第 1 题

相位裕度和幅值裕度的几何意义和物理意义。

答：

相位裕度

几何意义：系统开环频率特性曲线与单位圆的交点 A 与原点 O 所在直线 OA，相位裕度即为负实轴与 OA 的夹角，逆时针为正。

物理意义：相位裕度表示开环极坐标图与单位圆的交点沿单位圆与（-1，j0）的远近程度。若系统剪切频率 ω_c 处的相位再减小 γ，则 $\varphi(\omega_c) = -180°$，Nyquist 曲线过（-1,0），系统将处于临界稳定状态。

幅值裕度

几何意义：系统开环频率特性曲线与负实轴交点到原点的距离的倒数。

物理意义：幅值裕度表示开环极坐标图与负实轴的交点离（-1，j0）的远近程度。若系统的开环增益增大到原来的 K_g 倍，则 $A(\omega_g) = 1$,Nyquist 曲线过（-1，0），系统将处于临界稳定状态。

第 2 题

具有正相位裕度的负反馈系统一定是稳定的吗？

答：不一定。对于包含不稳定惯性环节的非最小相位系统，只有当相位裕度为正，幅值裕度为负时，闭环系统才是稳定的。

第 3 题

如果一个最小相位负反馈系统是稳定的，则它一定有正相角裕度吗？

答：不一定。可能不存在剪切频率。

第 4 题

如果一个最小相位负反馈系统具有最大的相角裕度，则它的稳定程度一定很高吗？

答：不一定。要结合幅值裕度判断。相角裕度很大，幅值裕度可能较小，系统的稳定程度也不高。

第 5 题

欠阻尼二阶反馈系统一定存在谐振峰值吗？试给出欠阻尼二阶系统闭环幅频特性的最大值。

答：不一定。由 $\omega_{\mathrm{r}} = \omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-2\xi^2}$ 可知，二阶系统存在谐振峰值的条件是 $\xi < \sqrt{2}/2$。对于欠阻尼二阶系统，$0 < \xi < 1$。当 $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$M_{\mathrm{r}} = A(\omega_{\mathrm{r}})/A(0) = \frac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{\sqrt{\omega_{\mathrm{n}}^4(4\xi^2-4\xi^4)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ 当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$ 时,$M_{\mathrm{r}} \to 1$，没有谐振峰值。

2 解答题

问题 6. 设某单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(1-\tau s)}{1+Ts}$$

其中 $K>1,T>\tau>0$。试绘制该系统的Nyquist曲线概略图，并分析相角裕度和幅值裕度与稳定性的关系。

答案 6. Nyquist曲线起点 $G(j0)=K\angle 0°$，终点 $G(j\infty)=\frac{K\tau}{T}\angle -180°$。令$|G(j\omega)|=1$，解得$w^2=\frac{K^2-1}{T^2-K^2\tau^2}$；当$K\tau>T$时，剪切频率$\omega_c$不存在。

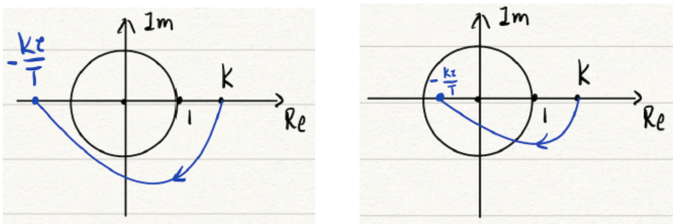

图 **1.** Nyquist曲线概略图

分情况讨论如下：

（1）$\frac{K\tau}{T}>1$：此时$P=1,N_+=0,N_-=\frac{1}{2},Z=1-2\left(0-\frac{1}{2}\right)=2$，闭环系统不稳定。Nyquist曲线与单位圆无交点，相角裕度不存在；负实轴上的交点位于$(-1,j0)$左侧，幅值裕度为负。

（2）$\frac{K\tau}{T}<1$：此时$P=1,N_+=0,N_-=0,Z=1-2(0-0)=1$，闭环系统稳定。Nyquist曲线与单位圆的交点在下半平面，相角裕度为正，幅值裕度也为正。

问题 7. 某非最小相位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(-\tau s+1)}{s(Ts+1)}$$

其中 $K>0,\tau>0,T>0$。分析该系统稳定裕度与稳定性的关系。

答案 7.

