

自动控制原理B第九次作业

1. 题目更正如下:

1. 系统结构图如图10.38所示。试用等倾斜线法作出系统的 $x-\dot{x}$ 相平面图。系统参数为 $K=T=M=h=1$ 。

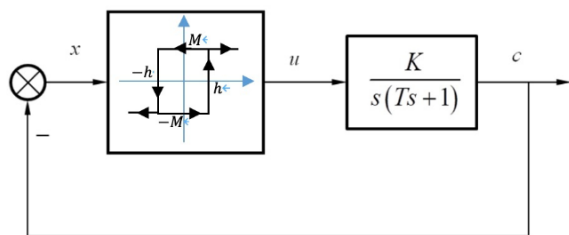


图 10.38

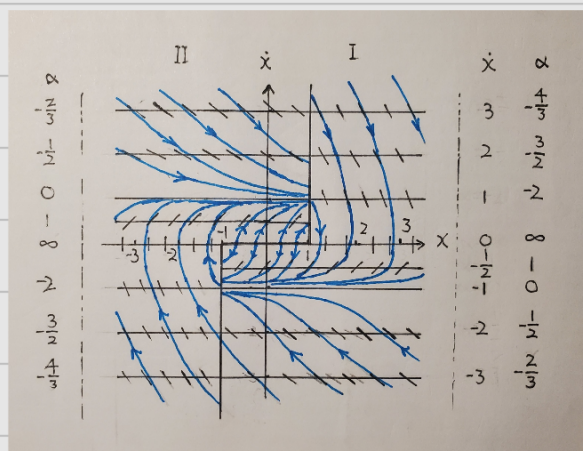
$x = -c$ 即

$$x = \frac{-1}{s(s+1)} u, u = \begin{cases} 1 & \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \dot{x} < 0 \\ -1 & \begin{cases} x < -1 \\ x < 1 \end{cases} \dot{x} > 0 \end{cases}, \text{ 即 } x = \begin{cases} \frac{-1}{s(s+1)} & \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \dot{x} < 0 & \text{I} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \begin{cases} x < -1 \\ x < 1 \end{cases} \dot{x} > 0 & \text{II} \end{cases}$$

对于I而言 $x = \frac{-1}{s(s+1)}$ 得 $\ddot{x} + \dot{x} + 1 = 0$ 等倾线 $\dot{x} = \frac{-1}{1+\alpha}$ $\alpha = -1 - \frac{1}{\dot{x}}$

对于II而言 $x = \frac{1}{s(s+1)}$ 得 $\ddot{x} + \dot{x} - 1 = 0$ 等倾线 $\dot{x} = \frac{1}{1+\alpha}$ $\alpha = -1 + \frac{1}{\dot{x}}$

由此作出 $x-\dot{x}$ 相平面图:



2.

2. 非线性系统结构图如图10.39所示，取 (c, \dot{c}) 为坐标，写出相轨迹方程，并画出 $c(0) = 2, \dot{c}(0) = 0$ 起始的相轨迹。

