 控制系统的稳定性及稳态误差

---

## 4.1 基于传递函数的稳定性分析

1. 连续系统稳定性定义及劳斯判据 (3.8~3.9)

2. 离散系统稳定性定义及劳斯判据 (6.7)

## 4.2 控制系统的稳态误差分析

1. 控制系统的稳态误差、动态误差系数 (3.10)

2. 离散线性系统的稳态误差、动态误差系数 (6.8.3)

## 4.3 基于根轨迹的稳定性分析

1. 根轨迹基本概念和基本规则 (4.1~4.3)

2. 根轨迹法分析控制系统性能 (4.4)

3. 特殊根轨迹 (4.6)

## 4.4 基于状态空间表达式的稳定性分析

1. Lyapunov 意义下的稳定性基本概念

2. Lyapunov 第一法 (间接法)

3. Lyapunov 第二法 (直接法)

4. 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析

---

# 4. 线性定常系统的Lyapunov稳定性分析

此处只讨论第二法（直接法）。

## (1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

状态方程  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$ ,  $A$  为非奇异矩阵, 故原点是唯一平衡状态。

设取正定二次型函数:  $V(x) = x^T P x$  作为可能的李雅普诺夫函数, 考虑到系统状态方程, 则有:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x$$

$$A^T P + P A = -Q, \dot{V}(x) = -x^T Q x$$

根据定理9-10（定常系统大范围渐近稳定判别定理1），只要 $Q$ 正定（即 $\dot{V}(x)$ 负定），则系统是大范围渐近稳定的。

**[定理9-10]**  $V(x)$ 正定,  $\dot{V}(x)$ 负定, 则原点是渐近稳定的; 进而, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

# (1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

---

线性定常连续系统渐近稳定的充要条件是：给定一正定矩阵 $P$ ，存在着满足

$$A^T P + P A = -Q$$

的正定矩阵 $Q$ ，而 $x^T P x$ 是该系统的一个李雅普诺夫函数，上述方程称为李雅普诺夫矩阵代数方程。

**说明：**按上述先给定 $P$ 、再验证 $Q$ 是否正定的步骤去分析系统稳定性时，若 $P$ 选取不当，往往会导致 $Q$ 非正定。需反复多次选取 $P$ 来检验 $Q$ 是否正定，很不方便。

**因此，最好是：**先选取 $Q$ 为正定实对称阵，再求解方程，若求得 $P$ 为正定实对称矩阵，则可判定系统是渐近稳定的。通常选取 $Q$ 为单位阵或对角阵。

---

# (1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

**定理9-13** 线性定常系统  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $t \geq 0$  的原点平衡状态  $x_e = 0$  为渐近稳定的充要条件是, 对于任意给定的一个正定对称矩  $Q$ , 有唯一的正定对称矩阵  $P$  满足式

$$A^T P + P A = -Q$$

**说明1:** 定理9-13给出了矩阵  $A$  的所有特征值均具有负实部的充要条件。

**说明2:** 定理中  $Q$  的唯一限制是其应为对称正定阵。当然, 满足这种限制的  $Q$  可能有无穷多个, 但判断的结果即系统是否为渐近稳定, 则和  $Q$  的不同选择无关。进而  $Q$  常选取单位阵  $I$ 。因此方程简化为:

$$A^T P + P A = -I$$

根据定理9-13 (定常系统大范围渐近稳定判别定理2) 可知, 若系统任意状态轨迹在非零状态不存在  $\dot{V}(x) = 0$  时,  $Q$  可选择为正半定的, 即允许  $Q$  取半正定对角阵时主对角线上部分元素为零, 而解得的  $P$  仍为正定。

# (1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

例9-25 已知线性定常连续系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

$$A^T P + P A = -I$$

试用李雅普诺夫方程判断系统的渐近稳定性。

解 为便于对比, 先用特征值判据判断。系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

特征值为-2, 1, 故系统不稳定。令

$$A^T P + P A = -Q = -I$$

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

由于  $P_{11} = -\frac{3}{4} < 0$ ,  $\det P = -\frac{1}{4} < 0$ , 故,  $P$  不定, 可知系统非渐近稳定。

由特征值判据知系统是不稳定的。



# (1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

---

【例】 判定下述线性定常系统的渐近稳定性。

$$A^T P + P A = -I$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

解：取  $Q = I$ ，令  $P = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ ，代入李雅普诺夫方程得：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得：

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

所以该系统是渐近稳定的。

---

# (1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

【9-32】试用李雅普诺夫第二法判断下列线性系统平衡状态的稳定性：

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$$

解：原点 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 是该系统唯一的平衡状态。

(1)  $x_e = 0$ 是系统唯一的平衡状态。选取正定标量函数

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_2) + \frac{1}{2}x_2(2x_1 - 3x_2) \\ &= -x_1^2 + 2x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 = -(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}x_2^2\end{aligned}$$

$V(x)$ 正定， $\dot{V}(x)$ 负定，原点平衡状态大范围渐近稳定。

**【定理9-10】**  $V(x)$ 正定， $\dot{V}(x)$ 负定，则原点是渐近稳定的；进而，若 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时， $V(x) \rightarrow \infty$ ，则原点是全局渐近稳定的。

**说明：**由于所讨论的系统为线性定常系统，当其为稳定时必是一致稳定，当其为渐近稳定时必是大范围一致渐近稳定。

$$A^T P + PA = -I$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$$

(2)  $Q$ 、 $P$  法判断平衡状态稳定性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \det A = 1$$

$A$  是非奇异阵, 所以  $x_e = 0$  是系统唯一的平衡状态。

$$V(x) = x^T P x, \quad \dot{V}(x) = -x^T Q x, \quad P > 0, \quad Q > 0$$

$$A^T P + PA = -Q = -I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得:

$$P_{12} = P_{21}, \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

判断  $P$  正定性:

$$P_{11} > 0, \quad \det P = \frac{17}{64} > 0$$

由于  $P$  正定, 系统原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

# (1) 线性定常连续系统渐近稳定性的判别

---

## 本部分小结

线性定常系统  $\dot{x} = Ax$

- ① 渐近稳定的充要条件: A的特征值全部在左半开平面内;
- ② 渐近稳定的充要条件: 对任意正定阵Q, 存在正定阵P满足李雅普诺夫方程:

$$A^T P + PA = -Q$$



## (2) 线性定常离散系统渐近稳定性的判别

线性定常离散系统状态方程：

$$x(k+1) = \Phi x(k), x(0) = x_0; k = 0, 1, 2 \dots$$

式中， $\Phi$ 是非奇异阵，原点是平衡状态。

取**正定二次型**函数： $V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$

以 $\Delta V(x(k))$ 取代 $\dot{V}(x)$ 有：

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) \\ &= [\Phi x(k)]^T P[\Phi x(k)] - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)(\Phi^T P \Phi - P)x(k)\end{aligned}$$

离散Lyapunov矩阵代数方程

令： $\Phi^T P \Phi - P = -Q$  则： $\Delta V(x(k)) = -x^T(k)Qx(k)$

**定理9-14** 线性定常离散系统渐近稳定的充分必要条件是，给定任一正定对称矩阵 $Q$ ，存在一个正定对称矩阵 $P$ ，满足  $\Phi^T P \Phi - P = -Q$

**说明：**  $x^T(k)Px(k)$ 是系统的一个**李雅普诺夫函数**。通常可取  $Q=I$ 。

$$\Phi^T P \Phi - P = -Q$$

【例】考虑如下离散系统：

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 1.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

试分析其稳定性。

解：假设  $Q = I$ ，求解离散李雅普诺夫方程：

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 1.2 & 0.8 \end{bmatrix} - P = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$P = \begin{bmatrix} 8.2566 & 1.6073 \\ 1.6073 & 2.2665 \end{bmatrix} > 0$$

所以该系统是渐近稳定的。

## (2) 线性定常离散系统渐近稳定性的判别

---

### 本部分小结

对于线性定常离散系统

$$x(k+1) = \Phi x(k)$$

- ◆ 系统渐近稳定的**充要条件**： $\Phi$ 的特征值的模均小于1
- ◆ 系统为渐近稳定的**充要条件**：对任意给定的正定矩阵  $Q$ ，存在正定矩阵  $P$  满足离散李雅普诺夫方程：

$$\Phi^T P \Phi - P = -Q$$

---

( × ) 7. 一个系统的平衡状态可能有多个，因此系统的李雅普诺夫稳定性与系统受扰前所处的平衡位置无关。

( × ) 4. 若一个系统是李雅普诺夫意义下稳定的，则该系统在任意平衡状态处都是稳定的；

( √ ) 8. 若一线性定常系统的平衡状态是渐近稳定的，则从系统的任意一个状态出发的状态轨迹随着时间的推移都将收敛到该平衡状态。

( √ ) 4. 对系统  $\dot{x} = Ax$ ，其Lyapunov意义下的渐近稳定性和矩阵  $A$  的特征值都具有负实部是一致的。

( × ) 10. 如果一个系统的李雅普诺夫函数确实不存在，那么我们就可以断定该系统是不稳定的。

---





哈爾濱工業大學(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

# 第5章 线性系统的频域分析方法

---

# 第5章 线性系统的频域分析方法

---

- 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法
  - 5.2 典型环节的频率特性
  - 5.3 控制系统的频率特性
  - 5.4 频率域稳定判据
-

# 第5章 线性系统的频域分析方法

---

- 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法
- 5.2 典型环节的频率特性
- 5.3 控制系统的频率特性
- 5.4 频率域稳定判据

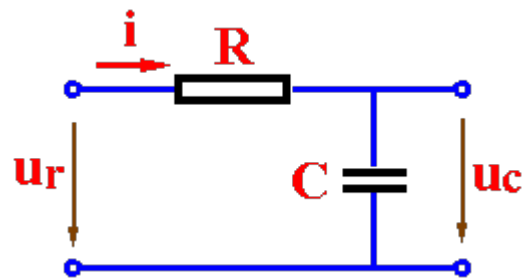
## 频域分析法特点

- (1) 研究稳态正弦响应的幅值和相角随频率的变化规律
  - (2) 由开环频率特性研究闭环稳定性及性能
  - (3) 图解分析法，方便，实用
  - (4) 有一定的近似性
-

# 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

## (1) 正弦信号作用下的稳态输出

例1 RC 电路如图所示,  $u_r(t)=A\sin\omega t$  求  $u_c(t)=?$



$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{CRs+1} \stackrel{T=CR}{=} \frac{1}{Ts+1} = \frac{1/T}{s+1/T}$$

$$U_c(s) = \frac{1/T}{s+1/T} \cdot \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{C_0}{s+1/T} + \frac{C_1s+C_2}{s^2+\omega^2}$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow -1/T} \frac{A\omega/T}{s^2+\omega^2} = \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

$$C_2 = \frac{A\omega}{1+\omega^2 T^2} \quad C_1 = \frac{-A\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

$$U_c(s) = \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2} \cdot \frac{1}{s+1/T} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{T\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} \right]$$

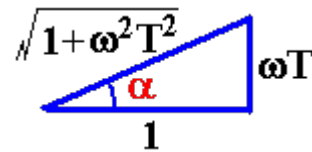
$$u_c(t) = \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} [\sin \omega t \cdot \cos \alpha - \cos \omega t \cdot \sin \alpha]$$

$$= \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

瞬态分量

稳态分量

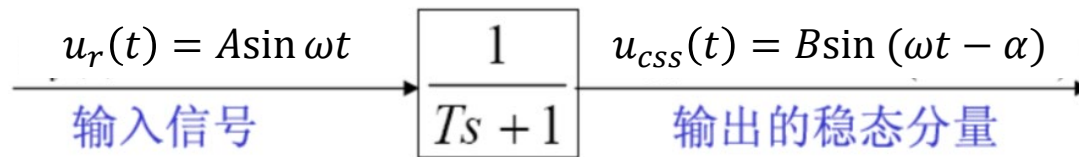
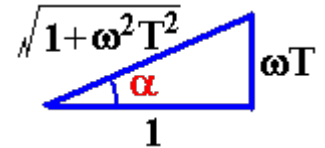
建模  $u_r = Ri + u_c$   
 $\downarrow \quad i = C\dot{u}_c$   
 $u_r = CR\dot{u}_c + u_c$   
 $U_r = [CRs + 1] U_c$



频率响应: 线性系统稳态正弦响应的幅值、相角随输入频率变化的规律性

# 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

设  $u_{css}(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T) = B \sin(\omega t - \alpha)$

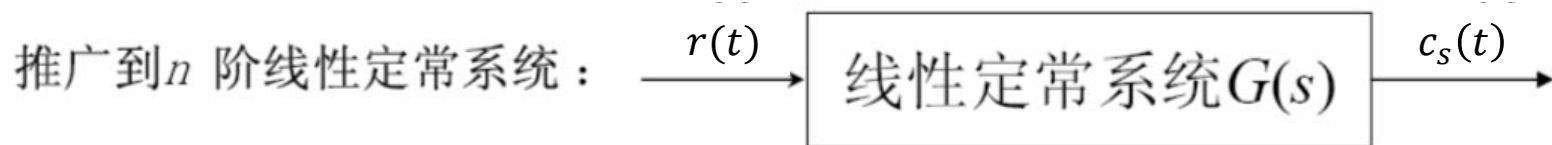


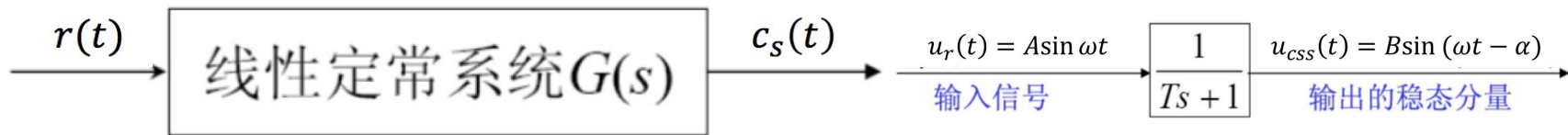
其中  $B = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ ,  $-\alpha = -\arctan \omega T$

对照比较可见：都是同频律的正弦信号；改变的是：振幅和相位。

与  $G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \xrightarrow{s = j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{1 + jT\omega}$

即：  $\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{B}{A} & \text{—— 振幅比} \\ \angle G(j\omega) = -\alpha & \text{—— 相位差} \end{cases} \quad \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \\ \angle G(j\omega) = -\arctg \omega T \end{cases}$





## 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义

$G(j\omega)$  定义一:  $G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$

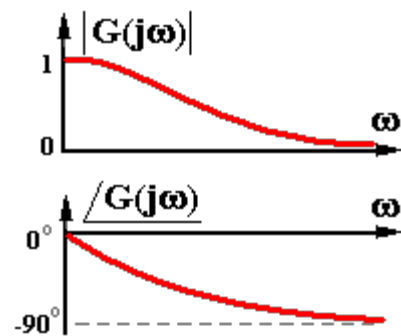
$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{|c_s(t)|}{|r(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G(j\omega) = \angle c_s(t) - \angle r(t) = -\arctan \omega T \end{cases}$$

幅值比

幅频特性

相频特性

相角差



$G(j\omega)$  定义二:  $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T = \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{Ts + 1} \Big|_{s=j\omega}$$

$G(j\omega)$  定义三:  $G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$

$$G(s) = C(s) / R(s)$$

$$C(s) = G(s)R(s)$$

$$C(j\omega) = G(j\omega) \cdot R(j\omega)$$

$$c(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s)R(s) \cdot e^{st} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(j\omega)R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

# 第5章 线性系统的频域分析方法

---

- 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法
- 5.2 典型环节的频率特性
- 5.3 控制系统的频率特性
- 5.4 频率域稳定判据

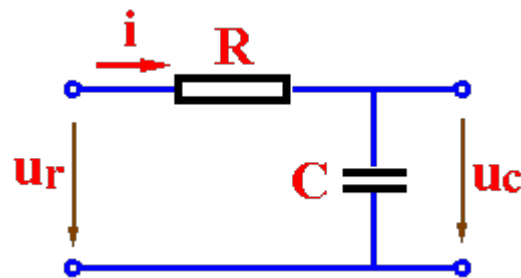
## 频域分析法特点

- (1) 研究稳态正弦响应的幅值和相角随频率的变化规律
  - (2) 由开环频率特性研究闭环稳定性及性能
  - (3) 图解分析法，方便，实用
  - (4) 有一定的近似性
-

# 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

## (1) 正弦信号作用下的稳态输出

例1 RC 电路如图所示,  $u_r(t)=A\sin\omega t$  求  $u_c(t)=?$



$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{CRs+1} \stackrel{T=CR}{=} \frac{1}{Ts+1} = \frac{1/T}{s+1/T}$$

$$U_c(s) = \frac{1/T}{s+1/T} \cdot \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{C_0}{s+1/T} + \frac{C_1s+C_2}{s^2+\omega^2}$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow -1/T} \frac{A\omega/T}{s^2+\omega^2} = \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

$$C_2 = \frac{A\omega}{1+\omega^2 T^2} \quad C_1 = \frac{-A\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

$$U_c(s) = \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2} \cdot \frac{1}{s+1/T} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{T\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} \right]$$

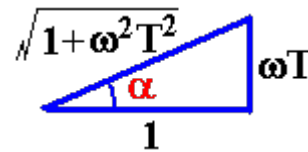
$$u_c(t) = \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} [\sin \omega t \cdot \cos \alpha - \cos \omega t \cdot \sin \alpha]$$

$$= \frac{A\omega T}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

瞬态分量

稳态分量

建模  $u_r = Ri + u_c$   
 $\downarrow i = C\dot{u}_c$   
 $u_r = CR\dot{u}_c + u_c$   
 $U_r = [CRs + 1] U_c$

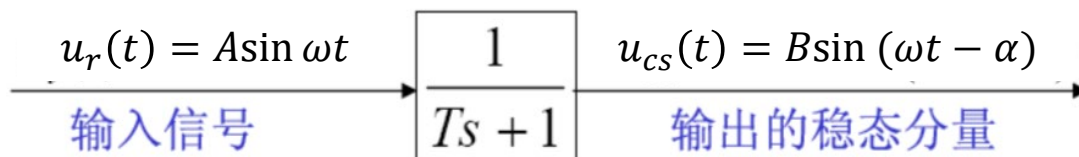
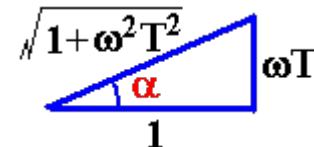


频率响应: 线性系统稳态正弦响应的幅值、相角随输入频率变化的规律性



# 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

设  $u_{cs}(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T) = B \sin(\omega t - \alpha)$

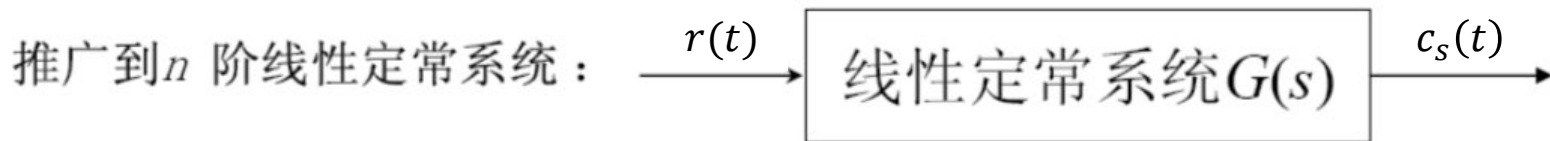


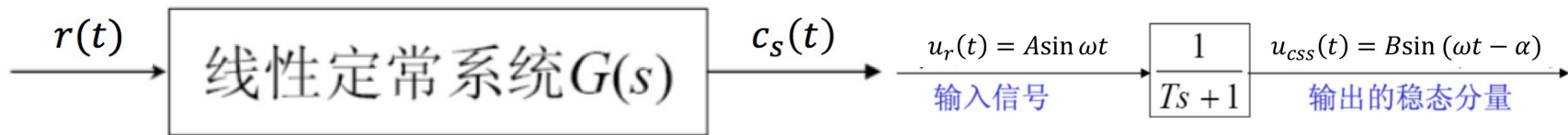
其中  $B = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ ,  $-\alpha = -\arctan \omega T$

对照比较可见：都是同频律的正弦信号；改变的是：振幅和相位。

与  $G(s) = \frac{1}{Ts+1} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{1+jT\omega}$

即：  $\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{B}{A} & \text{—— 振幅比} \\ \angle G(j\omega) = -\alpha & \text{—— 相位差} \end{cases} \quad \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \\ \angle G(j\omega) = -\arctg \omega T \end{cases}$





## 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义

$G(j\omega)$  定义一:  $G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$

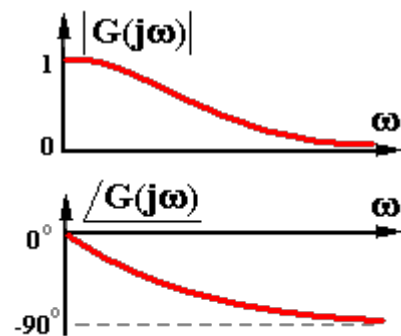
$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{|c_s(t)|}{|r(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G(j\omega) = \angle c_s(t) - \angle r(t) = -\arctan \omega T \end{cases}$$

幅值比

幅频特性

相频特性

相角差



$G(j\omega)$  定义二:  $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T = \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{Ts + 1} \Big|_{s=j\omega}$$

$G(j\omega)$  定义三:  $G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$

$$G(s) = C(s) / R(s)$$

$$C(s) = G(s)R(s)$$

$$C(j\omega) = G(j\omega) \cdot R(j\omega)$$

$$c(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s)R(s) \cdot e^{st} ds$$

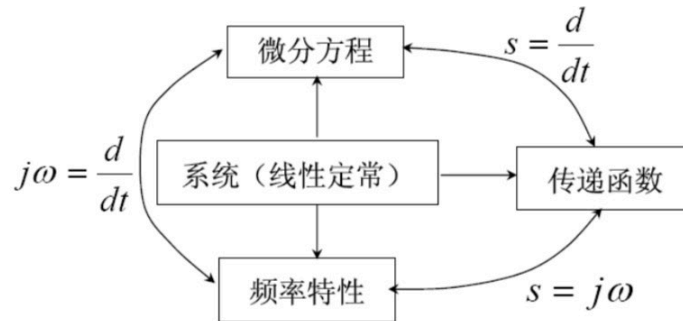
$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(j\omega)R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

# 应注意的几个问题

1、 $G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$

频率特性是一种数学模型,是令传递函数的 $s=j\omega$ 一种特殊形式;



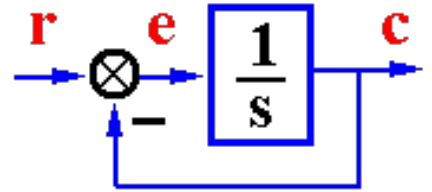
- 2、频率特性是从正弦的稳态响应求出的,但表示的是系统的动态特性。
- 3、频率特性是指  $\omega: 0 \rightarrow \infty$  时的频率响应,在某一  $\omega$  下的频率响应不能表示系统的动态特性。
- 4、从稳态响应测频率特性,给实验获取频率特性提供了方便,但不稳定系统频率特性是观察不到的。

$$|G(j\omega)| = \frac{\text{输出信号稳态分量的幅值}}{\text{输入信号的幅值}}$$

$$\angle G(j\omega) = (\text{输出信号稳态分量的相位} - \text{输入信号的相位})$$

# 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

例2 系统结构图如图所示,  $r(t)=3\sin(2t+30^\circ)$ , 求  $c_s(t)$ ,  $e_s(t)$ 。



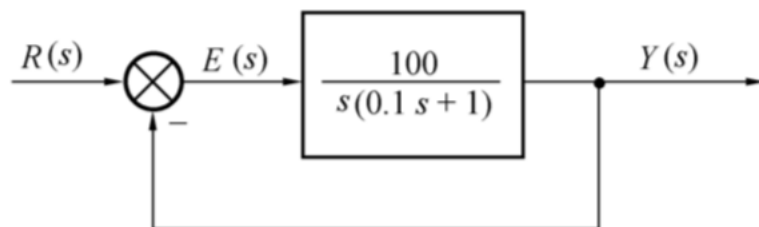
$$\text{解. } \Phi(s) = \frac{1}{s+1} \left\{ \begin{array}{l} |\Phi(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \stackrel{\omega=2}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|c_s(t)|}{3} \\ \angle\Phi(j\omega) = -\arctan \omega = -63.4^\circ = \angle c_s(t) - \angle r(t) = \angle c_s(t) - 30^\circ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |c_s(t)| = 3/\sqrt{5} \\ \angle c_s(t) = -63.4^\circ + 30^\circ = -33.4^\circ \end{array} \right. \quad c_s(t) = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin(2t - 33.4^\circ)$$

$$\Phi_e(s) = \frac{s}{s+1} \left\{ \begin{array}{l} |\Phi_e(j\omega)| = \left| \frac{j\omega}{1+j\omega} \right| = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \stackrel{\omega=2}{=} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{|e_s(t)|}{3} \\ \angle\Phi_e(j\omega) = 90^\circ - \arctan \omega = 90^\circ - 63.4^\circ = \angle e_s(t) - 30^\circ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_s(t)| = 6/\sqrt{5} \\ \angle e_s(t) = 26.6^\circ + 30^\circ = 56.6^\circ \end{array} \right. \quad e_s(t) = \frac{6}{\sqrt{5}} \sin(2t + 56.6^\circ)$$

**例 5.2.1** 设单位反馈系统的方框图如图 5.2.1 所示,若输入信号  $r(t) = \sin 5t$ ,试求系统的稳态误差。



**解** 对于单位反馈系统,偏差信号  $e(t)$  即是系统的误差, $e(t)$  的稳态分量即是系统的稳态误差。闭环系统的偏差传递函数是

图 5.2.1 单位反馈系统

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(0.1s + 1)}{0.1s^2 + s + 100}$$

**例** 某单位反馈系统开环传递函数为  $G(s)=1/Ts$ , 输入信号  $r(t)=1(t)$ ,  $t$ ,  $t^2/2$  以及  $r(t)=\sin \omega t$  ( $t>0$ ), 求系统稳态误差  $e_{ss}$

$$4) R(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad E(s) = \frac{Ts}{Ts+1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

不满足终值定理的应用条件, 不能求终值。

$$e(t) = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} (\cos \omega t + T\omega \sin \omega t)$$

$$e_{ss}(t) = \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} (\cos \omega t + T\omega \sin \omega t)$$

**例 5.2.1** 设单位反馈系统的方框图如图 5.2.1 所示,若输入信号  $r(t) = \sin 5t$ ,试求系统的稳态误差。

**解** 对于单位反馈系统,偏差信号  $e(t)$  即是系统的误差, $e(t)$  的稳态分量即是系统的稳态误差。闭环系统的偏差传递函数是

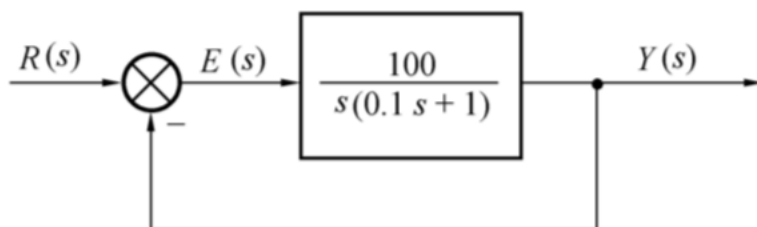


图 5.2.1 单位反馈系统

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(0.1s + 1)}{0.1s^2 + s + 100}$$

$$\Phi_e(j\omega) = \frac{-0.1\omega^2 + j\omega}{100 - 0.1\omega^2 + j\omega}$$

由频率特性概念,  $e_{ss}(t) = E \sin(\omega t + \varphi)$

考虑到:  $r(t) = \sin 5t \longrightarrow$  振幅为 1, 角频率为 5, 初相位为 0。

$$E = |\Phi_e(j5)| \cdot 1 = \left| \frac{-2.5 + j5}{(100 - 2.5) + j5} \right| = \frac{5.59}{97.63} = 0.057$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \angle \Phi_e(j5) + 0^\circ = \angle(-2.5 + j5) - \angle(97.5 + j5) \\ &= 180^\circ - \arctg \frac{5}{2.5} - \arctg \frac{5}{97.5} = 114^\circ \end{aligned}$$

于是:  $e_{ss}(t) = 0.057 \sin(5t + 114^\circ)$

# 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

## 频率特性的几何表示

——当  $\omega$  从  $0 \rightarrow \infty$  变化时,  $G(j\omega)$  如何变化?

频率特性有三种图示方法:

{	幅相频率特性曲线 (极坐标图)	——Nyquist图
	对数频率特性曲线	——Bode图
	对数幅相特性曲线	——Nichols图

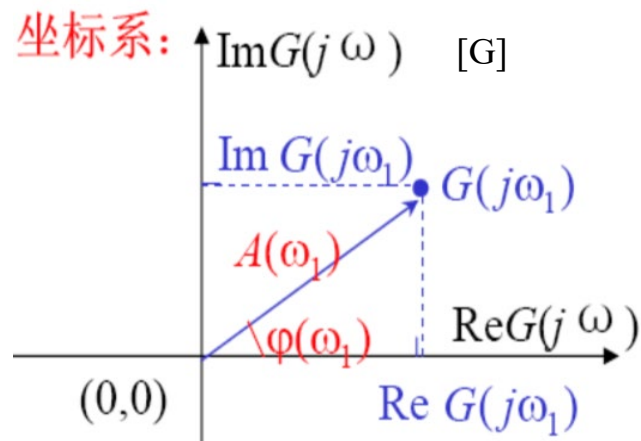
回忆复数的表示形式:

(1)代数式:  $A = a + jb$

(2)三角式:  $A = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$

(3)指数式:  $A = re^{j\varphi}$

(4)幅值幅角:  $A = r \angle \varphi$

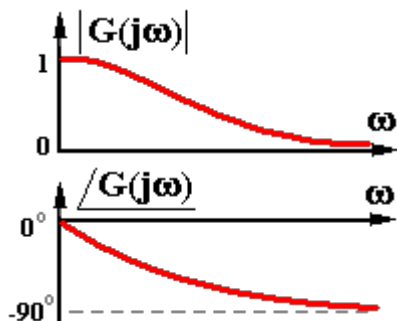


# 频率特性几何表示法

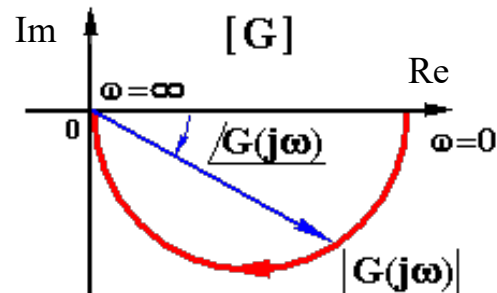
$$G(j\omega) = \frac{1}{Ts + 1} \Big|_{s=j\omega}$$

## 频率特性 (定义)

幅频  $|G(j\omega)|$   
相频  $\angle G(j\omega)$



## α. 幅相特性(Nyquist)

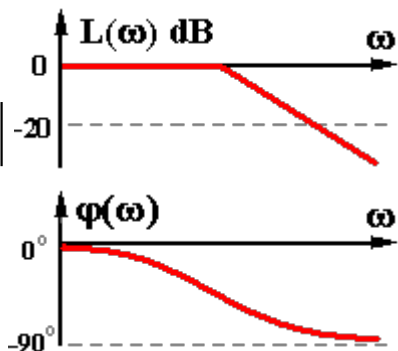


Nyquist 形式的频率特性特点:

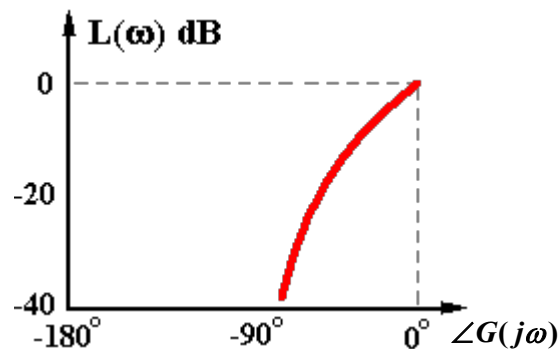
$KG(j\omega)$  的频率特性是原  $G(j\omega)$  曲线上各点的幅值都增大为  $K$  倍, 相角不变。

## β. 对数频率特性(Bode)

对数幅频  
 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$   
对数相频  
 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$



## χ. 对数幅相特性(Nichols)



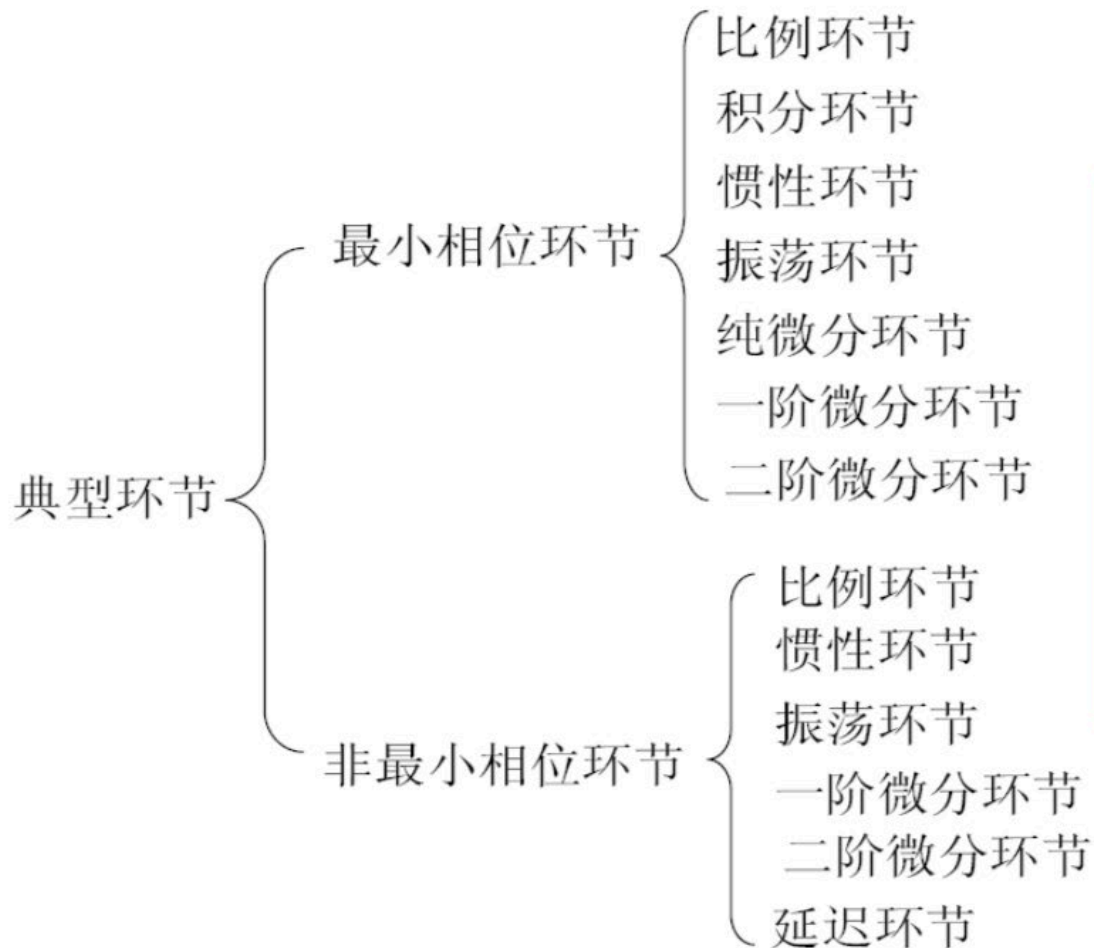
$$20 \lg |KG(j\omega)| = 20 \lg |G(j\omega)| + 20 \lg K$$

$$20 \lg [|G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|] = 20 \lg |G_1(j\omega)| + 20 \lg |G_2(j\omega)|$$



