自动控制原理 B-作业 4 不保熟答案

例 4. 1

某典型二阶系统的开环传递函数为：

$$G_0(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

题目要求其闭环系统的单位阶跃响应满足$\sigma_p \le 20\%$，$t_s \le 2s$，已知：

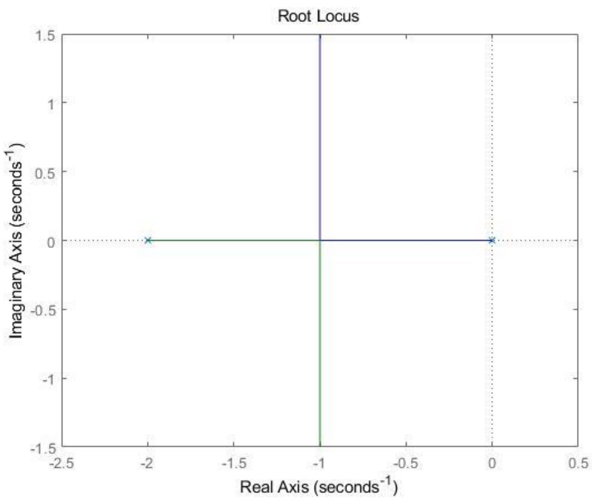
$$\sigma_p = e^{-\pi\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}}$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

可得$\xi \ge 0.456$，取$\xi = 0.6$。得$\omega_n \ge 2.917rad/s$，取$\omega_n = 5rad/s$，则期望闭环主导极点如下：

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -3 \pm j4$$

根据原系统的根轨迹图可知，我们选用超前校正环节使根轨迹左移。



取$s_1 = -3 + j4$，为了满足幅角条件有：

$$\angle G_0(s_1) + \phi = (2l+1)\pi$$

可得$\phi = 50.91°$，$\theta = arctan\frac{4}{3} = 53.13°$, 由此可知超前校正环节零极点如下：

$$z_c = -|s_1|\frac{cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)}{cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)} = -3.078$$

$$p_c = -|s_1|\frac{cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)}{cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)} = -8.123$$

为了满足幅值条件，则有下式：

$$|K_cG_0(s_1)\frac{s_1 - z_c}{s_1 - p_c}| = 1$$

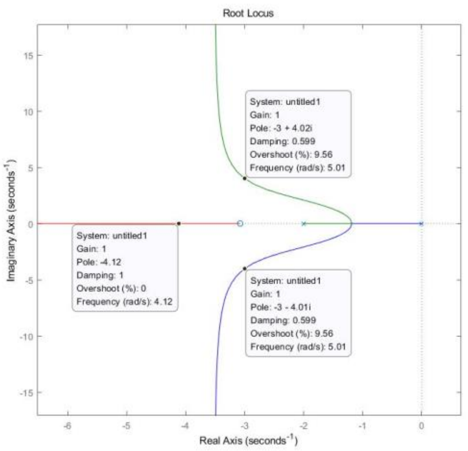
解得$K_c = 8.373$，由此可知超前校正环节的传递函数如下：

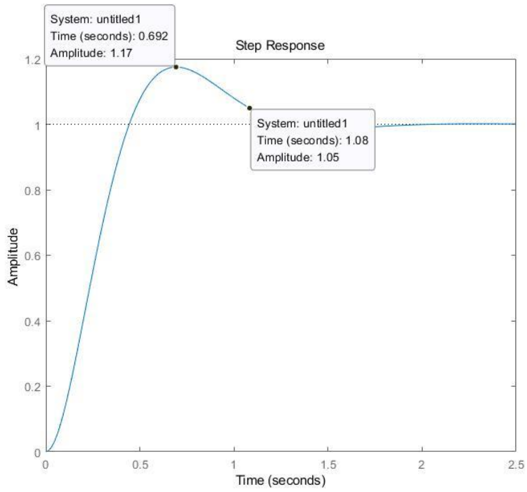
$$\boldsymbol{G_c(s) = 8.373\frac{s+3.078}{s+8.123}}$$

校正后系统开环传递函数如下：

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{33.492(s+3.078)}{s(s+2)(s+8.123)}$$

校正后系统的根轨迹和闭环系统的单位阶跃响应如下：





其超调量$\sigma_p = 17\% \le 20\%$，调整时间$t_s = 1.08s \le 2s$，均满足题目要求。

例 4.3

已知单位反馈系统不可变部分的传递函数为：

$$G_0(s) = \frac{k}{s(s+5)(s+20)}$$

题目要求闭环系统的单位阶跃响应满足$\sigma_p \le 20\%$，$t_s \le 0.6s$（$\Delta = 0.02$），开环增益$K_v \ge 12s^{-1}$, 已知：

（原题要求$\boldsymbol{\sigma_p \le 25\%}$，$\boldsymbol{t_s \le 0.7s}$（$\boldsymbol{\Delta = 0.02}$），开环增益$\boldsymbol{K_v \ge 12s^{-1}}$，满足上面条件，即可满足原题条件）

$$\sigma_p = e^{-\pi\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}} \qquad t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \ (\Delta = 0.02)$$