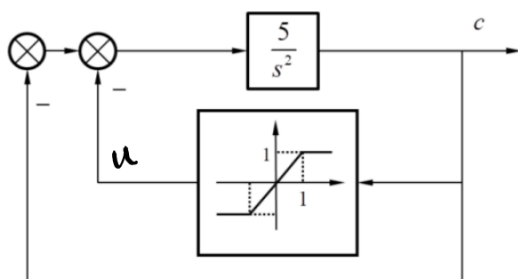


图 10.39

由题作 C- \dot{C} 相平面, 令饱和环节输出为 u

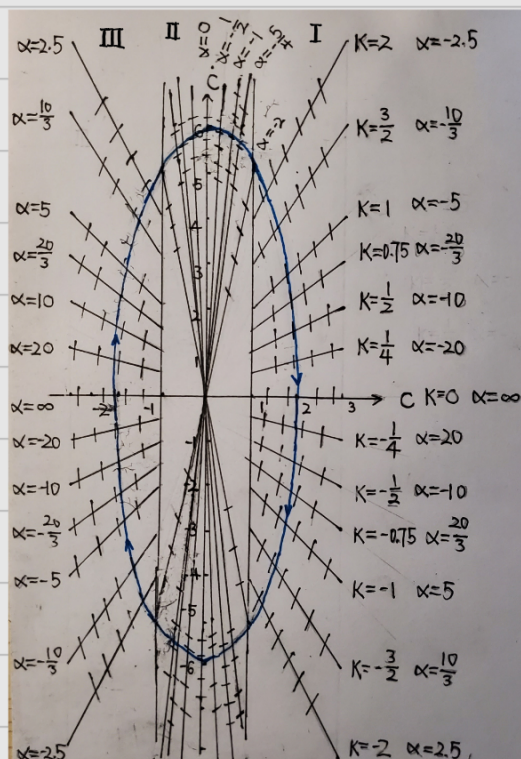
$$\text{则 } C = \frac{5}{s^2}(-C-u), \quad u = \begin{cases} 1 & C > 1 \\ C & |C| < 1 \\ -1 & C < -1 \end{cases}, \quad \text{即 } C = \begin{cases} \frac{5}{s^2}(-C-1) & C > 1 \quad \text{I} \\ -\frac{10}{s^2}C & |C| < 1 \quad \text{II} \\ \frac{5}{s^2}(-C+1) & C < -1 \quad \text{III} \end{cases}$$

I. $\ddot{C} + 5C + 5 = 0 \quad \dot{C} = \frac{-5(C+1)}{\alpha} \quad \text{等倾线均交于 } (-1, 0), \text{ 直线斜率 } K = -\frac{5}{\alpha}$

II. $\ddot{C} + 10C = 0 \quad \dot{C} = \frac{-10C}{\alpha} \quad \text{等倾线均交于 } (0, 0), \text{ 直线斜率 } K = -\frac{10}{\alpha}$

III. $\ddot{C} + 5C - 5 = 0 \quad \dot{C} = \frac{-5(C-1)}{\alpha} \quad \text{等倾线均交于 } (1, 0), \text{ 直线斜率 } K = -\frac{5}{\alpha}$

初始点, $C(0) = 2 \quad \dot{C}(0) = 0$, 作出 C- \dot{C} 相轨迹.

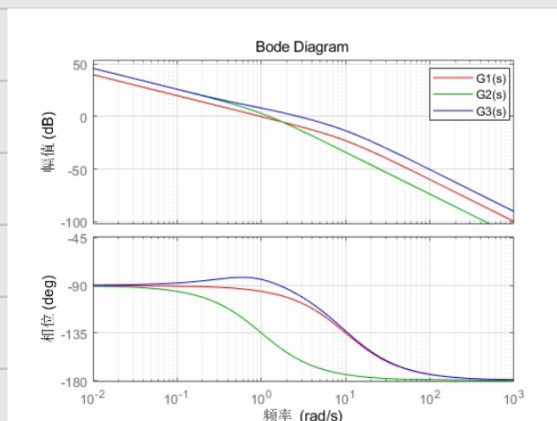


3.

3. 三个非线性系统的非线性环节一样, 线性部分分别如下, 用描述函数分析时哪个系统的准确程度高?

$$\begin{aligned} (1) G_1(s) &= \frac{1}{s(0.1s+1)} \\ (2) G_2(s) &= \frac{2}{s(s+1)} \\ (3) G_3(s) &= \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)} \end{aligned}$$

描述函数分析时, 系统低通特性越好, 准确程度越高. 画出上述传递函数 Bode 图.



由Bode图可知 $G_2(s)$ 在低频处幅值大于 $G_1(s)$, 等于 $G_3(s)$ 。 $G_2(s)$ 在高频处幅值最小。

故 $G_2(s)$ 低通特性最好, 用描述函数分析准确程度最高。

4.