## 5.2 典型环节的频率特性

系统的开环传递函数通常可分解为若干个典型环节的乘积。  
为了更好的研究开环系统的频率特性，先来看典型环节的频率特性。



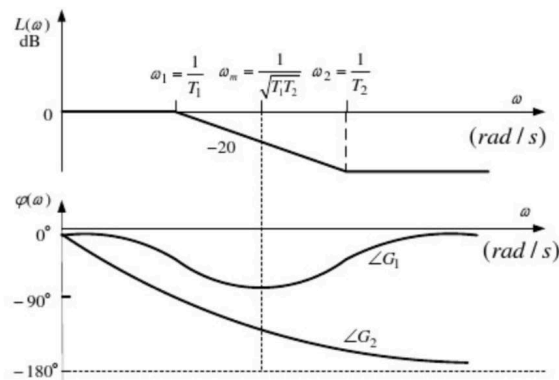
除了比例环节以外，非最小相位环节与最小相位环节的区别在于开环零、极点的位置，非最小相位环节对应于 $s$ 开右半平面的开环零点或极点，而最小相位环节对应 $S$ 左半平面的零点或极点。

# 最小相位和非最小相位环节

- 定义：在幅频特性相同的系统中，相频变化最小的那个系统称为最小相位系统。
- 结论：一个最小相位系统没有右半复平面的零极点，也没有延迟环节。
- 应用：最小相位系统的传递函数可以由幅频唯一确定。
- 一个事实：两个不同的传递函数可以有相同的幅频特性。例如

$$G_1(s) = \frac{1+T_2s}{1+T_1s} \quad G_2(s) = \frac{1-T_2s}{1+T_1s}$$

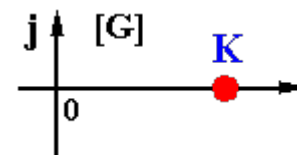
- 但是它们的相频变化的范围不同



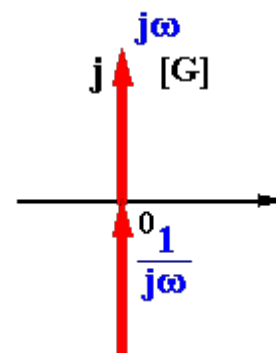
## 5.2 典型环节的频率特性

### 1. 典型环节的幅相频率特性 (Nyquist图)

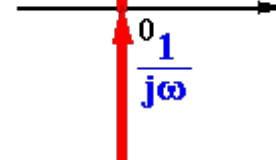
(1) 比例环节  $G(s) = K$   $G(j\omega) = K$   $\begin{cases} |G| = K \\ \angle G = 0^\circ \end{cases}$



(2) 微分环节  $G(s) = s$   $G(j\omega) = j\omega$   $\begin{cases} |G| = \omega \\ \angle G = 90^\circ \end{cases}$

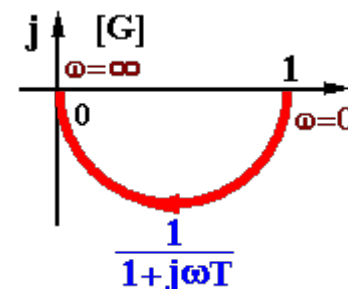


(3) 积分环节  $G(s) = \frac{1}{s}$   $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$   $\begin{cases} |G| = 1/\omega \\ \angle G = -90^\circ \end{cases}$



(4) 惯性环节  $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$   $\begin{cases} |G| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G = -\arctan \omega T \end{cases}$



## 5.2 典型环节的频率特性

### 惯性环节幅相曲线绘制 (Nyquist图绘制)

$$G(s) = \frac{1}{0.5s + 1} = \frac{2}{s + 2}$$

$$G(j\omega) = \frac{2}{2 + j\omega}$$

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ = 1 + j0$$

$$G(j0.6) = 0.959 \angle -16.4^\circ \\ = 0.92 - j0.27$$

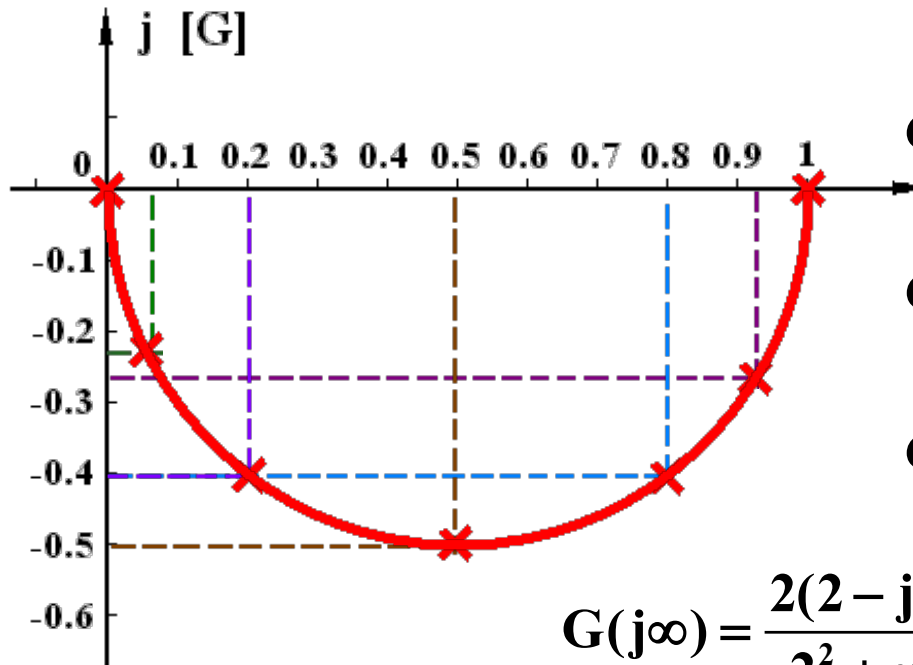
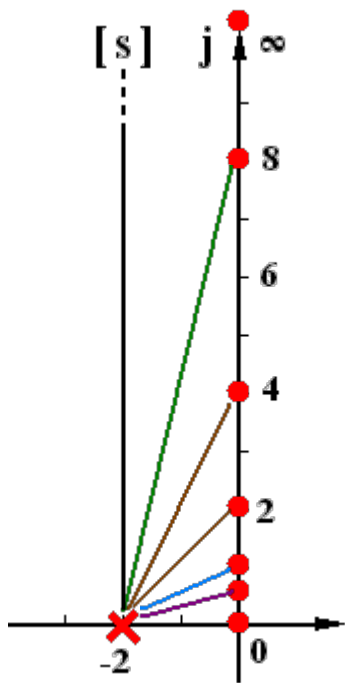
$$G(j1) = 0.804 \angle -26.6^\circ \\ = 0.8 - j0.4$$

$$G(j2) = 0.707 \angle -45^\circ \\ = 0.5 - j0.5$$

$$G(j4) = 0.447 \angle -63.4^\circ \\ = 0.2 - j0.4$$

$$G(j8) = 0.237 \angle -76^\circ \\ = 0.06 - j0.24$$

$$G(j\infty) = \frac{2(2 - j\infty)}{2^2 + \infty^2} = 0 \angle -90^\circ = 0 + j0$$



## 5.2 典型环节的频率特性

### 惯性环节幅相曲线绘制 (Nyquist图绘制)

证明：惯性环节  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$  的幅相特性为半圆

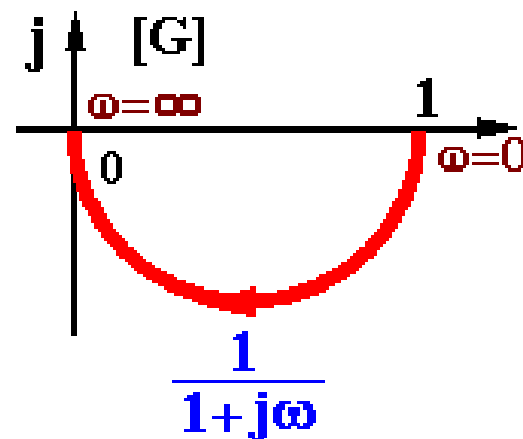
$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2} = X + jY$$

$$X = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} = \frac{1}{1+(Y/X)^2}$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2} = -\omega T X \quad \Rightarrow \quad \omega T = -\frac{Y}{X}$$

$$X^2 \left[ 1 + \frac{Y^2}{X^2} \right] = X \quad \Rightarrow \quad X^2 - X + Y^2 = 0$$

$$\left( X - \frac{1}{2} \right)^2 + Y^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \quad \xrightarrow{Y = -\omega T X} \quad (\text{下半圆})$$



Nyquist形式的频率特性特点:

$KG(j\omega)$  的频率特性是原  $G(j\omega)$  曲线上各点的幅值都增大为  $K$  倍, 相角不变。

## $G(j\omega) \Leftrightarrow$ 幅相特性

例3 系统的幅相曲线如图所示, 求系统的传递函数。

由曲线形状有  $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$

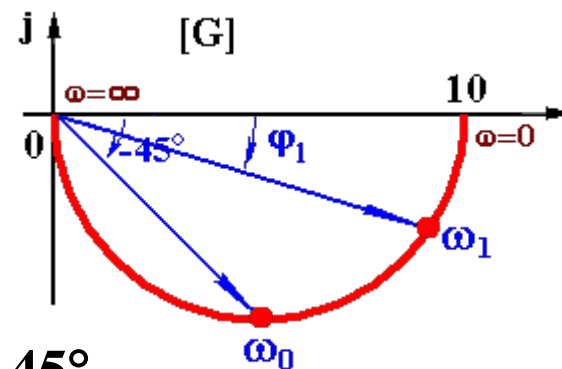
由起点:  $G(j0) = \frac{K}{1 + j0T} = K = 10 \angle 0^\circ$   **$K = 10$**

由  $\varphi_0$ :  $\angle G(j\omega_0) = \angle \frac{K}{1 + j\omega_0 T} = -\arctan \omega_0 T = -45^\circ$

$$\omega_0 T = \tan 45^\circ = 1 \quad \mathbf{T = 1/\omega_0}$$

由  $\varphi_1$ :  $\angle G(j\omega_1) = \angle \frac{K}{1 + j\omega_1 T} = -\arctan \omega_1 T = -\varphi_1$

$$\omega_1 T = \tan \varphi_1 \quad \mathbf{T = \tan \varphi_1 / \omega_1}$$



## 5.2 典型环节的频率特性

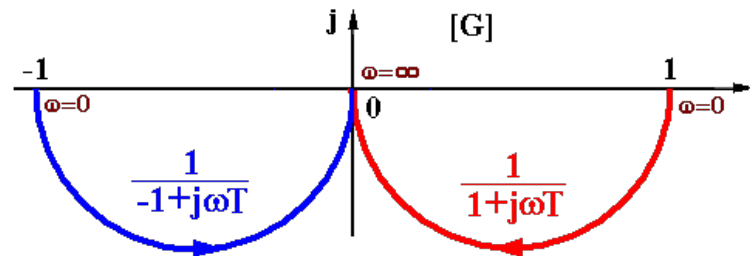
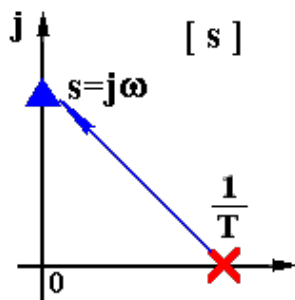
不稳定惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts - 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-1 + j\omega T}$$

$$\left\{ \begin{aligned} |G| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \angle G &= -\arctan \frac{\omega T}{-1} = -(180^\circ - \arctan \omega T) = -180^\circ + \arctan \omega T \end{aligned} \right.$$



$$G(s) = \frac{1}{-Ts + 1} \quad (?)$$

(4) 惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

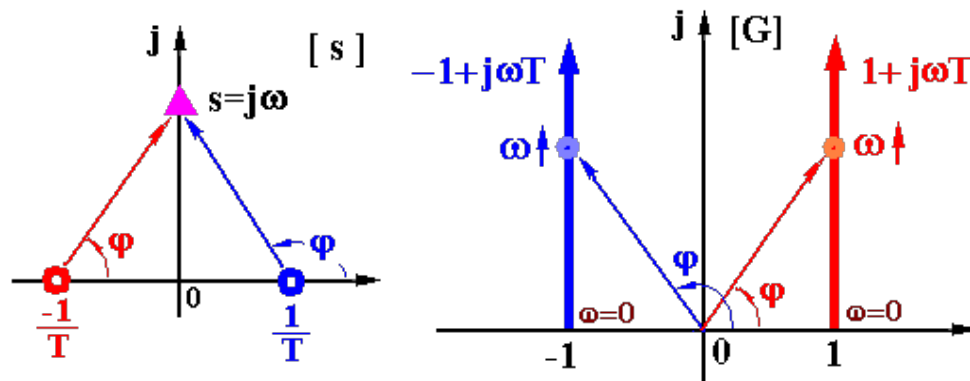
$$\left\{ \begin{aligned} |G| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G &= -\arctan \omega T \end{aligned} \right.$$

## 5.2 典型环节的频率特性

(5) 一阶微分  $G(s) = Ts \pm 1$

$$G(j\omega) = \pm 1 + j\omega T$$

$$\begin{cases} |G| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \angle G = \begin{cases} \arctan \omega T \\ 180^\circ - \arctan \omega T \end{cases} \end{cases}$$



$$G(s) = -Ts + 1 \quad \text{?}$$



$$\text{转折点: } \begin{cases} \omega = \omega_n \\ |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi} \\ \angle G(j\omega_n) = -90^\circ \end{cases}$$

### (6) 振荡环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1} = \frac{\omega_n^2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

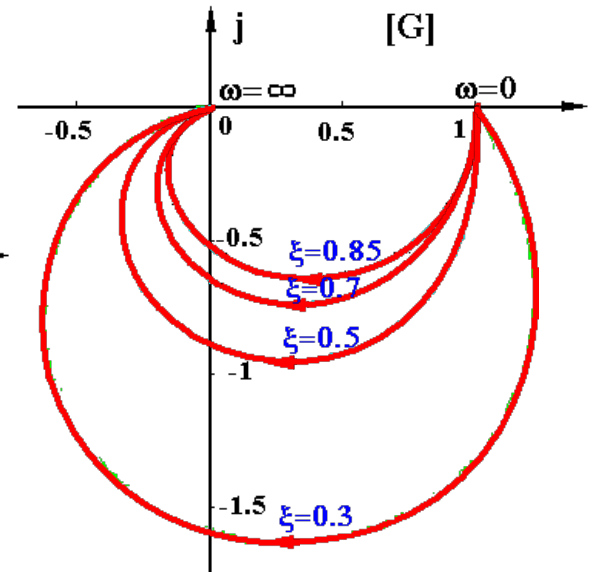
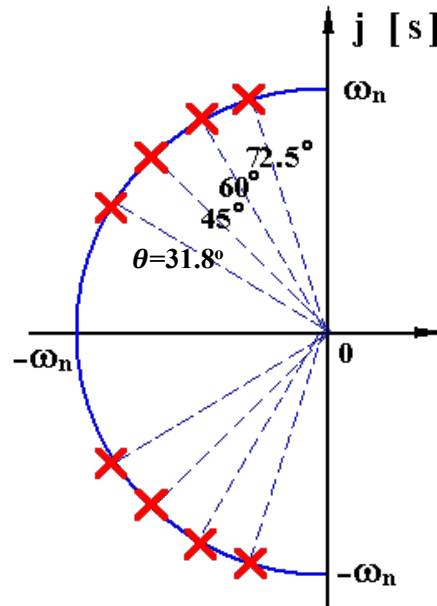
$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

$$\angle G = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$= \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} & \text{当 } \omega < \omega_n \text{ 时} \\ -90^\circ & \text{当 } \omega = \omega_n \text{ 时} \\ -180^\circ + \arctg \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega^2 - \omega_n^2} & \text{当 } \omega > \omega_n \text{ 时} \end{cases}$$



当 $\omega$ 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 相角变化范围是 $0^\circ \rightarrow -180^\circ$   
Nyquist图分布在第四象限和第三象限。

## 谐振频率 $\omega_r$ 和谐振峰值 $M_r$

频率特性的幅值出现峰值，即出现谐振现象。

$$|G| = 1 / \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

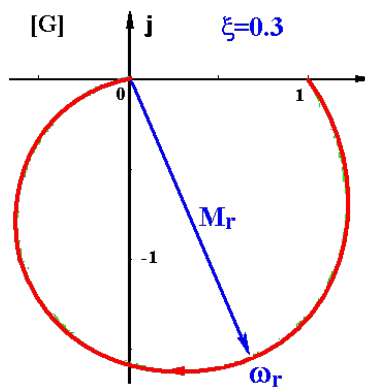
$$\frac{d}{d\omega}|G| = 0 \quad \frac{d}{d\omega} \left\{ \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2 \right\} = 0$$

$$2 \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right] \left[-2 \left(\frac{\omega}{\omega_n^2}\right)\right] + 2 \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right] \left(\frac{2\xi}{\omega_n}\right) = 0$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\xi^2$$

谐振点:

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases}$$



显然  $\omega_r < \omega_n$  时，只有当  $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  时才会出现谐振峰

转折点:

$$\begin{cases} \omega = \omega_n \\ |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi} \\ \angle G(j\omega_n) = -90^\circ \end{cases}$$

例4: 当  $\xi = 0.3, \omega_n = 1$  , 时

$$\begin{cases} \omega_r = 1 \times \sqrt{1 - 2 \times 0.3^2} = 0.9055 \\ M_r = \frac{1}{2 \times 0.3 \sqrt{1 - 0.3^2}} = 1.832 \end{cases}$$

# 第5章 线性系统的频域分析方法

---

5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

5.2 典型环节的频率特性

5.3 控制系统的频率特性

5.3.1 幅相频率特性 (Nyquist 图)

5.3.2 对数幅频特性 (Bode 图)

5.4 频率域稳定判据

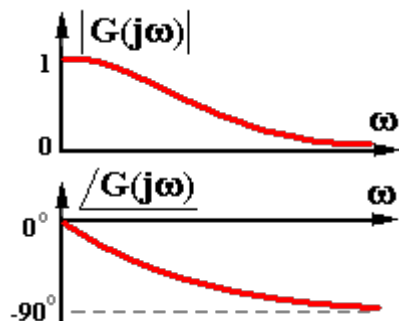
---

# 频率特性几何表示法

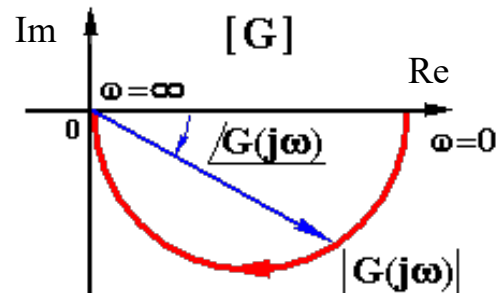
$$G(j\omega) = \frac{1}{Ts + 1} \Big|_{s=j\omega}$$

## □. 频率特性 (定义)

幅频  $|G(j\omega)|$   
相频  $\angle G(j\omega)$



## □. 幅相特性(Nyquist)

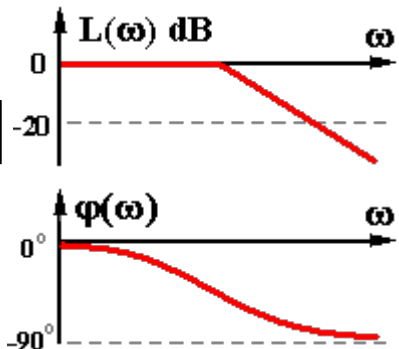


Nyquist 形式的频率特性特点:

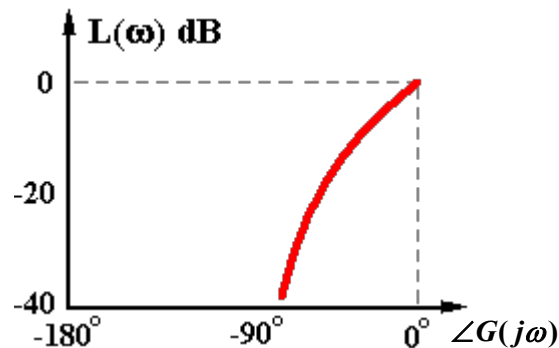
$KG(j\omega)$  的频率特性是原  $G(j\omega)$  曲线上各点的幅值都增大为  $K$  倍, 相角不变。

## β. 对数频率特性(Bode)

对数幅频  
 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$   
对数相频  
 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$



## □. 对数幅相特性(Nichols)



$$20 \lg |KG(j\omega)| = 20 \lg |G(j\omega)| + 20 \lg K$$

$$20 \lg [|G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|] = 20 \lg |G_1(j\omega)| + 20 \lg |G_2(j\omega)|$$

## 典型环节的幅相频率特性

(1)  $G(j\omega) = K$

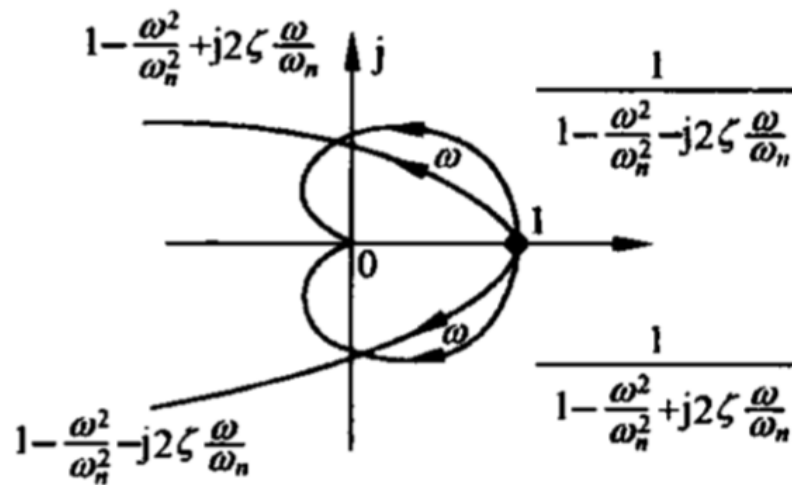
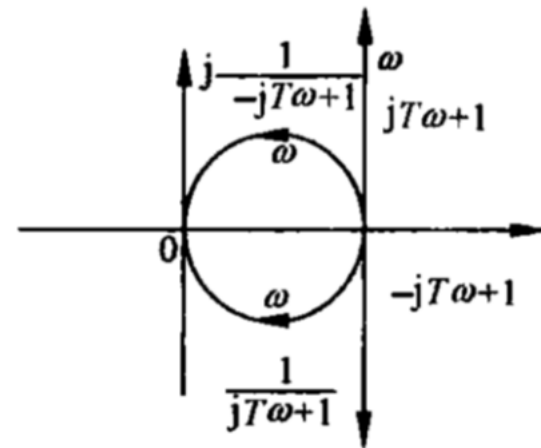
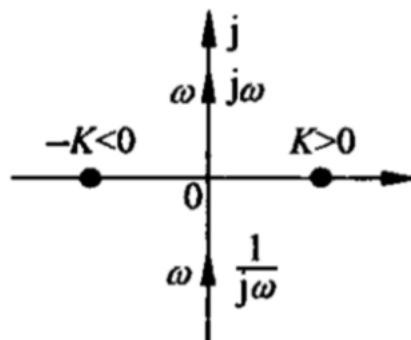
(2)  $G(j\omega) = j\omega$

(3)  $G(j\omega) = 1/j\omega$

(4)  $G(j\omega) = 1/(+1 \pm j\omega T)$

(5)  $G(j\omega) = +1 \pm j\omega T$

(6)  $G(j\omega) = 1 / \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$



$$\text{转折点: } \begin{cases} \omega = \omega_n \\ |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi} \\ \angle G(j\omega_n) = -90^\circ \end{cases}$$

### (6) 振荡环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1} = \frac{\omega_n^2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

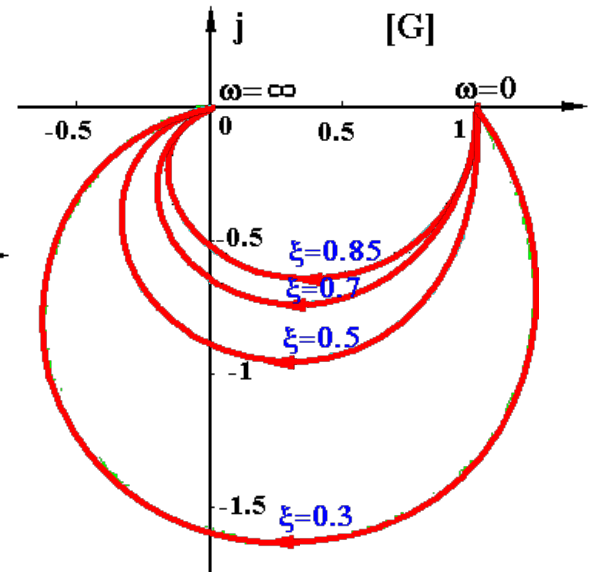
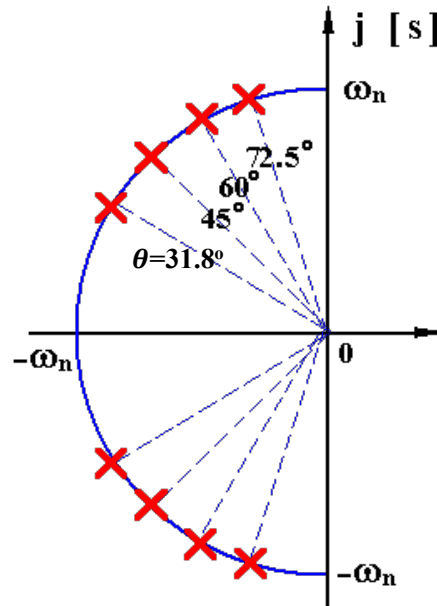
$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

$$\angle G = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$= \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} & \text{当 } \omega < \omega_n \text{ 时} \\ -90^\circ & \text{当 } \omega = \omega_n \text{ 时} \\ -180^\circ + \arctg \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega^2 - \omega_n^2} & \text{当 } \omega > \omega_n \text{ 时} \end{cases}$$



当 $\omega$ 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 相角变化范围是 $0^\circ \rightarrow -180^\circ$   
Nyquist图分布在第四象限和第三象限。

## 谐振频率 $\omega_r$ 和谐振峰值 $M_r$

频率特性的幅值出现峰值，即出现谐振现象。

$$|G| = 1 / \sqrt{[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi \frac{\omega}{\omega_n}]^2}$$

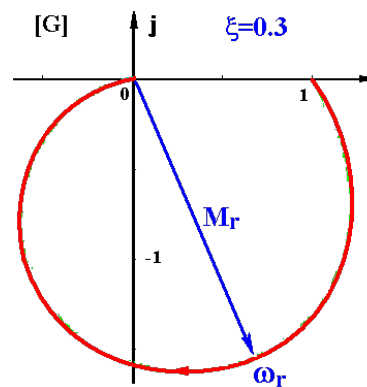
$$\frac{d}{d\omega}|G| = 0 \quad \frac{d}{d\omega} \left\{ [1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi \frac{\omega}{\omega_n}]^2 \right\} = 0$$

$$2[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}][-\frac{2\omega}{\omega_n^2}] + 2[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}](\frac{2\xi}{\omega_n}) = 0$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\xi^2$$

谐振点:

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases}$$



显然  $\omega_r < \omega_n$  时，只有当  $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  时才会出现谐振峰

转折点:

$$\begin{cases} \omega = \omega_n \\ |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi} \\ \angle G(j\omega_n) = -90^\circ \end{cases}$$

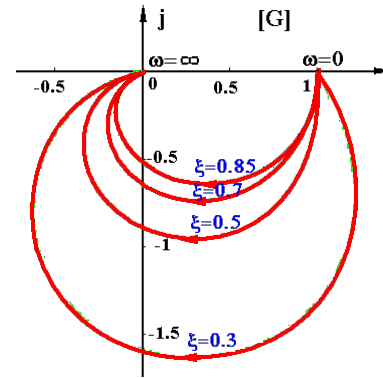
例4: 当  $\xi = 0.3, \omega_n = 1$  , 时

$$\begin{cases} \omega_r = 1 \times \sqrt{1 - 2 \times 0.3^2} = 0.9055 \\ M_r = \frac{1}{2 \times 0.3 \sqrt{1 - 0.3^2}} = 1.832 \end{cases}$$

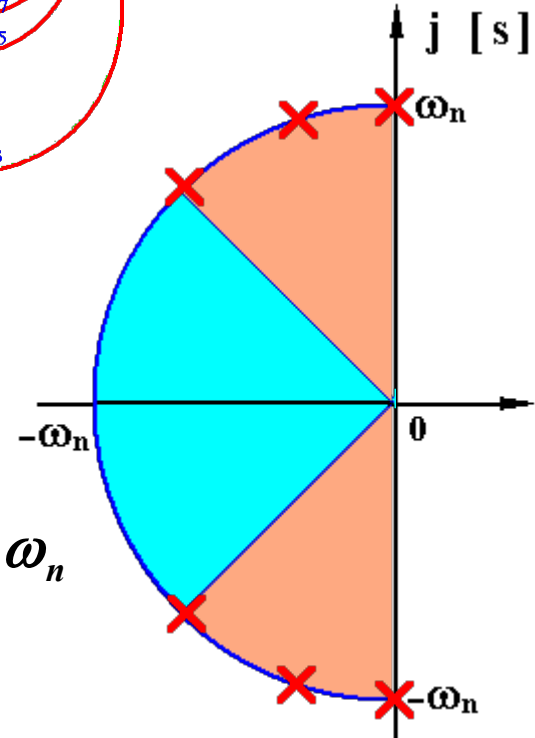
## 5.2 典型环节的频率特性

谐振频率  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

谐振峰值  $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$



{	$\xi > 0.707$ ( $\theta < 45^\circ$ )	$1 - 2\xi^2 < 0$	$\omega_r, M_r$ 不存在
	$\xi = 0.707$ ( $\theta = 45^\circ$ )	$1 - 2\xi^2 = 0$	$\begin{cases} \omega_r = 0 \\ M_r = 1 \end{cases}$
	$0 < \xi < 0.707$ ( $45^\circ < \theta < 90^\circ$ )	$1 - 2\xi^2 > 0$	$\begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n \\ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} > 1 \end{cases}$
	$\xi = 0$ ( $\theta = 90^\circ$ )	$1 - 2\xi^2 = 1$	$\begin{cases} \omega_r = \omega_n \\ M_r = \infty \end{cases}$





$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$\text{转折点: } \begin{cases} \omega = \omega_n \\ |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi} \\ \angle G(j\omega_n) = -90^\circ \end{cases}$$

## $G(j\omega) \Leftrightarrow$ 幅相特性

例5 系统的幅相曲线如图所示，求传递函数。

由曲线形状有  $G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$

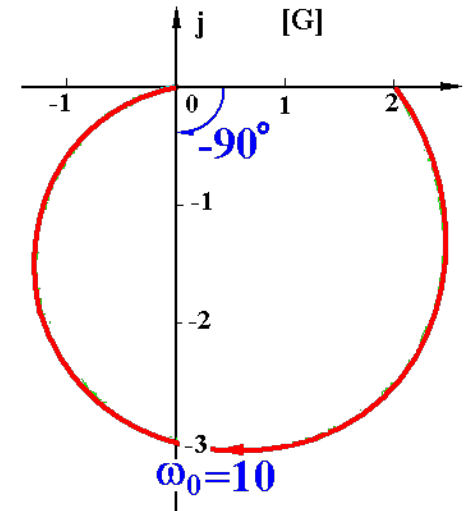
$$\left\{ \begin{aligned} |G| &= \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \\ \angle G &= -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{aligned} \right.$$

由起点:  $G(j0) = K \angle 0^\circ$   $K = 2$

由 $\varphi(\omega_0)$ :  $\angle G(j\omega_0) = -90^\circ$   $\omega_0 = \omega_n = 10$

由 $|G(\omega_0)|$ :  $|G(\omega_0)| = 3 = \frac{\omega_0 = \omega_n}{2\xi} \frac{K}{\omega_n} = \frac{2}{2\xi}$   $\xi = \frac{1}{3}$

$$G(s) = \frac{2 \times 10^2}{s^2 + 2 \times \frac{1}{3} \times 10s + 10^2} = \frac{200}{s^2 + 6.67s + 100}$$



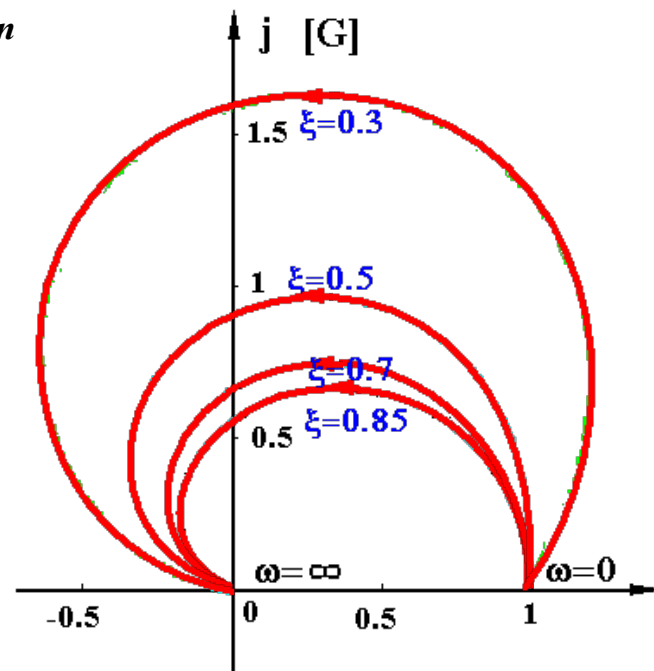
# 不稳定振荡环节（非最小相位）

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \underline{2\xi}\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \underline{2\xi}\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \underline{j2\xi}\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |G| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \\ \angle G = -\arctan \frac{-2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{array} \right.$$



震荡环节

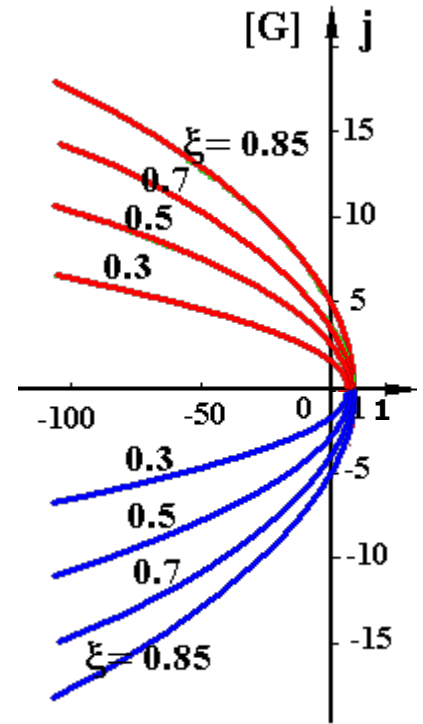
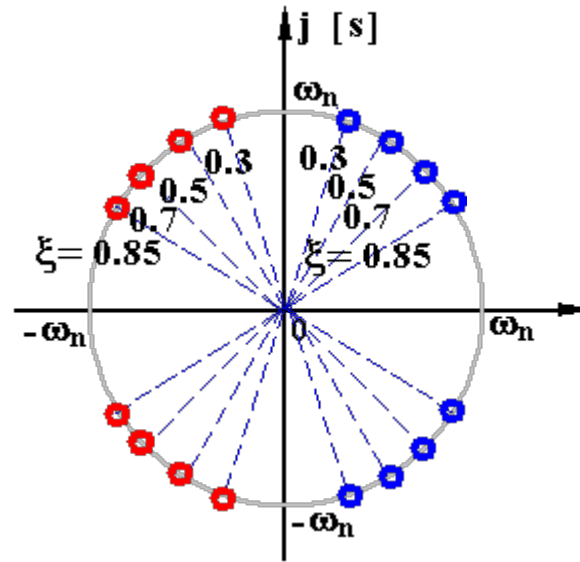
$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