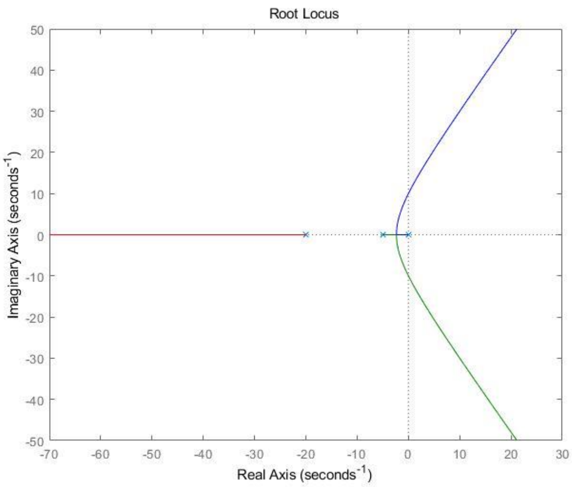
可得$\xi \ge 0.456$，取$\xi = 0.6$。得$\omega_n \ge 11.11rad/s$，取$\omega_n = 12rad/s$，则期望闭环主导极点如下：

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -7.2 \pm j9.6$$

取开环增益$K_v = 12s^{-1}$，则$k = 100K_v = 1200$，且$M = |s_1(s_1+5)(s_1+20)| = 1890.98$，则

$$|G_0(s_1)| = \frac{k}{M} = 0.6346$$

根据原系统的根轨迹图可知，我们选用超前校正环节使根轨迹左移。



设超前校正环节的传递函数如下：

$$G_c(s) = \frac{|p_c|}{|z_c|}\frac{s - z_c}{s - p_c}$$

为了满足幅值条件则有：

$$|G_0(s_1)G_c(s_1)| = 1$$

即

$$\frac{|p_c|}{|z_c|}\frac{|s_1-z_c|}{|s_1-p_c|}=\frac{M}{k}=1.5758$$

为了满足幅角条件则有：

$$\angle G_0(s_1)+\phi=(2l+1)\pi$$

可得$\phi=86.65°$, 求解η：

$$\frac{1}{tan\eta}=\frac{M}{k}\frac{1}{sin\phi}-\frac{1}{tan\phi}$$

即$\eta=33.34°$，$\theta=53.13°$, 进而求解校正环节零极点(正弦定理)：

$$z_c=-|s_1|\frac{sin\,\eta}{sin(\eta+\theta)}=-6.608$$

$$p_c=-|s_1|\frac{sin(\eta+\phi)}{sin(\eta+\theta+\phi)}=-86.763$$

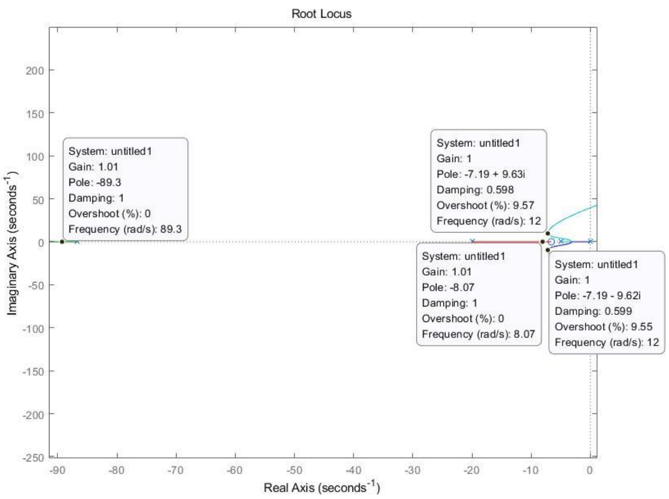
由此可知超前校正环节的传递函数如下：

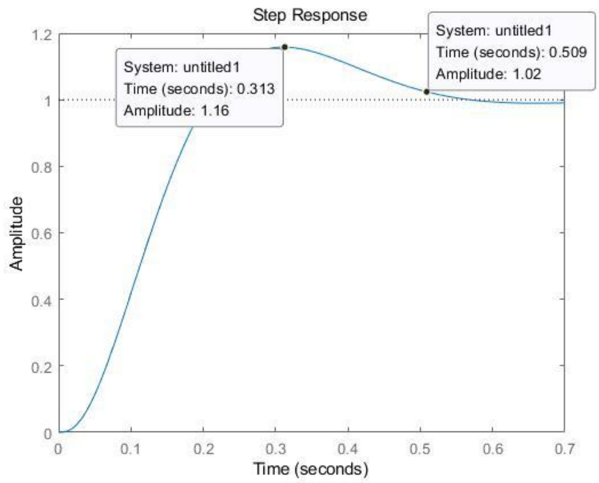
$$\boldsymbol{G_c(s)=13.130\frac{s+6.608}{s+86.763}}$$