4. 系统结构图如图 10.40 所示,

(1) 当 $N(A) = 1$ 时, 使系统稳定的 K 值范围;

(2) 当 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图 10.41 所示, 系统存在几个极限环, 并判断其性质(稳定或不稳定)。

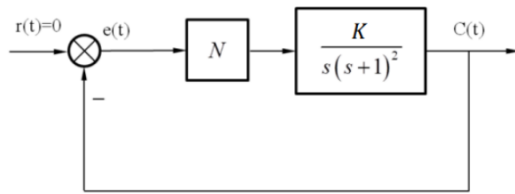


图 10.40

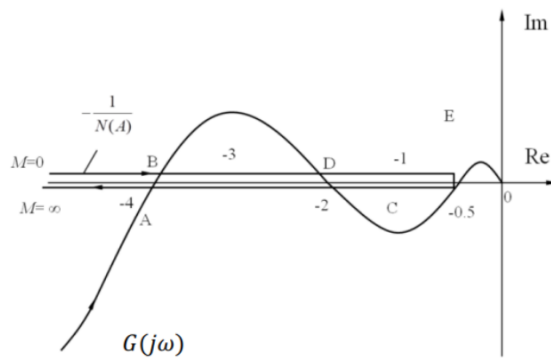


图 10.41

(1) $N(A)=1$ 时, 系统闭环特征方程为 $s^3 + 2s^2 + s + K = 0$, 列劳斯表如下:

s^3	1	1	即 K 取值为 $0 < K < 2$
s^2	2	K	
s^1	$\frac{2-K}{2}$		
s^0	K		

(2) 由图可知系统含 A、B、C、D、E 5 个极限环

稳定极限环: A D

不稳定极限环: B C

半稳定极限环: E

5.

5. 试分析图 10.42 所示的非线性控制系统 ($M = 2, h = 0.5$) 的稳定性, 若系统存在自振, 则求出自振的振幅及频率。

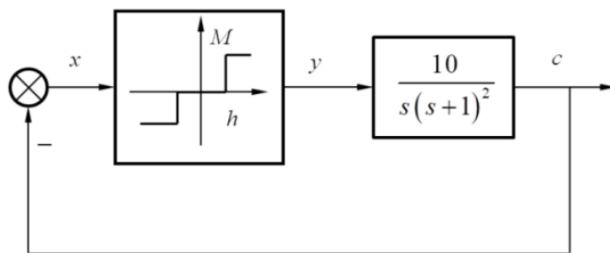


图 10.42

带死区的继电特性的描述函数 $N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - (\frac{h}{A})^2}$ $A \geq h$ 极小值点位于 $A = \sqrt{2}h$

$$A \rightarrow 0.5 \quad -\frac{1}{N(A)} = -\infty$$

$$A \rightarrow +\infty \quad -\frac{1}{N(A)} = -\infty$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{8} \text{ 为极大值}$$

$M=2, h=0.5, A \geq 0.5$, 由此 $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{8\sqrt{1 - \frac{1}{4A^2}}}$ $A \geq 0.5$

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)^2} \quad G(j\omega) = \frac{10}{-2\omega^2 + j(\omega - \omega^3)} = \frac{-20\omega - j10(1 - \omega^2)}{4\omega^3 + \omega(1 - \omega^2)^2}$$

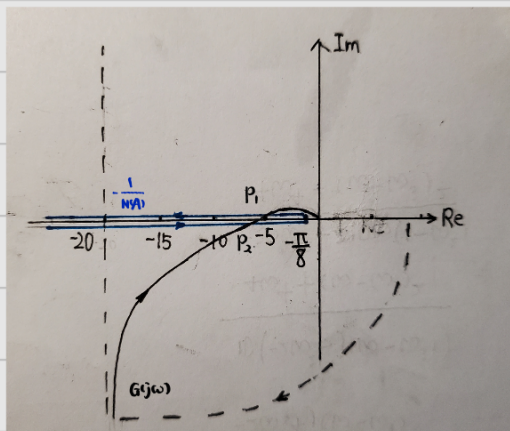
$\omega \rightarrow 0^+$ $G(j\omega)$ Nyquist 曲线 $\rightarrow (-20, -j\infty)$

$\omega = 1 \text{ rad/s}$ $G(j\omega)$ Nyquist 曲线在 $(-5, j0)$

$\omega \rightarrow +\infty$ $G(j\omega)$ Nyquist 曲线 $\rightarrow (0, j0)$

由图可知 $-\frac{1}{N(A)}$ 与 $G(j\omega)$ 必然相交, 有两个不同交点, P_1, P_2

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{8\sqrt{1 - \frac{1}{4A^2}}} = -5 \quad \text{解得} \quad \begin{aligned} P_1: A_1 &= 12.7226 \\ P_2: A_2 &= 0.5004 \end{aligned}$$



P_2 是由不稳定振荡点, P_1 是稳定振荡点, 因此系统存在 $A_1 = 12.7226, \omega = 1 \text{ rad/s}$ 的自激振荡

6.

