自动控制原理B第七次作业

1.

1. 设 SISO 线性定常系统的状态方程和输出方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}u \quad \lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0$$

$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}x$$

(1) 给出使系统状态完全能控的 b_1,b_2,b_3,b_4 满足的条件；(8 分)

(2) 给出使系统状态完全能观的 c_1,c_2,c_3,c_4 满足的条件；(7 分)

(1) 该SISO系统状态方程为Jordan标准型

$\lambda_1=\lambda_2$ 不完全能控能观

系统状态完全能控则需 $b_2\neq 0$、$b_4\neq 0$，b_1、b_3任意，($\lambda_1\neq\lambda_2$)

(2) 系统状态完全能观则需 $c_1\neq 0$、$c_3\neq 0$，c_2、c_4任意，($\lambda_1\neq\lambda_2$)

2.

2. 设线性定常系统为

$$\dot{x}=Ax+bu$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

而且 $\lambda\neq 0$。试问能否取合适的 $b\in\mathbb{R}^3$，使系统是状态完全能控的。若能控，给出 b 的选取方法；若不能控，说明理由。

解：$\lambda\neq 0$，$b\in\mathbb{R}^3$为3×1的矩阵，表明该系统为单输入系统，令 $b=[b_1\ b_2\ b_3]^T$

运用PBH判据 $\mathrm{rank}(\lambda I-A\ \ B)=3$时，系统完全能控。而

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & 0 & -1 & b_2\\ 0 & 0 & 0 & b_3\end{bmatrix}=2$$

，其第一行与第三行始终线性相关，即系统不能控。

3.

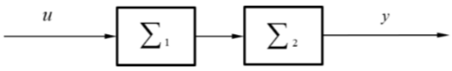

图 8.7

3. 两个子系统 Σ_1 和 Σ_2 串联，如图8.7 所示。Σ_1 和 Σ_2 的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵分别为：

$$\Sigma_1: A_1=-2, B_1=1, C_1=1$$

$$\Sigma_2: A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 求串联后的状态空间描述；(5 分)

(2) 判断 Σ_1 和 Σ_2 串联后的状态能控性和能观性；(5 分)

(3) 求串联后的传递函数。(5 分)

(1) 由题有：

$$\Sigma_1:\ \dot{x}_1=-2x_1+u,\quad y_1=x_1$$

$$\Sigma_2:\ \begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y_1$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

系统串联，状态为 x_1、x_2、x_3，串联后状态空间描述如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\1&-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

设 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\1&-3&-4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}$ $D=0$

(2)

判断系统能控性：

$$\operatorname{rank}[B\ AB\ A^2B]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&-2&4\\0&0&1\\0&1&-6\end{bmatrix}=3$$ 则串联后系统能控

判断系统能观性：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&2&1\\1&-3&-2\\-4&6&5\end{bmatrix}=2$$ 则串联后系统不完全能观

(3)

求串联后传递函数 $G(s)$，则 $x(0)=0$

即 $$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2&0&0\\0&s&-1\\-1&3&s+4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{s+2}{(s+2)(s^2+4s+3)}$$

4.

4. n 阶线性定常系统的状态方程和输出方程为：

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx$$

若用 $x=Pz$ 对系统进行线性变换，试对下面两个问题进行分析（要求给出分析过程）。

(1) 线性变换是否改变 u 到 y 的传递函数矩阵？(7 分)

(2) 线性变换是否改变系统的可控性？(8 分)

对原系统进行线性变换 $x=Pz$ 有，P 为可逆阵

$$\dot{z}=P^{-1}APz+P^{-1}Bu$$
$$y=CPz$$

(1)

原系统传递函数矩阵: $G_0(s)=C(sI-A)^{-1}B$

线性变换后系统传递函数矩阵: $G_1(s)=CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B$

对于$G_1(s)=CP\left(P^{-1}(sI-A)P\right)^{-1}P^{-1}B$,根据$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ $\quad[(ab)^{-1}\cdot ab=I=b^{-1}a^{-1}ab]$

则有$G_1(s)=CP\cdot P^{-1}(sI-A)^{-1}PP^{-1}B=C(sI-A)^{-1}B=G_0(s)$

可知线性变换不改变u到y的传递函数矩阵

(2)