校正后系统开环传递函数如下：

$$G(s)=G_0(s)G_c(s)=\frac{15756}{s(s+5)(s+20)}\frac{s+6.608}{s+86.763}$$

校正后系统的根轨迹和闭环系统的单位阶跃响应如下：





由图系统超调量$\sigma_p=16\%\le 20\%$，调整时间$t_s=0.509s\le 0.6s$（$\Delta=0.02$），开环增益$K_v=\frac{15756\times 6.608}{5\times 20\times 86.763}=12s^{-1}$，满足题设条件。则超前环节参数为：$\boldsymbol{\alpha=\frac{86.763}{6.608}=13.130}$，$\boldsymbol{T=\frac{1}{86.763}}$。

例 4.4

已知系统不可变部分的传递函数为：

$$G_0(s)=\frac{800K_v}{s(s+4)(s+10)(s+20)}$$

校正后需满足如下性能指标：

(1) 开环增益$K_v=12s^{-1}$

(2) 超调量$\sigma_p<20\%$

(3) 调整时间$t_s\le 2.6s$（$\Delta=0.05$）

(4) 系统带宽不大于$5rad/s$

根据题目要求其闭环系统的单位阶跃响应满足$\sigma_p<20\%$，$t_s\le 2.6s$，已知：

$$\sigma_p = e^{-\pi\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}} \qquad t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}\ (\Delta = 0.05)$$

可得$\xi > 0.456$，取$\xi = 0.561$，则得$\omega_n \geq 2.3996rad/s$，取$\omega_n = 2.40rad/s$，则期望闭环主导极点如下：

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1.346 \pm j1.987$$

检验可知：

$$\angle G_0(s_1) = -\angle(s_1) - \angle(s_1+4) - \angle(s_1+10) - \angle(s_1+20) = -179.947° \approx -180°$$

K_v不在原系统中考虑，由校正环节全部体现，设校正环节传递函数如下满足$K_v = \lim_{s\to 0} G_c(s) = K_1\frac{z_c}{p_c} = 12$：

$$G_c(s) = K_1\frac{s - z_c}{s - p_c}$$

求在s_1处所需增益K_1：

$$K_1\left|\frac{800}{s_1(s_1+4)(s_1+10)(s_1+20)}\right| = 1$$

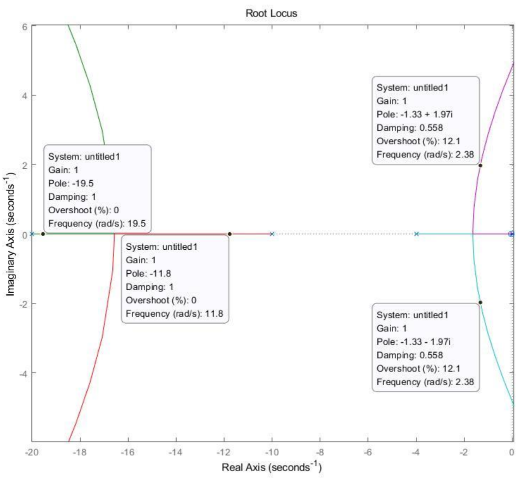
可得$K_1 = 1.6567$, 由此可知迟后校正环节还需补充增益为$K_2 = \frac{K_v}{K_1} = 7.243$，即$|z_c| = 7.243|p_c|$，取$p_c = -0.005$，那么校正环节的传递函数如下(**参数对应可知**)：

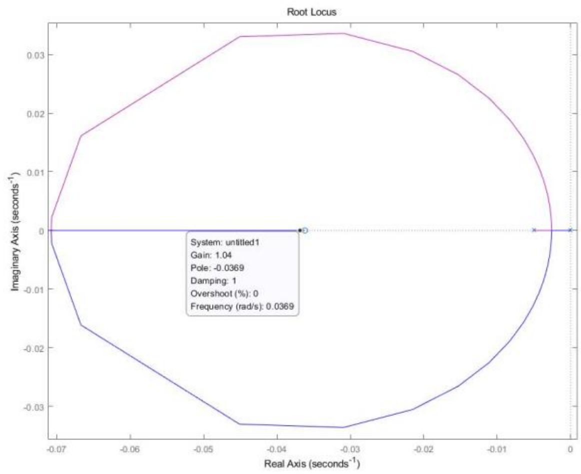
$$\boldsymbol{G_c(s) = 1.6567\frac{s + 0.0362}{s + 0.005}}$$

校正后系统开环传递函数如下：

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{1325.36}{s(s+4)(s+10)(s+20)}\ \frac{s+0.0362}{s+0.005}$$

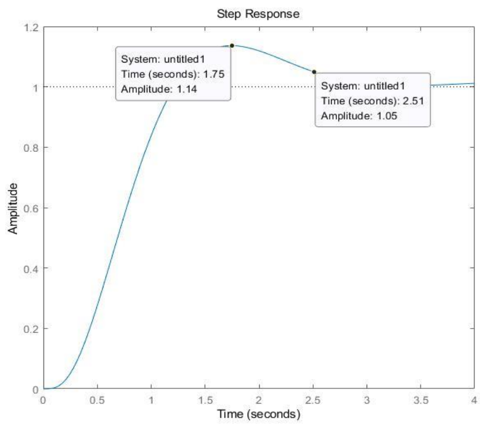
校正后系统的根轨迹如下：





闭环系统在$(-0.0369, j0)$附近有极点, 由于迟后校正环节的零点便是闭环传递函数的零点，即$(-0.0362, j0)$，二者十分接近，可以看作零极点对消，不影响闭环主导极点的选取。