(7) 二阶微分

$$G(s) = T^2 s^2 \pm 2\xi Ts + 1 = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 \pm 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1$$

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$$

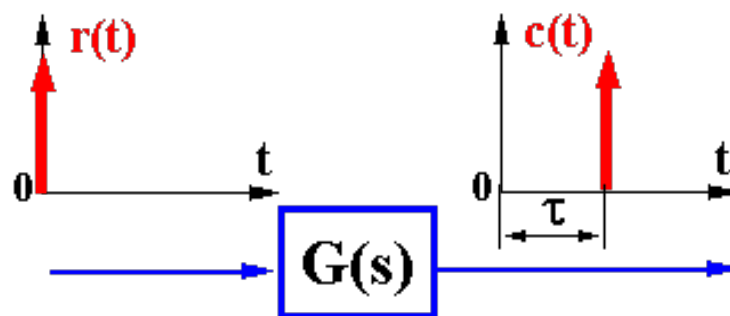
$$\left\{ \begin{aligned} |G| &= \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \\ \angle G^+ &= \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \angle G^- &= \arctan \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{aligned} \right.$$



## (8) 延迟环节

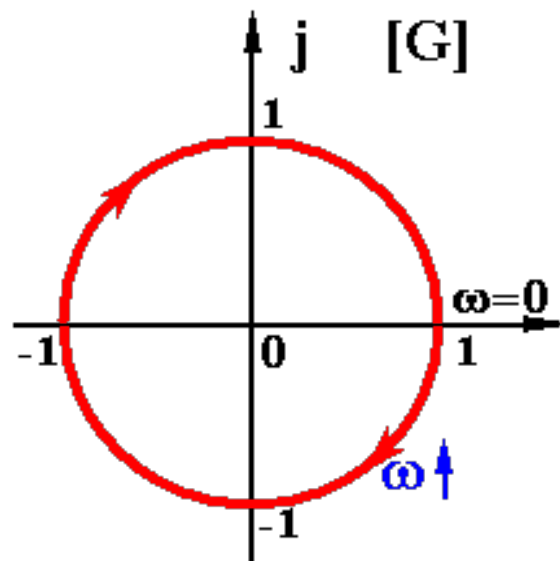
$$G(s) = e^{-\tau s}$$

$$\begin{cases} r(t) = \delta(t) \\ c(t) = k(t) = \delta(t - \tau) \end{cases}$$



$$\begin{cases} R(s) = 1 \\ C(s) = e^{-\tau s} \end{cases} \quad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad \begin{cases} |G| = 1 \\ \angle G = -\tau\omega \end{cases}$$



## 典型环节的幅相频率特性

(1)  $G(j\omega) = K$

(2)  $G(j\omega) = j\omega$

(3)  $G(j\omega) = 1/j\omega$

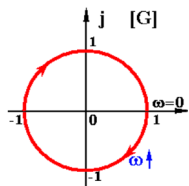
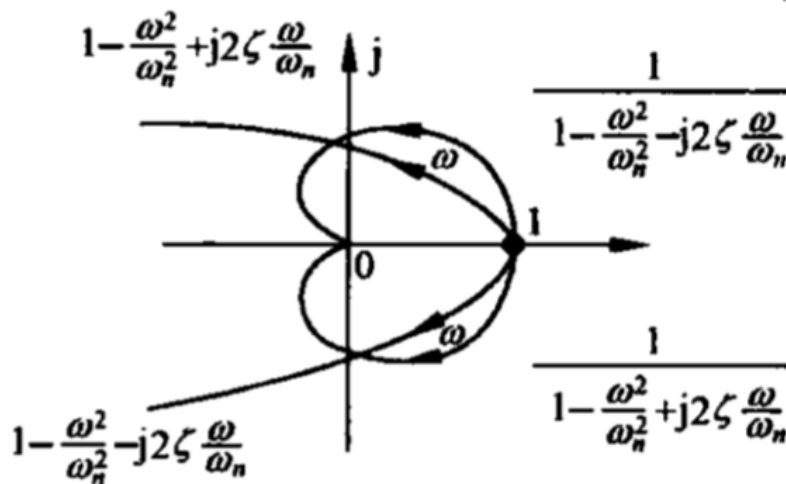
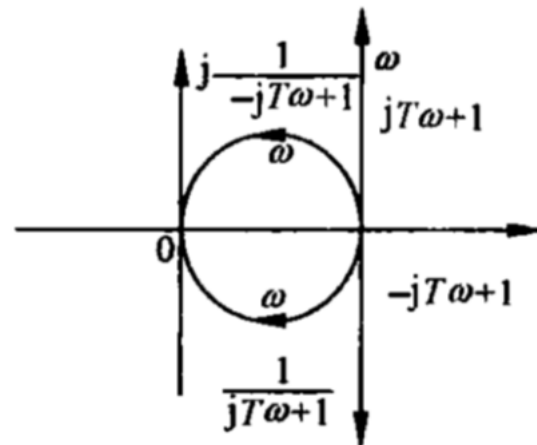
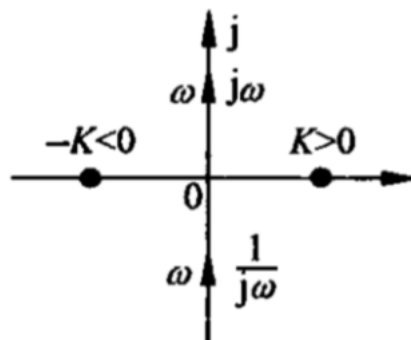
(4)  $G(j\omega) = 1/(+1 \pm j\omega T)$

(5)  $G(j\omega) = +1 \pm j\omega T$

(6)  $G(j\omega) = 1 / \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$

(7)  $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$

(8)  $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$



# 系统的幅相频率特性

## 开环幅相特性曲线的绘制

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l T_l s + 1)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} |j\tau_i \omega + 1| \prod_{k=1}^{m_2} |1 - \tau_k^2 \omega^2 + j2\omega \xi_k \tau_k|}{\omega^v \prod_{j=1}^{n_1} |jT_j \omega + 1| \prod_{l=1}^{n_2} |1 - T_l^2 \omega^2 + j2\omega \xi_l T_l|} \\ \angle G(j\omega) &= \sum_{i=1}^{m_1} \angle(j\tau_i \omega + 1) + \sum_{k=1}^{m_2} \angle(1 - \tau_k^2 \omega^2 + j2\omega \xi_k \tau_k) - v \times 90^\circ \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n_1} \angle(jT_j \omega + 1) - \sum_{l=1}^{n_2} \angle(1 - T_l^2 \omega^2 + j2\omega \xi_l T_l) \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \arctan \tau_i \omega + \sum_{k=1}^{m_2} \arctan \frac{2\omega \xi_k \tau_k}{1 - \tau_k^2 \omega^2} - v \times 90^\circ \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n_1} \arctan T_j \omega - \sum_{l=1}^{n_2} \arctan \frac{2\omega \xi_l T_l}{1 - T_l^2 \omega^2} \end{aligned} \right.$$

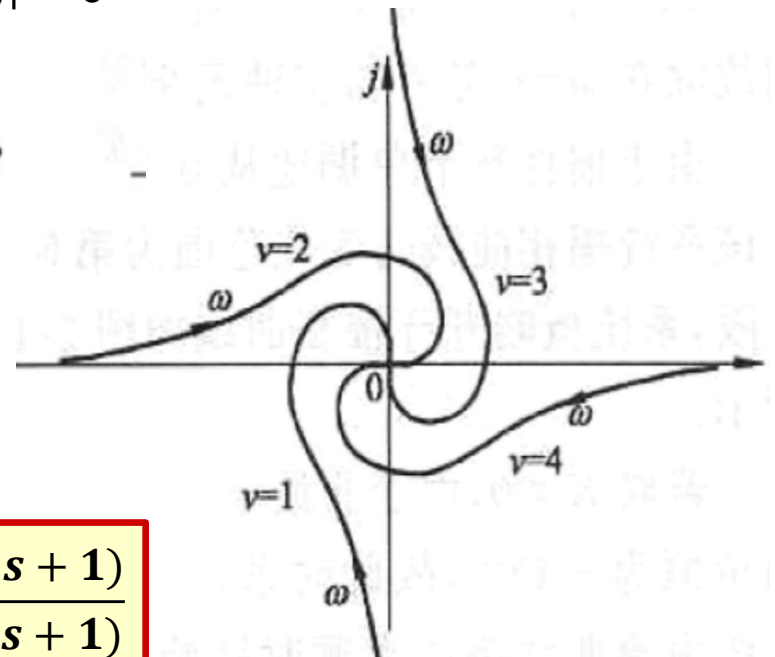
# 开环 Nyquist 图绘制

概略绘制：关注起点、终点、象限、与负实轴的交点

**起点：** 即  $\omega \rightarrow 0$  处， 对于最小相位系统来说，  $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ \times v$   
(其中  $v$  为积分环节个数)

**终点：** 即  $\omega \rightarrow \infty$  处， 若  $n > m$ ， 则  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$   
即：终点在坐标原点。

**与负实轴的交点：** 在-1的左边还是右边？  
令  $G(j\omega)$  的虚部为零， 求实部

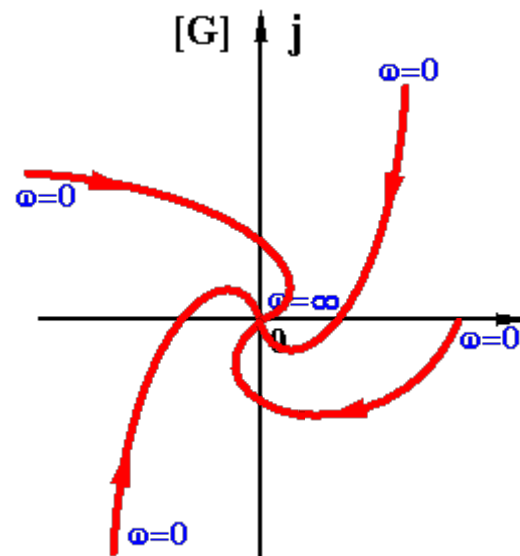


$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l T_l s + 1)}$$

$$\text{例6 } G(s) = \frac{K}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K/(T_1 T_2)}{s^v (s + 1/T_1)(s + 1/T_2)}$$

$v$	$G(j\omega)$	$G(j0)$	$G(j\infty)$
0	$\frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$	$K \angle 0^\circ$	$0 \angle -180^\circ$
I	$\frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$	$\infty \angle -90^\circ$	$0 \angle -270^\circ$
II	$\frac{K}{(j\omega)^2(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$	$\infty \angle -180^\circ$	$0 \angle -360^\circ$
III	$\frac{K}{(j\omega)^3(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$	$\infty \angle -270^\circ$	$0 \angle -450^\circ$

起点  $\begin{cases} K \angle 0^\circ & v = 0 \\ \infty \angle -90^\circ v & v > 0 \end{cases}$       终点  $0 \angle -90^\circ(n - m)$





# 开环系统的幅相频率特性

例 5.3.1 控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{s(0.5s+1)(0.8s^2+0.9s+1)}$$

试绘制该系统的开环 Nyquist 图的大致图形。

解 该系统的开环传递函数有一个积分环节, 所以当  $\omega = 0_+$  时, 频率特性幅值为  $\infty$ , 相角为  $-90^\circ$ ; 当  $\omega \rightarrow +\infty$  时, 由于  $n = 4, m = 1$ , Nyquist 曲线沿  $(n - m) \cdot (-90^\circ) = -270^\circ$  方向趋向原点。Nyquist 图的大致图形如图 5.3.1 所示。

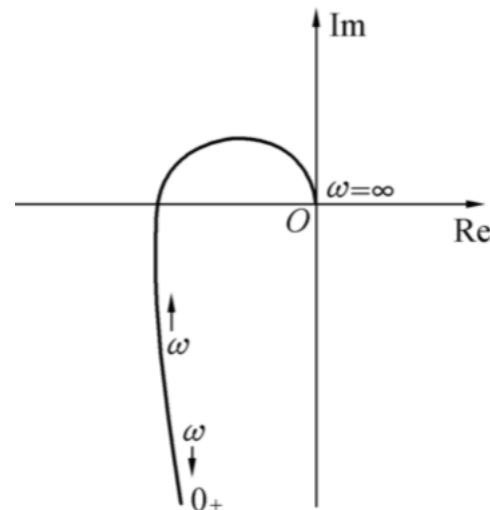


图 5.3.1 Nyquist 图

$$\text{起点} \begin{cases} K \angle 0^\circ & \nu = 0 \\ \infty \angle -90^\circ \nu & \nu > 0 \end{cases} \quad \text{终点} \quad 0 \angle -90^\circ(n - m)$$

例7  $G(s) = \frac{s^3}{(s+0.2)(s+1)(s+5)} = \frac{s^3}{(1+5s)(1+s)(1+0.2s)}$  画 $G(j\omega)$ 曲线。

$$G(j0) = 0 \angle +270^\circ$$

$$\downarrow \quad |G| \uparrow \quad \angle G \downarrow$$

$$G(j\infty) = 1 \angle 0^\circ$$

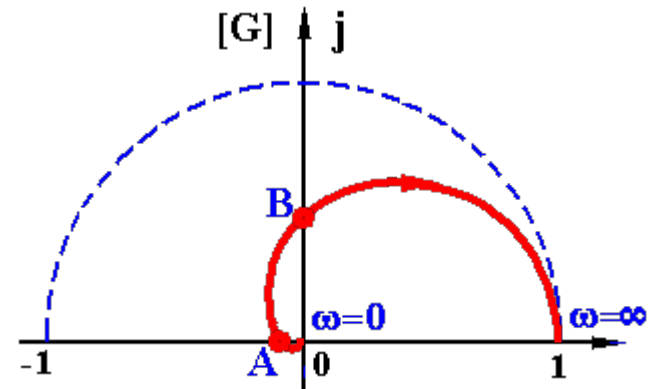
$$G(j\omega) = \frac{-j\omega^3(1-j5\omega)(1-j\omega)(1-j0.2\omega)}{(1+25\omega^2)(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

$$= \frac{-\omega^4(6.2-\omega^2) - j\omega^3(1-6.2\omega^2)}{(1+25\omega^2)(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

$$= X + jY$$

$$A: \begin{cases} \omega_A = 1/\sqrt{6.2} = 0.402 \\ G(j\omega_A) = -0.0267 + j0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \omega_B = \sqrt{6.2} = 2.49 \\ G(j\omega_B) = 0 + j0.412 \end{cases}$$



例8  $G(s) = \frac{5}{s(s+1)(2s+1)}$  画  $G(j\omega)$  曲线。

解 
$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+j2\omega)} = \frac{-j5(1-j\omega)(1-j2\omega)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$= \frac{-15}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)} - j \frac{5(1-2\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

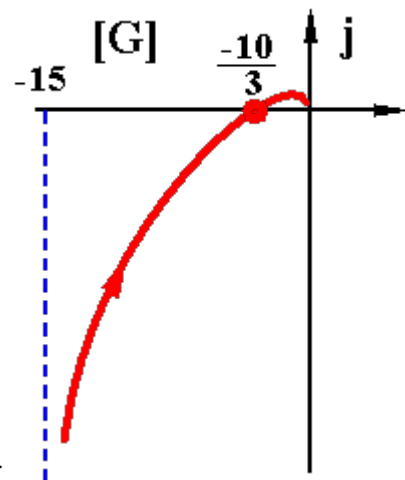
$$G(j0) = \infty \angle -90^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$$

渐近线:  $\text{Re}[G(j0)] \Rightarrow -15$

与实轴交点:  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0 \Rightarrow \omega = 1/\sqrt{2} = 0.707$

$$\text{Re}[G(j0.707)] = \frac{-15}{(1+0.5)(1+4 \times 0.5)} = -\frac{10}{3}$$



## 典型环节的幅相频率特性

(1)  $G(j\omega) = K$

(2)  $G(j\omega) = j\omega$

(3)  $G(j\omega) = 1/j\omega$

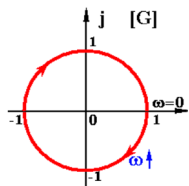
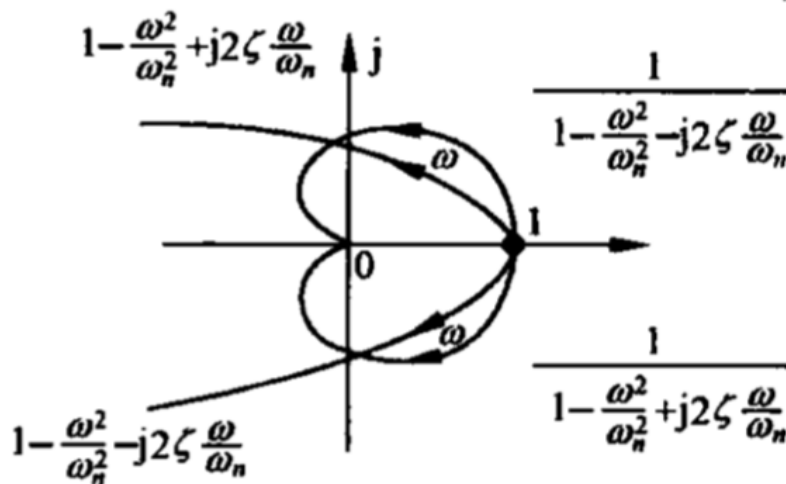
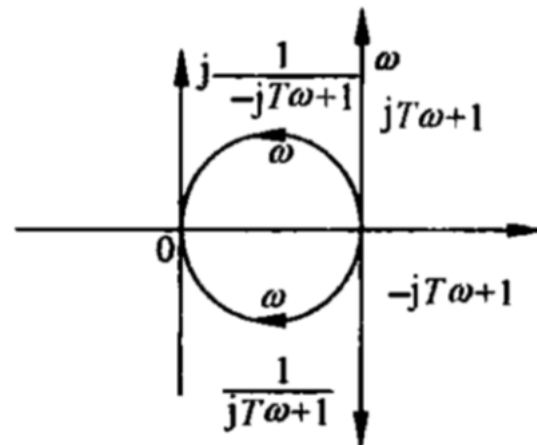
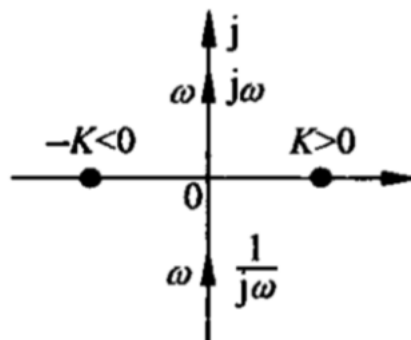
(4)  $G(j\omega) = 1/(+1 \pm j\omega T)$

(5)  $G(j\omega) = +1 \pm j\omega T$

(6)  $G(j\omega) = 1 / \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$

(7)  $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$

(8)  $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$



---

## 开环幅相特性曲线的绘制

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l T_l s + 1)}$$

- (1) 确定起点和终点
- (2) 必要时求出与实轴、虚轴的交点



# 第5章 线性系统的频域分析方法

---

5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

5.2 典型环节的频率特性

5.3 控制系统的频率特性

5.3.1 幅相频率特性 (Nyquist 图)

5.3.2 对数幅频特性 (Bode 图)

5.4 频率域稳定判据

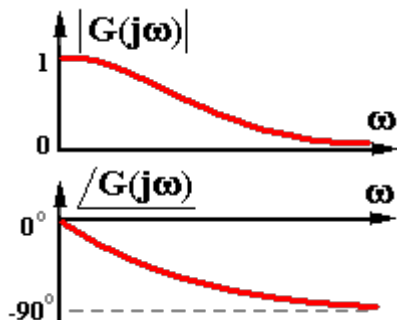
---

# 频率特性几何表示法

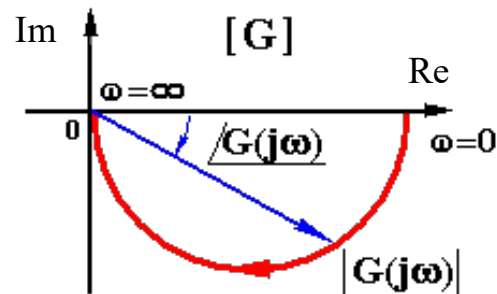
$$G(j\omega) = \frac{1}{Ts + 1} \Big|_{s=j\omega}$$

## 频率特性 (定义)

幅频  $|G(j\omega)|$   
相频  $\angle G(j\omega)$

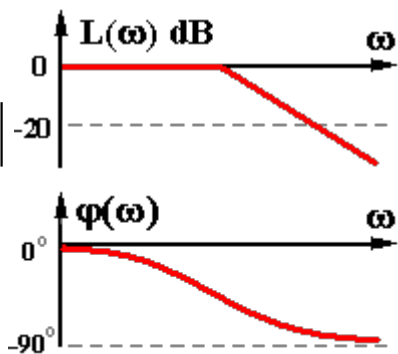


## α. 幅相特性(Nyquist)

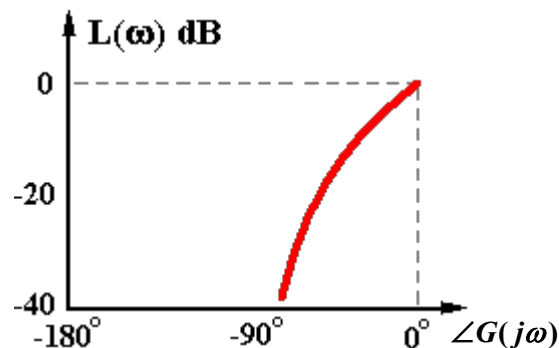


## β. 对数频率特性(Bode)

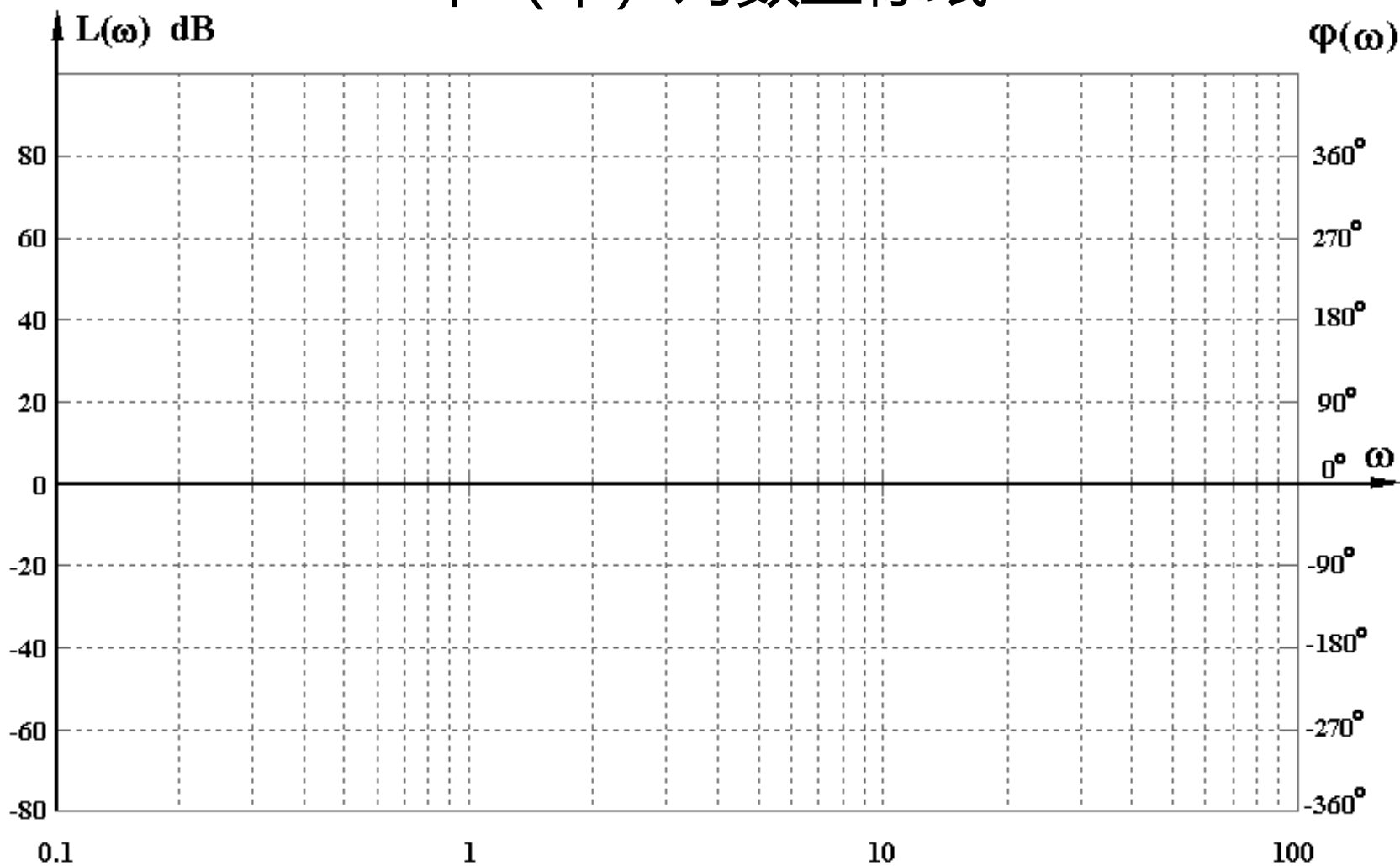
对数幅频  
 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$   
对数相频  
 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$



## χ. 对数幅相特性(Nichols)

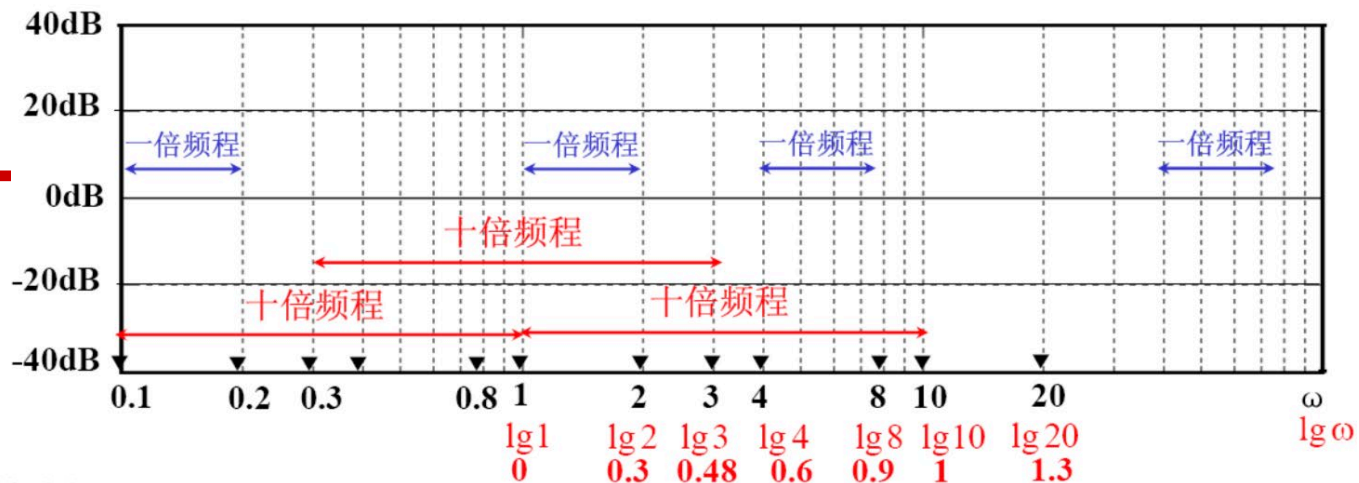


# 半（单）对数坐标纸





## 对数频率特性 (Bode)



包括: { 对数幅频特性:  $L(\omega)$   
对数相频特性:  $\varphi(\omega)$

3cm——十倍频 1cm——20dB 1cm——90°  
或按此比例缩放

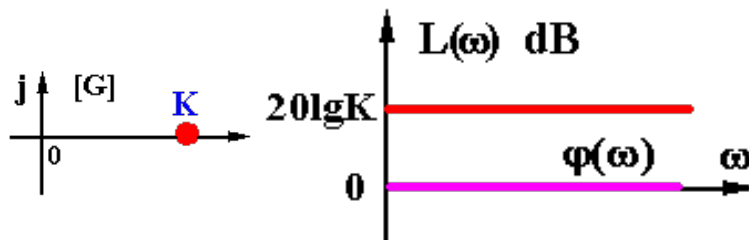
## Bode图

坐标特点 { 横轴 { 按  $\lg \omega$  刻度, dec “十倍频程”  
按  $\omega$  标定, 等距等比, 无  $\omega = 0$  这一点  
纵轴 {  $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$  dB 线性分度, 单位: 分贝(dB)  
 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$  单位 “度” ( $^\circ$ )  
特点 { (1) 幅值相乘 = 对数相加, 便于叠加作图;  
(2) 可在大范围内表示频率特性;  
(3) 利用实验数据容易确定  $L(\omega)$ , 进而确定  $G(s)$ 。

## 典型环节的Bode图

(1) 比例环节  $G(j\omega) = K$

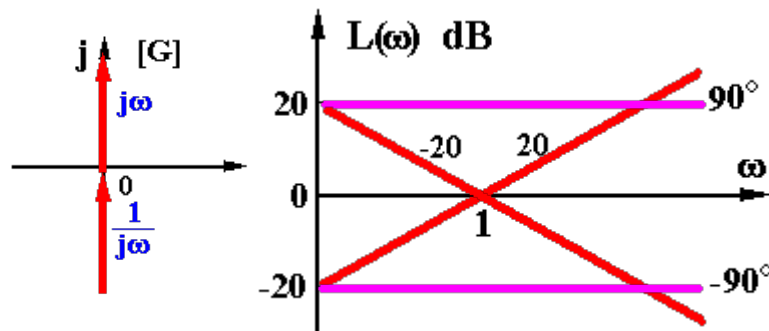
$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$



$L(\omega)$ 为一条与 $\omega$ 轴平行的直线（随 $K$ 的变化上下平移）；  
 $\varphi(\omega)$ 为一条平行于 $\omega$ 轴重合的直线

(2) 微分环节  $G(j\omega) = j\omega$

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$



$L(\omega)$ 为一条斜率为20的直线，与 $\omega$ 轴的交点为 $(\omega, L(\omega)) = (1, 0)$ ；  
 $\varphi(\omega)$ 为一条平行于 $\omega$ 轴的直线（恒为 $90^\circ$ ）

$G(s) = \frac{K}{s}, \frac{K}{s^v} ?$

(3) 积分环节  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

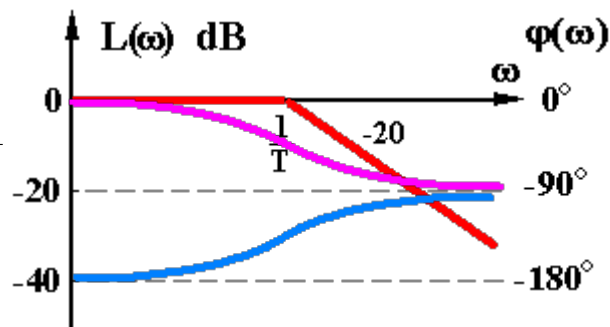
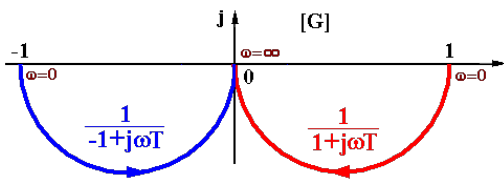
$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

$L(\omega)$ 为一条斜率为-20的直线，与 $\omega$ 轴的交点为 $(\omega, L(\omega)) = (1, 0)$ ；  
 $\varphi(\omega)$ 为一条平行于 $\omega$ 轴的直线（恒为 $-90^\circ$ ）

# 典型环节的Bode图

(4) 惯性环节  $G(j\omega) = \frac{1}{\pm 1 + j\omega T}$

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan \omega T \\ -180^\circ + \arctan \omega T \end{cases} \end{cases}$$



当  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,  $L(\omega) \approx 0$ ; (与  $\omega$  轴重合的直线)

当  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,  $L(\omega) = -20(\lg \omega - \lg \frac{1}{T})$  (斜率为-20的直线, 与  $\omega$  轴的交点为  $\omega = 1/T$ )

近似图形有两条直线构成, 又称为: 折线近似图。称  $\frac{1}{T}$  为转折频率。

精确图形以近似图形为渐近线, 最大误差发生在  $\omega = \frac{1}{T}$  处,  $L(\frac{1}{T}) = -3dB$

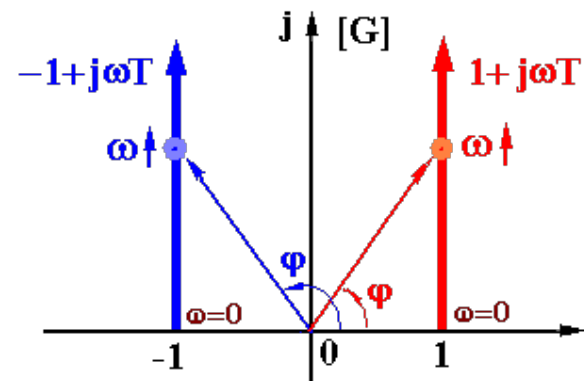
惯性环节对数相频特性  $\varphi(\omega)$  关于  $(\omega=1/T, \varphi=-45^\circ)$  点对称

$$G(s) = \frac{1}{-j\omega T + 1} \text{ ?}$$

(5) 一阶微分

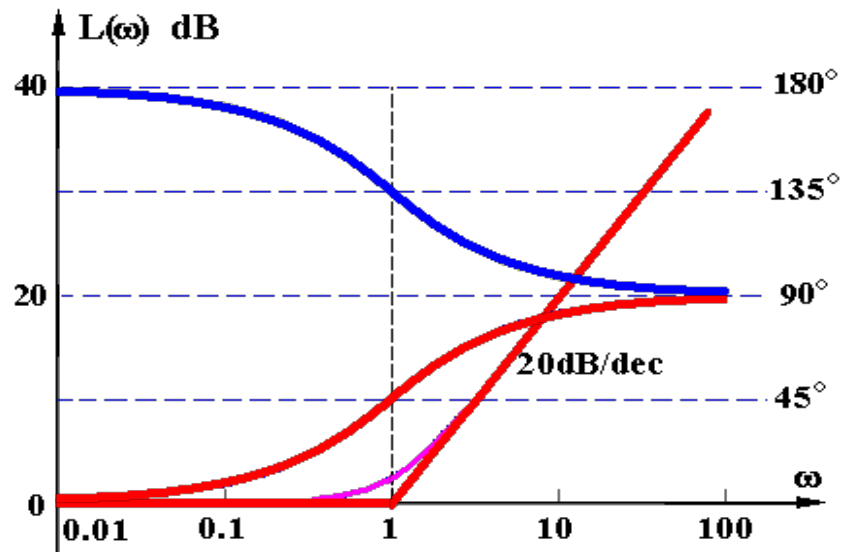
$$G(s) = Ts + 1$$

$$G(j\omega) = \pm 1 + j\omega T$$



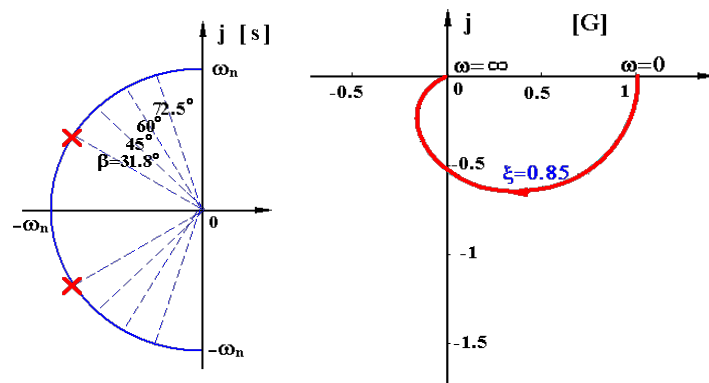
$$\left\{ \begin{array}{l} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan \omega T \\ 180^\circ - \arctan \omega T \end{cases} \end{array} \right.$$

$$G(s) = -j\omega T + 1 \quad \text{?}$$



(6) 振荡环节  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

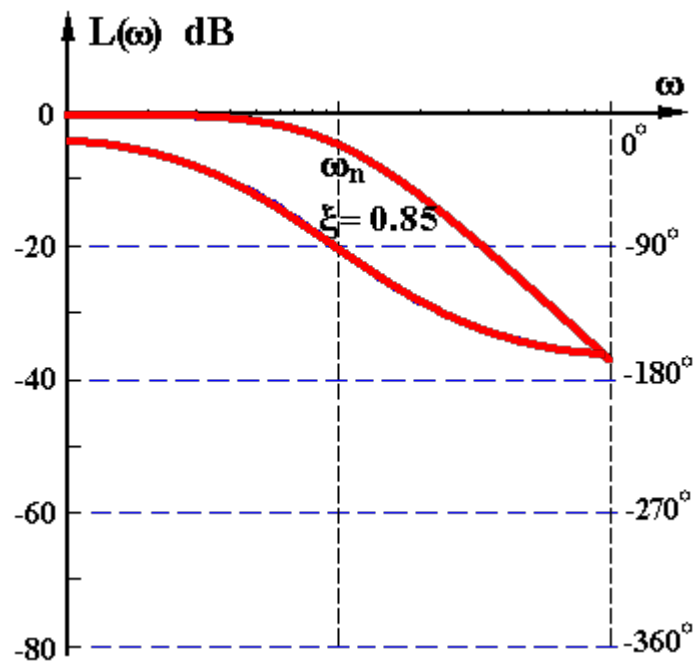
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$