6. 已知图10.43所示的非线性系统, 试求延迟时间 τ 为何值时, 会使系统产生临界自振? 临界自振时, 非线性元件输入信号的振幅及频率各为多少?

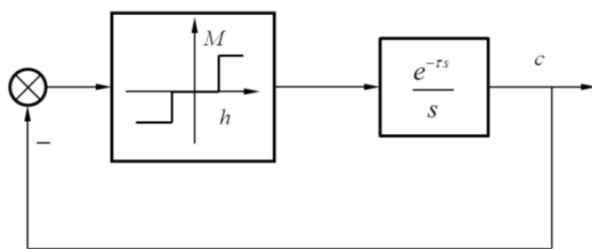


图 10.43

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} (\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau) = \frac{-\sin\omega\tau - j\cos\omega\tau}{\omega}$$

$\omega \rightarrow 0^+$ $G(j\omega)$ Nyquist 曲线 $\rightarrow (-\tau, -j\infty)$; $\omega \rightarrow +\infty$ $G(j\omega)$ Nyquist 曲线 $\rightarrow (0, j0)$

$\omega = \frac{\pi}{2\tau} (2k+1)$ $G(j\omega)$ Nyquist 曲线位于 $(\frac{(-1)^{k+1} 2\tau}{(2k+1)\pi}, j0)$ $k=0, 1, 2, 3, \dots$

与负半轴交点, 最小为 $k=0$, $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$, $G(j\frac{\pi}{2\tau})$ 在 $(-\frac{2\tau}{\pi}, j0)$ 处

带死区的继电特性的描述函数 $N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - (\frac{h}{A})^2}$ $A \geq h$ 极小值点位于 $A = \sqrt{2}h$

即负倒描述函数 $-\frac{1}{N(A)}$ 最大值为 $-\frac{\pi A}{4M\sqrt{1 - (\frac{h}{A})^2}} \Big|_{A=\sqrt{2}h} = -\frac{\pi h}{2M}$

当 $G(j\omega)$ Nyquist 曲线与其刚好相交时系统临界自振

即 $-\frac{\pi h}{2M} = -\frac{2\pi}{T}$ 有 $T = \frac{\pi^2 h}{4M}$, 此时输入信号振幅为 $\sqrt{2}h$, 频率为 $\frac{\pi}{2T} = \frac{2M}{\pi h}$

7. 非线性控制系统如图10.46所示, 非线性特性为 $y(t) = x^3(t)$, 用描述函数法分析系统的稳定性。

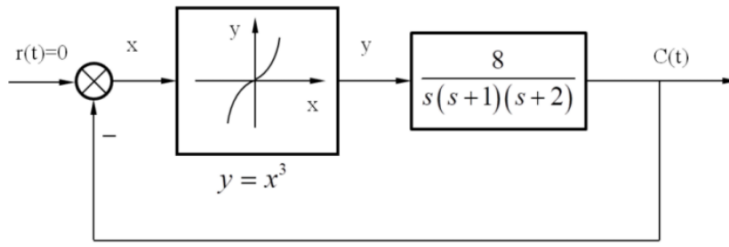


图 10.46

非线性环节 $y=x^3$ 满足奇对称性, 线性环节低通滤波特性良好。

$x(t) = -C(t) = A \sin \omega t$ $y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ $N(A) = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{A} e^{j \arctan \frac{a_1}{b_1}}$