原系统秩判据的秩 $\mathrm{rank}(B\ \ AB\cdots A^{n-1}B)=\mathrm{rank}\,Q_c$ $\quad$ 令$Q_c=(B\ \ AB\cdots A^{n-1}B)$

线性变换后系统秩判据的秩

$\mathrm{rank}(P^{-1}B\quad P^{-1}APP^{-1}B\quad (P^{-1}AP)^2P^{-1}B\cdots(P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B)$

$=\mathrm{rank}(P^{-1}B\quad P^{-1}APP^{-1}B\quad P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}B\cdots(P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B)$

$=\mathrm{rank}(P^{-1}B\quad P^{-1}AB\quad P^{-1}A^2B\cdots P^{-1}A^{n-1}B)$

$=\mathrm{rank}(P^{-1}\cdot Q_c)$

$\mathrm{rank}(P^{-1})+\mathrm{rank}(Q_c)-n\le \mathrm{rank}(P^{-1}Q_c)\le\min\left\{\mathrm{rank}(P^{-1}),\mathrm{rank}(Q_c)\right\}$

得 $\mathrm{rank}(Q_c)=\mathrm{rank}(P^{-1}Q_c)$ 则原系统、线性系统的能控性一致。

5.

5. 单输入-输出线性定常系统的状态空间表达式为:

$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$Y(t)=\begin{bmatrix}-5 & 3\end{bmatrix}X(t)+u(t)$$

(1) 试将上述模型变换为对角线标准型;

(2) 求系统的传递函数。

(1) 令 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad C=[-5\ \ 3]\quad D=[1]$

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 6 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$ 得$\lambda_1=2,\lambda_2=3$

解特征向量

$\lambda_1=2\quad \begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{bmatrix}X_1=0$ 得 $X_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

$\lambda_2=3\quad \begin{bmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{bmatrix}X_2=0$ 得 $X_2=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

$P=[X_1\,X_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ $\quad$ 由$X=P\bar{X}$

$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\quad \bar{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\quad \bar{C}=CP=[1\ \ 4]\quad \bar{D}=[1]$

即对角标准型

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\bar{X} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$Y = [1\ \ 4]\bar{X} + u$$

(2)求上述传递函数

$$G(s) = \bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D} = [1\ \ 4]\begin{bmatrix}s-2 & \\ & s-3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}+1 = \frac{3s-5}{(s-2)(s-3)}+1$$

得 $G(s) = \dfrac{s^2-2s+1}{s^2-5s+6}$

6.

6. 建立图8.10线性系统的状态空间描述模型，根据此模型判定系统的能控性和能观性。

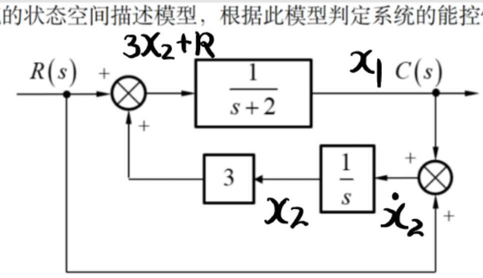

图 8.10

根据梅森公式可知:系统闭环传递函数 $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s-3}$,存在零极点对消

系统不完全能控或不完全能观,或二者兼有。

(1)能观不完全能控

状态变量选取如图所示

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{s+2}(3x_2+R) \\ \dot{x}_2 = x_1+R \end{cases} \quad 得 \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1+3x_2+R \\ \dot{x}_2 = x_1+R \end{cases}$$

即 $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}R$$

$$C = [1\ \ 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad C = [1\ \ 0]$$

判断其能控性 $\operatorname{rank}(B\ \ AB) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = 1 < 2$ 其不完全能控

判断其能观性 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{bmatrix} = 2$ 其能观

(2)能控不完全能观

$$G(s)=\frac{s+3}{s^2+2s-3}$$ 写为能控II型 $$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}R$$ 其能控

$$y=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}x$$

判断其能观性 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=1<2$ 不完全能观

(3)不完全能控不完全能观

$$G(s)=\frac{s+3}{s^2+2s-3}=\frac{0}{s+3}+\frac{1}{s-1}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & \\ & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}R$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

判断其能控性 $\operatorname{rank}(B\ AB)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=1<2$ 其不完全能控

判断其能观性 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1<2$ 其不完全能观

仅供参考，反对抄袭

方未艾

2023.6