$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right] \end{cases}$$

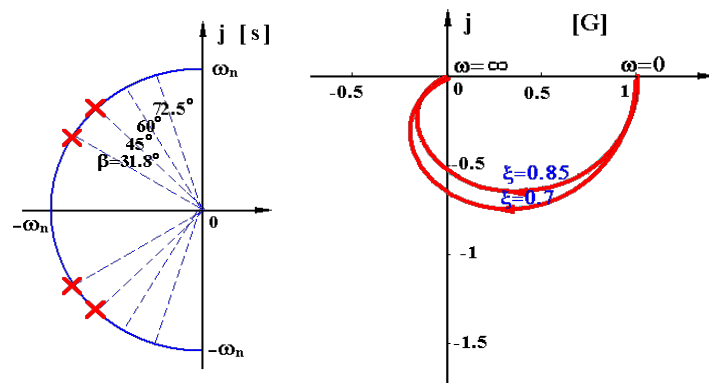
$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \quad \begin{cases} L(\omega) \approx 0 \\ \varphi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \quad \begin{cases} L(\omega) \approx -40 \lg(\omega/\omega_n) \\ \varphi(\omega) \approx -180^\circ \end{cases}$$



(6) 振荡环节  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

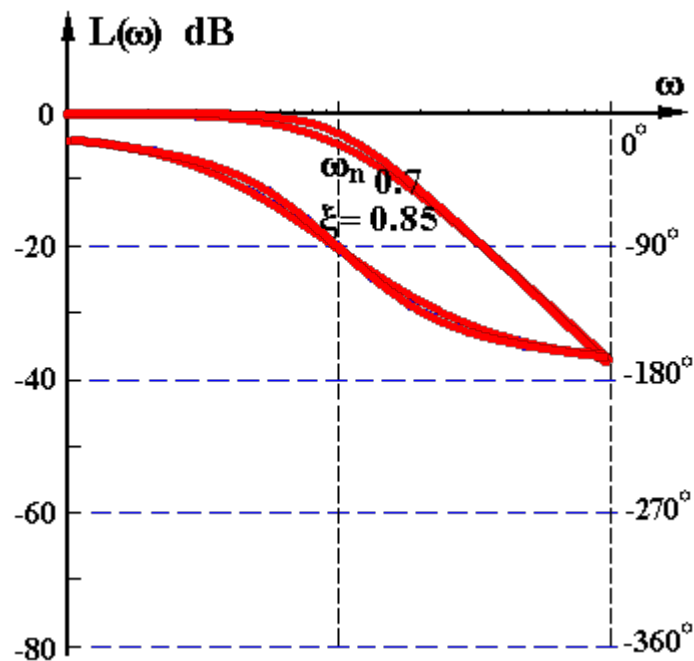
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$



$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right] \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \quad \begin{cases} L(\omega) \approx 0 \\ \varphi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \quad \begin{cases} L(\omega) \approx -40 \lg(\omega/\omega_n) \\ \varphi(\omega) \approx -180^\circ \end{cases}$$



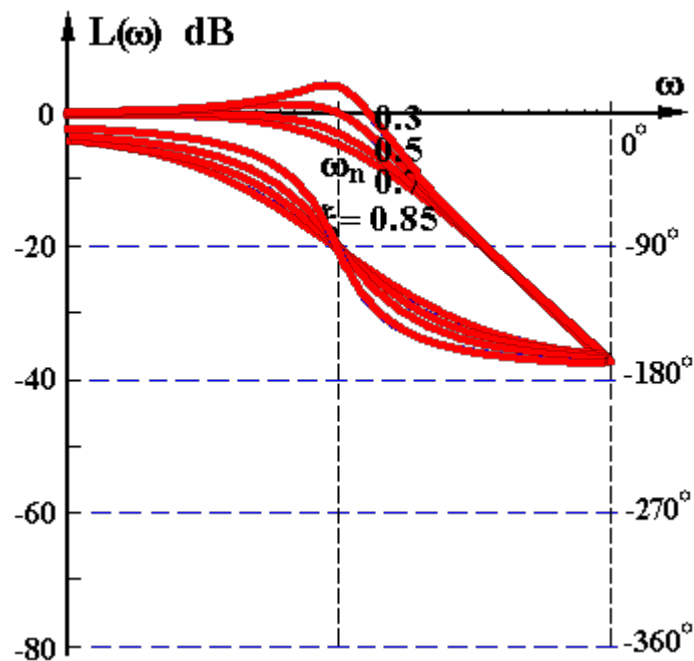
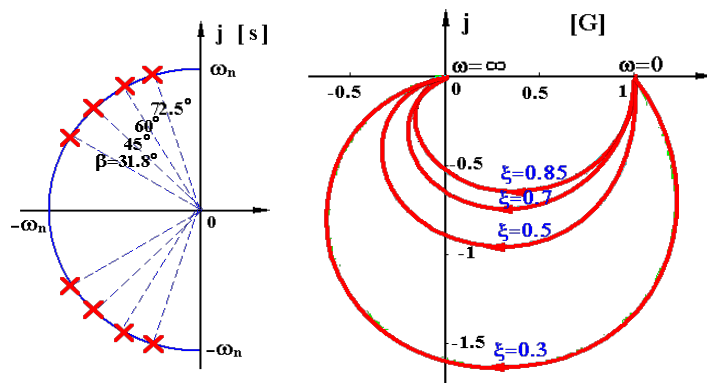
(6) 振荡环节  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \left[ \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] \end{cases}$$

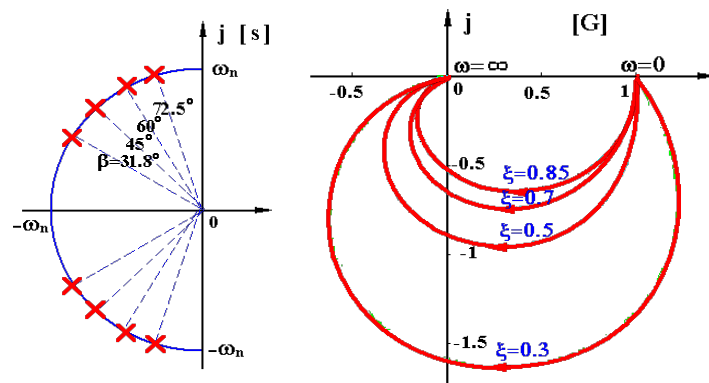
$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \quad \begin{cases} L(\omega) \approx 0 \\ \varphi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \quad \begin{cases} L(\omega) \approx -40 \lg(\omega/\omega_n) \\ \varphi(\omega) \approx -180^\circ \end{cases}$$

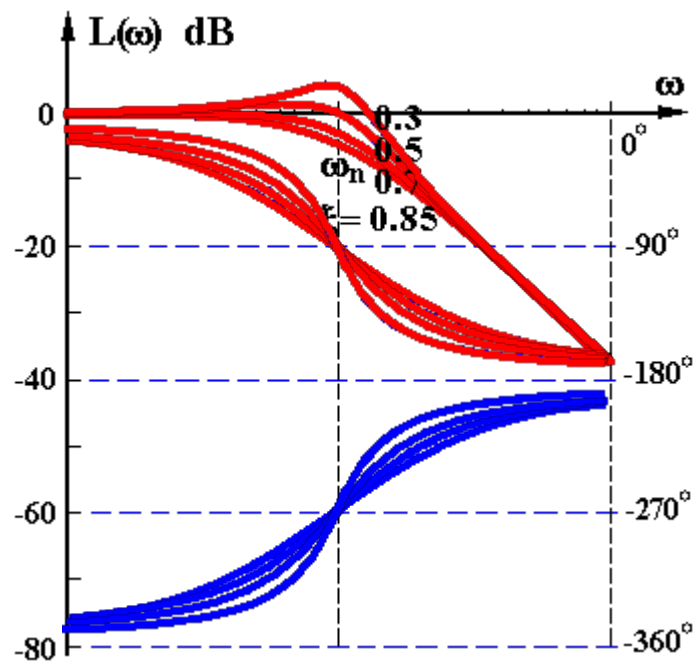


(6) 振荡环节  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 \pm 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan \left[ \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] \\ -\arctan \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases} \end{array} \right.$$





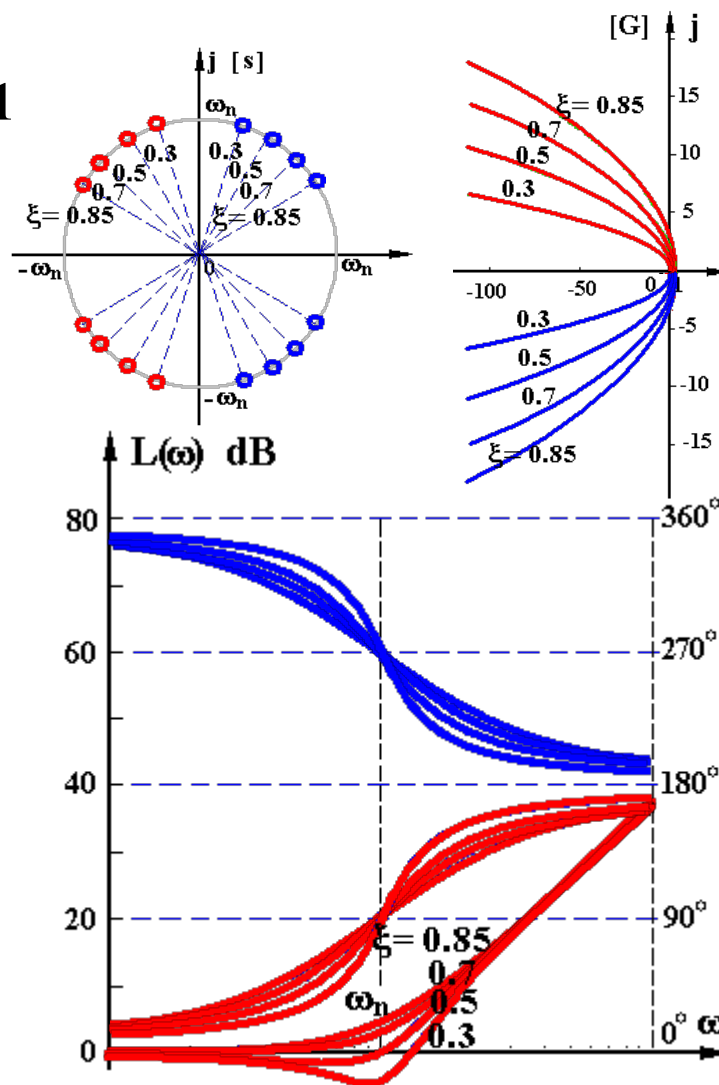
(7) 二阶微分

$$G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1$$

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \arctan \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases}$$

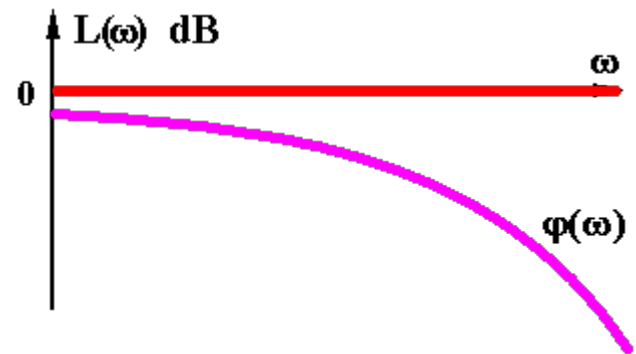
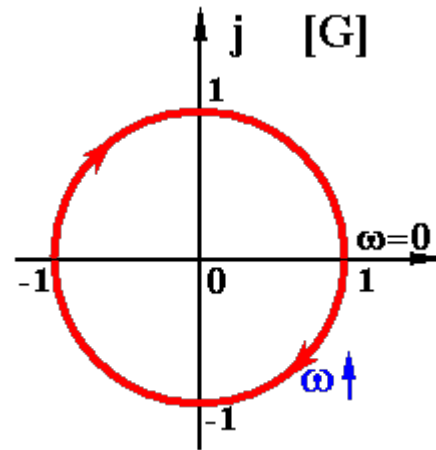


## (8) 延迟环节

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg 1 = 0 \\ \varphi(\omega) = -57.3^\circ \times \tau \omega \end{cases}$$



# 典型环节的对数频率特性曲线

(1)  $G(j\omega) = K$

(2)  $G(j\omega) = j\omega$

(3)  $G(j\omega) = 1/j\omega$

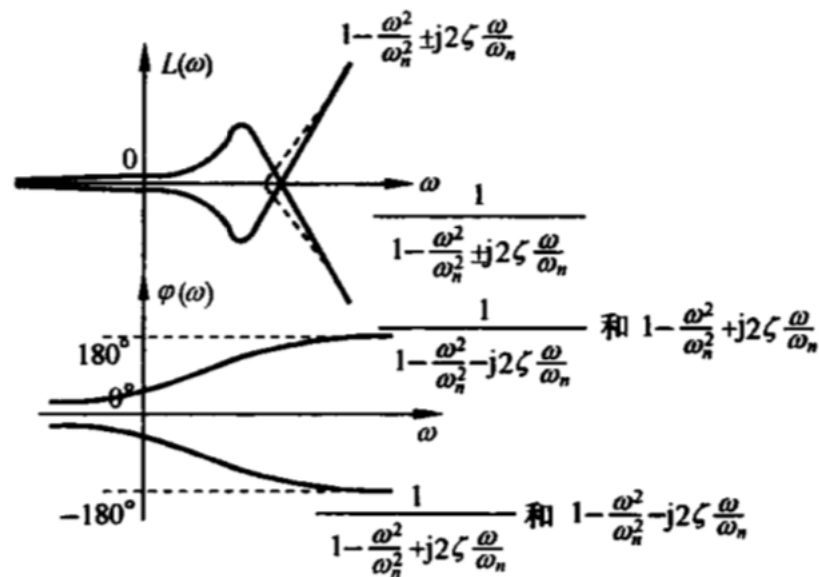
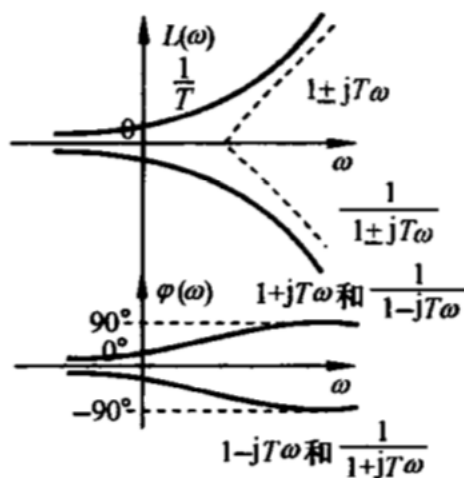
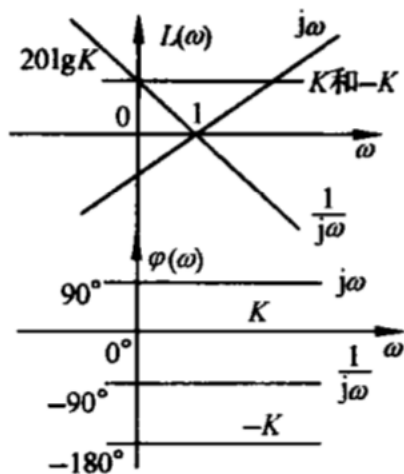
(4)  $G(j\omega) = 1/(+1 \pm j\omega T)$

(5)  $G(j\omega) = +1 \pm j\omega T$

(6)  $G(j\omega) = 1 / \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$

(7)  $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$

(8)  $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$



# 典型环节的对数频率特性曲线

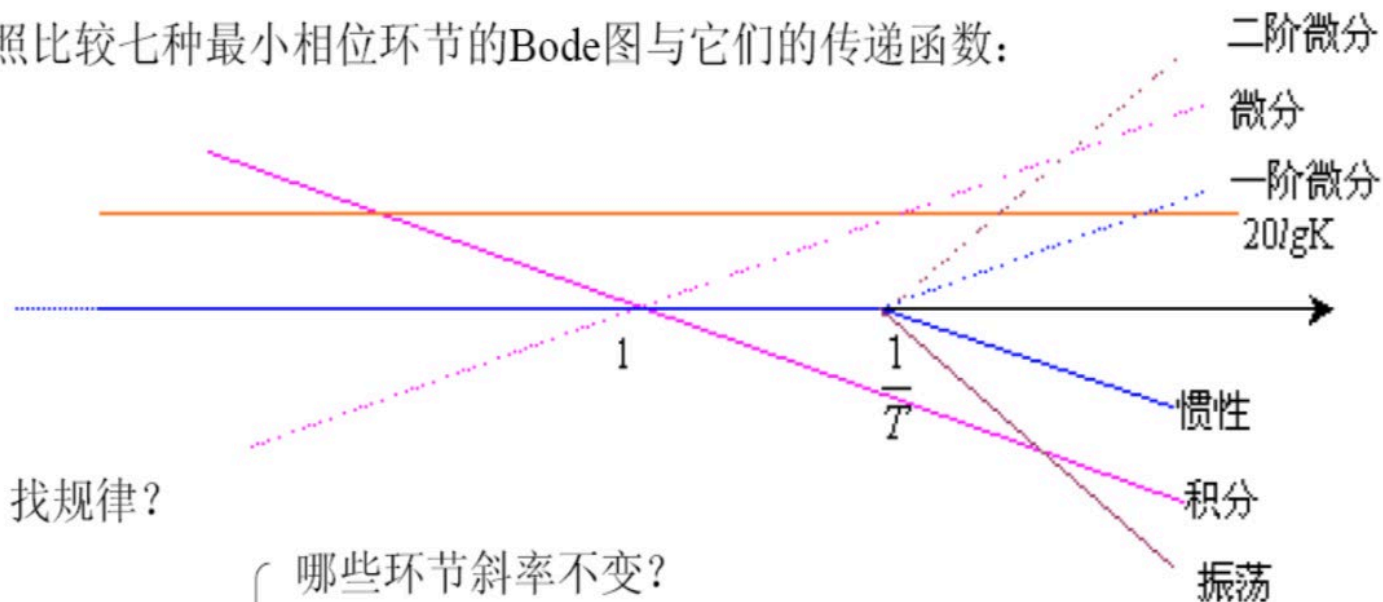
微分环节  $G(s) = s$  对照积分环节  $G(s) = 1/s$

一阶微分环节  $G(s) = Ts + 1$  对照惯性环节  $G(s) = 1/(Ts + 1)$

二阶微分环节  $G(s) = T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)/\omega_n^2$  对照震荡环节

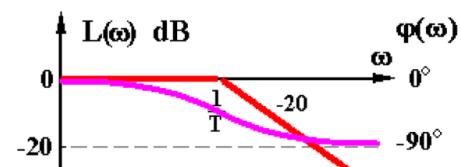
**结论：若两个传递函数互为倒数，则他们的Bode图幅频特性关于 $\omega$ 轴对称。**

对照比较七种最小相位环节的Bode图与它们的传递函数：



找规律？

- \*关于斜率 {
  - 哪些环节斜率不变？
  - 斜率的正负？
  - 斜率的大小？



例1 根据Bode图确定系统传递函数。

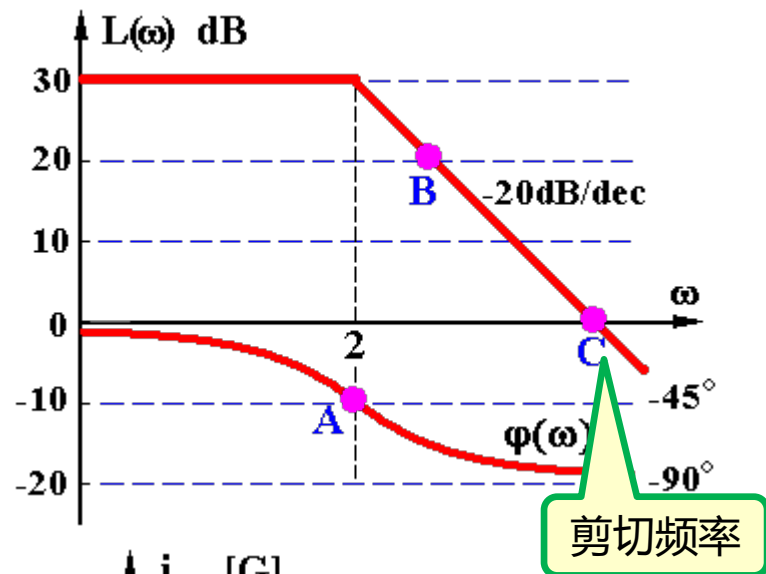
解. 依图有  $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$

$$20 \lg K = 30 \Rightarrow K = 10^{\frac{30}{20}} = 31.6$$

转折频率  $\omega = 2 = 1/T$

$$G(s) = \frac{31.6}{\frac{s}{2} + 1}$$

$T = 0.5$

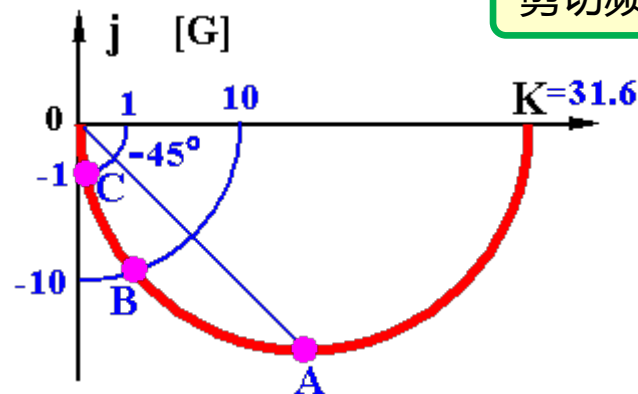


• Bode图与Nyquist图之间的对应关系：

• 剪切频率 $\omega_c$ ：  $|G(j\omega_c)| = 1$

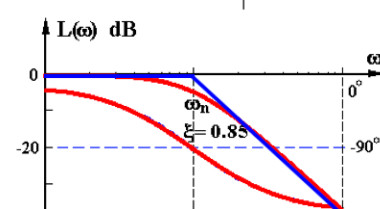
$$30 \text{dB} = 20(\lg \omega_c - \lg 2) = 20 \lg \frac{\omega_c}{2}$$

$$\lg \frac{\omega_c}{2} = \frac{30}{20} = 1.5 \quad \omega_c = 2 \times 10^{1.5} = 63.2 \text{ rad/s}$$



谐振点：

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases}$$



例2 根据Bode图确定系统传递函数。

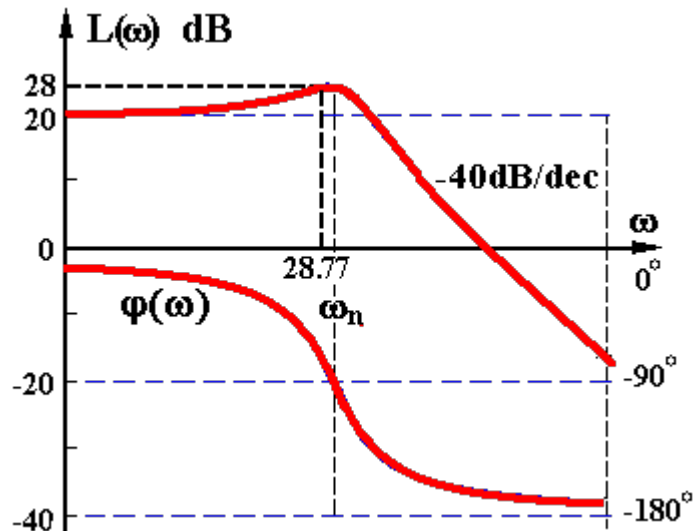
解. 依图有  $G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$

$$20 \lg K = 20 \Rightarrow K = 10$$

$$\begin{cases} 20 \lg M_r = 20 \lg \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} = 8 \text{ dB} \\ \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} = 28.77 \end{cases}$$

$$2\xi\sqrt{1 - \xi^2} = 10^{\frac{-8}{20}} = 0.398$$

$$\xi^4 - \xi^2 + 0.0396 = 0 \begin{cases} \xi_1 = 0.979 \\ \xi_2 = 0.203 \end{cases} \checkmark$$



$$\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 30$$

$$G(s) = \frac{10 \times 30^2}{s^2 + 2 \times 0.203 \times 30 s + 30^2}$$

$$= \frac{9000}{s^2 + 12.18 s + 900}$$

• Bode图与Nyquist图之间的对应关系:

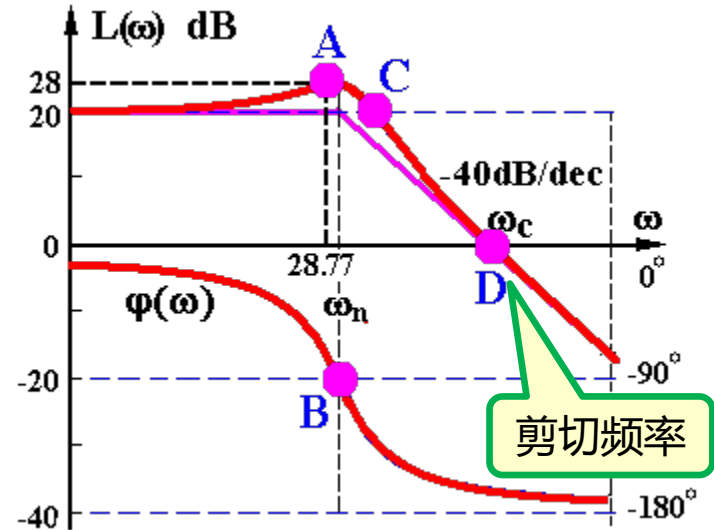
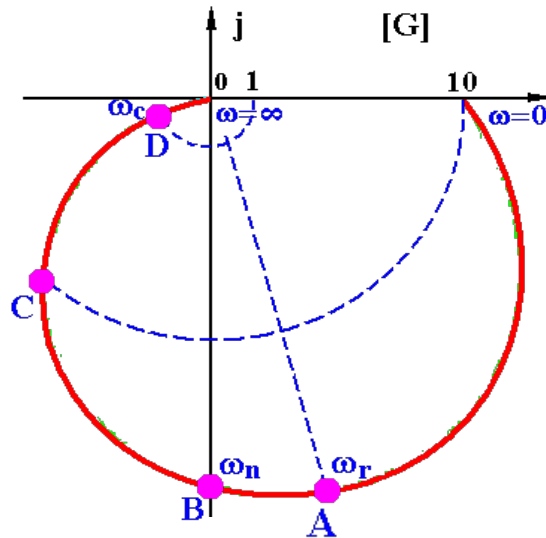
• 剪切频率  $\omega_c$ :

$$40 \times \lg\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right) = 20$$

$$\lg\left(\frac{\omega_c}{30}\right) = \frac{20}{40}$$

$$\frac{\omega_c}{30} = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_c = 30 \times \sqrt{10} = 94.87 \text{ rad/s}$$



# 典型环节的对数频率特性曲线

(1)  $G(j\omega) = K$

(2)  $G(j\omega) = j\omega$

(3)  $G(j\omega) = 1/j\omega$

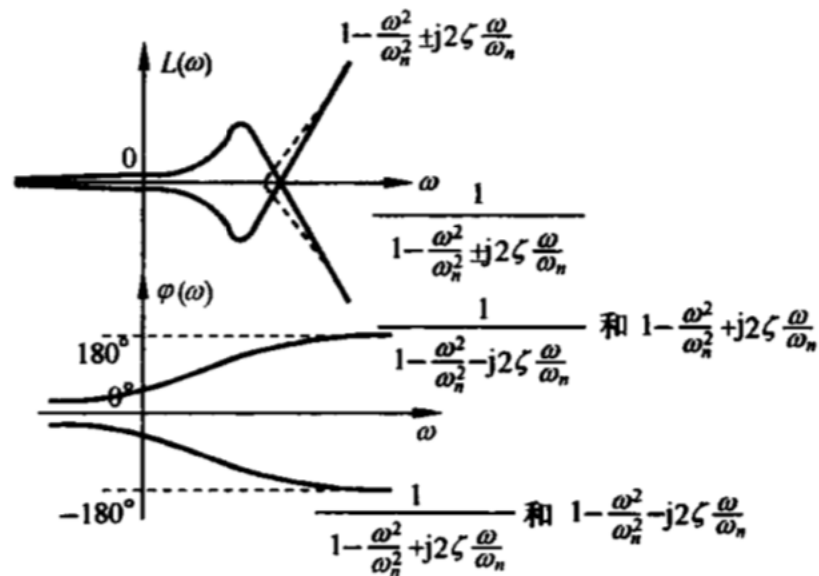
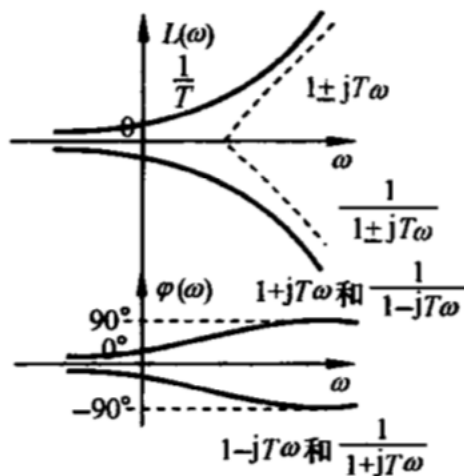
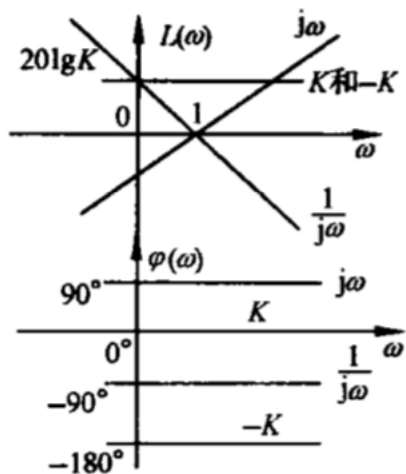
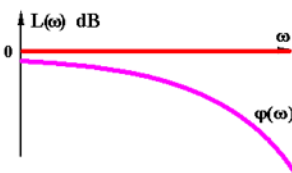
(4)  $G(j\omega) = 1/(+1 \pm j\omega T)$

(5)  $G(j\omega) = +1 \pm j\omega T$

(6)  $G(j\omega) = 1 / \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$

(7)  $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \pm j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$

(8)  $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$





# 系统的开环Bode图绘制

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l T_l s + 1)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg|G| = 20 \lg \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} |j\tau_i \omega + 1| \prod_{k=1}^{m_2} |1 - \tau_k^2 \omega^2 + j2\omega\xi_k \tau_k|}{\omega^v \prod_{j=1}^{n_1} |jT_j \omega + 1| \prod_{l=1}^{n_2} |1 - T_l^2 \omega^2 + j2\omega\xi_l T_l|} \\ &= 20 \lg \frac{K}{\omega^v} + 20 \lg \sum_{i=1}^{m_1} |j\tau_i \omega + 1| + 20 \lg \sum_{k=1}^{m_2} |1 - \tau_k^2 \omega^2 + j2\omega\xi_k \tau_k| \\ &\quad - 20 \lg \sum_{j=1}^{n_1} |jT_j \omega + 1| - 20 \lg \sum_{l=1}^{n_2} |1 - T_l^2 \omega^2 + j2\omega\xi_l T_l| \\ \angle G(j\omega) &= \sum_{i=1}^{m_1} \angle(j\tau_i \omega + 1) + \sum_{k=1}^{m_2} \angle(1 - \tau_k^2 \omega^2 + j2\omega\xi_k \tau_k) - v \times 90^\circ \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n_1} \angle(jT_j \omega + 1) + \sum_{l=1}^{n_2} \angle(1 - T_l^2 \omega^2 + j2\omega\xi_l T_l) \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \arctan \tau_i \omega + \sum_{k=1}^{m_2} \arctan \frac{2\omega\xi_k \tau_k}{1 - \tau_k^2 \omega^2} - v \times 90^\circ \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n_1} \arctan T_j \omega - \sum_{l=1}^{n_2} \arctan \frac{2\omega\xi_l T_l}{1 - T_l^2 \omega^2} \end{aligned} \right.$$



# 绘制系统开环Bode图的步骤

例1  $G(s) = \frac{40(s + 0.5)}{s(s + 0.2)(s^2 + s + 1)}$

(1) 化 $G(s)$ 为频率特性标准型

$$G(s) = \frac{100(\frac{s}{0.5} + 1)}{s(\frac{s}{0.2} + 1)(s^2 + s + 1)}$$

(2) 顺序列出转折频率

$$G(s) = \frac{K}{s}, \frac{K}{s^v}$$

- 0.2 惯性环节
- 0.5 一阶微分
- 1 振荡环节

(3) 确定基准线 最小转折频率之左的特性及其**延长线**

- 基准点  $(\omega = 1, L(1) = 20 \lg K)$
- 斜率  $-20 \cdot \nu \text{ dB/dec}$

(4) 叠加作图

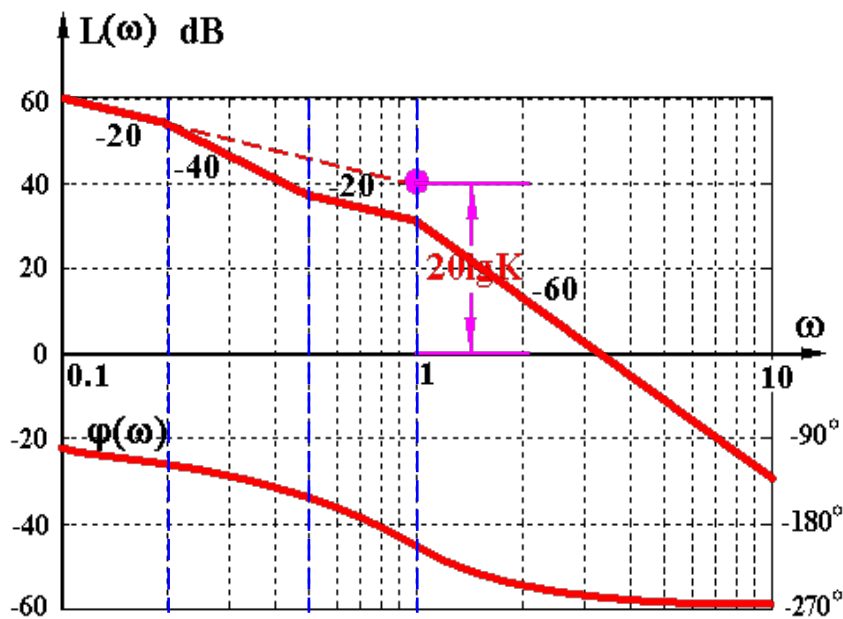
一阶	{	惯性环节 -20dB/dec
		一阶微分 +20dB/dec
二阶	{	振荡环节 -40dB/dec
		二阶微分 +40dB/dec