$y(t) = (A \sin \omega t)^3 = A^3 \sin^3 \omega t$

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^3 \omega t d\omega t = 0$

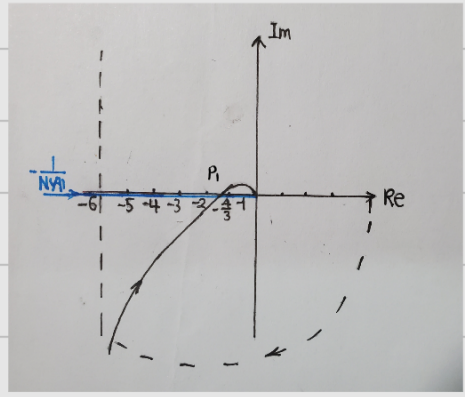
$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^3 \omega t \cdot \cos \omega t d\omega t = \frac{A^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\omega t) \sin 2\omega t d\omega t = 0$

$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^3 \omega t \cdot \sin \omega t d\omega t = \frac{A^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\omega t)^2 d\omega t = \frac{3A^3}{4}$

$N(A) = \frac{b_1 + ja_1}{A} = \frac{3A^2}{4}$ 负倒描述函数 $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{4}{3A^2}$ $A \rightarrow 0 \rightarrow -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$
 $A \rightarrow +\infty \rightarrow -\frac{1}{N(A)} \rightarrow 0$

对于 $G(s) = \frac{8}{s^3 + 3s^2 + 2s}$, $G(j\omega) = \frac{-24\omega + j8(\omega^2 - 2)}{9\omega^3 + \omega(\omega^2 - 2)^2}$

- $\omega \rightarrow 0^+$, $G(j\omega)$ Nyquist 曲线 $\rightarrow (-6, j-\infty)$
- $\omega = \sqrt{2}$, $G(j\omega)$ Nyquist 曲线过 $(-\frac{4}{3}, j0)$
- $\omega \rightarrow +\infty$, $G(j\omega)$ Nyquist 曲线 $\rightarrow (0, j0)$



如右图二者交于 $P_1 (-\frac{4}{3}, j0)$, 其为不稳定振荡点

即 $-\frac{4}{3A_m^2} = -\frac{4}{3}$ 得 $A_m = 1$

当 $A < A_m$ 时系统稳定, $A = A_m$ 时系统临界振荡, $A > A_m$ 系统不稳定。

8

8. 某非线性系统如图10.48所示, $\frac{M}{h} = 2$ 。

- 画出 $-\frac{1}{N(x)}$ 的图像;
- 分析系统的稳定性, 如存在自持振荡, 请计算出自持振荡的频率与振幅;
- 当 M 值不变, h 值加大时, 系统将有何特点。

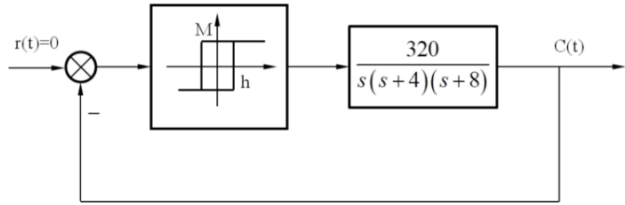


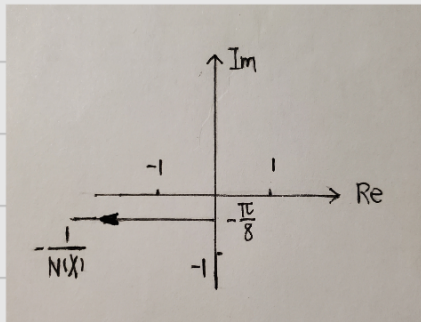
图 10.48

$$(1) N(x) = \frac{4M}{\pi x} \sqrt{1 - \frac{h^2}{x^2}} - j \frac{4hM}{\pi x^2} = \frac{4M}{\pi x^2} (\sqrt{x^2 - h^2} - jh) \quad x \geq h$$

$$\text{则 } \frac{1}{N(x)} = -\frac{\pi x^2 \sqrt{x^2 - h^2} + jh}{4M} = -\frac{\pi}{4M} (\sqrt{x^2 - h^2} + jh) \stackrel{M=2h}{=} -\frac{\pi}{8h} (\sqrt{x^2 - h^2} + jh)$$

