自动控制原理B第八次作业

1.

1. 某系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

试设计一个带全维状态观测器的状态反馈控制系统，使观测器的极点均为 -3，闭环系统的极点为 $-5\pm \mathrm{j}5$，要求写出观测器方程、状态反馈控制律之表达式，并画出带观测器闭环系统的系统结构图。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\quad C=[1\ \ 0]$$

已知该系统状态空间表达式为第二能控规范型，闭环系统极点为 $-5\pm j5$，则其状态反馈后特征方程如下：

$$(s+5-j5)(s+5+j5)=s^2+10s+50,\quad A+BK_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}K_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -50 & -10\end{bmatrix}$$

由此得 $K_1=[-48\ \ -6]$，即设 $A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -50 & -10\end{bmatrix}$

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$，系统能观，即全维观测器存在，能任意配置极点。

导出对偶系统 $\left(\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -4\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\quad [0\ \ 1]\right)=(A_2\quad B_2\quad C_2)$

$\det(sI-A_2)=s^2+4s+2$，观测器极点为 $-3,-3$，即有 s^2+6s+9

即 $\overline{K_2}=[-7\ \ -2]$

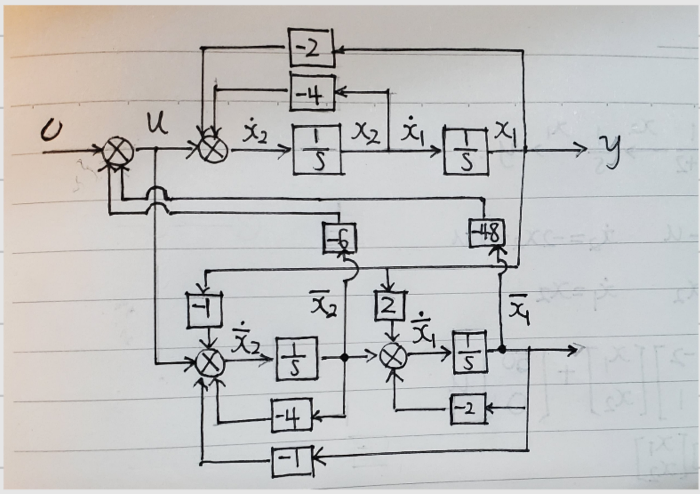
$$P=[B_2\quad A_2B_2]\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad K_2=\overline{K_2}\cdot P^{-1}=[-2\ \ 1]\qquad L=K_2^T=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$A+LC=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}[1\ \ 0]=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

观测器方程 $\dot{\bar{x}}=(A+LC)\bar{x}+Bu-Ly=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}y$

状态反馈控制律 $u=[-48\ \ -6]x+v$，v为外部输入信号

系统结构图如下：



2.

2. 设系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-6&-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x$$

试设计一个全维状态观测器，使其极点为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-3$，要求写出观测器动态方程。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-6&-5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad C=[1\ 0\ 0]$$

其为第二能控标准型，$\mathrm{rank}(B\ AB\ A^2B)=3$，$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=3$，能控能观

系统能观，即全维观测器存在，能任意配置极点。

导出对偶系统 $\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-6\\0&1&-5\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ [0\ 0\ 1]\right)=(A_2\ \ B_2\ \ C_2)$

$\det(sI-A_2)=s^3+5s^2+6s$，观测器极点为 $-3,-3,-3$，即有 $s^3+9s^2+27s+27$

即 $\bar{K_2}=[-27\ \ -21\ \ -4]$

$$P=[B_2\ \ A_2B_2\ \ A_2^2B_2]\begin{bmatrix}6&5&1\\5&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5&1\\5&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad K_2=\bar{K_2}\cdot P^{-1}=[-4\ \ -1\ \ 2]\quad L=K_2^T=\begin{bmatrix}-4\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$A+LC=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-6&-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\-1\\2\end{bmatrix}[1\ 0\ 0]=\begin{bmatrix}-4&1&0\\-1&0&1\\2&-6&-5\end{bmatrix}$$

观测器方程 $\dot{\bar{x}}=(A+LC)\bar{x}+Bu-Ly=\begin{bmatrix}-4&1&0\\-1&0&1\\2&-6&-5\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}-4\\-1\\2\end{bmatrix}y$

3.