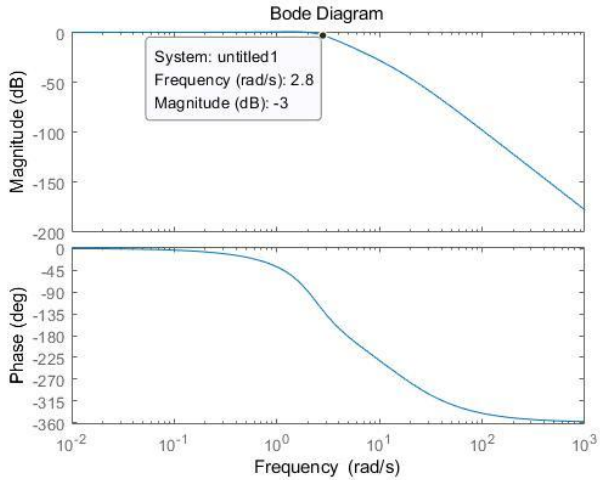
其单位阶跃响应曲线如下：



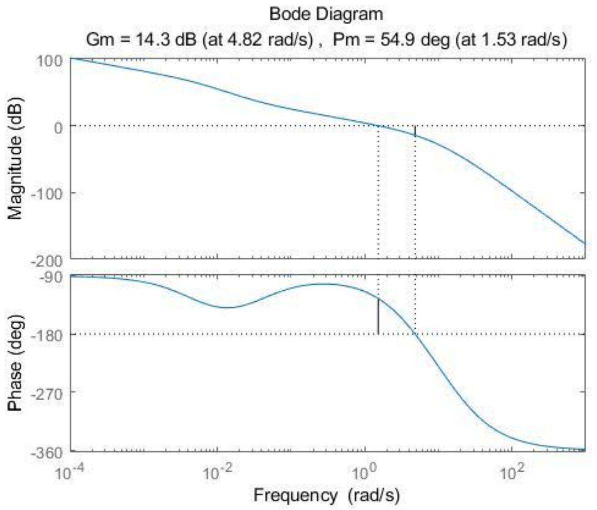
其闭环系统的单位阶跃响应满足$\sigma_p = 14\% < 20\%$，$t_s = 2.51s \leq 2.6s$，满足性能指标(2)(3)。

而$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 12.00s^{-1}$，满足性能指标(1)。

闭环传递函数 Bode 图如下，系统带宽为$2.8rad/s < 5rad/s$，满足性能指标(4)。



开环传递函数 Bode 图如下，剪切频率$\omega_c = 1.53rad/s$，也小于$5rad/s$，幅值裕度为$54.9°$。



例 4.5

已知单位反馈系统原有前向传递函数如下：

$$G_0(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

校正后需满足如下性能指标：

(1)开环增益$K_v = 5s^{-1}$

(2)超调量$\sigma_p \leq 20\%$

(3)调整时间$t_s \leq 10s$（$\Delta = 0.05$）

求解得$\xi \geq 0.456$，$\xi\omega_n \geq 0.35$，取$\xi = 0.56$，$\xi\omega_n = 0.35$，则$\omega_n = 0.625rad/s$。期望闭环主导极点如下：

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -0.350 \pm j0.518$$

检验可知：

$$\angle G_0(s_1) = -\angle(s_1) - \angle(s_1+1) - \angle(s_1+2) = -180.027° \approx -180°$$

设迟后校正环节传递函数为：

$$G_c(s) = K_1 \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

由于$\lim_{s\to 0} sG_0(s) = 1$，若要满足开环增益，则需$K_v = K_1 \frac{z_c}{p_c} = 5s^{-1}$。

首先令在s_1处幅值条件为 1：

$$K_1 \left| \frac{2}{s_1(s_1+1)(s_1+2)} \right| = 1$$

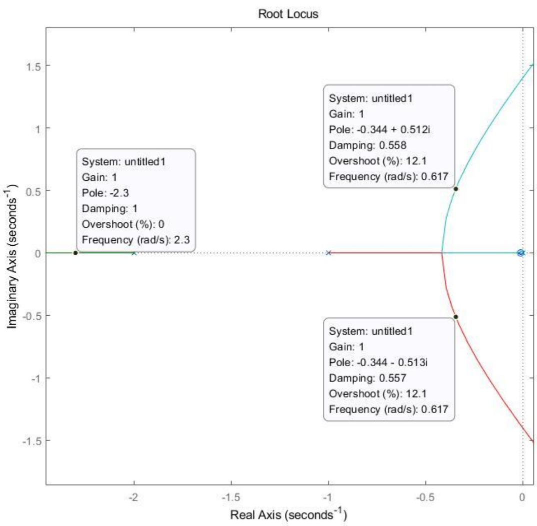
可得$\boldsymbol{K_1 = 0.449}$, 则$\frac{z_c}{p_c} = \frac{K_v}{K_1} = 11.136$，取$\boldsymbol{p_c = -0.001}$，则$\boldsymbol{z_c = -0.01114}$，则迟后校正环节传递函数为(**参数对应可知**)：