- w=0.2 惯性环节 -20
- w=0.5 一阶微分 +20
- w=1 振荡环节 -40

$$G(s) = \frac{100\left(\frac{s}{0.5} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)(s^2 + s + 1)}$$

基准点 ( $\omega = 1$ ,  $L(1) = 20 \lg K$ )  
斜率  $-20 \cdot \nu$  dB/dec

$\omega=0.2$  惯性环节  $-20$   
 $\omega=0.5$  一阶微分  $+20$   
 $\omega=1$  振荡环节  $-40$



(5) 修正 { ① 两惯性环节转折频率很接近时  
② 振荡环节或二阶微分环节

(6) 检查 { ①  $L(\omega)$  最右端曲线斜率  $= -20(n-m)$  dB/dec  
② 转折点数 = (惯性) + (一阶微分) + (振荡) + (二阶微分)  
③  $\varphi(\omega) \Rightarrow -90^\circ (n-m)$

# 绘制系统开环Bode图的步骤

(1) 化 $G(s)$ 为频率特性标准型

(2) 顺序列出转折频率

(3) 确定基准线  $\left\{ \begin{array}{l} \text{基准点 } (\omega = 1, L(1) = 20 \lg K) \\ \text{斜率 } -20 \cdot \nu \text{ dB/dec} \end{array} \right. \left( \begin{array}{l} \text{第一转折频率之左} \\ \text{的特性及其延长线} \end{array} \right)$

(4) 叠加作图  $\left\{ \begin{array}{l} \text{一阶} \left\{ \begin{array}{l} \text{惯性环节 } -20\text{dB/dec} \\ \text{一阶微分 } +20\text{dB/dec} \end{array} \right. \\ \text{二阶} \left\{ \begin{array}{l} \text{振荡环节 } -40\text{dB/dec} \\ \text{二阶微分 } +40\text{dB/dec} \end{array} \right. \end{array} \right.$

(5) 修正  $\left\{ \begin{array}{l} \text{① 两惯性环节转折频率很接近时} \\ \text{② 振荡环节或二阶微分环节} \end{array} \right.$

(6) 检查  $\left\{ \begin{array}{l} \text{① } L(\omega) \text{ 最右端曲线斜率} = -20(n-m) \text{ dB/dec} \\ \text{② 转折点数} = (\text{惯性}) + (\text{一阶微分}) + (\text{振荡}) + (\text{二阶微分}) \\ \text{③ } \varphi(\omega) \Rightarrow -90^\circ (n-m) \end{array} \right.$

例2  $G(s) = \frac{s^3}{(s+0.2)(s+1)(s+5)}$ , 绘制Bode图。

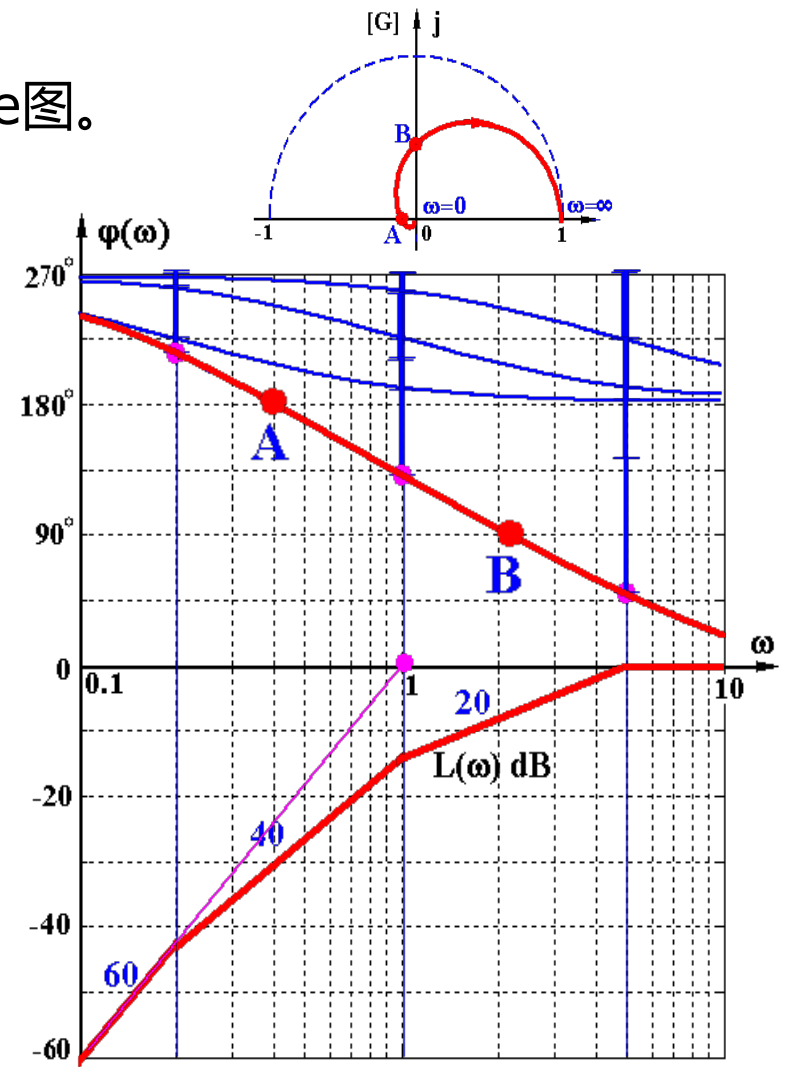
解 ① 标准型  $G(s) = \frac{s^3}{(\frac{s}{0.2} + 1)(s+1)(\frac{s}{5} + 1)}$

② 转折频率  $\begin{cases} \omega_1 = 0.2 \Rightarrow -20 \\ \omega_2 = 1 \Rightarrow -20 \\ \omega_3 = 5 \Rightarrow -20 \end{cases}$

③ 基准线  $\begin{cases} \text{基点 } (\omega = 1, 20 \lg 1 = 0 \text{ dB}) \\ \text{斜率 } -20 \times (-3) = 60 \text{ dB/dec} \end{cases}$

④ 作图

⑤ 检查  $\begin{cases} L(\omega) \text{ 最右端斜率} = -20(n-m) = 0 \\ \text{转折点数} = 3 \\ \varphi(\omega) \text{ 最终趋于} -90^\circ(n-m) = 0^\circ \end{cases}$



---

例3 绘制对数频率特性曲线。

$$G(s) = \frac{8(s + 0.1)}{s(s^2 + s + 1)(s^2 + 4s + 25)}$$

解 ①  $G(s) = \frac{0.032 \left( \frac{s}{0.1} + 1 \right)}{s(s^2 + s + 1) \left[ \left( \frac{s}{5} \right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{5} + 1 \right]}$

②  $\begin{cases} \omega_1 = 0.1 & +20 \text{ dB/dec} \\ \omega_2 = 1 & -40 \text{ dB/dec} \\ \omega_3 = 5 & -40 \text{ dB/dec} \end{cases}$

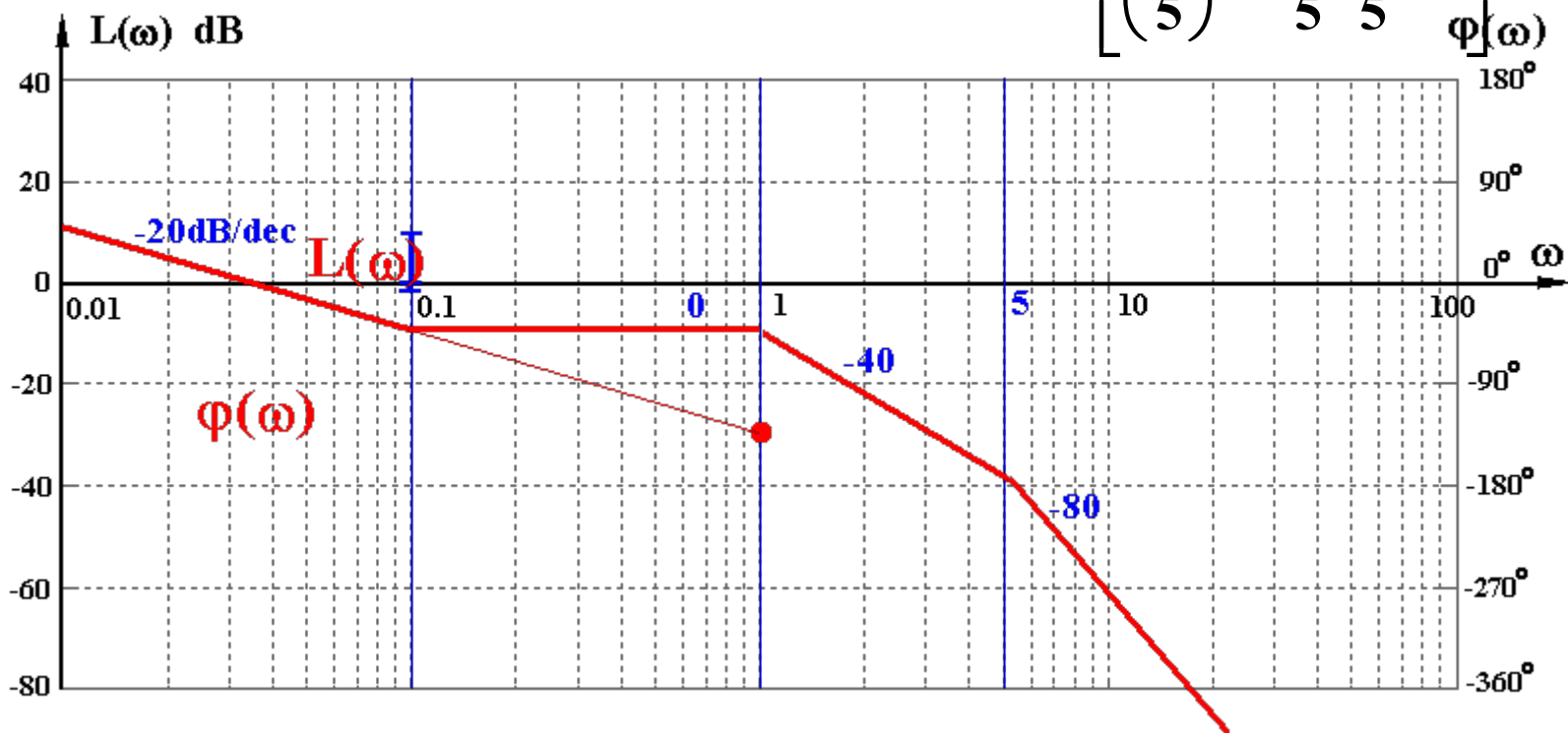
③ 基准线:  $\begin{cases} \text{点} & \omega = 1, 20 \lg 0.032 = -30 \text{ dB} \\ \text{斜率} & -20 \text{ v} = -20 \text{ dB/dec} \end{cases}$

④ 检查:  $\begin{cases} L(\omega) \text{ 最右端斜率} = -20(n-m) = -80 \text{ dB/dec} \\ L(\omega) \text{ 转折点数} = 3 \text{ 个} \\ \varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ(n-m) = -360^\circ \end{cases}$

---

例3 绘制对数频率特性曲线。

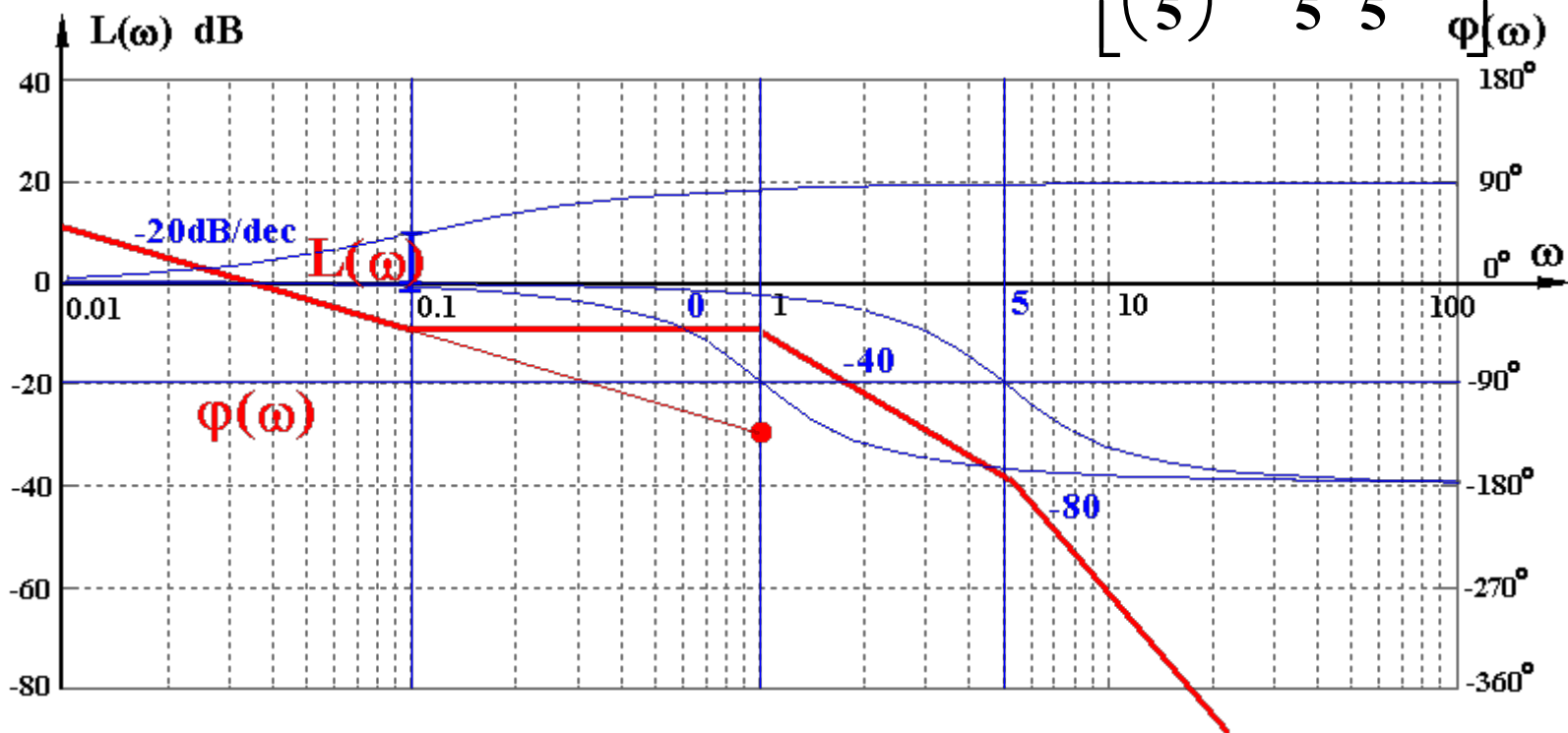
$$G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)} = \frac{0.032\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{5}+1\right]}$$





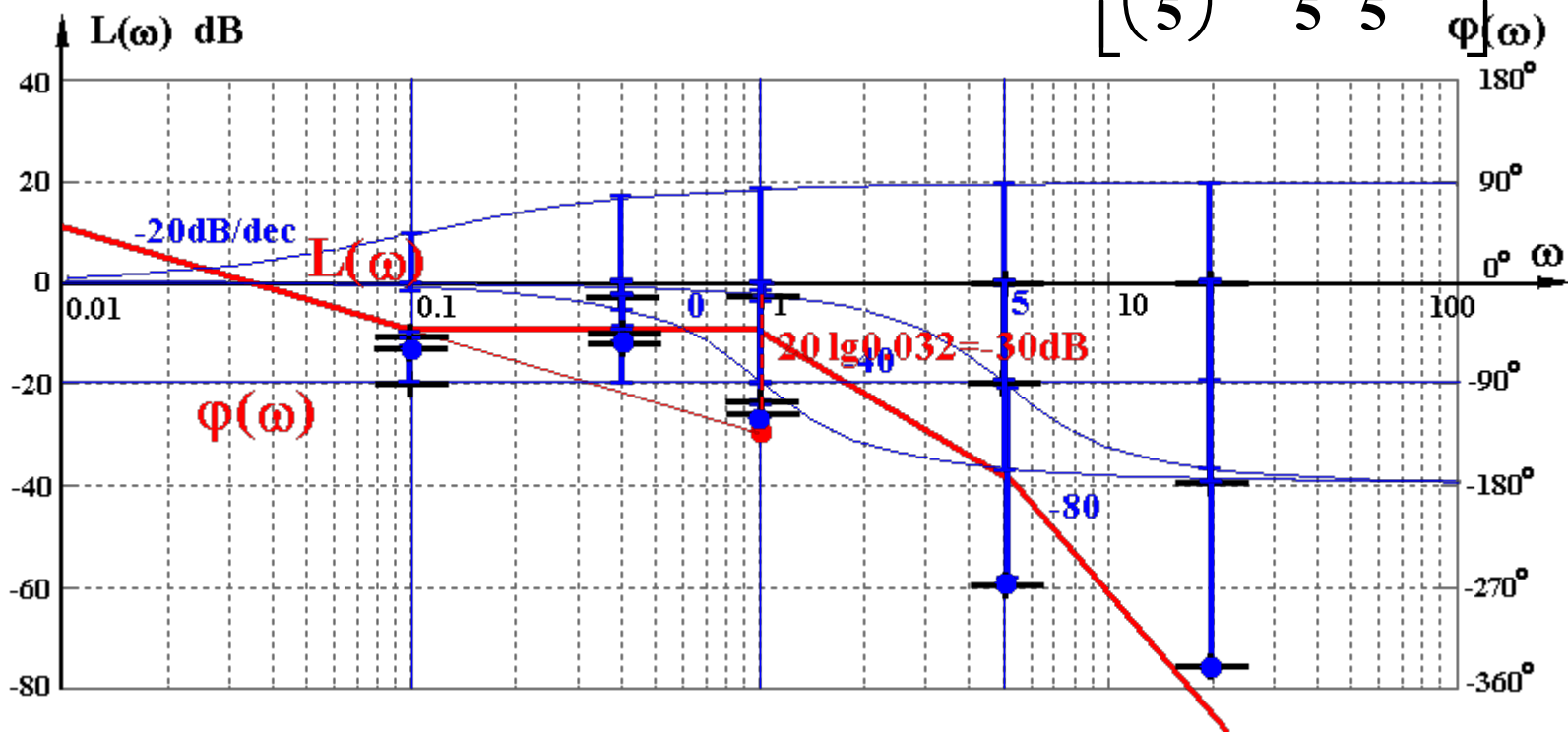
例3 绘制对数频率特性曲线。

$$G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)} = \frac{0.032\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{5}+1\right]}$$



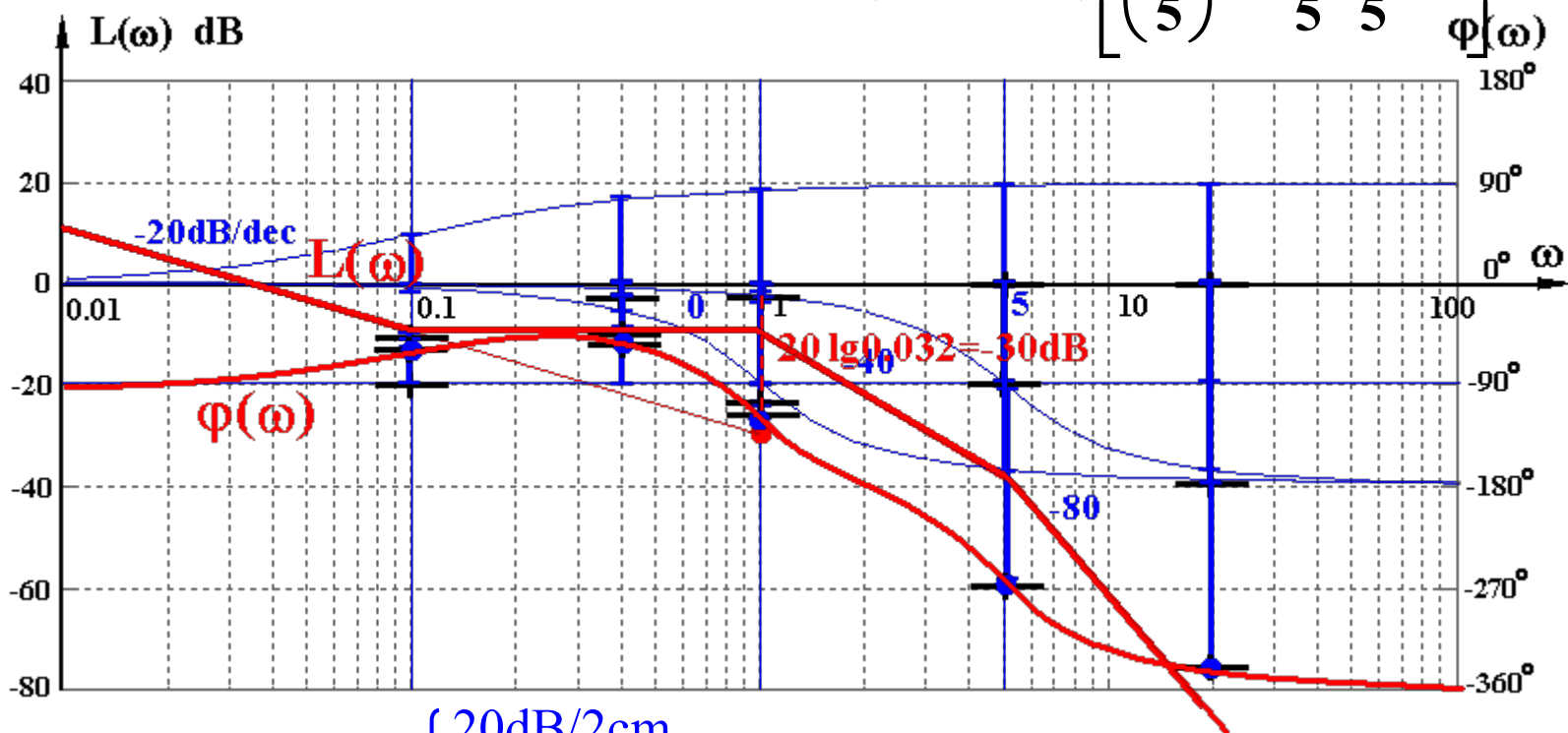
例3 绘制对数频率特性曲线。

$$G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)} = \frac{0.032\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{5} + 1\right]}$$



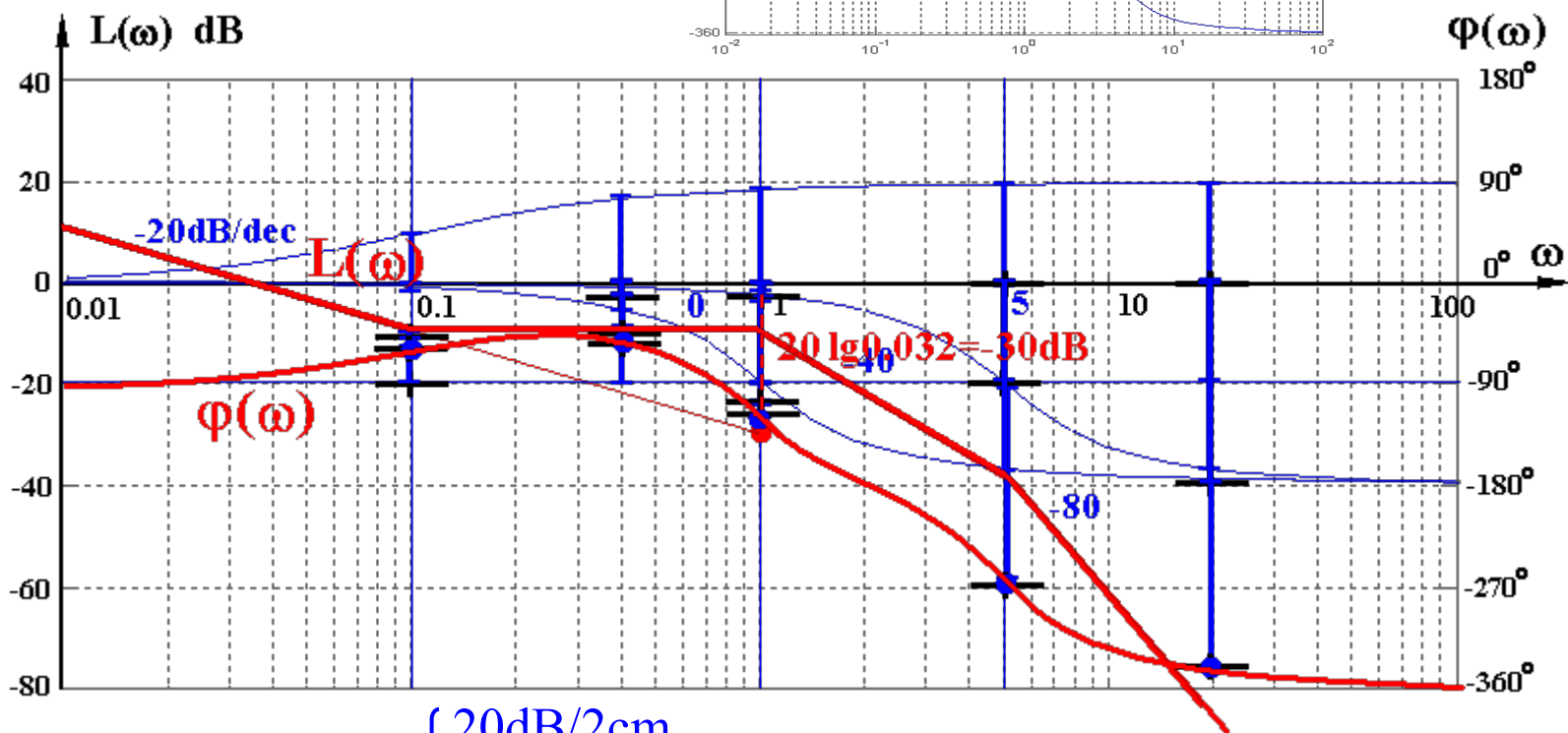
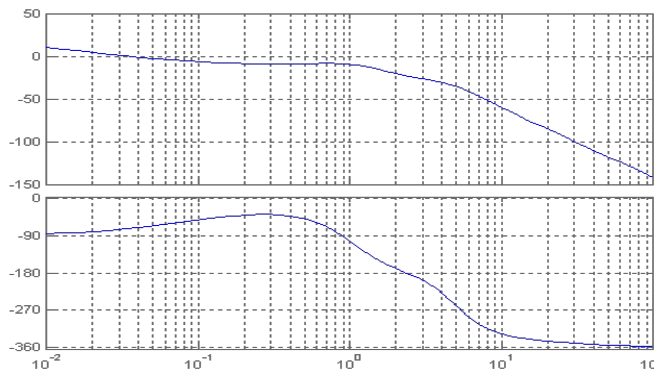
例3 绘制对数频率特性曲线。

$$G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)} = \frac{0.032\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{5}+1\right]}$$



坐标刻度规定:  $\begin{cases} 20\text{dB}/2\text{cm} \\ 90^\circ/2\text{cm} \end{cases}$

### 例3 绘制对数频率特性曲线。

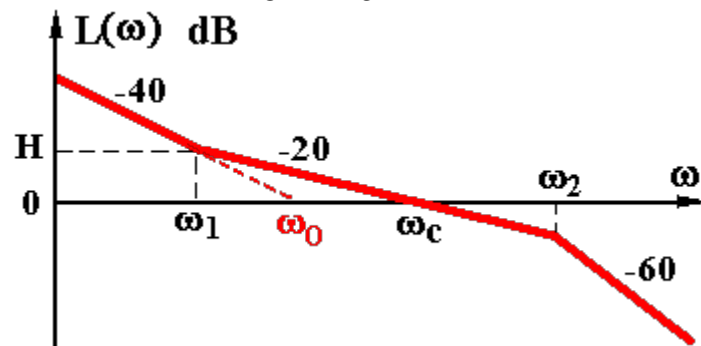


坐标刻度规定： $\begin{cases} 20\text{dB}/2\text{cm} \\ 90^\circ/2\text{cm} \end{cases}$

例4 已知 Bode 图, 确定  $G(s)$ , 已知  $\xi, \omega_1, \omega_2, \omega_0, \omega_c$

解

$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{s^2 \left( \frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}$$



解法I

$$20 \lg \frac{K}{\omega_0^2} = 0 \quad K = \omega_0^2$$

$$H = 40 [\lg \omega_0 - \lg \omega_1]$$

$$= 20 (\lg \omega_c - \lg \omega_1)$$

$$40 \lg \frac{\omega_0}{\omega_1} = 20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1}$$

$$\left( \frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 = \frac{\omega_c}{\omega_1} \quad K = \omega_0^2 = \omega_1 \omega_c$$

解法II  $|G(j\omega_c)| = 1 = \frac{K \frac{\omega_c}{\omega_1}}{\omega_c^2 \cdot 1} = \frac{K}{\omega_1 \omega_c}$

解法III  $\frac{\omega_c}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_1} \quad \omega_0^2 = \omega_1 \omega_c = K$

**K和 $\omega_0$ :**  $20 \lg \left| \frac{K}{s^v} \right|_{s=j\omega} = 20 \lg \left| \frac{K}{\omega^v} \right| = 0$

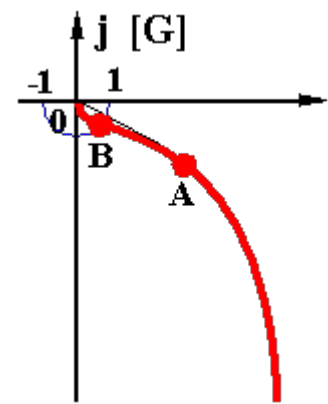
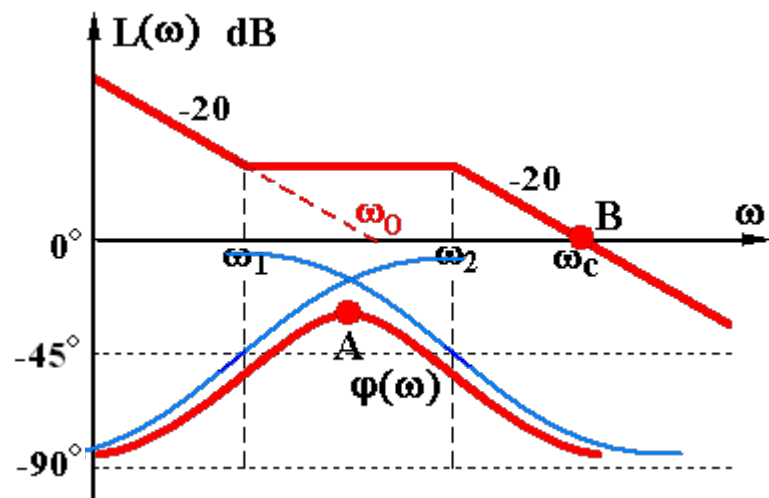
$$K = \omega_0^v \quad \omega_0 = K^{\frac{1}{v}}$$

例5 已知  $L(\omega)$ , 写出  $G(s)$ , 绘制  $\varphi(\omega)$ ,  $G(j\omega)$ 。

解 (1)  $G(s) = \frac{K(\frac{s}{\omega_1} + 1)}{s(\frac{s}{\omega_2} + 1)}$

I  $\frac{\omega_c}{\omega_2} = \frac{\omega_0}{\omega_1} \quad K = \omega_0 = \frac{\omega_1 \omega_c}{\omega_2}$

II  $|G(j\omega_c)| = 1 = \frac{K \frac{\omega_c}{\omega_1}}{\omega_c \cdot \frac{\omega_c}{\omega_2}} = \frac{K}{\frac{\omega_1 \omega_c}{\omega_2}}$

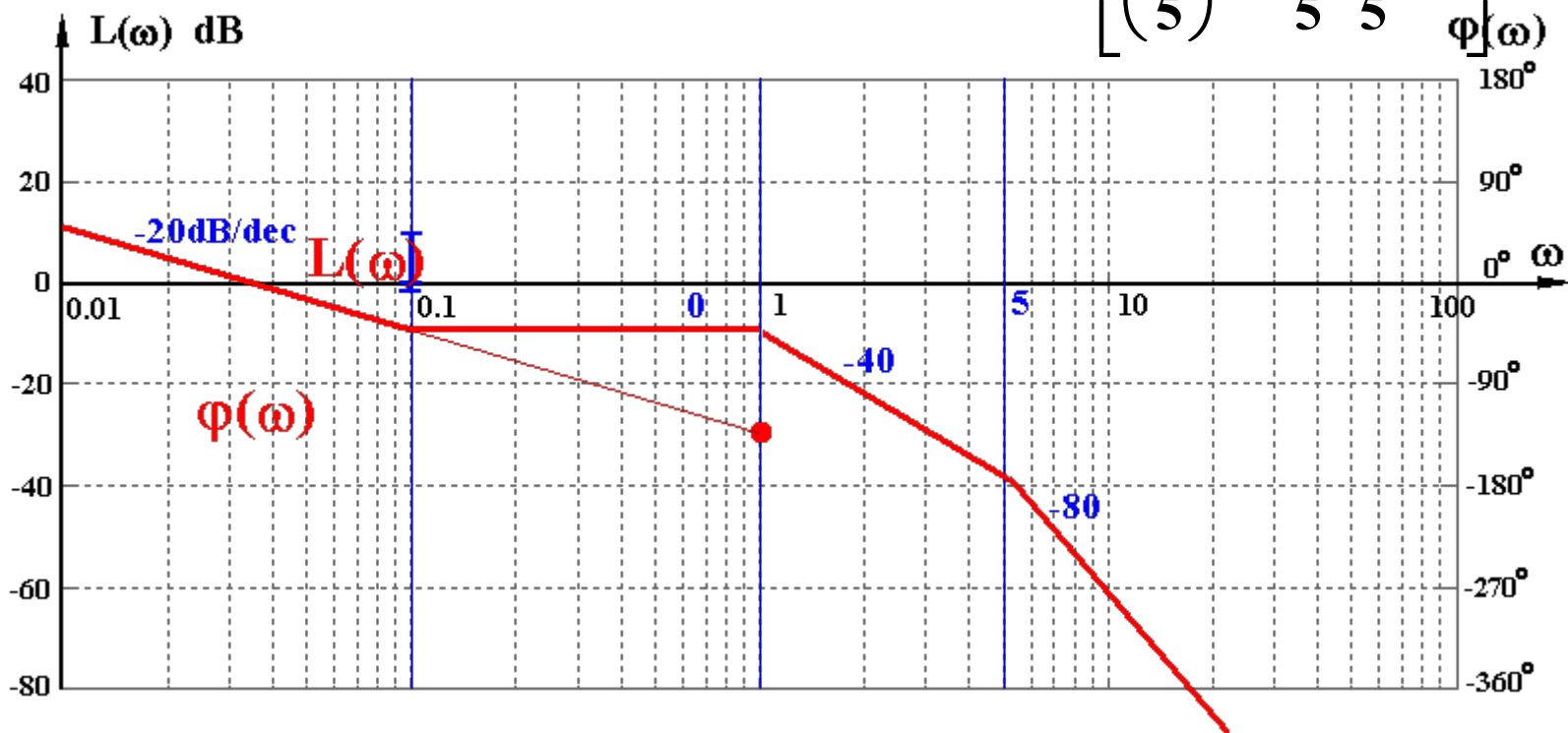


(2) 叠加作图

(3)  $G(j\omega) \begin{cases} G(j0) = \infty \angle -90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$