3. 设系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\100\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}x$$

其中，

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

若该系统的状态 x_2 不可测量，试设计一个降维状态观测器，使降维观测器的极点为 -10，要求写出降维观测器动态方程，并写出状态 x_2 的估计方程。

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&-5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\100\end{bmatrix}\quad C=[1\ \ 0]$$

$\mathrm{rank}\,Q_o=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2$，其能观，$\mathrm{rank}\,C=1$

观测器最小维数为1，设$R=[0\ \ 1]$，$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=P^{-1}$，$Q_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $Q_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-5\end{bmatrix}$，$\bar{B}=PB=\begin{bmatrix}0\\100\end{bmatrix}$，$\bar{C}=CP^{-1}=[1\ \ 0]$

$\bar{A}_{11}=0$，$\bar{A}_{12}=1$，$\bar{A}_{21}=0$，$\bar{A}_{22}=-5$，$\bar{B}_2=100$，$\bar{B}_1=0$，一维矩阵

$(\bar{A}_{22}+\bar{L}\bar{A}_{12})=-10$ 得 $\bar{L}=-5$

则降维观测器动态方程如下：

$$\begin{cases}\dot{z}=-10z-50y+100u\\ \hat{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(z+5y)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}y\end{cases}$$

x_2估计方程如下：

$$\hat{x}_2=z+5y$$

4.

4. 已知某线性定常系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

试设计一个带有全维状态观测器的反馈系统，使系统的闭环极点为：

$$s_1=-2, s_2=-1+\mathrm{j}, s_3=-1-\mathrm{j}$$

状态观测器的特征值均为 −5。要求：给出状态反馈增益矩阵及状态观测器的方程。

s^3+3s^2+2s

该传递函数无零极点对消，其实现能控能观，将该传递函数写为第二能控标准型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u=Ax+Bu$$

$$y=[1\ \ 0\ \ 0]\,x=Cx$$

其状态反馈，极点配置为-2，$-1\pm j$，即 s^3+4s^2+6s+4，状态反馈 $A+BK_1$

即 $K_1=[-4\ \ -4\ \ -1]$

导出对偶系统 $\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-2\\0&1&-3\end{bmatrix}\ \ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ \ [0\ 0\ 1]\right)=(A_2\ \ B_2\ \ C_2)$

$\det(sI-A_2)=s^3+3s^2+2s$，观测器极点为$-5,-5,-5$，即有 $s^3+15s^2+75s+125$

即 $\bar{K}_2=[-125\ \ -73\ \ -12]$

$P=[B_2\ \ A_2B_2\ \ A_2^2B_2]\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ $K_2=\bar{K}_2\cdot P^{-1}=[-12\ \ -37\ \ 10]$ $L=K_2^T=\begin{bmatrix}-12\\-37\\10\end{bmatrix}$

$$A+LC=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12\\-37\\10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12&1&0\\-37&0&1\\10&-2&-3\end{bmatrix}$$

观测器方程 $\dot{\bar{x}}=(A+LC)\bar{x}+Bu-Ly=\begin{bmatrix}-12&1&0\\-37&0&1\\10&-2&-3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}-12\\-37\\10\end{bmatrix}y$

状态反馈矩阵 $K_1=[-4\ -4\ -1]$ $(A+BK_1)$

5.

5. 设控制系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}w$$
$$y=\begin{bmatrix}6&3\end{bmatrix}x$$

其中 w 为外部扰动。若取状态反馈 $u=-Kx$，

(1) 能否选取合适的 K，使输出 y 不受外部扰动 w 的影响？若能，求 K 的表达式；若不能，试求使输出 y 受外部扰动 w 影响最小的 K 的表达式。(5 分)

(2) 根据 (1) 选取的 K，求闭环系统的极点。(5 分)

(3) 画出闭环系统的状态变量图。(5 分)

(1) $u=-Kx=-[K_1\ K_2]x$ 则状态空间表达式如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-K_1&-K_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}w=Ax+Dw$$
$$y=[6\ 3]x=Cx$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)}=C(sI-A)^{-1}D=[6\ 3]\frac{1}{s^2+K_2s+K_1}\begin{bmatrix}s+K_2&1\\-K_1&s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\frac{6K_2-3K_1-12}{s^2+K_2s+K_1}$$

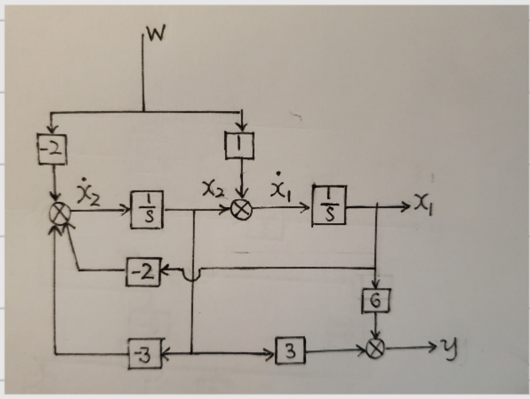
当 $6K_2-3K_1-12=0$ 时，输出 y 不受 w 影响，取 $K_1=2$，$K_2=3$，如此系统稳定

(2) $u=-Kx=-[2\ 3]x$ 则状态空间表达式如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}w=Ax+Dw$$
$$y=[6\ 3]x=Cx$$

闭环系统特征方程 $s^2+3s+2=0$，其极点为 $-1,-2$

(3) 闭环系统状态变量图如下



6.