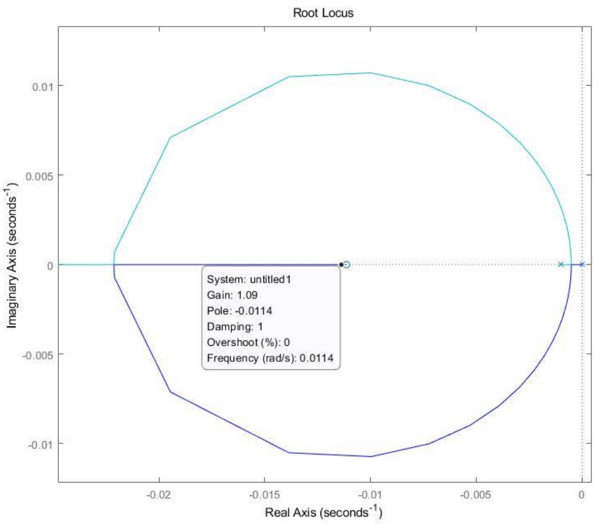
$$\boldsymbol{G_c(s) = 0.449 \frac{s + 0.01114}{s + 0.001}}$$

校正后系统开环传递函数如下：

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{0.898}{s(s+1)(s+2)} \frac{s + 0.01114}{s + 0.001}$$

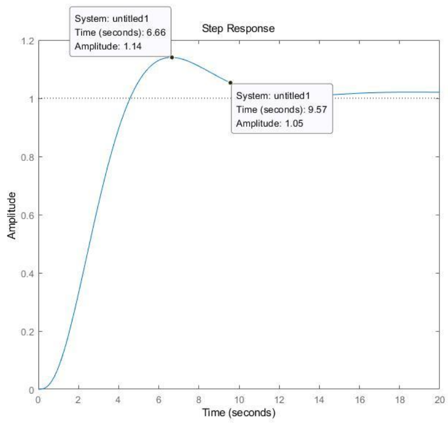
校正后系统的根轨迹如下：





闭环系统在$(-0.0114, j0)$附近有极点, 由于迟后校正环节的零点便是闭环传递函数的零点，即$(-0.01114, j0)$，二者十分接近，可以看作零极点对消，不影响闭环主导极点的选取。

其单位阶跃响应曲线如下：



其闭环系统的单位阶跃响应满足$\sigma_p = 14\% \le 20\%$，$t_s = 9.57s \le 10s$，满足性能指标(2)(3)。

而$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 5.00s^{-1}$，满足性能指标(1)。

例 4.6

某未校正系统的传递函数如下

$$G_0(s)=\frac{10K}{s(s+1)(s+10)}$$

校正后需满足如下性能指标：

(1) 开环增益$K_v \geq 50s^{-1}$

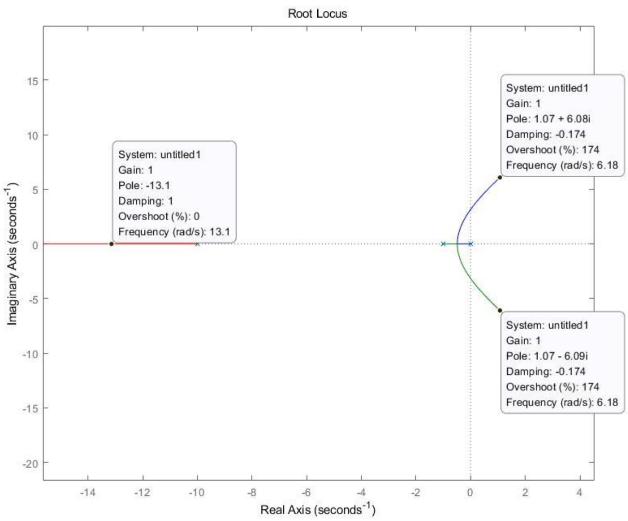
(2) 超调量$\sigma_p \leq 20\%$

(3) 调整时间$t_s \leq 1.5s$ （$\varDelta=0.05$）

可设$K=K_v=50$，有$\xi \geq 0.456$，$\xi\omega_n \geq \frac{7}{3}$，取$\xi=0.64$，$\xi\omega_n=3.2$，则$\omega_n=5rad/s$。期望闭环主导极点如下：

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-3.2\pm j3.842$$

原根轨迹曲线如下：



需用超前校正环节先校正系统，将曲线左移，超前校正传递函数如下：

$$G_1(s)=K_1\frac{s-z_1}{s-p_1}$$

为了满足幅角条件，超前校正环节在s_1处提供的幅角ϕ需有：

$$\angle G_0(s_1)+\phi=(2l+1)\pi$$

解得$\phi=99.05°$，$\theta=arctan\frac{3.842}{3.2}=50.21°$, 由此可知超前校正环节零极点如下：

$$z_1=-|s_1|\frac{cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)}{cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)}=-1.455$$

$$p_1=-|s_1|\frac{cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)}{cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)}=-17.177$$