$x \rightarrow h$ 负倒描述函数趋于 $(0, -j\frac{\pi}{8})$

$x \rightarrow +\infty$ 负倒描述函数趋于 $(-\infty, -j\frac{\pi}{8})$



$$(2) \text{线性部分传递函数 } G(s) = \frac{320}{s(s+4)(s+8)}$$

$$G(j\omega) = \frac{320}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+8)} = \frac{320(-12\omega + j(\omega^2 - 32))}{144\omega^3 + \omega(\omega^2 - 32)^2}$$

$\omega \rightarrow 0^+$ 其趋于 $(-\frac{15}{4}, j-\infty)$; $\omega = 4\sqrt{2} \text{ rad/s}$ 其位于 $(-\frac{5}{6}, j0)$; $\omega \rightarrow +\infty$ 其趋于 $(0, j0)$

由此可知 $G(s)$ 的 Nyquist 曲线一定会与 $-\frac{1}{N(x)}$ 相交, 且交点为稳定振荡点, 存在自激振荡

$$\frac{320j(\omega^2 - 32)}{144\omega^3 + \omega(\omega^2 - 32)^2} = -j\frac{\pi}{8} \quad \text{得 } \omega = 4.2122 \text{ rad/s} \quad \text{其交点解得为 } (-1.3922, -j\frac{\pi}{8})$$

$$-\frac{\pi}{8h} \sqrt{x^2 - h^2} = -1.3922 \quad \text{得 } x = 3.6835h$$

当 $h \leq x < 3.6835h$, 系统不稳定

当 $x = 3.6835h$ 系统自激振荡 自持振荡的频率 $\omega = 4.2122 \text{ rad/s}$, 振幅为 $3.6835h$

当 $x > 3.6835h$, 系统稳定

(3) 当 M 不变, h 增大, $M = Kh$, K 减小, 此题中 $K < 2$

$$\text{则 } \frac{1}{N(x)} = -\frac{\pi x^2 \sqrt{x^2 - h^2} + jh}{4M} = -\frac{\pi}{4M} (\sqrt{x^2 - h^2} + jh) \stackrel{M=Kh}{=} -\frac{\pi}{4Kh} (\sqrt{x^2 - h^2} + jh)$$

$x \rightarrow h$ 负倒描述函数趋于 $(0, -j\frac{\pi}{4K})$

$x \rightarrow +\infty$ 负倒描述函数趋于 $(-\infty, -j\frac{\pi}{4K})$

相比于 $M=2h$, 负倒描述曲线会向下平移, 但始终会与 $G(j\omega)$ 有交点, 产生自激振荡

其振幅相比之前会变大, 振荡频率会减小。

19. 设非线性系统如图10.49所示。试求：

- (1) 两个非线性环节串联后的等效非线性特性；
- (2) 用描述函数法求此系统的自振角频率 ω 和振幅 A 。

已知： $N_1 = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - (\frac{a}{A})^2} \right], A \geq a$

$N_2 = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - (\frac{\Delta}{A})^2}, A \geq \Delta$

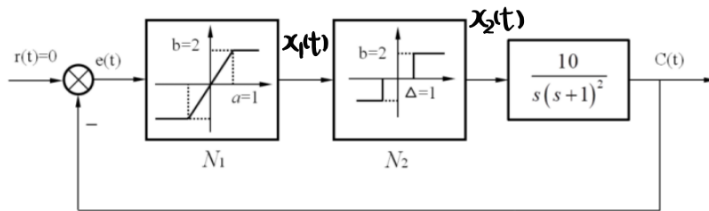


图 10.49

$$(1) \quad x_1(t) = \begin{cases} 2 & e(t) > 1 \\ 2e(t) & -1 < e(t) < 1 \\ -2 & e(t) < -1 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 2 & x_1(t) > 1 \\ 0 & -1 < x_1(t) < 1 \\ -2 & x_1(t) < -1 \end{cases}$$

则两个非线性串联后的等效非线性为 x_2 关于 e 的函数 $x_2 = \begin{cases} 2 & e > \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} < e < \frac{1}{2} \\ -2 & e < -\frac{1}{2} \end{cases}$ 为带死区的继电特性