6. 设控制系统的状态空间表达式为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} x$$

(1) 判别系统的能控性。若系统不是状态完全能控的，指出不能控的状态。(3 分)

(2) 判别系统的能观性。若系统不是状态完全能观的，指出不能观的状态。(3 分)

(3) 若 $u = 0$，判别自治系统的稳定性。(5 分)

(4) 若取 $u = -Kx$，能否找到一个 K 使闭环系统稳定。若能，求一个使闭环系统稳定的 K；若不能，说明理由。(4 分)

(1) $x = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^T$，根据Jordan标准型判据可知

系统不是状态完全能控的，x_4、x_6 不能控

(2) 根据Jordan标准型判据可知

系统不是状态完全能观的，x_3、x_5 不能观

(3) $u=0$，状态空间表达式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = Ax \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} x = Cx$$

根据Jordan标准型可知，系统特征根为 -3、-3、-4、-4、-1、-1 均为负，自治系统稳定

(4) 不能控部分极点为-4，-1，在左半平面，则系统可稳，

当K取 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 时，$A+BK$的特征值为-4，-1，-3.5505，-8.4495，-4，-1

特征值均为负，闭环系统稳定。

7

7. 控制系统如图9.6所示，其中 α_1、α_2、α_3 为状态反馈系数。

(1) 写出对象的状态方程；(8 分)

(2) 若要求闭环系统的极点为-1,-2,-3, 求 α_1、α_2、α_3。(7 分)

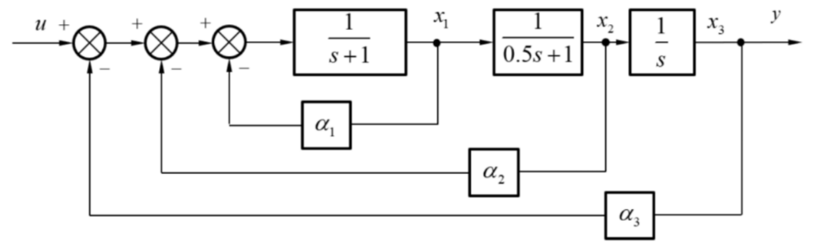


图 9.6

(1) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{s+1}(-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 + u) \\ x_2 = \frac{2}{s+2} x_1 \\ x_3 = \frac{1}{s} x_2 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = [0\ 0\ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

7 (2) $\det\begin{bmatrix} s+1+\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -2 & s+2 & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} = s^3+(3+\alpha_1)s^2+(2+2\alpha_1+2\alpha_2)s+2\alpha_3$

期望特征方程 $(s+1)(s+2)(s+3)=s^3+6s^2+11s+6$

得 $\begin{cases} 3+\alpha_1=6 \\ 2+2\alpha_1+2\alpha_2=11 \\ 2\alpha_3=6 \end{cases}$

即 $\begin{cases} \alpha_1=3 \\ \alpha_2=1.5 \\ \alpha_3=3 \end{cases}$

8.

8. 系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

(1) 试确定状态反馈矩阵 F，要求将系统的极点配置在 $s_1=-2, s_{2,3}=-1\pm \mathrm{j}1$ 位置上。(10 分)

(2) 画出具有状态反馈的系统的状态变量图。(5 分)

s^3+3s^2+2s

(1) 传递函数无零极点对消，则实现能控能观，写为第二能控标准型 如下

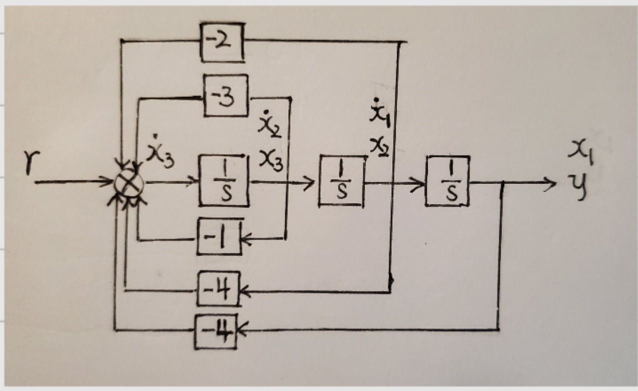
$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}r=Ax+Br \qquad y=[1\ 0\ 0]x=Cx$$

状态反馈后，系统极点为 -2、$-1\pm j$，则期望特征方程 $(s+2)(s+1+j)(s+1-j)=s^3+4s^2+6s+4$

$F=[F_1\ F_2\ F_3]$ $\qquad A+BF=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[F_1\ F_2\ F_3]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