例3 绘制对数频率特性曲线。

$$G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)} = \frac{0.032\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{5}+1\right]}$$



---

开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6\left(\frac{s}{2.5} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{5} + 1\right)\left(\frac{s}{12.5} + 1\right)}$$

求剪切频率  $\omega_c$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20(\lg 6 - \lg \omega), & \omega < 2 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2}), & 2 < \omega < 2.5 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2} + \lg \frac{\omega}{2.5}), & 2.5 < \omega < 5 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2} + \lg \frac{\omega}{2.5} - \lg \frac{\omega}{5}), & 5 < \omega < 12.5 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2} + \lg \frac{\omega}{2.5} - \lg \frac{\omega}{5} - \lg \frac{\omega}{12.5}), & \omega > 12.5 \end{cases}$$

剪切频率  $\omega_c$  在 2.5 至 5 之间

$$L(\omega_c) = 20\left(\lg 6 - \lg \omega_c - \lg \frac{\omega_c}{2} + \lg \frac{\omega_c}{2.5}\right) = 0$$

---



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

谐振点:  $\begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$       转折点:  $\begin{cases} \omega = \omega_n \\ |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi} \\ \angle G(j\omega_n) = -90^\circ \end{cases}$

例  $G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)} = \frac{7.5(\frac{1}{3}s+1)}{s(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}s+1)}$

转折频率: 3, 2,  $\sqrt{2}$

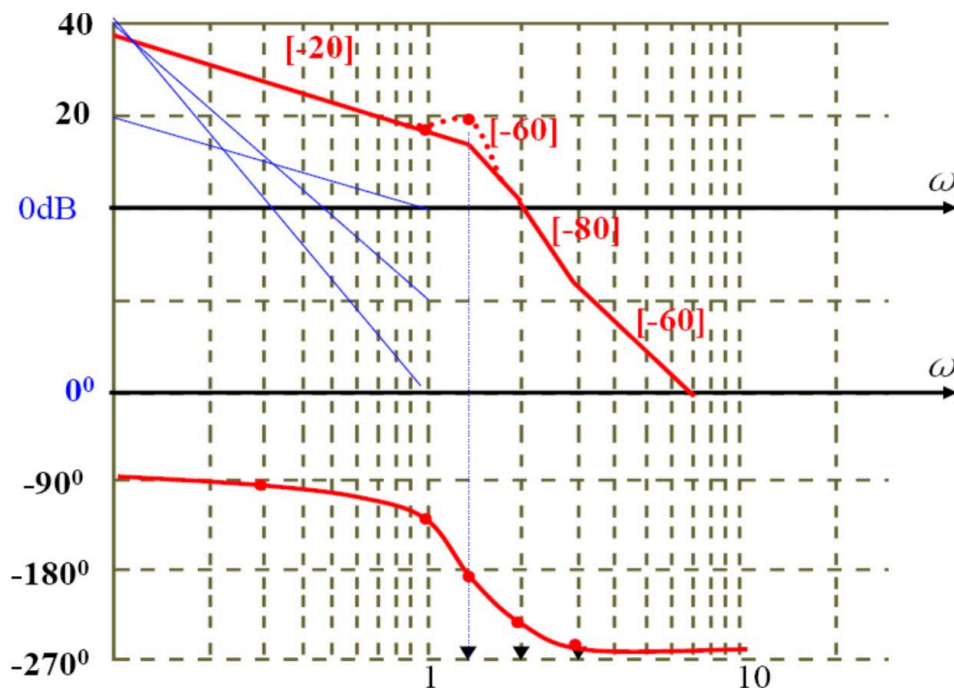
$$20 \lg K = 20 \lg 7.5 = 17.5 \text{ dB}$$

修正:  $\zeta = \frac{1}{2\omega_n} = 0.35$

$$20 \lg |G(j\omega_n)| = 20 \lg \frac{1}{2\xi} = 2.5 \text{ dB}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = 1.23$$

$$20 \lg \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 3.67$$



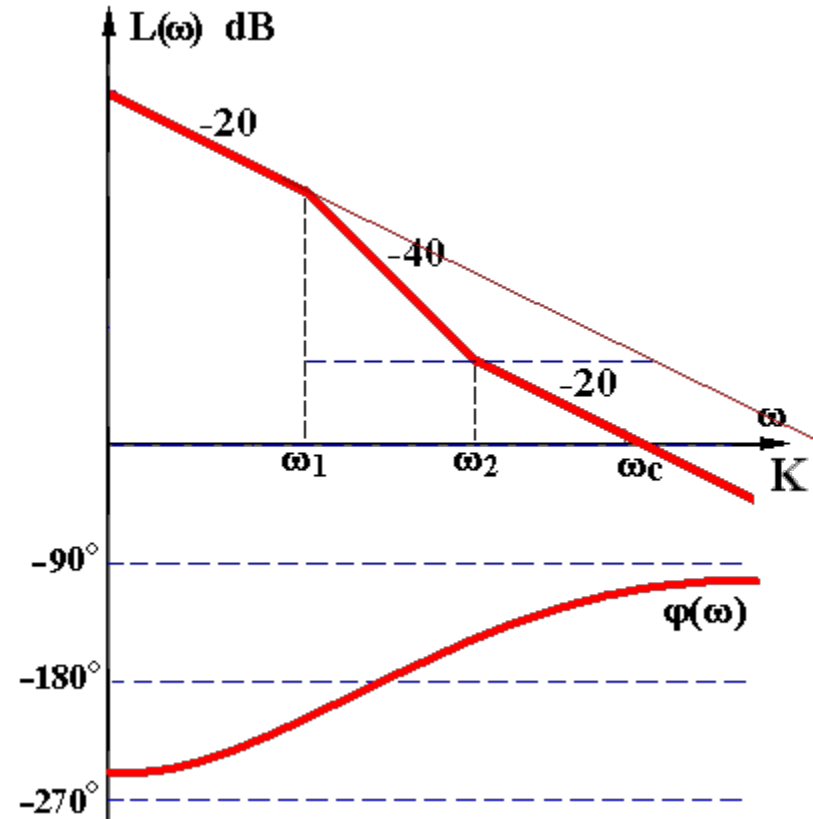
# 最小相位系统&非最小相位系统

例7 开环系统Bode图如图所示，求  $G(s)$ 。

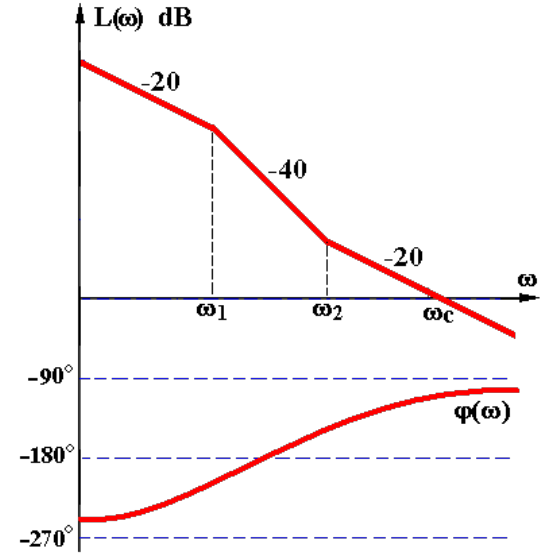
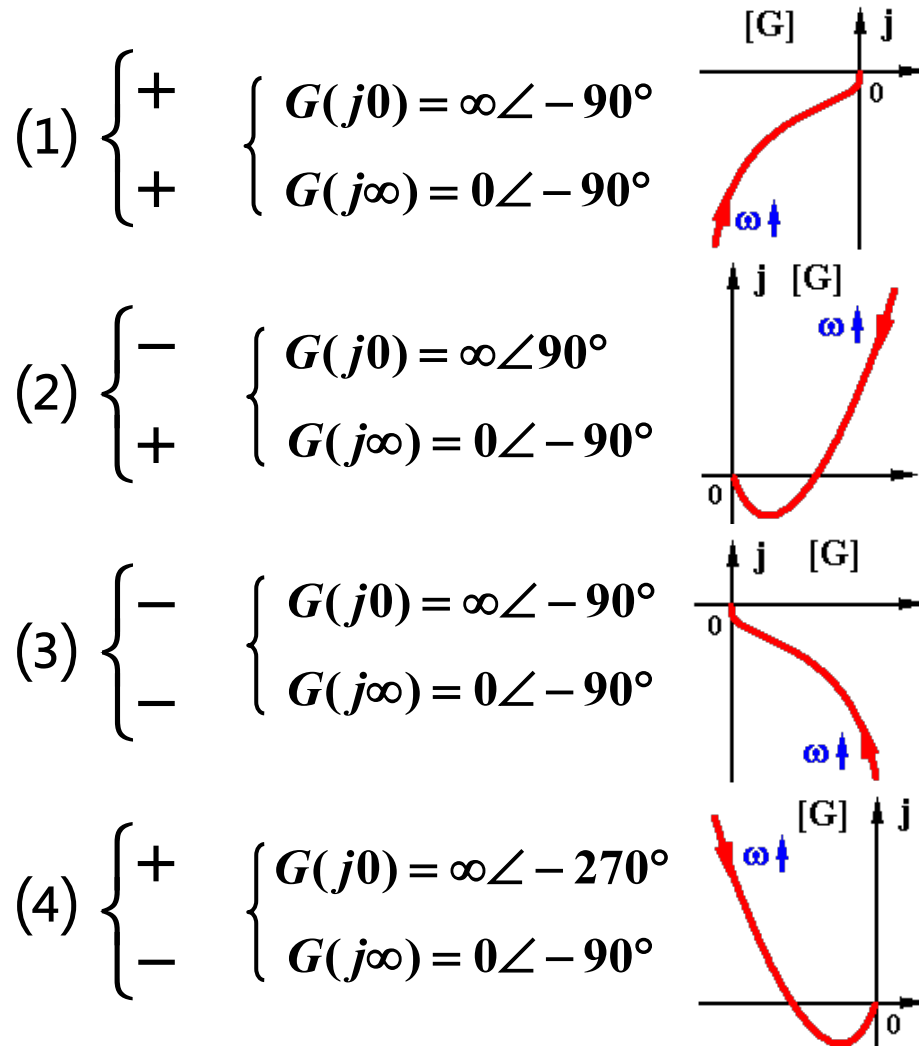
解 依题有 
$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_2} \pm 1 \right)}{s \left( \frac{s}{\omega_1} \pm 1 \right)}$$

求K: 
$$|G(j\omega)| = \frac{K \frac{\omega_c}{\omega_2}}{\omega_c \frac{\omega_c}{\omega_1}} = \frac{K}{\frac{\omega_c \omega_2}{\omega_1}} = 1$$

$$K = \frac{\omega_c \omega_2}{\omega_1}$$



$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_2} \pm 1 \right)}{s \left( \frac{s}{\omega_1} \pm 1 \right)}$$

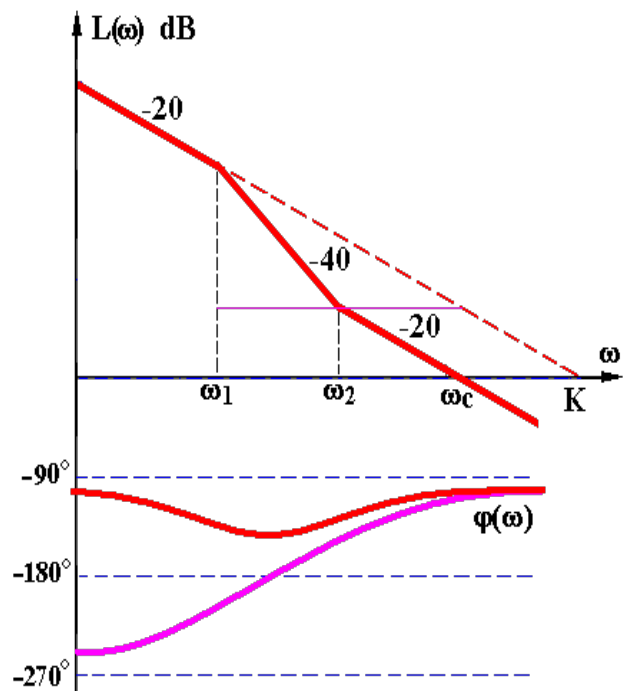


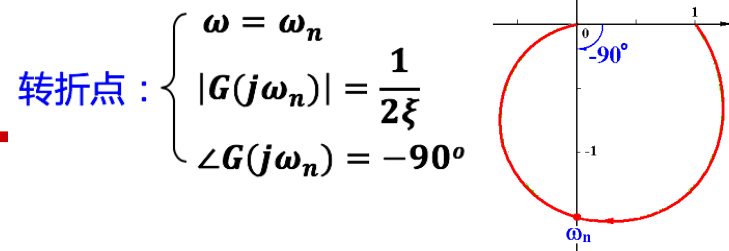
$$G(s) = \frac{\omega_c \omega_2 \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{\omega_1 s \left( \frac{s}{\omega_1} - 1 \right)}$$

# 非最小相位系统

—— 在右半 $s$ 平面存在开环零、极点或带纯延时环节的系统

- ★ 非最小相位系统相角变化的绝对值一般比最小相位系统的大
- ★ 非最小相位系统未必不稳定
- ★ 最小相位系统由 $L(\omega)$ 可以唯一确定 $G(s)$   
非最小相位系统由 $L(\omega)$ 不能唯一确定 $G(s)$





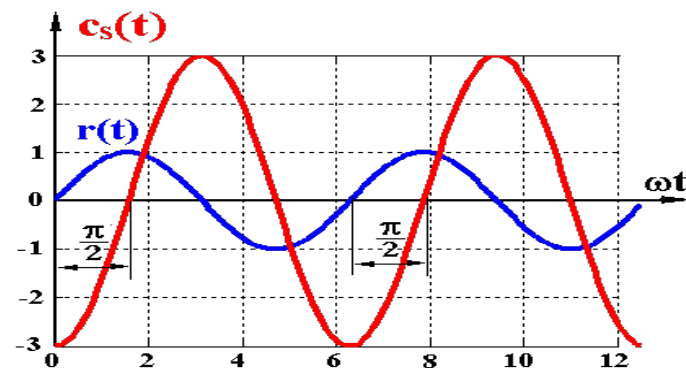
例6 已知某振荡环节，增益 $K=1.5$ ，当输入信号频率调到  $f=5/\pi$  Hz 时，其稳态输出 $c_s(t)$  如图所示，相角恰好延迟 $90^\circ$ ，试写出  $G(s)$ 表达式。

解 依题有 
$$G(s) = \frac{1.5\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{5}{\pi} = 10 \text{ rad/s}$$

$$|G| = \frac{1.5}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \stackrel{\omega=\omega_n=10}{=} \frac{1.5}{2\xi} = \frac{3}{1}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \stackrel{\omega=\omega_n=10}{=} -90^\circ$$



$$\begin{cases} \xi = \frac{1.5}{6} = 0.25 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{150}{s^2 + 5s + 100}$$

# 绘制系统开环Bode图的步骤

(1) 化 $G(s)$ 为频率特性标准型

(2) 顺序列出转折频率

(3) 确定基准线  $\left\{ \begin{array}{l} \text{基准点 } (\omega = 1, L(1) = 20 \lg K) \\ \text{斜率 } -20 \cdot \nu \text{ dB/dec} \end{array} \right. \left( \begin{array}{l} \text{第一转折频率之左} \\ \text{的特性及其延长线} \end{array} \right)$

(4) 叠加作图  $\left\{ \begin{array}{l} \text{一阶} \left\{ \begin{array}{l} \text{惯性环节 } -20\text{dB/dec} \\ \text{一阶微分 } +20\text{dB/dec} \end{array} \right. \\ \text{二阶} \left\{ \begin{array}{l} \text{振荡环节 } -40\text{dB/dec} \\ \text{二阶微分 } +40\text{dB/dec} \end{array} \right. \end{array} \right.$

(5) 修正  $\left\{ \begin{array}{l} \text{① 两惯性环节转折频率很接近时} \\ \text{② 振荡环节或二阶微分环节} \end{array} \right.$

(6) 检查  $\left\{ \begin{array}{l} \text{① } L(\omega) \text{ 最右端曲线斜率} = -20(n-m) \text{ dB/dec} \\ \text{② 转折点数} = (\text{惯性}) + (\text{一阶微分}) + (\text{振荡}) + (\text{二阶微分}) \\ \text{③ } \varphi(\omega) \Rightarrow -90^\circ (n-m) \end{array} \right.$

---

开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6(\frac{s}{2.5} + 1)}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{12.5} + 1)}$$

求剪切频率  $\omega_c$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20(\lg 6 - \lg \omega), & \omega < 2 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2}), & 2 < \omega < 2.5 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2} + \lg \frac{\omega}{2.5}), & 2.5 < \omega < 5 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2} + \lg \frac{\omega}{2.5} - \lg \frac{\omega}{5}), & 5 < \omega < 12.5 \\ 20(\lg 6 - \lg \omega - \lg \frac{\omega}{2} + \lg \frac{\omega}{2.5} - \lg \frac{\omega}{5} - \lg \frac{\omega}{12.5}), & \omega > 12.5 \end{cases}$$

剪切频率  $\omega_c$  在 2.5 至 5 之间

$$L(\omega_c) = 20 \left( \lg 6 - \lg \omega_c - \lg \frac{\omega_c}{2} + \lg \frac{\omega_c}{2.5} \right) = 0$$

---

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

谐振点:  $\begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$       转折点:  $\begin{cases} \omega = \omega_n \\ |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi} \\ \angle G(j\omega_n) = -90^\circ \end{cases}$

例  $G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)} = \frac{7.5(\frac{1}{3}s+1)}{s(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}s+1)}$

转折频率: 3, 2,  $\sqrt{2}$

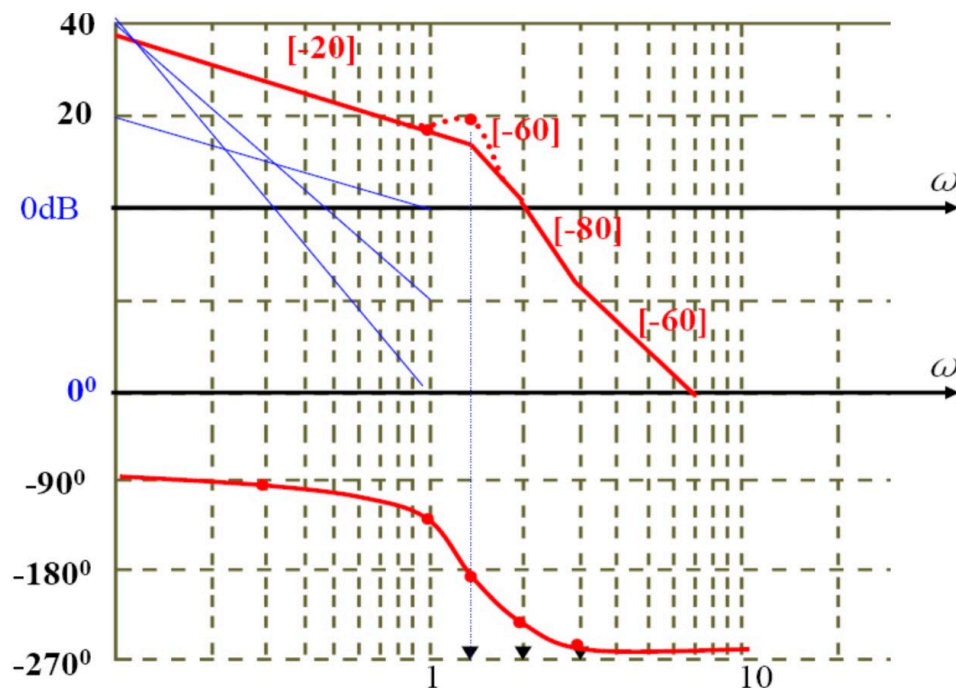
$$20 \lg K = 20 \lg 7.5 = 17.5 \text{ dB}$$

修正:  $\zeta = \frac{1}{2\omega_n} = 0.35$

$$20 \lg |G(j\omega_n)| = 20 \lg \frac{1}{2\xi} = 2.5 \text{ dB}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = 1.23$$

$$20 \lg \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 3.67$$





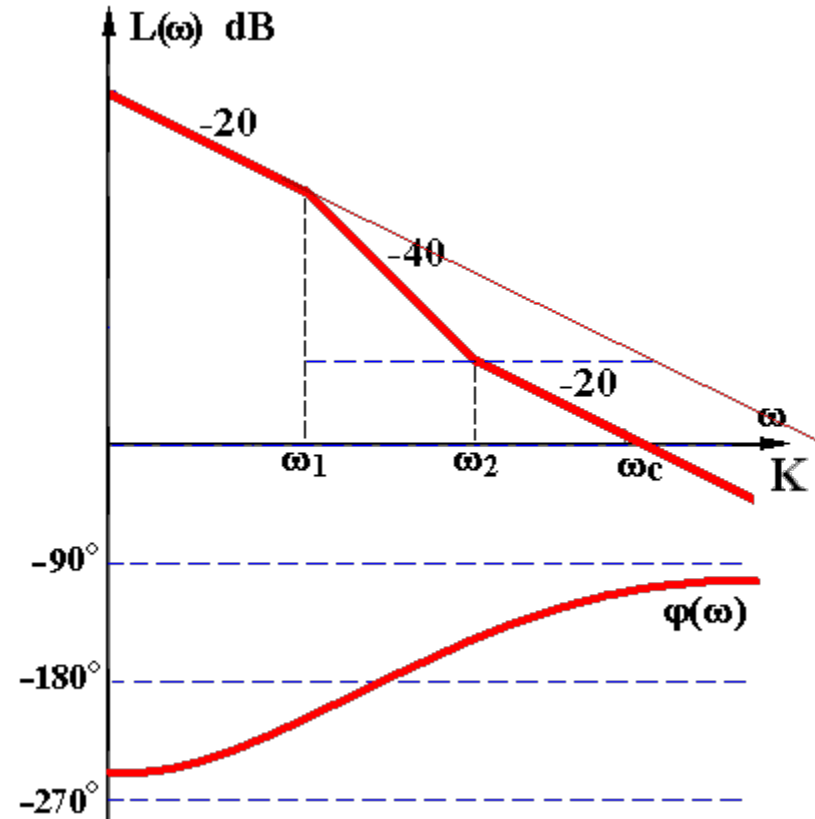
# 最小相位系统&非最小相位系统

例7 开环系统Bode图如图所示，求  $G(s)$ 。

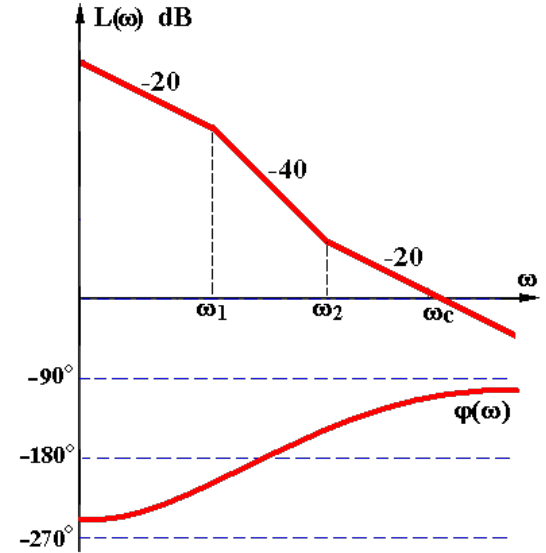
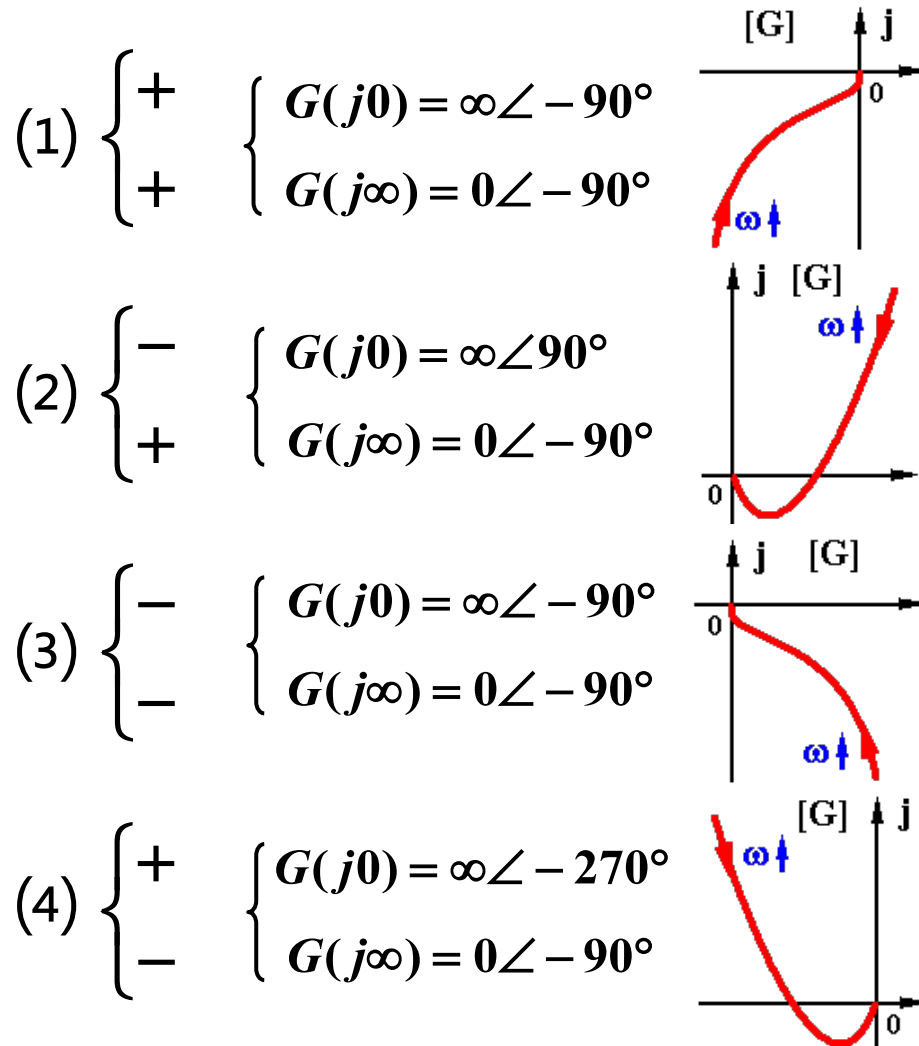
解 依题有 
$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_2} \pm 1 \right)}{s \left( \frac{s}{\omega_1} \pm 1 \right)}$$

求K: 
$$|G(j\omega)| = \frac{K \frac{\omega_c}{\omega_2}}{\omega_c \frac{\omega_c}{\omega_1}} = \frac{K}{\frac{\omega_c \omega_2}{\omega_1}} = 1$$

$$K = \frac{\omega_c \omega_2}{\omega_1}$$



$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_2} \pm 1 \right)}{s \left( \frac{s}{\omega_1} \pm 1 \right)}$$

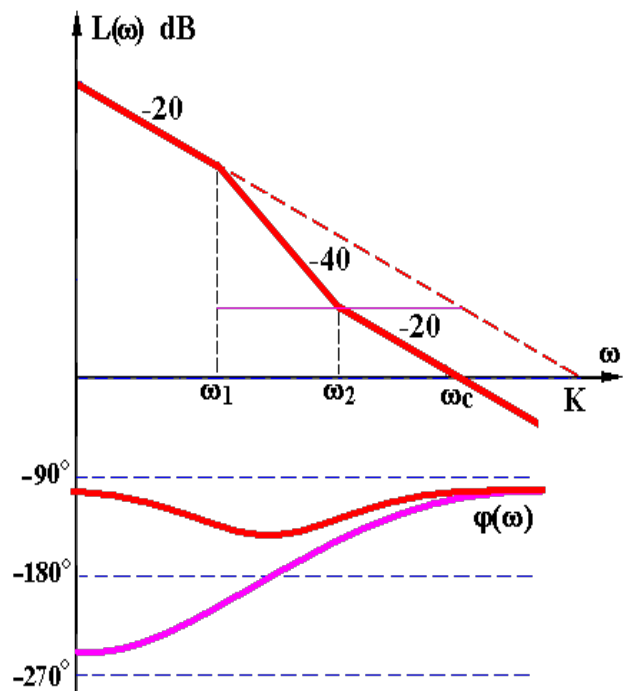


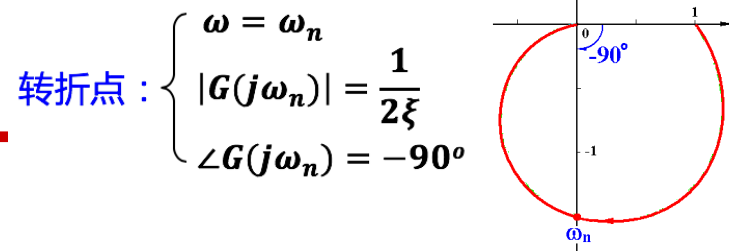
$$G(s) = \frac{\omega_c \omega_2 \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{\omega_1 s \left( \frac{s}{\omega_1} - 1 \right)}$$

# 非最小相位系统

—— 在右半 $s$ 平面存在开环零、极点或带纯延时环节的系统

- ★ 非最小相位系统相角变化的绝对值一般比最小相位系统的大
- ★ 非最小相位系统未必不稳定
- ★ 最小相位系统由 $L(\omega)$ 可以唯一确定 $G(s)$   
非最小相位系统由 $L(\omega)$ 不能唯一确定 $G(s)$





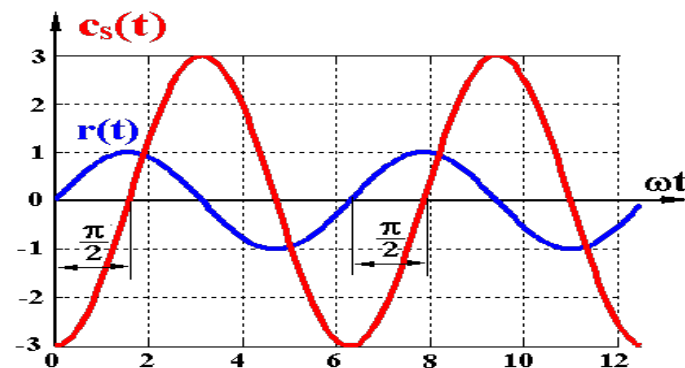
例6 已知某振荡环节，增益 $K=1.5$ ，当输入信号频率调到  $f=5/\pi$  Hz 时，其稳态输出 $c_s(t)$  如图所示，相角恰好延迟 $90^\circ$ ，试写出  $G(s)$ 表达式。

解 依题有 
$$G(s) = \frac{1.5\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{5}{\pi} = 10 \text{ rad/s}$$

$$|G| = \frac{1.5}{\sqrt{[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi \frac{\omega}{\omega_n}]^2}} \stackrel{\omega=\omega_n=10}{=} \frac{1.5}{2\xi} = \frac{3}{1}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \stackrel{\omega=\omega_n=10}{=} -90^\circ$$



$$\begin{cases} \xi = \frac{1.5}{6} = 0.25 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{150}{s^2 + 5s + 100}$$

# 第5章 线性系统的频域分析方法

---

## 5.1 频率特性的基本概念、几何表示法

## 5.2 典型环节的频率特性

## 5.3 控制系统的频率特性

### 5.3.1 幅相频率特性 (Nyquist 图)

### 5.3.2 对数幅频特性 (Bode 图)

## 5.4 频率域稳定判据

### 5.4.1 Nyquist 稳定判据

### 5.4.2 对数稳定判据

---

# 频率域稳定判据

---

系统稳定的充要条件 — 全部闭环极点均具有负的实部

代数稳定判据 — Routh判据

- 由闭环特征多项式系数（不解根）判定系统稳定性
- 不能用于研究如何调整系统结构来改善系统稳定性的问题

频域稳定判据 — 

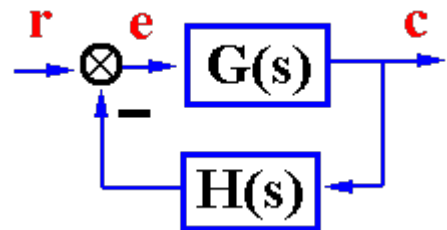
- Nyquist 判据
- 对数稳定判据

- 由开环频率特性直接判定闭环系统的稳定性
  - 可以研究包含延迟环节的系统的稳定性问题
  - 可研究如何调整系统结构参数改善系统稳定性及性能问题
-



# 数学基础：复变函数 $F(s)$

考虑系统结构图为： $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$



$(m \leq n)$

$$G(s)H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}$$

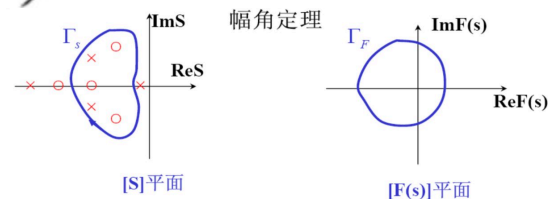
辅助函数

$$\text{定义: } F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

显然： $F(s)$ 的零点——系统的闭环极点 ( $n$ 个)

$F(s)$ 的极点——系统的开环极点 ( $n$ 个)

$$\underline{F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

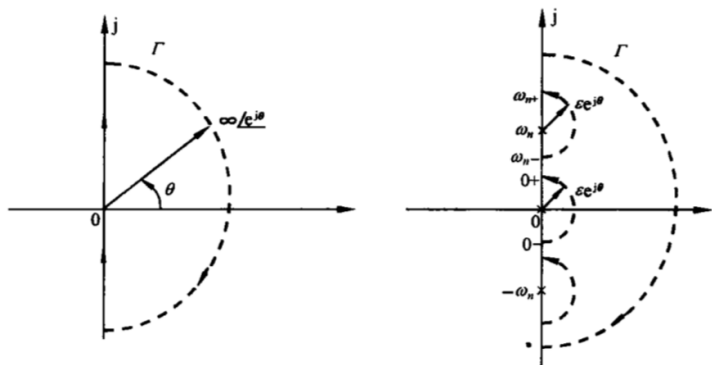


幅角定理:

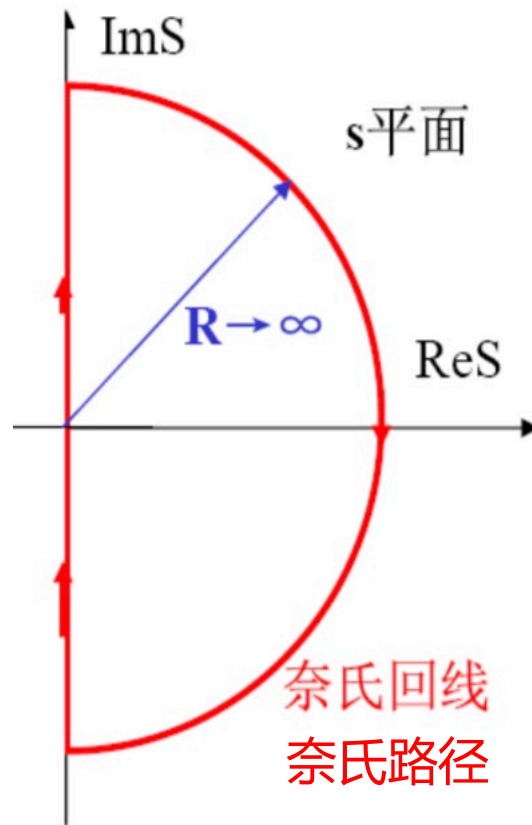
当  $s$  沿  $\Gamma_s$  顺时针转一圈时，其映射曲线  $\Gamma_F$  绕  $F(s)$  平面的原点  
逆时针转  $R=P-Z$  圈。