其描述函数 $N(A) = \frac{8}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{1}{4A^2}} \quad A \geq \frac{1}{2}$

(2) 线性部分 $G(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}, G(j\omega) = \frac{10(-2\omega + j(\omega^2 - 1))}{4\omega^3 + \omega(\omega^2 - 1)^2}$

$\omega \rightarrow 0^+$ 其趋于 $(-20, -j\infty)$

$\omega = 1$ 其位于 $(-5, j0)$

$\omega \rightarrow +\infty$ 其趋于 $(0, j0)$

负倒描述函数 $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A^2}{4} \frac{1}{\sqrt{4A^2 - 1}} \quad A \geq \frac{1}{2}$

$A \rightarrow \frac{1}{2}$ 其趋于 $(-\infty, j0)$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ 其最大值为 $(-\frac{\pi}{8}, j0)$

$A \rightarrow +\infty$ 其趋于 $(-\infty, j0)$

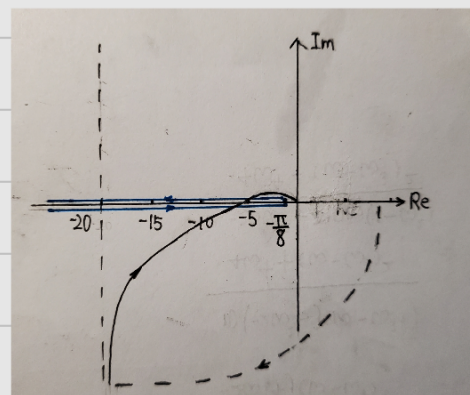
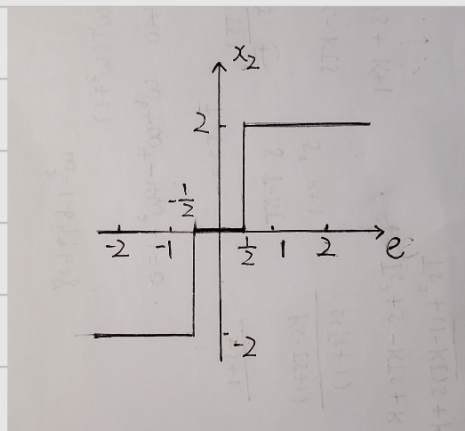
由于 $-5 < -\frac{\pi}{8}$, 负倒描述函数与 $G(j\omega)$ Nyquist 曲线有两交点,

其会产生振荡, 求解 $-\frac{\pi A^2}{4} \frac{1}{\sqrt{4A^2 - 1}} = -5$ 得 $A_1 = 12.7226 \quad A_2 = 0.5004$