得 $F=[-4\ -4\ -1]$

(2) 具有状态反馈的系统的状态变量图。



9

9. 两个线性定常系统的状态方程为：

$$\text{I}.\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$\text{II}.\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

(1) 选出一个可以实施状态反馈的系统，设计状态反馈矩阵 F，要求反馈系统的特征值为：

$$\lambda_1=-5,\ \lambda_{2,3}=-1\pm \mathrm{j};$$

(2) 画出具有状态反馈的闭环系统状态变量图。

(1) 系统能状态反馈的条件 系统能控

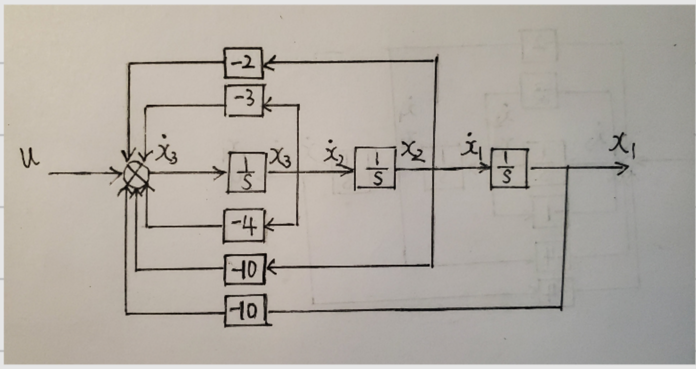
对于I系统，$\operatorname{rank}\left[B_1\ A_1B_1\ A_1^2B_1\right]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&4\\1&2&4\\1&1&1\end{bmatrix}=2<3$ 不完全能控

对于II系统，$\operatorname{rank}\left[B_2\ A_2B_2\ A_2^2B_2\right]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-3\\1&-3&7\end{bmatrix}=3$，能控，选II系统，且为第二能控标准型

期望闭环极点 $-5,-1\pm j$，即 $(s+5)(s+1-j)(s+1+j)=s^3+7s^2+12s+10$，

原特征方程 s^3+3s^2+2s，由 A_2+B_2F，$F=(F_1\ F_2\ F_3)$ 得 $F=\left[-10\ -10\ -4\right]$

(2) 状态反馈闭环状态图.



10

10. 已知连续系统动态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=[1\quad 0]x$$

（1）设采样周期为$T=1$s，试求离散化动态方程；

（2）采样周期满足什么样的条件时，离散化动态系统能控能观？

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\qquad C=[1\ \ 0]$$

(1) 连续系统动态方程离散化，先求解 e^{At}

$$e^{At}=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s&-1\\0&s-2\end{bmatrix}^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)}\begin{bmatrix}s-2&1\\0&s\end{bmatrix}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s}\cdot(-\frac{1}{2})+\frac{1}{s-2}\cdot\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}\right\}$$

得 $e^{At}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}\qquad t\geq 0$

$T=1s$ $\quad G=e^{AT}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2}\\ 0 & e^{2}\end{bmatrix}$ $\quad H=\int_0^T e^{At}dt\,B=\int_0^1\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}dt\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$=\int_0^1\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}\\ e^{2t}\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{2}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2}\end{bmatrix}$$

系统离散化方程：

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2}\\ 0 & e^{2}\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{2}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2}\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

(2) $\operatorname{rank}(B\ \ AB)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=2$ 原系统能控

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C\\CA\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$ 原系统能观

$G=e^{AT}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2T}\\ 0 & e^{2T}\end{bmatrix}$ $\quad H=\int_0^T e^{At}dt\,B=\begin{bmatrix}\frac{e^{2T}}{4}-\frac{1}{4}-\frac{T}{2}\\ \frac{1}{2}e^{2T}-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$$Q_{cd}=[H\ \ GH]=\begin{bmatrix}\frac{e^{2T}-2T-1}{4} & \frac{e^{4T}-e^{2T}-2T}{4}\\ \frac{e^{2T}-1}{2} & \frac{e^{4T}-e^{2T}}{2}\end{bmatrix}$$

Q_{cd}第二行乘以 $\frac{e^{2T}-2T-1}{2(e^{2T}-1)}$ 为

$\frac{e^{2T}-2T-1}{4} \quad \frac{e^{4T}-e^{2T}-2Te^{2T}}{4}$

$$Q_{od}=\begin{bmatrix}C\\CG\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2T}\end{bmatrix}$$

当$T\neq 0$时，$\operatorname{rank}Q_{cd}=\operatorname{rank}Q_{od}=2$，离散化系统能控能观

仅供参考，反对抄袭

方未艾

2023.6