幅频特性：

$$|G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{K\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}{\omega\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

相频特性：

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-90°-\arctan(\tau\omega)-\arctan(T\omega)$$

复频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega)=-\frac{K(\tau+T)}{1+T^2\omega^2}+j\frac{K(\tau T\omega^2-1)}{\omega(1+T^2\omega^2)}$$

令$\mathrm{Im}[G(j\omega)H(j\omega)]=0$，得$\omega_g=\frac{1}{\sqrt{T\tau}}$，则Nyquist曲线与实轴交点为$(-K\tau,j0)$。

Nyquist曲线起点 $G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle -90°$，终点 $G(j\infty)H(j\infty)=0\angle -270°$。

当$\omega\to 0^+$时，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部趋近于$-K(T+\tau)$，虚部负无穷大。

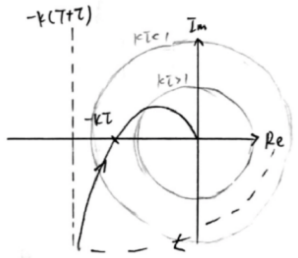

图 **2.** Nyquist曲线概略图

分情况讨论如下：

（1）$K\tau>1$：此时$P=0, N_+=0, N_-=1, Z=0-2(0-1)=2$，闭环系统不稳定，相角和幅值裕度均为负。

（2）$K\tau<1$：此时$P=0, N_+=0, N_-=0, Z=0-2(0-0)=0$，闭环系统稳定，相角和幅值裕度均为正。

8.

第 6 题

设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K\mathrm{e}^{-0.1s}}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_\mathrm{c}=5\mathrm{rad/s}$ 时的开环增益 K。

答：

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=\frac{K}{\omega_c\sqrt{1+0.0/\omega_c^2}\sqrt{1+\omega_c^2}}=1$$

$$k=\omega c\sqrt{(\omega c^2+1)(0.0/\omega c^2+1)}=5\sqrt{(5^2+1)(0.01\times 5^2+1)}$$

$$=5\sqrt{2b\times 1.25}=5\sqrt{32.5}\approx 28.5$$

9.

第 8 题

已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(1+s)(1+3s)}$$

试用 Bode 图方法确定系统稳定的临界增益 K 值。

答：系统的开环频率特性：$G(jw)H(jw)=\frac{K}{jw(1+jw)(1+3jw)}$

穿越频率：

$$\begin{aligned}
&\angle G\left(j\omega_g\right)H\left(j\omega_g\right)=-180^\circ\\
&\Rightarrow -90^\circ-\arctan\omega_g-\arctan 3\omega_g=-180^\circ\\
&\quad \arctan\omega_g+\arctan 3\omega_g=90^\circ\\
&\Rightarrow \quad \left|\tfrac{4\omega_g}{1-3\omega_g^2}\right|\rightarrow\infty\\
&\Rightarrow \quad 3\omega_g^2=1
\end{aligned}$$

剪切频率 ω_{c}：

$$\begin{aligned}
\left|G\left(j\omega_c\right)H\left(j\omega_c\right)\right|&=1\\
\Rightarrow \frac{k}{\omega_c\cdot\sqrt{1+w_c^2}\sqrt{1+9\omega_c^2}}\quad&=1\\
k=w_c\sqrt{1+w_c^2}\sqrt{1+9\omega_c^2}&
\end{aligned}$$

$\because$ 系统临界稳定，从 Bode 图上看，应有 $\omega_{\mathrm{c}}=\omega_{\mathrm{g}}$

$\therefore k=wg\sqrt{1+w_g^2}\sqrt{1+9\omega_g^2}=\frac{4}{3}$

Bode 图：

Bode 图：