为了满足幅值条件，需有：

$$K_1\left|\frac{500}{s_1(s_1+1)(s_1+10)}\frac{s_1-z_1}{s_1-p_1}\right|=1$$

解得$K_1=1.188$，即超前校正环节传递函数为：

$$\boldsymbol{G_1(s)=1.188\frac{s+1.455}{s+17.177}}$$

则超前校正后系统开环传递函数的开环增益为：

$$\lim_{s\to 0}sG_0(s)G_1(s)=5.03$$

需要迟后环节补充剩下的增益，设迟后校正环节的传递函数如下：

$$G_2(s) = \frac{s - z_2}{s - p_2}$$

其满足：

$$\frac{z_2}{p_2} = \frac{K_v}{\lim\limits_{s \to 0} sG_0(s)G_1(s)} = 10.0$$

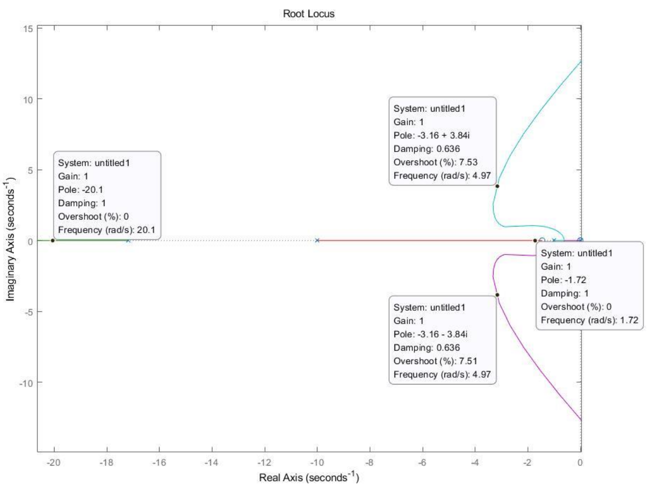
则取$p_2 = -0.001$，$z_2 = -0.01$，可得迟后校正环节传递函数如下：

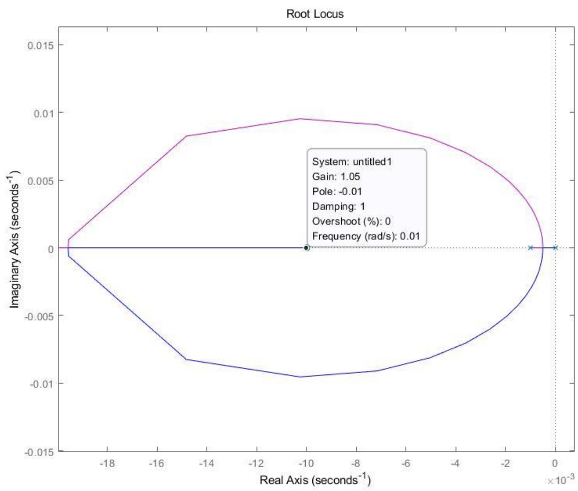
$$\boldsymbol{G_2(s) = \frac{s + 0.010}{s + 0.001}}$$

综上，迟后-超前校正后系统开环传递函数如下：

$$G(s) = G_0(s)G_1(s)G_2(s) = \frac{594}{s(s+1)(s+10)}\frac{s + 1.455}{s + 17.177}\frac{s + 0.010}{s + 0.001}$$

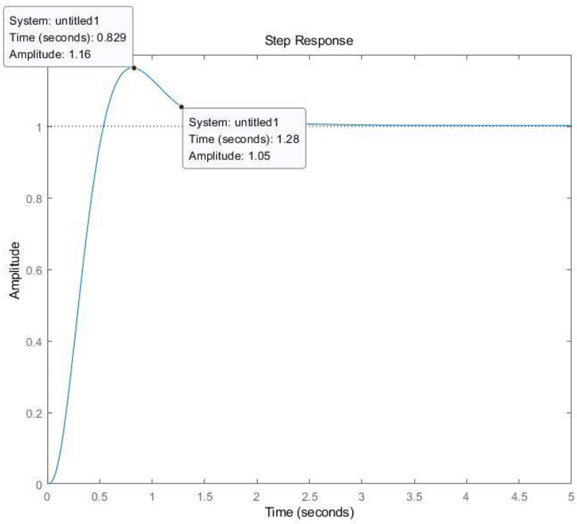
校正后开环系统的根轨迹如下：





闭环系统在$(-0.01, j0)$附近有极点，由于迟后校正环节的零点便是闭环传递函数的零点，即$(-0.01, j0)$，二者十分接近，可以看作零极点对消。则该系统可以近似看作$(-1.72, j0)$，$(-3.16, \pm j3.84)$三个极点发挥主要作用。