A_1 是位于 $\frac{1}{2}$ 反到 $+\infty$ 之间, 为稳定振荡点,

A_2 是位于 $\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 之间, 为不稳定振荡点。

即其自振频率为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$, 振幅为 12.7226。



10. 设有一非线性系统，其平衡点附近的线性化微分方程为

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

系统的平衡点是相平面的奇异点，试给出下列 6 种情况下平衡点附近的相平面图 (图形特征要明显)，并标出奇异点的名称 (类型)。

(1) $b > 0, b^2 < \omega_0^2$

(2) $b < 0, b^2 < \omega_0^2$

(3) $b > 0, b^2 > \omega_0^2$

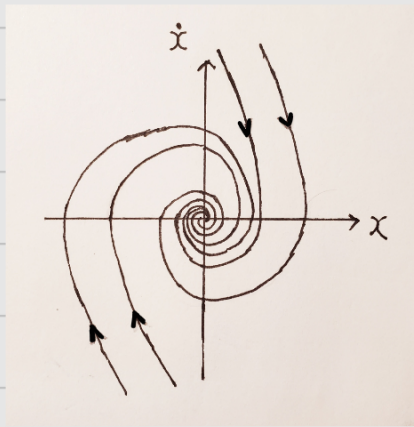
(4) $b < 0, b^2 > \omega_0^2$

(5) $b = 0, \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

(6) $b = 0, \ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$

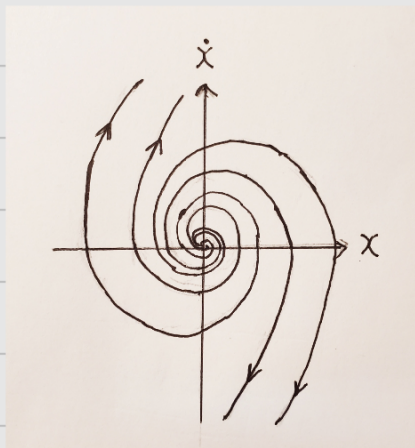
(1) $b > 0, b^2 < \omega_0^2, \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 的特征根 $S_1 = -b + j\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ $S_2 = -b - j\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$

奇异点 $(0,0)$ 为稳定焦点



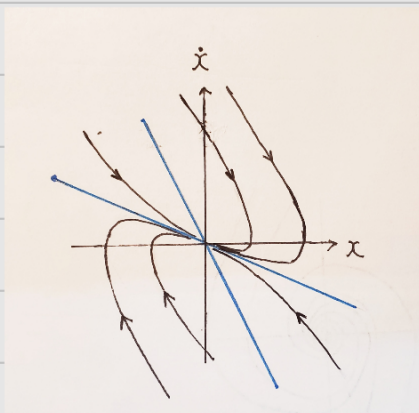
(2) $b < 0, b^2 < \omega_0^2, \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 的特征根 $S_1 = -b + j\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ $S_2 = -b - j\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$

奇异点 $(0,0)$ 为不稳定焦点

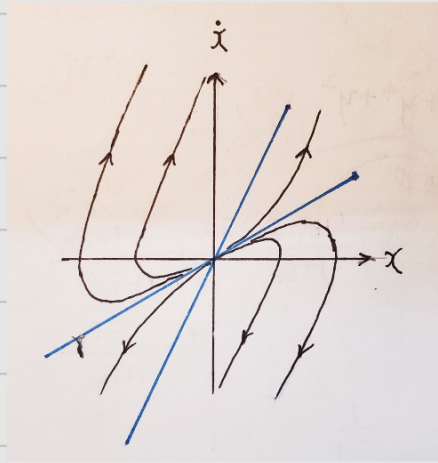


(3) $b > 0, b^2 > \omega_0^2, \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 的特征根 $S_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ $S_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$

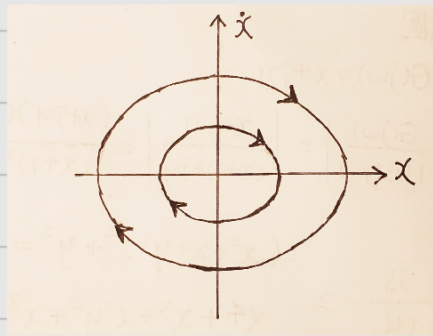
奇异点 $(0,0)$ 为稳定节点



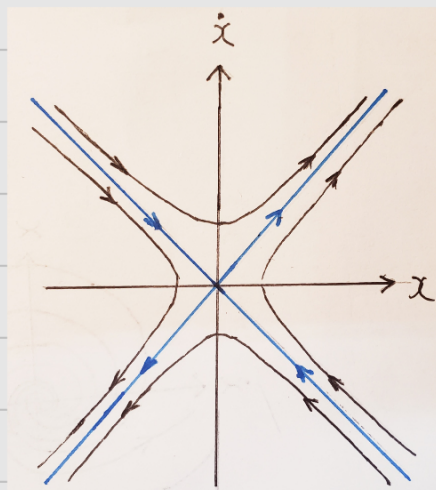
(4) $b < 0, b^2 > \omega_0^2$, $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 的特征根 $S_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ $S_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$
 奇点 $(0,0)$ 为不稳定节点



(5) $b = 0, \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 的特征根 $S_1 = +j\omega_0$ $S_2 = -j\omega_0$ 奇点 $(0,0)$ 为中心点



(6) $b = 0, \ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ 的特征根 $S_1 = +\omega_0$ $S_2 = -\omega_0$ 奇点 $(0,0)$ 为鞍点



仅供参考,反对抄袭

方未艾
2023.6