# 数学基础：S平面闭合曲线 $\Gamma$



$\Gamma_s$  如图所示。



$\Gamma_s$  不经过 $F(s)$ 的零点，也不经过 $F(s)$ 的极点。  
 $\Gamma_s$  内包含了 $Z$ 个 $F(s)$ 的零点， $P$ 个 $F(s)$ 的极点。

## 幅角定理：

当 $s$ 沿 $\Gamma_s$ 顺时针转一圈时，其映射曲线 $\Gamma_F$ 绕 $F(s)$ 平面的原点  
 逆时针转 $R=P-Z$ 圈。

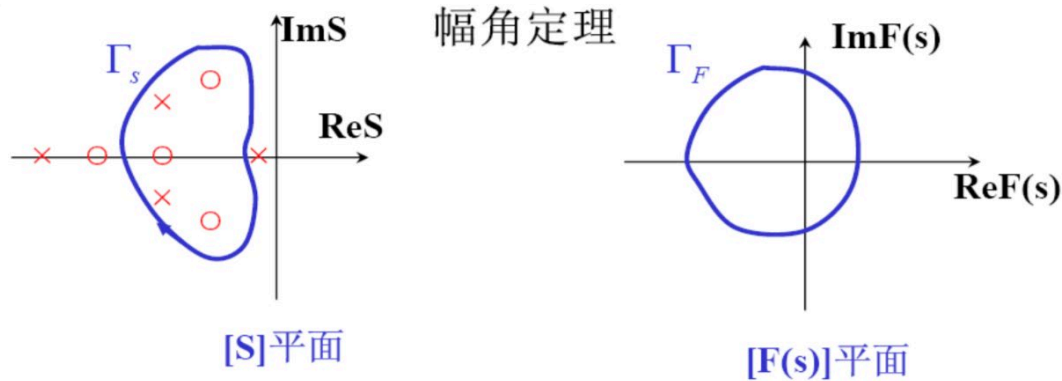
$F(s)$ 的零点——系统的闭环极点

$F(s)$ 的极点——系统的开环极点

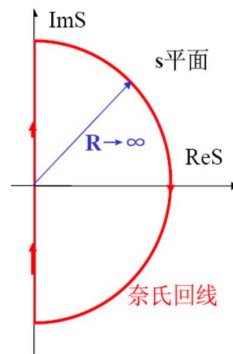
$$F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

# 数学基础：幅角定理



$\Gamma_s$  如图所示。



$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

$$F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$$

## 幅角定理：

当s沿 $\Gamma_s$ 顺时针转一圈时，其映射曲线 $\Gamma_F$ 绕F(s)平面的原点  
逆时针转R=P-Z圈。

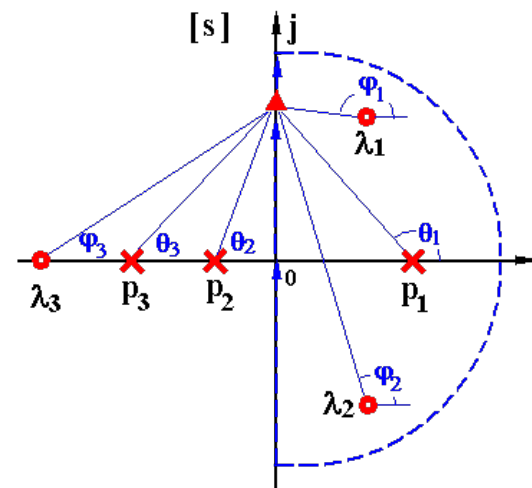
规定： R>0——逆时针， R<0——顺时针

# 数学基础： $G(s)H(s)$ 闭合曲线的绘制

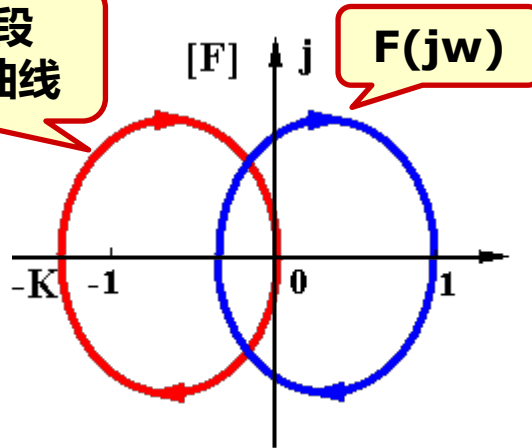
$$\text{设 } G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s-P_1)(s-P_2)(s-P_3)} \quad \begin{cases} K \angle -180^\circ \\ K \angle -180^\circ \end{cases}$$

设  $F(s)$  在右半  $s$  平面有  $\begin{cases} Z \text{ 个零点 (闭环极点)} & Z=2 \\ P \text{ 个极点 (开环极点)} & P=1 \end{cases}$

$$F(s) = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$



开环全频段  
Nyquist曲线



$s$  绕奈氏路径转过一周,

$F(j\omega)$  绕  $[F]$  平面原点转过的角度  $\varphi_F(\omega)$  为

$$\angle F(j\omega) = -2\pi(Z - P) = 2\pi(P - Z) = 2\pi R$$

$$Z = P - R = P - 2N$$

$$R = P - Z$$

- $R$ :  $s$  绕奈氏路径一周时,  $F(j\omega)$  包围  $[F]$  平面  $(0, j0)$  点的圈数
- $N$ :  $s$  绕奈氏路径一周时, 开环幅相曲线包围  $[G]$  平面  $(-1, j0)$  点的圈数

# 奈奎斯特(Nyquist) 稳定判据

1) 系统稳定  $\iff$

当  $s$  沿  $\Gamma_s$  顺转1圈时,  $\Gamma_s$  在  $GH$  平面上的映射曲线  $\Gamma_{GH}$  不经过  $(-1, j0)$  点, 且  $\Gamma_{GH}$  绕  $(-1, j0)$  点逆时针旋转的圈数  $R$  等于系统在  $s$  右半平面内的开环极点个数  $P$ 。

2) 当系统不稳定时, 右半平面的闭环极点个数为  $Z=P-R$ 。

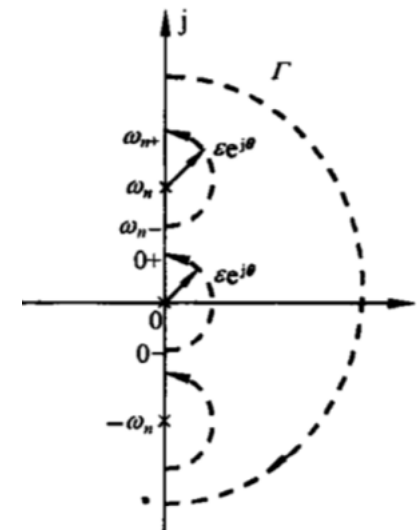
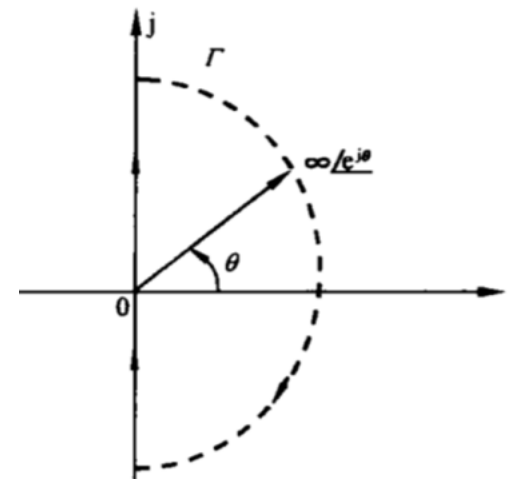
$\Gamma_s$  不经过  $F(s)$  的零点, 也不经过  $F(s)$  的极点。

**奈奎斯特稳定判据  $Z = P - 2N$**

**$Z$ : 在右半  $s$  平面中的闭环极点个数**

**$P$ : 在右半  $s$  平面中的开环极点个数**

**$N$ : 开环幅相曲线  $G(j\omega)H(j\omega)$  包围  $(-1, j0)$  点的圈数**



$$Z = P - R = P - 2N$$

例 1：某系统的开环传递函数如下，判断系统的稳定性。

$$G(s)H(s) = \frac{52}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

解：其开环全频段的 Nyquist 曲线顺时针包围  $(-1, j0)$  点 2 圈，因此

$$R = -2, N = -1$$

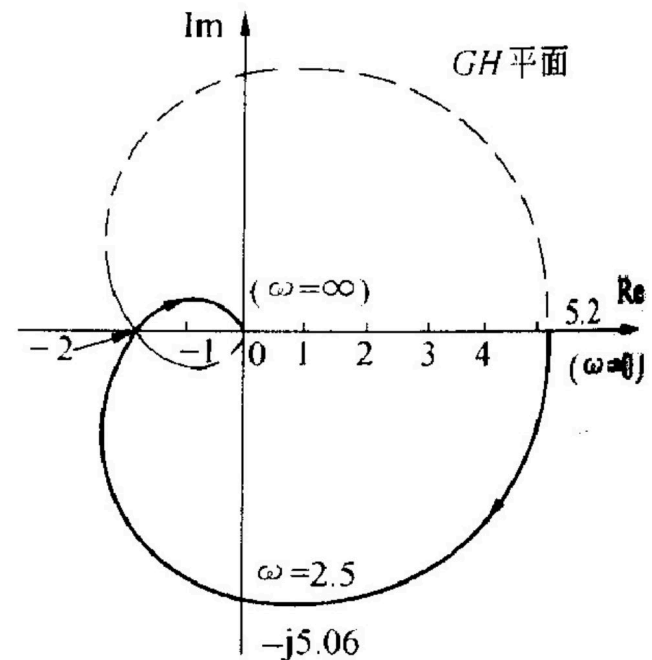
很显然，开环不稳定极点个数

$$P = 0$$

于是，闭环不稳定极点个数

$$Z = P - R = P - 2N = 0 - (-2) = 2$$

闭环系统不稳定。



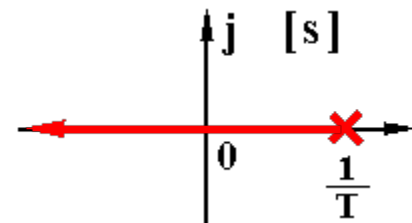
$$Z = P - 2N$$

例1 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

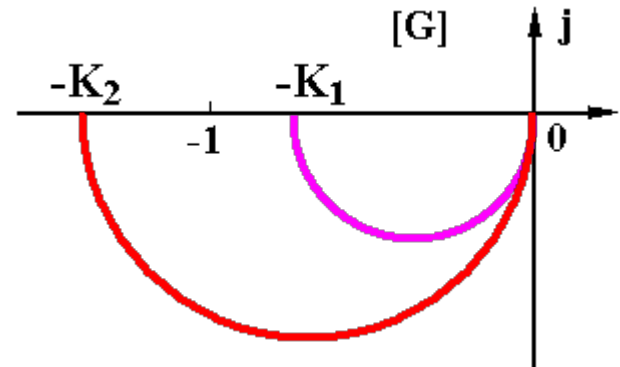
$$G(s) = \frac{K}{Ts - 1} \quad D(s) = Ts - 1 + K = 0, \quad \lambda = \frac{1-K}{T}$$

解 依题有

$$\begin{cases} G(j0) = K \angle -180^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$$



$$K = \begin{cases} K_1 < 1 & N = 0 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times 0 = 1 \\ K_2 > 1 & N = \frac{1}{2} & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$



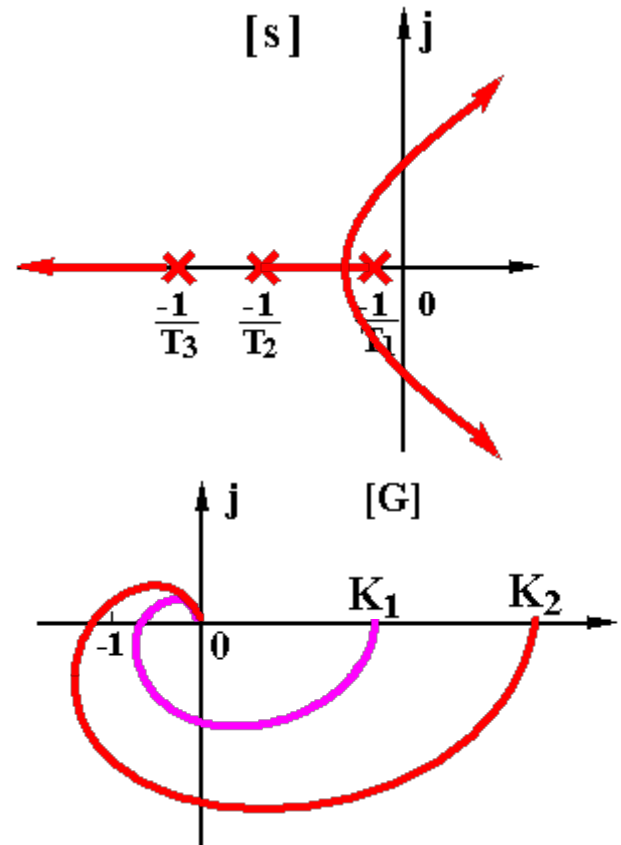
$$Z = P - 2N$$

例2 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

解 依题有  $\begin{cases} G(j0) = K \angle 0^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N = 0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N = -1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2(-1) = 2 \end{cases}$$



$\Gamma_s$  不经过F(s)的零点, 也不经过F(s)的极点。  $Z = P - 2N$

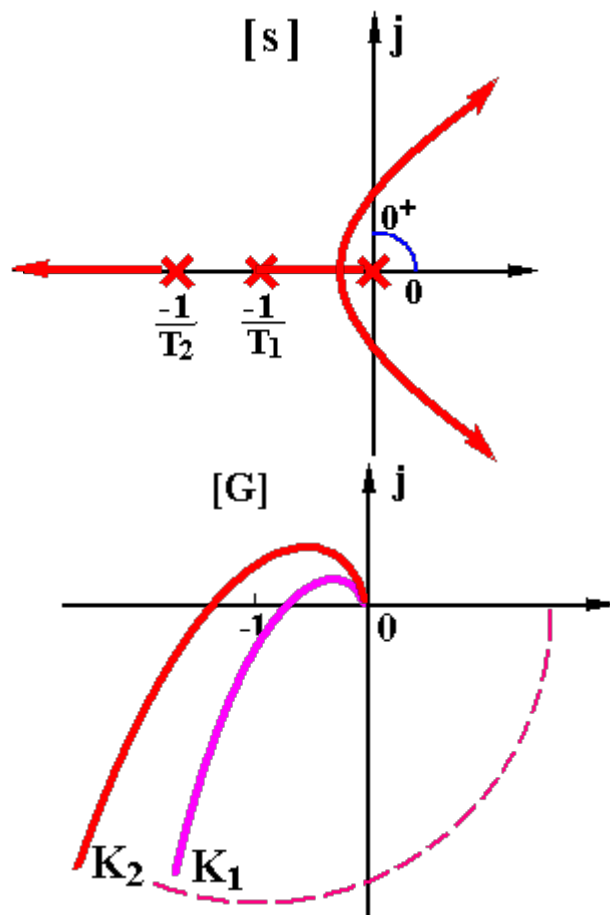
例3 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

解 依题有

$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle 0^\circ \\ G(j0^+) = \infty \angle -90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N = 0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N = -1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \end{cases}$$



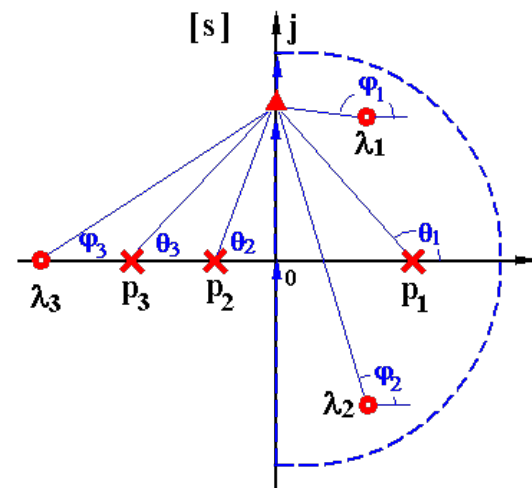


# 数学基础： $G(s)H(s)$ 闭合曲线的绘制

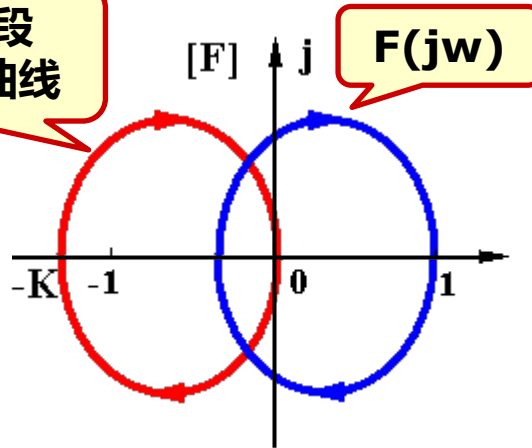
$$\text{设 } G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s-P_1)(s-P_2)(s-P_3)} \quad \begin{cases} K \angle -180^\circ \\ K \angle -180^\circ \end{cases}$$

设  $F(s)$  在右半  $s$  平面有  $\begin{cases} Z \text{ 个零点 (闭环极点)} & Z=2 \\ P \text{ 个极点 (开环极点)} & P=1 \end{cases}$

$$F(s) = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$



开环全频段  
Nyquist曲线



$s$  绕奈氏路径转过一周,

$F(j\omega)$  绕  $[F]$  平面原点转过的角度  $\varphi_F(\omega)$  为

$$\angle F(j\omega) = -2\pi(Z - P) = 2\pi(P - Z) = 2\pi R$$

$$Z = P - R = P - 2N$$

$$R = P - Z$$

- $R$ :  $s$  绕奈氏路径一周时,  $F(j\omega)$  包围  $[F]$  平面  $(0, j0)$  点的圈数
- $N$ :  $s$  由  $s=0$  沿虚轴  $\rightarrow$  无穷时, 开环幅相曲线包围  $[G]$  平面  $(-1, j0)$  点的圈数

# 奈奎斯特(Nyquist) 稳定判据

1) 系统稳定  $\iff$

当  $s$  沿  $\Gamma_s$  顺转1圈时,  $\Gamma_s$  在  $GH$  平面上的映射曲线  $\Gamma_{GH}$  不经过  $(-1, j0)$  点, 且  $\Gamma_{GH}$  绕  $(-1, j0)$  点逆时针旋转的圈数  $R$  等于系统在  $s$  右半平面内的开环极点个数  $P$ 。

2) 当系统不稳定时, 右半平面的闭环极点个数为  $Z=P-R$ 。

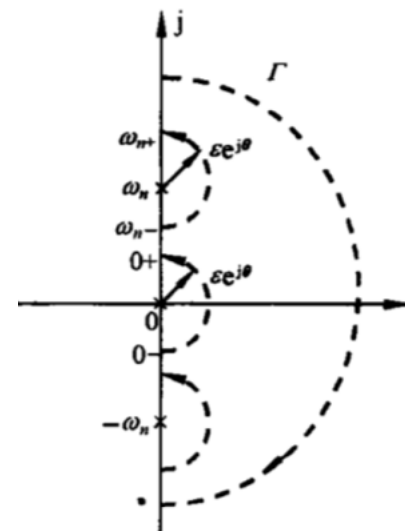
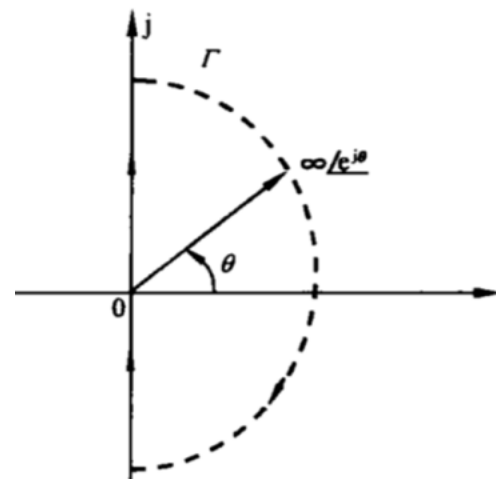
$\Gamma_s$  不经过  $F(s)$  的零点, 也不经过  $F(s)$  的极点。

**奈奎斯特稳定判据  $Z = P - 2N$**

**$Z$ : 在右半  $s$  平面中的闭环极点个数**

**$P$ : 在右半  $s$  平面中的开环极点个数**

**$N$ : 开环幅相曲线  $G(j\omega)H(j\omega)$  包围  $(-1, j0)$  点的圈数**



$$Z = P - R = P - 2N$$

例 1：某系统的开环传递函数如下，判断系统的稳定性。

$$G(s)H(s) = \frac{52}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

解：其开环全频段的 Nyquist 曲线顺时针包围  $(-1, j0)$  点 2 圈，因此

$$R = -2, N = -1$$

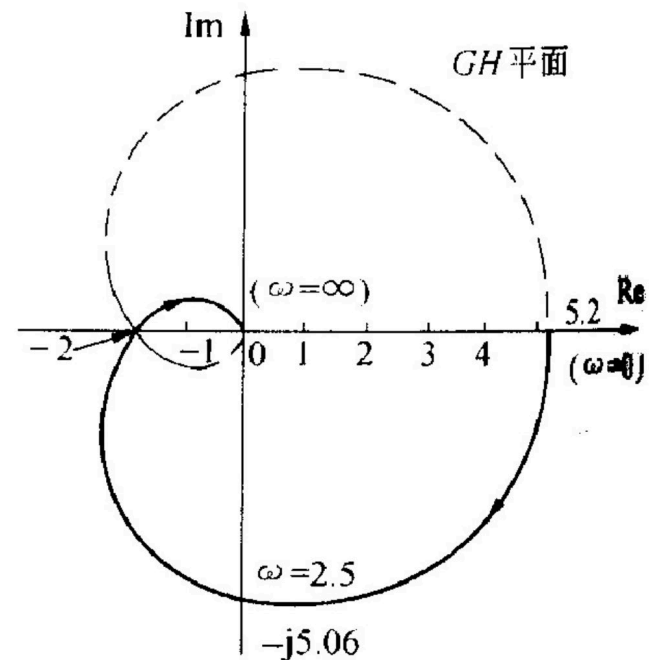
很显然，开环不稳定极点个数

$$P = 0$$

于是，闭环不稳定极点个数

$$Z = P - R = P - 2N = 0 - (-2) = 2$$

闭环系统不稳定。



$$Z = P - 2N$$

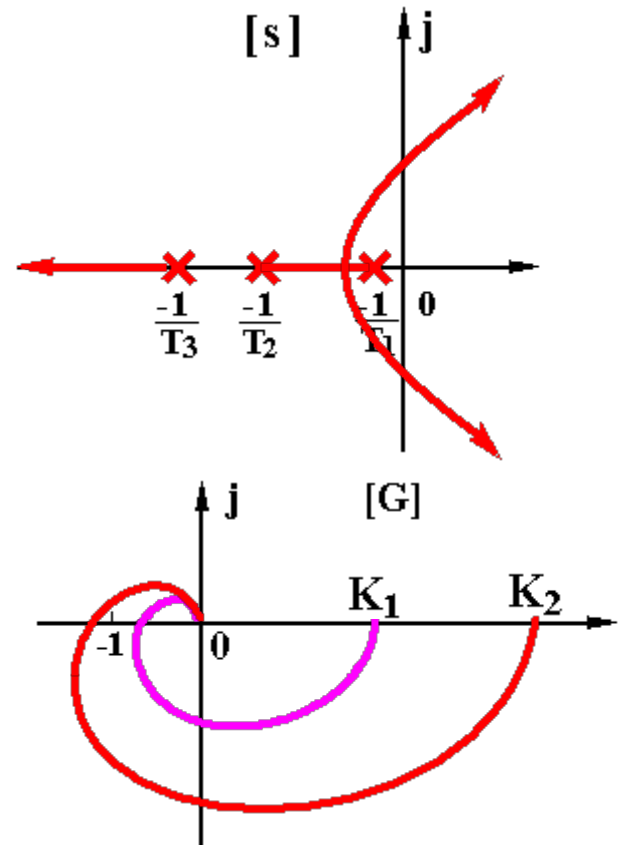
例2 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

解 依题有

$$\begin{cases} G(j0) = K \angle 0^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N = 0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N = -1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2(-1) = 2 \end{cases}$$



$$Z = P - 2N$$

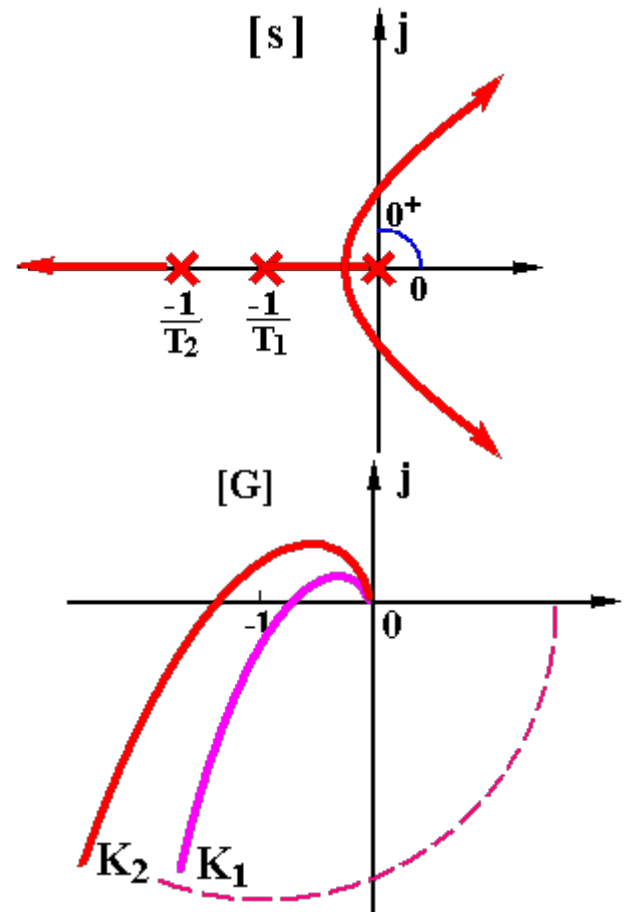
例3 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

解 依题有

$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle 0^\circ \\ G(j0^+) = \infty \angle -90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N = 0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N = -1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \end{cases}$$



$\Gamma_s$  不经过 $F(s)$ 的零点, 也不经过 $F(s)$ 的极点。

$$Z = P - 2N$$

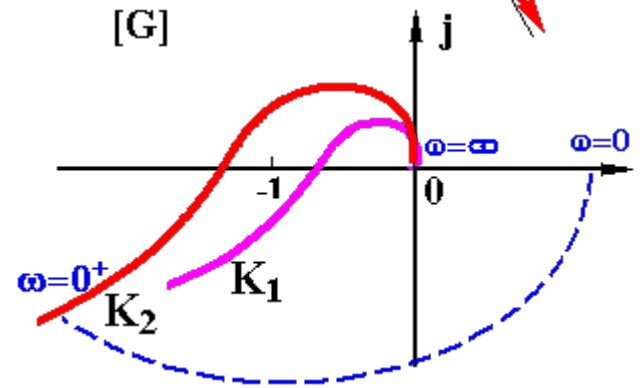
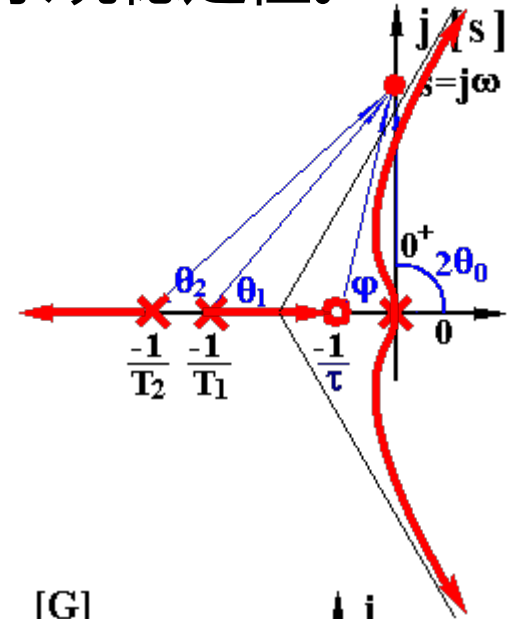
例4 已知单位反馈系统开环传递函数, 分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad \tau > T_1 > T_2$$

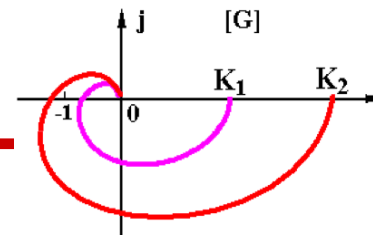
解 依题有

$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle 0^\circ \\ G(j0^+) = \infty \angle -180^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N = 0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N = -1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \end{cases}$$



# N 的确定

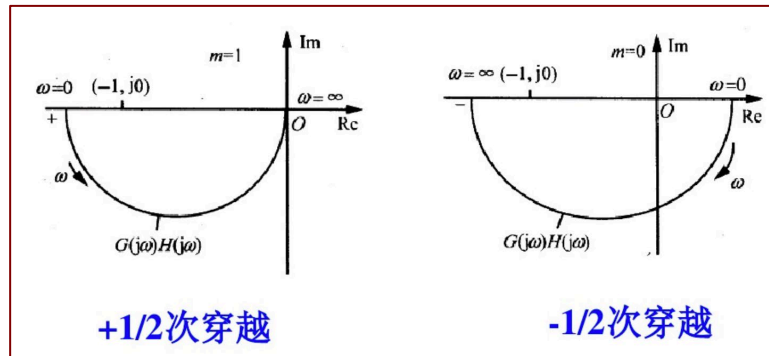
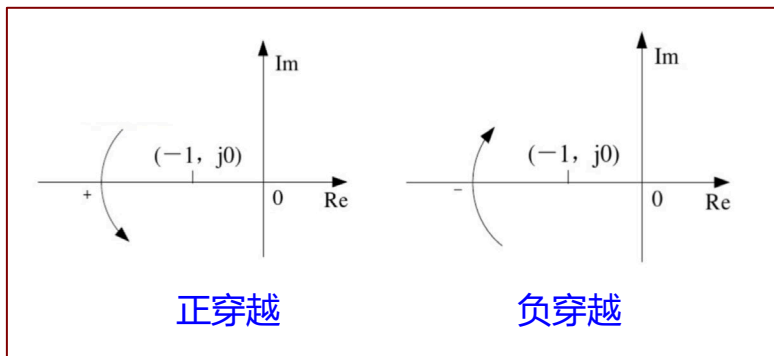


$N = N_+ - N_-$   
 $N_+$  : 正穿越次数  
 $N_-$  : 负穿越次数

**穿越:** 开环Nyquist曲线穿过(-1, j0)点左边实轴

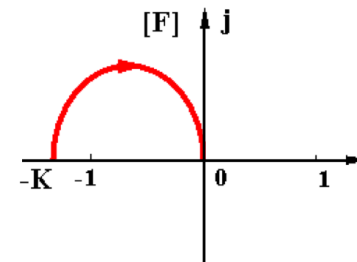
**正穿越:**  $\omega$ 增大时, Nyquist曲线由上而下穿越

**负穿越:**  $\omega$ 增大时, Nyquist曲线由下而上穿越



**半次穿越:** 开环Nyquist曲线起始或终止于(-1, j0)点以左的负实轴, 则穿越次数为半次, 且同样有+1/2次穿越和-1/2次穿越

$$Z = P - R = P - 2N$$



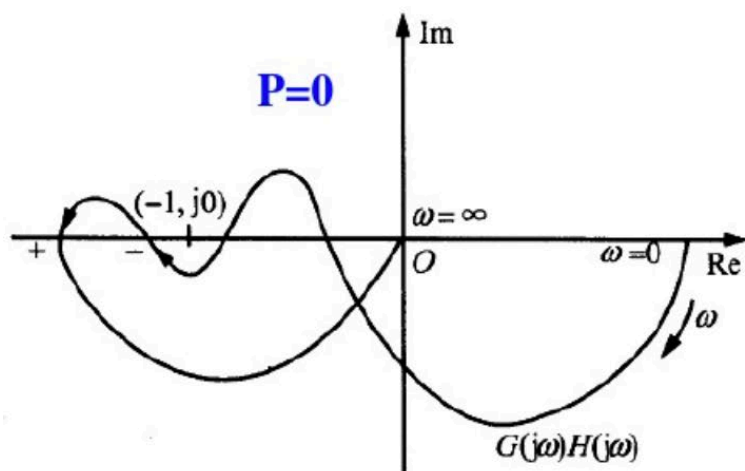
$$N = N_+ - N_-$$

$$Z = P - R = P - 2N$$

**正穿越：** Nyquist曲线由上而下穿越

**负穿越：** Nyquist曲线由下而上穿越

例 2：两系统的开环Nyquist曲线如下图所示，图中所标注的P表示开环不稳定极点的个数，试判断闭环系统的稳定性。

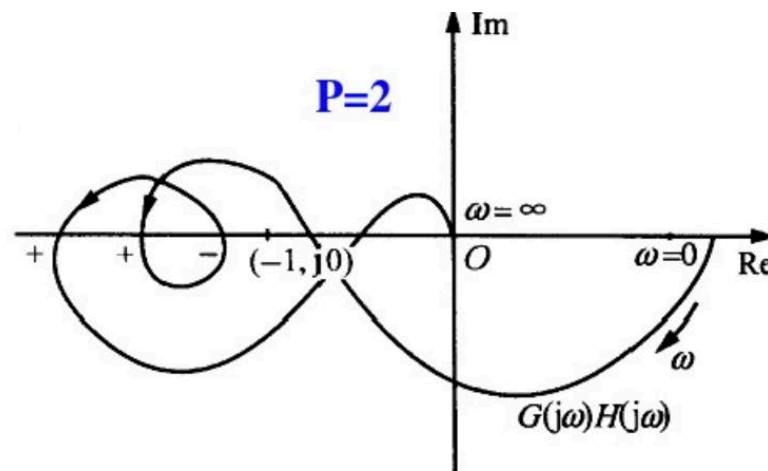


$$N_+ = 1, N_- = 1$$

$$N = N_+ - N_- = 0$$

$$Z = P - 2N = 0 - 0 = 0$$

**闭环系统稳定**



$$N_+ = 2, N_- = 1$$

$$N = N_+ - N_- = 1$$

$$Z = P - 2N = 2 - 2 = 0$$

**闭环系统稳定**



# 奈奎斯特稳定判据

---

奈奎斯特稳定判据  $Z = P - 2N$

$Z$ : 在右半s平面中的闭环极点个数

$P$ : 在右半s平面中的开环极点个数

$N$ : 开环幅相曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 包围 $(-1, j0)$ 点的圈数