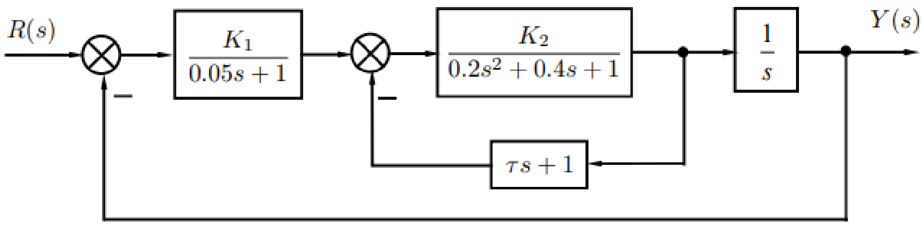
其单位阶跃响应曲线如下：



其闭环系统的单位阶跃响应满足$\sigma_p = 16\% \leq 20\%$，$t_s = 1.28s \leq 1.5s$，满足性能指标(2)(3)。

而$K_v = \lim\limits_{s \to 0} sG(s) = 50.3s^{-1} \geq 50s^{-1}$，满足性能指标(1)。

例 4.7



控制系统结构图如上图，欲采用局部反馈改善系统性能，要求大闭环系统的闭环主导极点为：

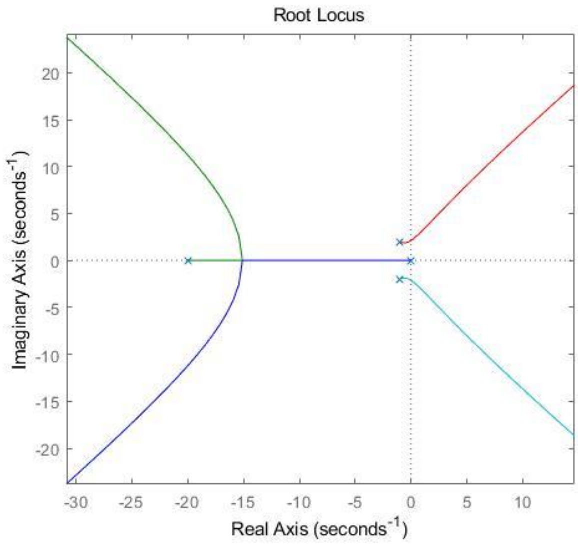
$$s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{3}$$

要求确定K_1，K_2，τ的值。

未进行校正时，系统的开环传递函数如下：

$$G_0(s) = \frac{100K_1K_2}{s(s+20)(s^2+2s+5)}$$

其开环极点分别为$(0, j0)$，$(-20, j0)$，$(-1, \pm j2)$，其根轨迹图如下，可知其不会通过$s_{1,2}$。



结合根轨迹渐近线方向和根轨迹需经过$s_{1,2}$的条件，我们令反馈校正后小闭环环节的极点位于$(-3, j0)$左侧的实轴上。设反馈校正后开环传递函数的极点分别为 $p_1 = (0, j0)$，p_2，p_3，$p_4 = (-20, j0)$。其中p_3，p_4均在负实轴上，设$p_3 = (-12, j0)$。

根轨迹若通过s_1，需在s_1满足幅角条件，来确定p_2，且$Re(p_2) < -3$：

$$-\angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) - \angle(s_1 - p_4) = (2l+1)\pi$$

解得$\angle(s_1 - p_2) = 13.2891°$，进而求解得$p_2 = (-10.33, j0)$，在$(-3, j0)$左侧。

校正后的极点皆确定，现在可以确定小闭环环节参数。

小闭环环节的闭环传递函数如下：

$$\Phi_1(s) = \frac{5K_2}{s^2 + (2 + 5K_2\tau)s + 5 + 5K_2}$$

根据韦达定理可知：

$$-2 - 5K_2\tau = -22.33$$

$$5 + 5K_2 = 123.96$$

解得$K_2 = 23.792$，$\tau = 0.171$，此时整个系统的开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{20K_1}{s(s+20)}\Phi_1(s) = \frac{2379.2K_1}{s(s+20)(s^2+22.33s+123.96)}$$