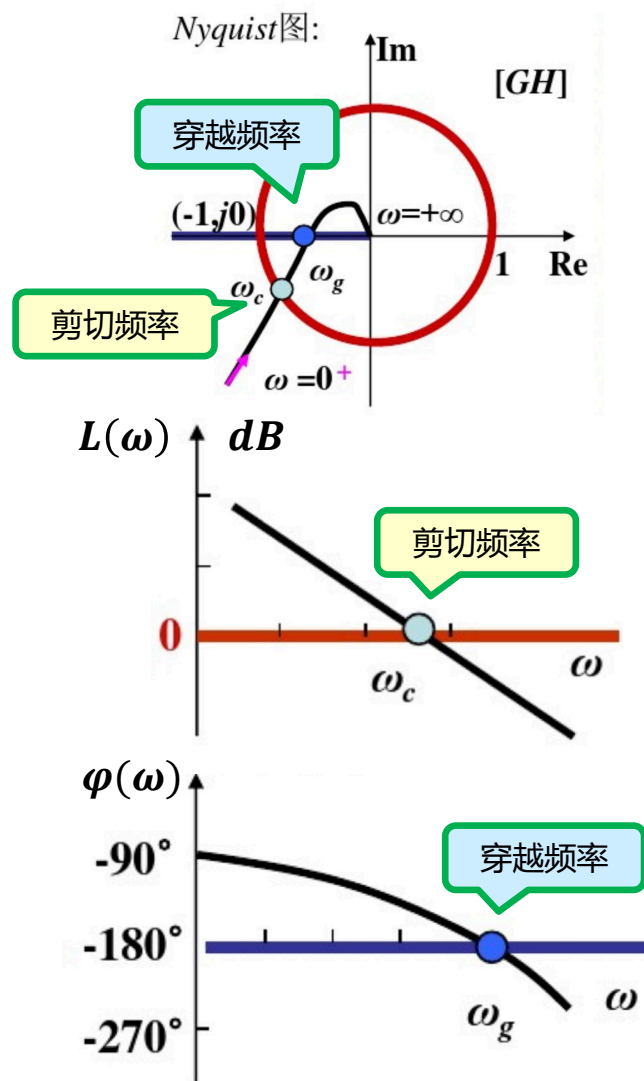
1. 当[s]平面虚轴上有开环极点时，奈氏路径要从其右边绕出半径为无穷小的圆弧；[G]平面对应要补充大圆弧
2.  $N$ 的最小单位为二分之一

3.  $Z \begin{cases} > 0 & \text{闭环系统不稳定} \\ = 0 & \text{闭环系统稳定} \\ < 0 & \text{有误!} \end{cases}$
-

# 对数频率稳定判据

## Nyquist 图与 Bode 图的对应关系

- Nyquist 图上的单位圆与Bode图上的0dB线对应
  - 单位圆外对应于幅频特性0dB线以上的部分
  - 单位圆内对应于幅频特性0dB线以下的部分
- Nyquist 图上的负实轴与Bode图上的相频特性的-180度线对应
- Nyquist 图上(-1, j0)点左侧的负实轴对应于
  - 幅频特性0dB线以上部分 +
  - 相频特性-180度线



## 对数频率稳定判据

$$Z = P - R = P - 2N$$

$$N = N_+ - N_-$$

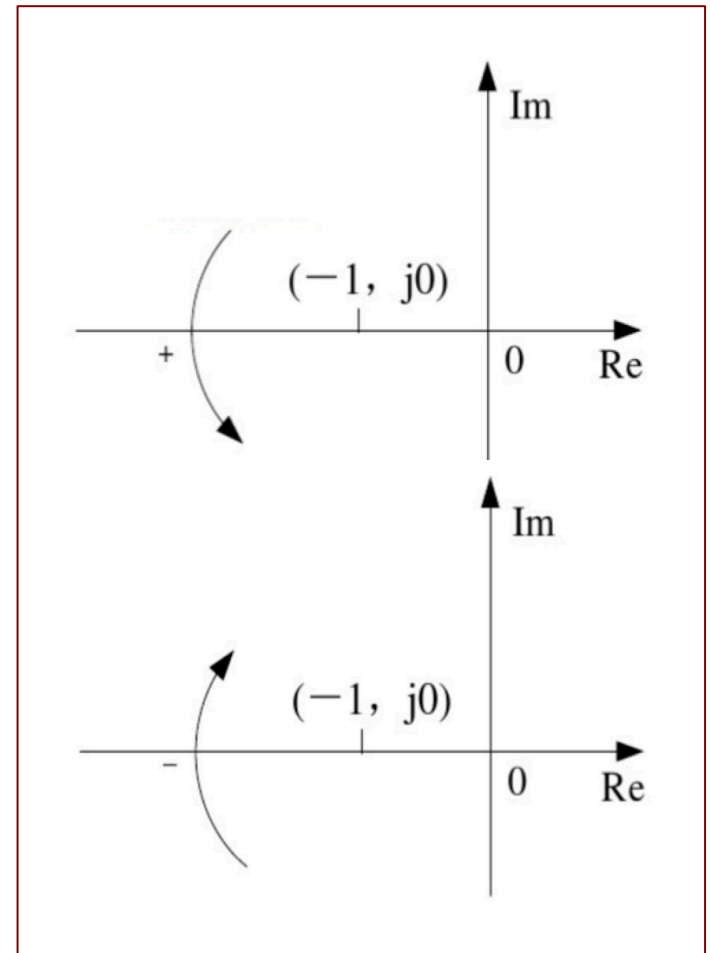
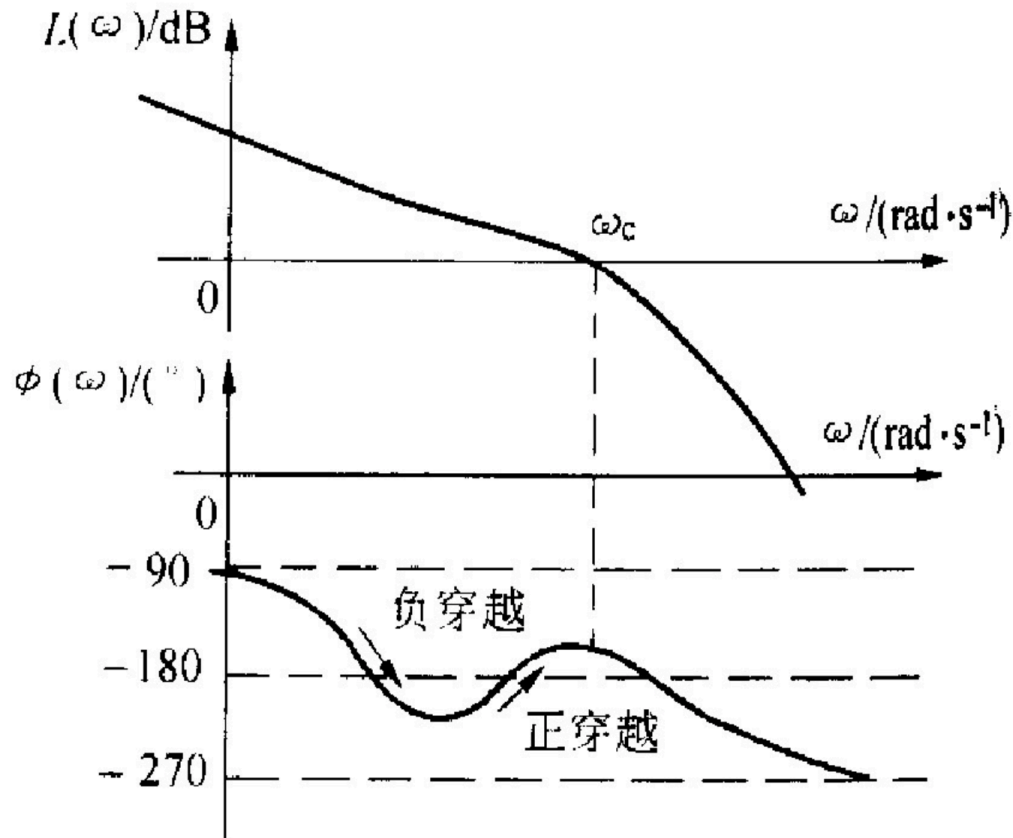
**穿越:** 当  $L(\omega)$  大于 0dB 时,  $\varphi(\omega)$  穿过-180度线

**正穿越一次:**  $\omega$ 增大时, 由下而上穿越一次

**负穿越一次:**  $\omega$ 增大时, 由上而下穿越一次

# 对数频率稳定判据

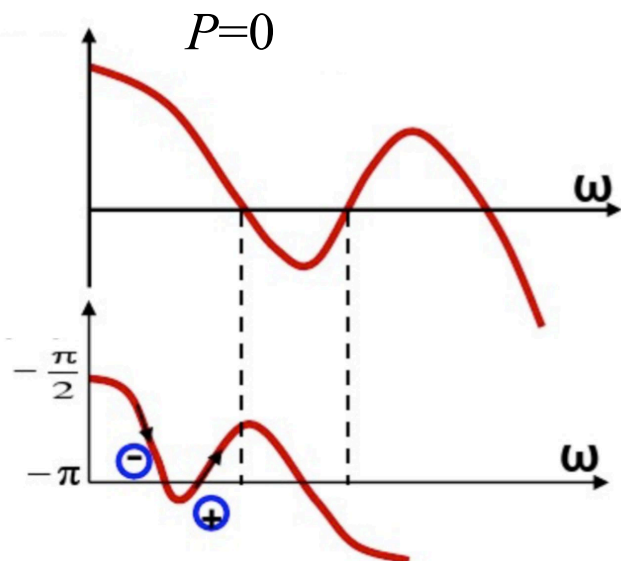
## Bode图上的正负穿越



在Bode图上,  $L(\omega)=20\lg|G(j\omega)H(j\omega)| > 0\text{dB}$  的范围内, 当 $\omega$ 增加时, 相频特性曲线从下向上穿越-180度相位线为**正穿越**; 反之为**负穿越**。

在Bode图上,  $L(\omega)=20\lg|G(j\omega)H(j\omega)| > 0\text{dB}$  的范围内, 当 $\omega$ 增加时, 相频特性曲线从下向上穿越 $-180$ 度相位线为**正穿越**; 反之为**负穿越**。

例3: 图中为单位反馈系统的开环传递函数Bode图, 试判断系统的稳定性。

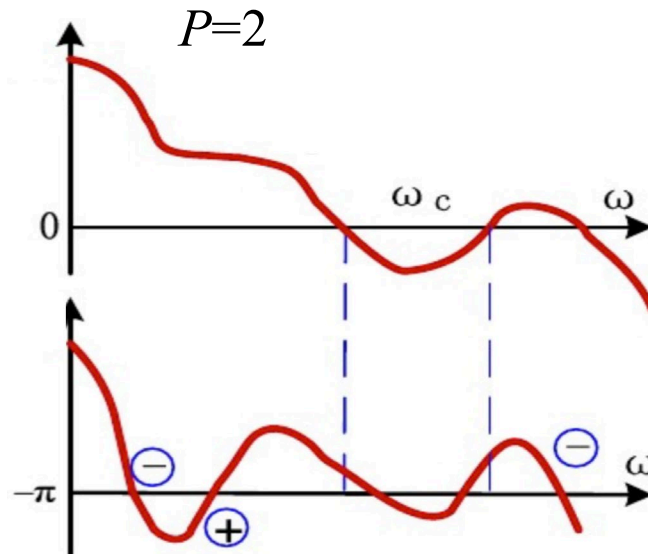


开环不稳定极点个数 $P=0$ 。

$$N_+=1, N_-=1$$

$$Z=P-2N=0-2(N_+-N_-)=-2(1-1)=0$$

闭环系统具有0个不稳定极点, 稳定。



开环不稳定极点个数 $P=2$ 。

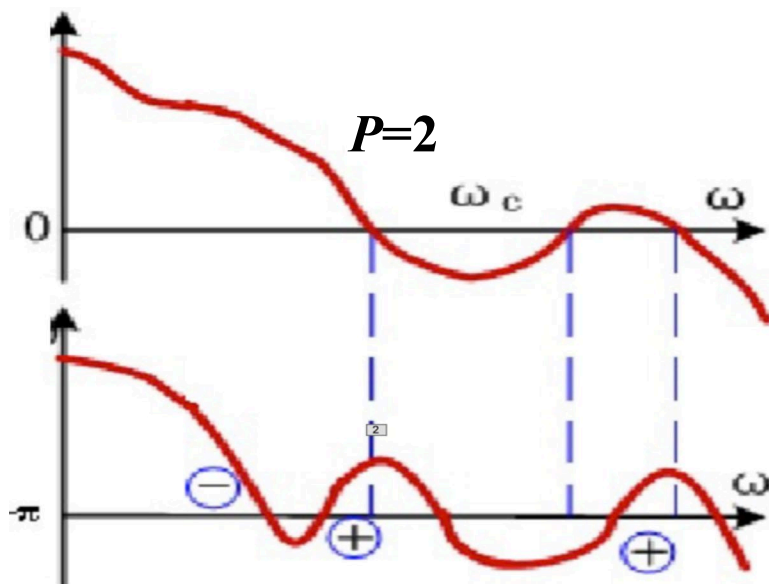
$$N_+=1, N_-=2$$

$$Z=P-2N=2-2(N_+-N_-)=2-2(1-2)=4$$

闭环系统具有4个不稳定极点, 不稳定。

---

例4: 图中为单位反馈系统的开环传递函数的Bode图，试判断系统的稳定性。



开环不稳定极点个数 $P=2$ 。

$$N_+=2, N_-=1$$

$$Z=P-2N=0-2(N_+-N_-)=2-2(2-1)=0$$

闭环系统具有0个不稳定极点，稳定。

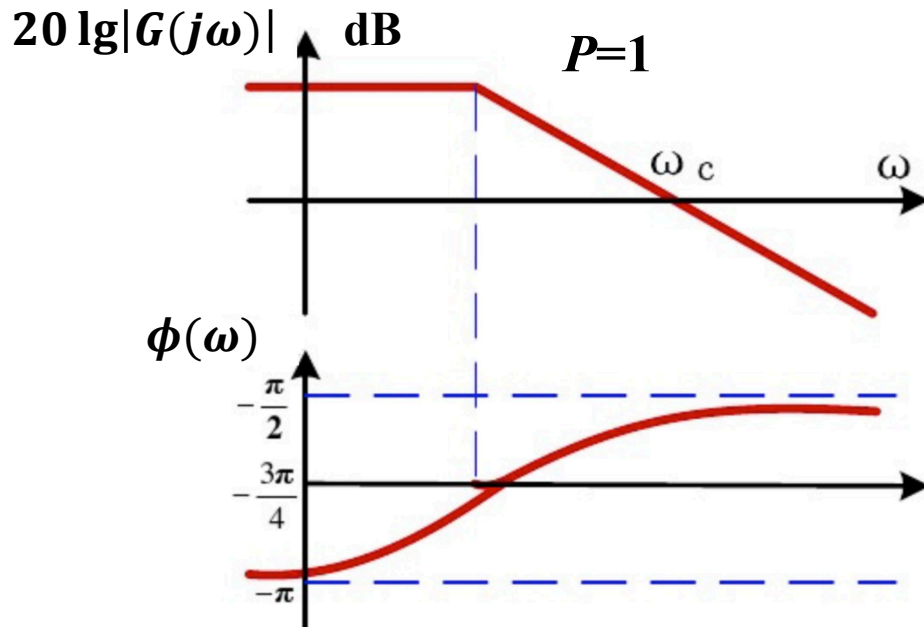
---

# 对数频率稳定判据

## 关于半次穿越

- **半次正穿越**: Bode图相频曲线, 自-180度线开始向上
- **半次负穿越**: Bode图相频曲线, 自-180度线开始向下

例5: 已知系统Bode图的幅频和相频特性如图所示, 判断闭环系统的稳定性。

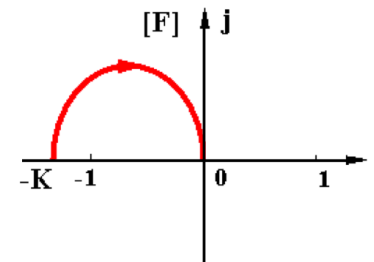


开环不稳定极点个数  $P=1$ 。

$$N_+ = 1/2, N_- = 0$$

$$Z = P - 2N = 1 - 2(N_+ - N_-) = 1 - 2(1/2 - 0) = 0$$

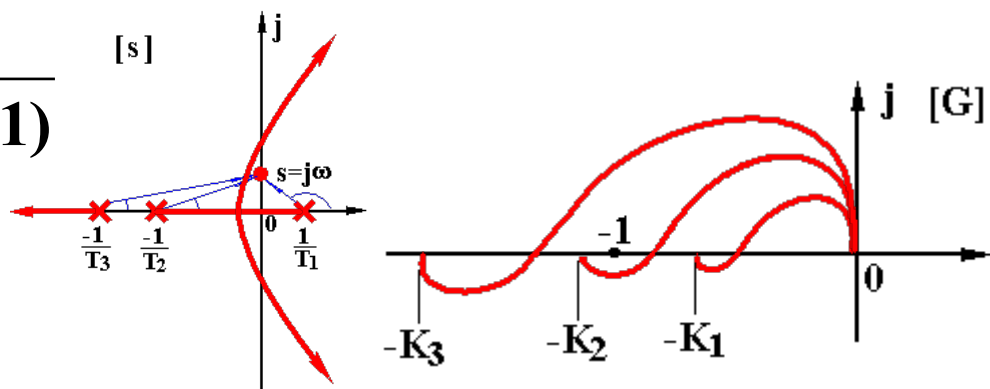
闭环系统具有0个不稳定极点, 稳定。



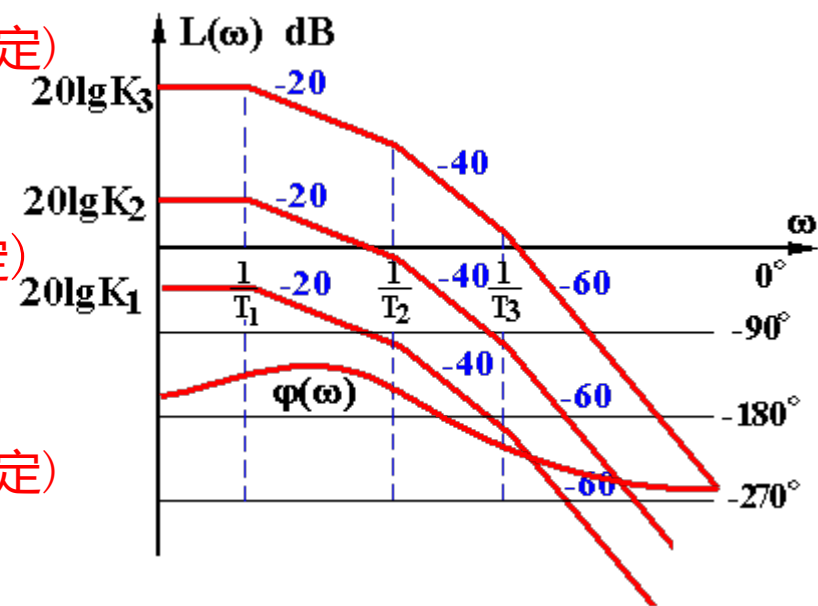
例6 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s - 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

$$\begin{cases} G(j0) = K \angle -180^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$



$$K = \begin{cases} K_1 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 0 = 0 \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times 0 = 1 \end{cases} \text{ (不稳定)} \\ K_2 \begin{cases} N = N_+ - N_- = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \text{ (稳定)} \\ K_3 \begin{cases} N = N_+ - N_- = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times (-\frac{1}{2}) = 2 \end{cases} \text{ (不稳定)} \end{cases}$$



## 关于存在积分环节的情形

若开环传函 $G(s)H(s)$ 含有串联积分环节, 如  $\angle G(j\omega)H(j\omega) = (1/s^\nu)G_1(s)$  则需对对数相频特性曲线作修正:

在对数相频曲线  $\omega=0_+$ 处, 由下向上补画一条虚线, 该虚线通过的相角为  $\nu 90^\circ$ 。计算正负穿越时, 应将补画的虚线作为对数相频特性的一部分。

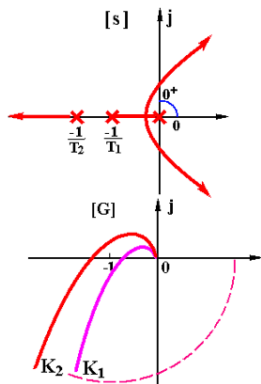
例3 已知单位反馈系统开环传递函数, 分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

解 依题有

$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle 0^\circ \\ G(j0^+) = \infty \angle -90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N = 0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N = -1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \end{cases}$$



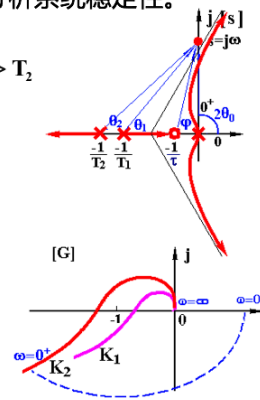
例4 已知单位反馈系统开环传递函数, 分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad \tau > T_1 > T_2$$

解 依题有

$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle 0^\circ \\ G(j0^+) = \infty \angle -180^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N = 0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N = -1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \end{cases}$$

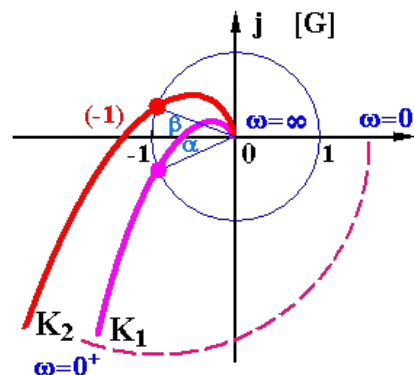




# 对数频率稳定判据 $Z = P - 2N$

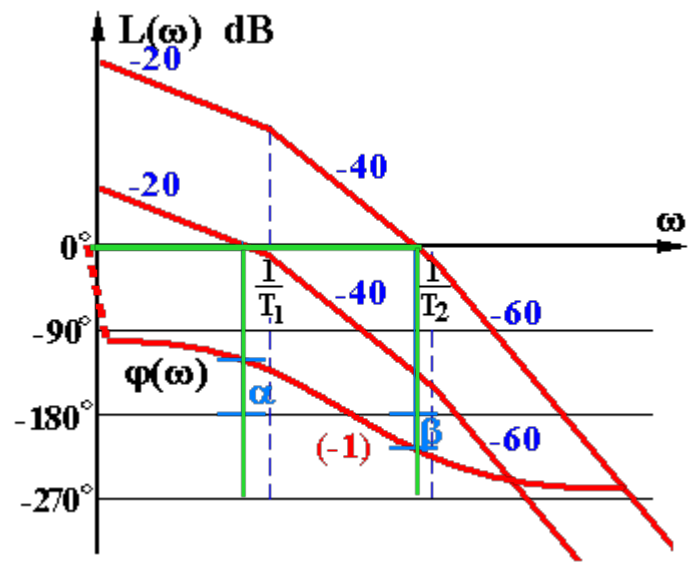
例5 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$



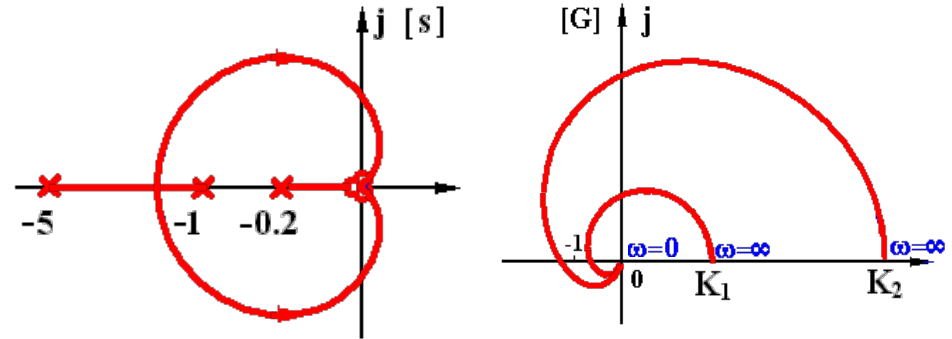
对数稳定判据  $\begin{cases} Z = P - 2N \\ N = N_+ - N_- \end{cases}$

$$K = \begin{cases} K_1 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 0 = 0 \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ \text{(稳定)} \end{cases} \\ K_2 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 1 = -1 \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \\ \text{(不稳定)} \end{cases} \end{cases}$$



$L(\omega)$  大于  $0\text{dB}$  ,  $\varphi(\omega)$  曲线穿越  $-180^\circ$ : 角度减小为负穿越  $N_-$  , 角度增加为正穿越  $N_+$

例3  $G(s) = \frac{Ks^3}{(0.2s+1)(s+1)(5s+1)}$



$G(j0) = 0 \angle 0^\circ$

$G(j0^+) = 0 \angle 270^\circ$

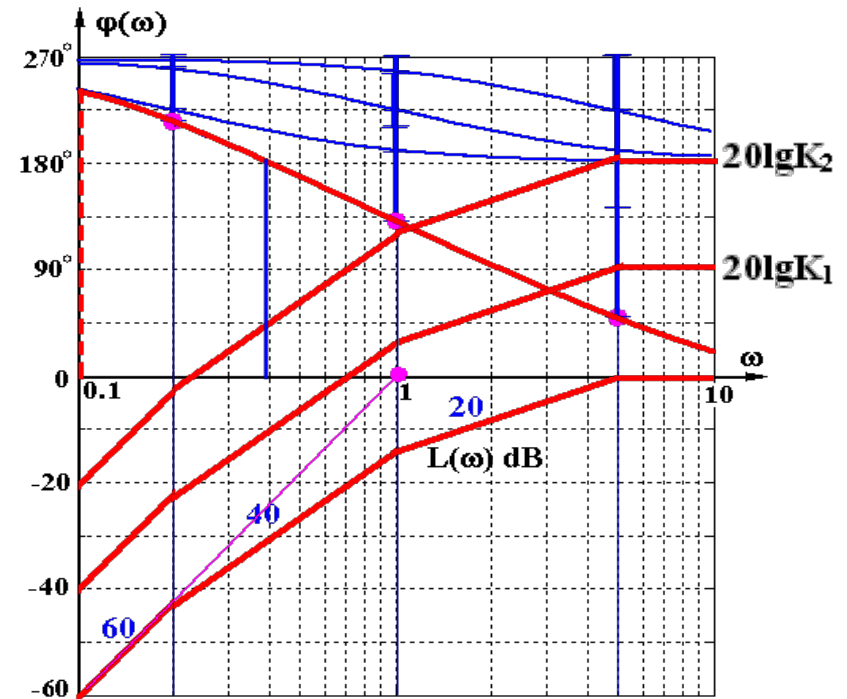
$G(j\infty) = K \angle 0^\circ$

$K_1 \quad N = N_+ - N_- = 0 - 0 = 0$

$Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0$

$K_2 \quad N = N_+ - N_- = 0 - 1 = -1$

$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$



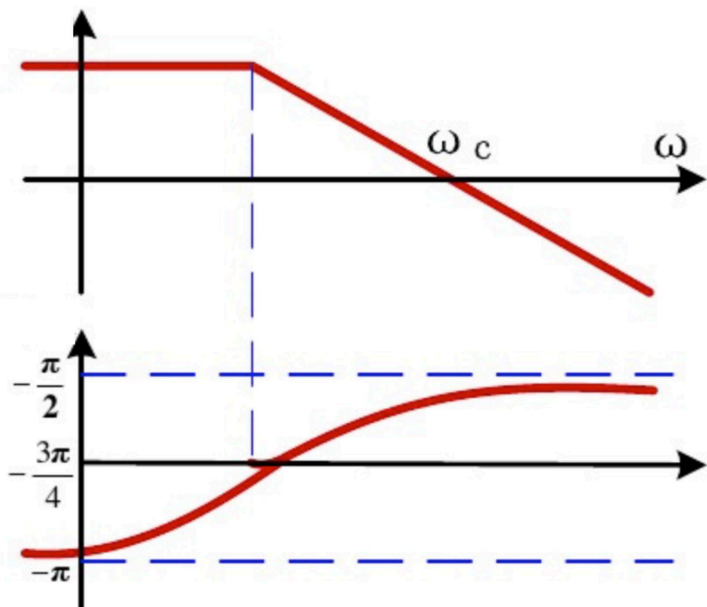
例6: 某非最小相位系统的开环传递函数如下, 判断系统稳定性

$$G(s)H(s) = \frac{K}{Ts - 1}, K > 1$$

其幅频特性很容易画。其相频关系为

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -(180^\circ - \arctan \omega T) = -180^\circ + \arctan \omega T$$

在  $\omega=0$  时有  $\angle G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=0} = -180^\circ$



开环不稳定极点个数  $P=1$ 。

$$N_+ = 1/2, N_- = 0$$

$$Z = P - 2N = 1 - 2(N_+ - N_-) = 1 - 2(1/2 - 0) = 0$$

闭环系统具有0个不稳定极点, 稳定。

## 💡 写出相频关系表达式，再分析相角变化

例7: 某负反馈系统的开环传递函数为 ( $K>1$ ) 分不同情况判断闭环系统的稳定性。

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

$$\begin{aligned}\angle G(s)H(s) &= \arctan \tau\omega - 90^\circ \times 2 - \arctan T\omega \\ &= -180^\circ + \arctan \tau\omega - \arctan T\omega\end{aligned}$$

(1)  $T < \tau$

对数幅频特性很容易画。

相频关系为

由于  $T < \tau$ ，可以看出其相角大于  $-180^\circ$ 。  
在  $0_+$  处的相位是  $-180^\circ +$

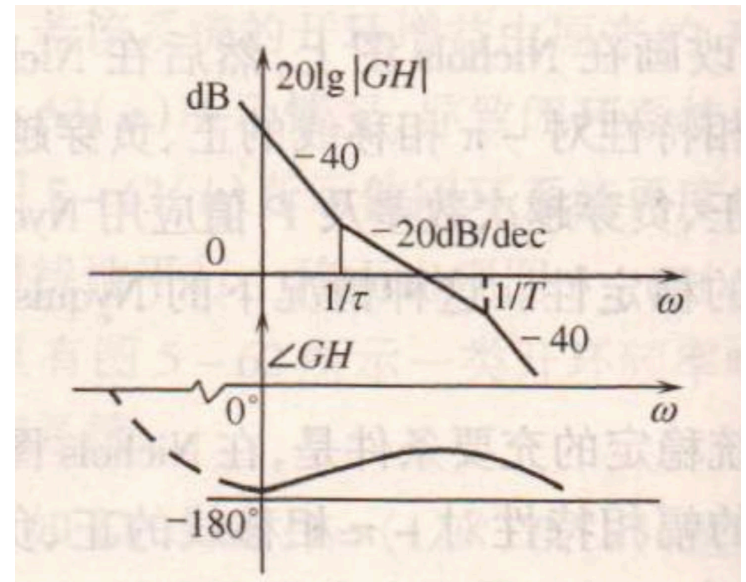
该系统为 II 型系统，需要从  $\omega=0$  处向上补画一条线，其穿过的相位为  $90^\circ \times 2 = 180^\circ$

该系统是 II 型系统。开环不稳定极点个数  $P=0$ 。

$$N_+ = 0, N_- = 0$$

$$Z = P - 2N = 0$$

闭环系统具有 0 个不稳定极点。稳定。



例7: 某负反馈系统的开环传递函数为 ( $K>1$ )

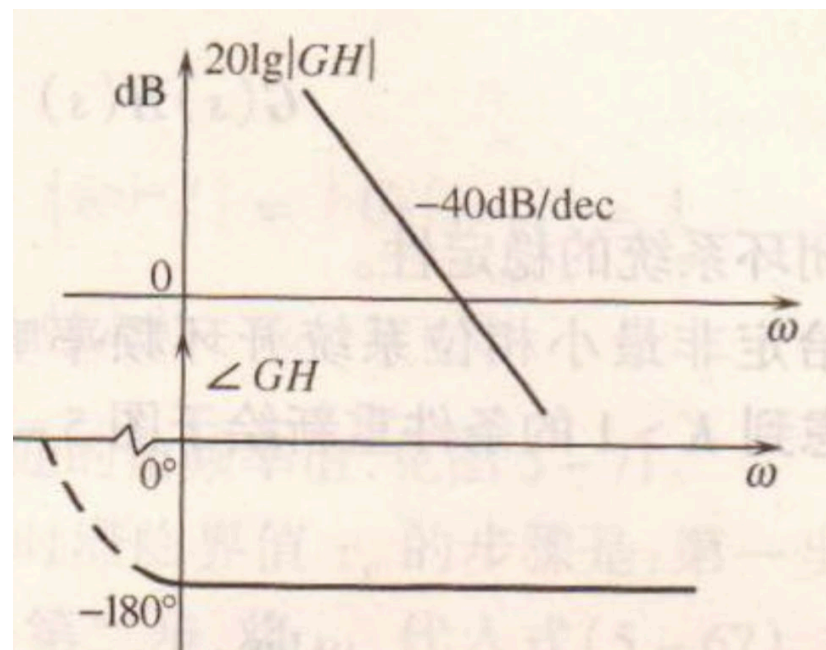
$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

分不同情况判断闭环系统的稳定性。

(2)  $T=\tau$  此时

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2}$$

其相频特性是一条通过 $-180^\circ$ 的直线。补画后的相频特性曲线也只是通过 $-180^\circ$ 线, 而没有穿越。闭环系统处于临界稳定。



例7: 某负反馈系统的开环传递函数为 ( $K>1$ )

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

分不同情况判断闭环系统的稳定性。

(3)  $T>\tau$  对数幅频特性很容易画。

相频关系为

$$\begin{aligned}\angle G(s)H(s) &= \arctan \tau\omega - 90^\circ \times 2 - \arctan T\omega \\ &= -180^\circ + \arctan \tau\omega - \arctan T\omega\end{aligned}$$

由于 $\tau < T$ , 可以看出其相角小于 $-180^\circ$ 。  
在 $0_+$ 处的相位是 $-180^\circ$ 。

该系统为II型系统, 需要从 $\omega=0$ 处向上补画一条线, 其穿过的相位为 $90^\circ \times 2 = 180^\circ$

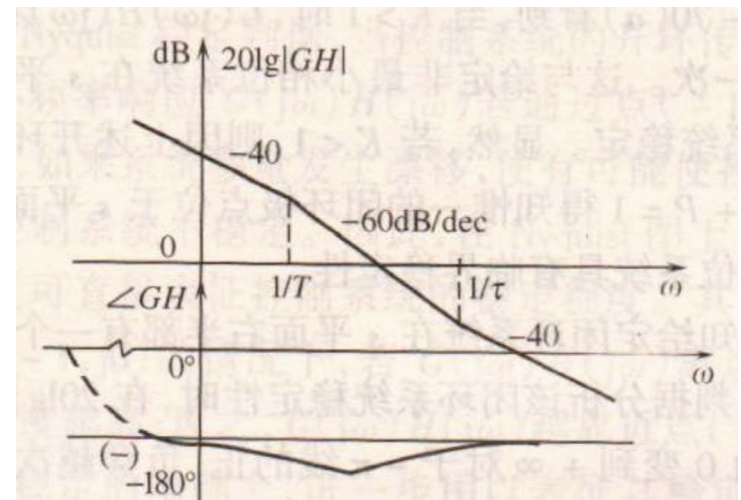
补画的相频特性曲线有一次负穿越。

该系统是II型系统。开环不稳定极点个数 $P=0$ 。

$$N_+ = 0, N_- = 1$$

$$Z = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 2$$

闭环系统具有2不稳定极点。系统不稳定。



# 课堂练习 1

---

八. (15 分) 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6(s+1)}{s^2(s-1)}$$

- (1) 画出开环频率特性的大致 Nyquist 图，并依据此图判断闭环系统的稳定性，若不稳定，还须确定右半平面闭环极点的个数；
- (2) 画出开环频率特性的渐近 Bode 图（包括幅频特性和相频特性）。

## 课堂练习 2

---

三、（15分）设单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ ，试求闭环系统在输入信号  $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$  作用下的稳态误差。