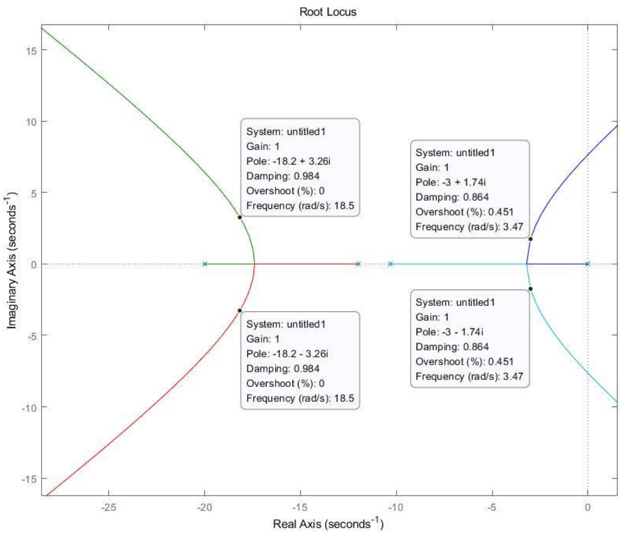
此时s_1需要满足幅值条件：

$$|G(s_1)| = 1$$

可得$K_1 = 1.717$，即整个系统的开环传递函数如下：

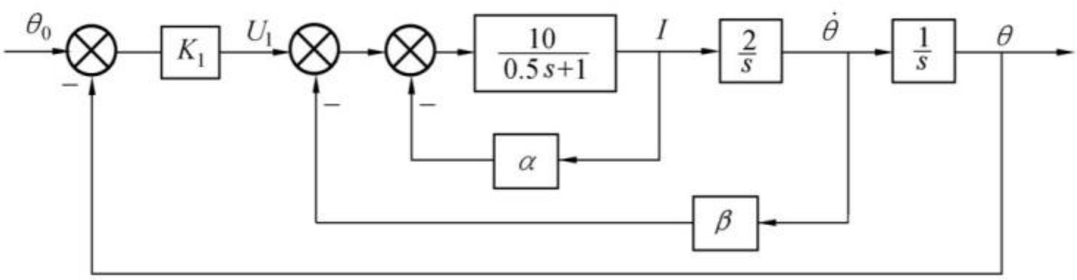
$$G(s) = \frac{4085.09}{s(s+20)(s^2+22.33s+123.96)}$$

其根轨迹图像如下，可知根轨迹通过$s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{3}$



综上参数$\boldsymbol{K_1 = 1.717}$，$\boldsymbol{K_2 = 23.792}$，$\boldsymbol{\tau = 0.171}$。

例 4.8



确定K_1，α，β，使上述系统闭环主导极点为$s_{1,2} = -2 \pm j2$。

化简上述方框图，获得大回路的开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{40K_1}{s(s^2+(2+20\alpha)s+40\beta)}$$

根据根轨迹渐近线方向以及根轨迹需经过$s_{1,2}$的条件，我们令系统开环极点位于$(-2, j0)$左侧的实轴上。设开环传递函数的极点分别为 $p_1 = (0, j0)$，p_2，p_3。其中p_2，p_3均在负实轴上，设$p_2 = (-6, j0)$。

根轨迹若通过s_1，需在s_1满足幅角条件，来确定p_3：

$$-\angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) = (2l+1)\pi$$

解得$\angle(s_1 - p_3) = 18.435°$，进而求解得$p_3 = (-8.00, j0)$。

则已知p_2，p_3为下述方程的根：

$$s^2 + (2+20\alpha)s + 40\beta = 0$$

根据韦达定理可知：

$$-(2+20\alpha) = -14$$
$$40\beta = 48$$

进而解得$\alpha = 0.6$，$\beta = 1.2$。现在大回路的开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{40K_1}{s(s^2+14s+48)}$$

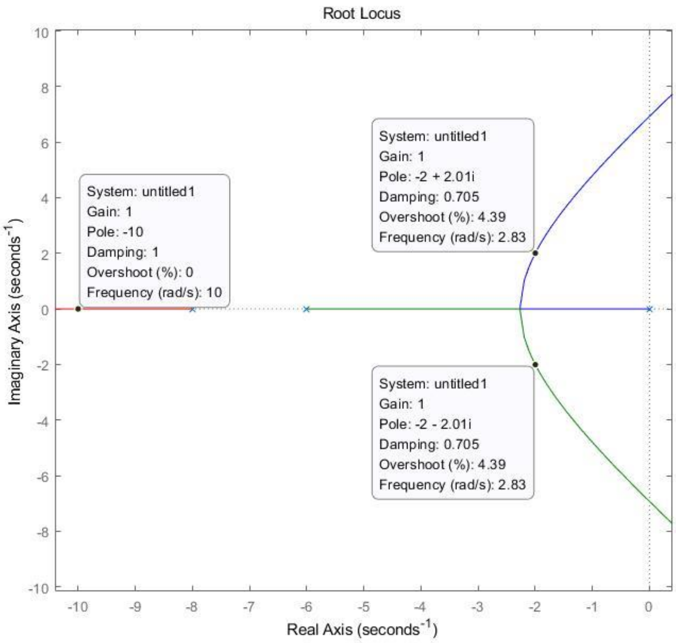
根轨迹若通过s_1，还需在s_1满足幅值条件：

$$|G(s_1)| = \left|\frac{40K_1}{s_1({s_1}^2 + 14s_1 + 48)}\right| = 1$$

解得$K_1 = 2$，最终大回路的开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{80}{s(s^2 + 14s + 48)}$$

其根轨迹增益如下，在一定的计算误差范围内，大回路闭环主导极点为$s_{1,2} = -2 \pm j2$。



综上参数$\boldsymbol{K_1 = 2}$，$\boldsymbol{\alpha = 0.6}$，$\boldsymbol{\beta = 1.2}$。

仅供参考，反对抄袭

方未艾

2023.6